풍산자 필수유형

수학 Ⅰ 정답과 풀이

I 지수함수와 로그함수

01 지수

001

(1) 25의 제곱근을 x라고 하면 $x^2=25$

$\therefore x=\pm5$

따라서 25의 제곱근은 5, -5이고, 이 중에서 실수인 것은 5, -5로 2개이다.

(2) 27의 세제곱근을 x라고 하면 $x^3=27$

$x^3-27=0$, $(x-3)(x^2+3x+9)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

따라서 27의 세제곱근은 3, $\dfrac{-3+3\sqrt{3}i}{2}$, $\dfrac{-3-3\sqrt{3}i}{2}$이고, 이 중에서 실수인 것은 3뿐이므로 1개이다.

(3) -1의 세제곱근을 x라고 하면 $x^3=-1$

$x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

따라서 -1의 세제곱근은 -1, $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$이고, 이 중에서 실수인 것은 -1뿐이므로 1개이다.

(4) 81의 네제곱근을 x라고 하면 $x^4=81$

$x^4-81=0$, $(x^2-9)(x^2+9)=0$

$x^2=9$ 또는 $x^2=-9$

$\therefore x=\pm3$ 또는 $x=\pm3i$

따라서 81의 네제곱근은 3, -3, $3i$, $-3i$이고, 이 중에서 실수인 것은 3, -3으로 2개이다.

정답_(1) ±5, 2 (2) 3, $\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$, 1 (3) -1, $\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$, 1 (4) ±3, $\pm3i$, 2

002

①은 옳다.

네제곱근 16은 $\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$이다.

②는 옳지 않다.

2의 세제곱근은 방정식 $x^3=2$의 근이므로 3개이다.

③도 옳다.

-16의 네제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^4=-16$의 실근이므로 존재하지 않는다.

④도 옳다.

64의 세제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^3=64$의 실근이다.

$x^3-64=0$에서 $(x-4)(x^2+4x+16)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=-2\pm2\sqrt{3}i$

따라서 64의 세제곱근 중 실수인 것은 4이다.

⑤도 옳다.

$\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5$이므로 $\sqrt{(-5)^2}$의 제곱근은 $\pm\sqrt{5}$이다.

정답_②

003

2의 세제곱근이 a이므로

$a^3=4$

b의 네제곱근이 $\sqrt{2}$이므로

$b=(\sqrt{2})^4=4$

$\therefore \left(\dfrac{b}{a}\right)^3=\dfrac{b^3}{a^3}=\dfrac{64}{2}=32$

정답_⑤

004

(1) $\sqrt[3]{27^4}=(\sqrt[3]{27})^4=(\sqrt[3]{3^3})^4=3^4=81$

(2) $\sqrt[4]{\left(\dfrac{81}{16}\right)^3}=\left(\sqrt[4]{\dfrac{81}{16}}\right)^3=\left\{\sqrt[4]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^4}\right\}^3=\left(\dfrac{3}{2}\right)^3=\dfrac{27}{8}$

(3) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\times4}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

(4) $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{54}{2}}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$

(5) $\sqrt[9]{7^6}\times\sqrt[12]{7^4}=\sqrt[3]{7^2}\times\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{7^2\times7}=\sqrt[3]{7^3}=7$

(6) $\sqrt[8]{5^6}\times\sqrt[16]{5^4}=\sqrt[4]{5^3}\times\sqrt[4]{5}=\sqrt[4]{5^3\times5}=\sqrt[4]{5^4}=5$

(7) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{3}}}=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}}{\sqrt[3]{\sqrt{3}}}\times\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{3}}}{\sqrt{\sqrt[6]{3}}}=\dfrac{\sqrt[12]{3}}{\sqrt[6]{3}}\times\dfrac{\sqrt[6]{3}}{\sqrt[12]{3}}=1$

(8) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[4]{5}}}\times\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{5}}}\times\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}}}=\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{5}}}{\sqrt{\sqrt[4]{5}}}\times\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}}{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}\times\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt{5}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}}}$

$=\dfrac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[8]{5}}\times\dfrac{\sqrt[12]{5}}{\sqrt[6]{5}}\times\dfrac{\sqrt[8]{5}}{\sqrt[12]{5}}=1$

정답_(1) 81 (2) $\dfrac{27}{8}$ (3) 2 (4) 3 (5) 7 (6) 5 (7) 1 (8) 1

005

$\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}}\times\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}}\div\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}}$

$=\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{\sqrt[4]{x}}}\times\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}}\div\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}}$

$=\dfrac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[8]{x}}\times\dfrac{\sqrt[8]{x}}{\sqrt[12]{x}}\div\dfrac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[12]{x}}$

$=\dfrac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[8]{x}}\times\dfrac{\sqrt[8]{x}}{\sqrt[12]{x}}\times\dfrac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[6]{x}}=1$

정답_③

006

근호 앞의 수 2, 6, 3을 이들의 최소공배수인 6으로 통일한다.

$$\sqrt{a^3b}\times\sqrt[6]{64a^3b}\div\sqrt[3]{8b^2}=\sqrt[6]{(a^3b)^3}\times\sqrt[6]{64a^3b}\div\sqrt[6]{(8b^2)^2}$$
$$=\frac{\sqrt[6]{a^9b^3}\times\sqrt[6]{64a^3b}}{\sqrt[6]{64b^4}}$$
$$=\sqrt[6]{\frac{a^9b^3\times64a^3b}{64b^4}}=\sqrt[6]{a^{12}}=a^2$$

정답_ ③

007

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}\times\sqrt{\sqrt{a}}\div\sqrt[4]{\sqrt{a}}=\sqrt{a}\sqrt[4]{a}\sqrt[8]{a}\times\sqrt[4]{a}\div\sqrt[8]{a}$$
$$=\frac{\sqrt{a}\sqrt[4]{a}\sqrt[8]{a}\times\sqrt[4]{a}}{\sqrt[8]{a}}$$
$$=\sqrt{a}\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{a}=\sqrt{a}\sqrt[4]{a^2}$$
$$=\sqrt{a}\sqrt{a}=\sqrt{a^2}=a$$

정답_ ④

008

$$\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2^3\cdot2}+\sqrt[3]{3^3\cdot2}+\sqrt[3]{2}$$
$$=2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}=6\sqrt[3]{2}$$

$\therefore a=6$

정답_ ⑤

009

$$a=\frac{\sqrt[6]{36}+\sqrt[3]{81}}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}+\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[6]{6^2}+\sqrt[3]{3^3\cdot3}}{\sqrt[6]{2^2}+\sqrt[3]{3^3}}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{6}+3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}+3}=\frac{\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2}+3)}{\sqrt[3]{2}+3}$$
$$=\sqrt[3]{3}$$

$\therefore a^6=(\sqrt[3]{3})^6=3^2=9$

정답_ ⑤

010

$$\sqrt[8]{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}=\sqrt[8]{\frac{(2^3)^{10}+(2^2)^{10}}{(2^3)^4+(2^2)^{11}}}=\sqrt[8]{\frac{2^{30}+2^{20}}{2^{12}+2^{22}}}$$
$$=\sqrt[8]{\frac{2^{20}(2^{10}+1)}{2^{12}(1+2^{10})}}=\sqrt[8]{2^8}$$
$$=2$$

정답_ ⑤

011

$$(\sqrt{3\sqrt[3]{2}})^3=\sqrt{(3\sqrt[3]{2})^3}=\sqrt{3^3\cdot(\sqrt[3]{2})^3}$$
$$=\sqrt{27\cdot2}=\sqrt{54}$$

이때, $\sqrt{49}<\sqrt{54}<\sqrt{64}$이므로 $7<\sqrt{54}<8$

따라서 $(\sqrt{3\sqrt[3]{2}})^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 수는 8이다.

정답_ ③

012

근호 앞의 수 3, 2, 6을 이들의 최소공배수인 6으로 통일한 후, 대소 관계를 판정한다.

$A=\sqrt[3]{4}=\sqrt[6]{4^2}=\sqrt[6]{16}$

$B=\sqrt{3}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27}$

$C=\sqrt[6]{12}$

$\therefore C<A<B$

정답_ ④

013

$\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8},\ \sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}$이므로

$\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$ ...... ㉠

$\sqrt[3]{3}=\sqrt[15]{3^5}=\sqrt[15]{243},\ \sqrt[5]{5}=\sqrt[15]{5^3}=\sqrt[15]{125}$이므로

$\sqrt[3]{3}>\sqrt[5]{5}$ ...... ㉡

$\sqrt[5]{5}=\sqrt[10]{5^2}=\sqrt[10]{25},\ \sqrt{2}=\sqrt[10]{2^5}=\sqrt[10]{32}$이므로

$\sqrt[5]{5}<\sqrt{2}$ ...... ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의해

$$|\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}|+|\sqrt[3]{3}-\sqrt[5]{5}|+|\sqrt[5]{5}-\sqrt{2}|$$
$$=-(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3})+(\sqrt[3]{3}-\sqrt[5]{5})-(\sqrt[5]{5}-\sqrt{2})$$
$$=2(\sqrt[3]{3}-\sqrt[5]{5})$$

정답_ ④

014

(1) $(-3)^0=1$

(2) $3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=2^3=8$

(4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$

정답_ (1) 1 (2) $\frac{1}{9}$ (3) 8 (4) $\frac{25}{9}$

015

ㄱ은 옳지 않다.

$\sqrt[3]{a^4}=a^{\frac{4}{3}}$

ㄴ은 옳다.

$\frac{1}{\sqrt[5]{a^6}}=\frac{1}{a^{\frac{6}{5}}}=a^{-\frac{6}{5}}$

ㄷ도 옳지 않다.

$\left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$

ㄹ도 옳다.

$a^{0.5}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이므로 2개이다.

정답_ ③

016

$$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{2^4}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2^2}$$
$$=\sqrt[3]{2\cdot2^2}=\sqrt[3]{2^3}$$
$$=2$$

정답_ ②

017

$\sqrt[3]{4^n}=4^{\frac{n}{3}}$이 정수가 되려면 n은 0 또는 3의 배수이어야 한다.

이때, n은 100 이하의 자연수이므로 3, 6, 9, ⋯, 99로 33개이다.

정답_ ⑤

018

$$\frac{x+x^3+x^5+x^7+x^9}{1+x^{-2}+x^{-4}+x^{-6}+x^{-8}}$$

$$=\frac{x+x^3+x^5+x^7+x^9}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^8}}$$

$$=\frac{x(1+x^2+x^4+x^6+x^8)}{\frac{x^8+x^6+x^4+x^2+1}{x^8}}=x^9$$

정답_ ④

다른 풀이

주어진 식의 분모, 분자에 x^9을 곱하면

$$\frac{x+x^3+x^5+x^7+x^9}{1+x^{-2}+x^{-4}+x^{-6}+x^{-8}}$$

$$=\frac{x^9(x+x^3+x^5+x^7+x^9)}{x^9(1+x^{-2}+x^{-4}+x^{-6}+x^{-8})}$$

$$=\frac{x^9(x+x^3+x^5+x^7+x^9)}{x^9+x^7+x^5+x^3+x}=x^9$$

019

$$\frac{8^{20}}{8^{-20}-1}=\frac{(2^3)^{20}}{(2^3)^{-20}-1}=\frac{2^{60}}{2^{-60}-1}$$

$$=\frac{2^{60}\cdot 2^{60}}{2^{60}(2^{-60}-1)}=\frac{2^{120}}{1-2^{60}}$$

$$\frac{4^{-15}}{4^{15}-4^{-15}}=\frac{(2^2)^{-15}}{(2^2)^{15}-(2^2)^{-15}}=\frac{2^{-30}}{2^{30}-2^{-30}}$$

$$=\frac{2^{30}\cdot 2^{-30}}{2^{30}(2^{30}-2^{-30})}=\frac{1}{2^{60}-1}$$

$$\therefore \text{(주어진 식)}=\frac{2^{120}}{1-2^{60}}+\frac{1}{2^{60}-1}=\frac{-2^{120}}{2^{60}-1}+\frac{1}{2^{60}-1}$$

$$=\frac{-(2^{120}-1)}{2^{60}-1}=\frac{-(2^{60}-1)(2^{60}+1)}{2^{60}-1}$$

$$=-(2^{60}+1)=-2^{60}-1$$

정답_ ①

020

$$\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}\times\sqrt[6]{\sqrt[4]{a}}=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[12]{a}\times\sqrt[24]{a}$$

$$=a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{12}}\times a^{\frac{1}{24}}$$

$$=a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}}=a^{\frac{9}{24}}=a^{\frac{3}{8}}$$

따라서 $m=8$, $n=3$이므로 $m+n=11$

정답_ ④

021

$\sqrt{a\sqrt[3]{a^k}}=\sqrt{a}\times\sqrt[6]{a^k}=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{k}{6}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{k}{6}}$이므로

$$a^{\frac{4}{3}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{k}{6}}$$

$$\frac{4}{3}=\frac{1}{2}+\frac{k}{6},\ 8=3+k$$

$$\therefore k=5$$

정답_ ⑤

022

$$\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[5]{2}}}=\sqrt{2\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[15]{2}}=\sqrt{2}\times\sqrt[6]{2}\times\sqrt[30]{2}$$

$$=2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{6}}\times 2^{\frac{1}{30}}$$

$$=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}}=2^{\frac{21}{30}}=2^{\frac{7}{10}}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{8}}=\sqrt[12]{2^3}=2^{\frac{3}{12}}=2^{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore \sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[5]{2}}}\times\sqrt[3]{\sqrt[4]{8}}\times\sqrt[4]{2}=2^{\frac{7}{10}}\times 2^{\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{1}{4}}$$

$$=2^{\frac{7}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}$$

$$=2^{\frac{24}{20}}=2^{\frac{6}{5}}$$

$$\therefore k=\frac{6}{5}$$

정답_ ④

023

$$\left(\frac{3^{\sqrt{5}}}{9}\right)^{\sqrt{5}+2}=\left(\frac{3^{\sqrt{5}}}{3^2}\right)^{\sqrt{5}+2}=(3^{\sqrt{5}-2})^{\sqrt{5}+2}$$

$$=3^{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=3^{5-4}=3$$

정답_ ③

024

ㄱ은 옳다.

$$81^{-0.25}=(3^4)^{-\frac{1}{4}}=3^{-1}=\frac{1}{3}$$

ㄴ도 옳다.

$$\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3\sqrt{3}}}=\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}\times\sqrt[3]{\sqrt[8]{3}}$$

$$=\sqrt[3]{3}\times\sqrt[12]{3}\times\sqrt[24]{3}$$

$$=3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{12}}\times 3^{\frac{1}{24}}$$

$$=3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}}=3^{\frac{11}{24}}$$

ㄷ도 옳다.

$$(\sqrt{3})^{3\sqrt{3}}=\{(\sqrt{3})^3\}^{\sqrt{3}}=(3\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

025

$$A=\sqrt{(\sqrt{2^{\sqrt{2}}})^{\sqrt{2}}}=(\sqrt{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=(\sqrt[4]{2})^2=\sqrt{2}$$

$$B=\{\sqrt{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}}\}^{\sqrt{2}}=(\sqrt{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=(\sqrt[4]{2})^2=\sqrt{2}$$

$$C=\{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\}^{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2=2$$

$$\therefore A=B<C$$

정답_ ②

026

(1) $2^{\frac{1}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}=2^0=1$

(2) $3\times27^{\frac{2}{3}}=3\times(3^3)^{\frac{2}{3}}=3\times3^2=3^{1+2}=3^3=27$

(3) $16^{\frac{3}{4}}\times2^{-3}=(2^4)^{\frac{3}{4}}\times2^{-3}=2^3\times2^{-3}=2^{3-3}=2^0=1$

(4) $4^{-\frac{3}{2}}\times8^{\frac{5}{3}}=(2^2)^{-\frac{3}{2}}\times(2^3)^{\frac{5}{3}}=2^{-3}\times2^5=2^{-3+5}=2^2=4$

정답_ (1) 1 (2) 27 (3) 1 (4) 4

027

$3^{\frac{2}{3}}\times9^{\frac{3}{2}}\div27^{\frac{8}{9}}=3^{\frac{2}{3}}\times(3^2)^{\frac{3}{2}}\div(3^3)^{\frac{8}{9}}$

$=3^{\frac{2}{3}}\times3^3\div3^{\frac{8}{3}}$

$=3^{\frac{2}{3}+3-\frac{8}{3}}=3$

정답_ ③

028

$a=\sqrt{3}$에서 $a^2=3$

$b^3=\sqrt{5}$에서 $b^2=(\sqrt{5})^{\frac{2}{3}}=(5^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}=5^{\frac{1}{3}}$

$\therefore (ab)^2=a^2b^2=3\times5^{\frac{1}{3}}$

정답_ ②

029

$\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{n}}=(3^{-4})^{\frac{1}{n}}=3^{-\frac{4}{n}}$에서 $3^{-\frac{4}{n}}$이 자연수가 되려면 $-\frac{4}{n}$가 음이 아닌 정수이어야 한다.

$\therefore n=-1,\ -2,\ -4$

이때, $3^{-\frac{4}{n}}$의 값은 각각 $81,\ 9,\ 3$이므로 집합 A의 원소 중 자연수인 것은 3개이다.

정답_ ③

030

두 항씩 통분해 가며 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 연쇄적으로 적용하면

(주어진 식)$=\dfrac{2}{(1-3^{\frac{1}{8}})(1+3^{\frac{1}{8}})}+\dfrac{2}{1+3^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{4}{1+3^{\frac{1}{2}}}$

$=\dfrac{2}{1-3^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{2}{1+3^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{4}{1+3^{\frac{1}{2}}}$ $\Leftarrow (3^{\frac{1}{8}})^2=3^{\frac{1}{4}}$

$=\dfrac{4}{(1-3^{\frac{1}{4}})(1+3^{\frac{1}{4}})}+\dfrac{4}{1+3^{\frac{1}{2}}}$

$=\dfrac{4}{1-3^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{4}{1+3^{\frac{1}{2}}}$ $\Leftarrow (3^{\frac{1}{4}})^2=3^{\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{8}{(1-3^{\frac{1}{2}})(1+3^{\frac{1}{2}})}$

$=\dfrac{8}{1-3}$ $\Leftarrow (3^{\frac{1}{2}})^2=3$

$=-4$

정답_ ②

031

$2^{\frac{3}{2}}=A,\ 2^{\frac{1}{2}}=B$로 놓으면

(주어진 식)$=(A+B)^2+(A-B)^2$

$=(A^2+2AB+B^2)+(A^2-2AB+B^2)$

$=2(A^2+B^2)=2\{(2^{\frac{3}{2}})^2+(2^{\frac{1}{2}})^2\}$

$=2(2^3+2)=2(8+2)=20$

정답_ ⑤

032

$a^{\frac{1}{3}}=A,\ a^{-\frac{1}{3}}=B$로 놓으면 $a=A^3,\ a^{-1}=B^3$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{A^3-B^3}{A-B}$

$=\dfrac{(A-B)(A^2+AB+B^2)}{A-B}$

$=A^2+AB+B^2$

$=(a^{\frac{1}{3}})^2+a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}+(a^{-\frac{1}{3}})^2$

$=a^{\frac{2}{3}}+1+a^{-\frac{2}{3}}$

$=(2^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}+1+(2^{\frac{3}{2}})^{-\frac{2}{3}}$

$=2+1+2^{-1}=\dfrac{7}{2}$

정답_ ④

033

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 제곱하면

$a+a^{-1}+2=9$ $\therefore a+a^{-1}=7$

$a+a^{-1}=7$의 양변을 제곱하면

$a^2+a^{-2}+2=49$ $\therefore a^2+a^{-2}=47$

정답_ ③

034

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=4$의 양변을 세제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}})^3+(x^{-\frac{1}{2}})^3+3\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})=64$

$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+3\cdot1\cdot4=64$

$\therefore x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=52$

정답_ ②

다른 풀이

$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3-3\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})$

$=4^3-3\cdot1\cdot4=52$

035

$(x+x^{-1})^2=x^2+x^{-2}+2=34+2=36$

$x+x^{-1}>0$이므로 $x+x^{-1}=6$ ······ ㉠

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}+2=6+2=8$

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}>0$이므로 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에 의해

$\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}{x+x^{-1}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{6}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

정답_ ②

036

$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 세제곱하면

$(a^{\frac{1}{2}})^3-(a^{-\frac{1}{2}})^3-3\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})=27$

$a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}-3\cdot 1\cdot 3=27 \qquad \therefore a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}=36$ ⋯⋯ ㉠

$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 제곱하면

$(a^{\frac{1}{2}})^2+(a^{-\frac{1}{2}})^2-2=9$

$a+a^{-1}-2=9 \qquad \therefore a+a^{-1}=11$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의해

$\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}}{a+a^{-1}+1}=\dfrac{36}{11+1}=3$ 정답_ ①

037

$x^3=(3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}})^3$

$=(3^{\frac{1}{3}})^3+(3^{-\frac{1}{3}})^3+3\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}(3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}})$

$=3+3^{-1}+3\cdot 1\cdot x=3x+\dfrac{10}{3}$

$\therefore x^3-3x=\dfrac{10}{3}$

위의 식의 양변에 3을 곱하면

$3x^3-9x=10$ 정답_ ⑤

038

$x^3=(2^{\frac{2}{3}}-2^{-\frac{2}{3}})^3$

$=(2^{\frac{2}{3}})^3-(2^{-\frac{2}{3}})^3-3\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{-\frac{2}{3}}(2^{\frac{2}{3}}-2^{-\frac{2}{3}})$

$=2^2-2^{-2}-3\cdot 1\cdot x=\dfrac{15}{4}-3x$

$\therefore x^3+3x=\dfrac{15}{4}$

$\therefore \sqrt{\dfrac{x^3+3x}{15}}=\sqrt{\dfrac{\frac{15}{4}}{15}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$ 정답_ ①

039

$\sqrt{x^2-4}+x=\sqrt{(2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}})^2-4}+(2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}})$

$=\sqrt{(2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}+2)-4}+(2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}})$

$=\sqrt{(2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}})^2}+(2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}})$

$=(2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}})+(2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}})$

$=2\times 2^{\frac{1}{4}}=2^{1+\frac{1}{4}}=2^{\frac{5}{4}}$ 정답_ ③

040

$a=\sqrt{2},\ b=\sqrt[3]{3}$에서

$2=a^2,\ 3=b^3$

$\therefore \sqrt[6]{6}=(2\times 3)^{\frac{1}{6}}=(a^2\times b^3)^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ 정답_ ①

041

$p^x=q$의 양변에 $\dfrac{1}{x}$제곱을 하여 $p=q^{\frac{1}{x}}$임을 이용한다.

$12^a=16$에서 $\quad 12^a=2^4 \quad \therefore 12=2^{\frac{4}{a}}$

$3^b=2$에서 $\quad 3=2^{\frac{1}{b}}$

$\therefore 2^{\frac{4}{a}-\frac{1}{b}}=2^{\frac{4}{a}}\div 2^{\frac{1}{b}}=12\div 3=4$ 정답_ ④

042

$\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\dfrac{a^x(a^{3x}-a^{-3x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=\dfrac{a^{4x}-a^{-2x}}{a^{2x}-1}$

$=\dfrac{(a^{2x})^2-\dfrac{1}{a^{2x}}}{a^{2x}-1}=\dfrac{5^2-\dfrac{1}{5}}{5-1}$ ⇦ $a^{2x}=5$

$=\dfrac{\frac{124}{5}}{4}=\dfrac{31}{5}$ 정답_ ④

043

$f(x)=\dfrac{2018^x-2018^{-x}}{2018^x+2018^{-x}}$

$=\dfrac{2018^x(2018^x-2018^{-x})}{2018^x(2018^x+2018^{-x})}$

$=\dfrac{2018^{2x}-1}{2018^{2x}+1}$

이므로 $f(a)=\dfrac{1}{3}$에서 $\quad \dfrac{2018^{2a}-1}{2018^{2a}+1}=\dfrac{1}{3}$

$3\times 2018^{2a}-3=2018^{2a}+1$

$\therefore 2018^{2a}=2$ 정답_ ①

044

두 비행기 A, B의 날개의 넓이를 각각 S, $3S$라 하고, 필요마력을 각각 P, $\sqrt{3}P$라고 하면 두 비행기 A, B의 항력계수는 같으므로

A : $P=\dfrac{1}{150}kCV_A{}^3\cdot S$ ⋯⋯ ㉠

B : $\sqrt{3}P=\dfrac{1}{150}kCV_B{}^3\cdot 3S$ ⋯⋯ ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\quad \dfrac{V_A{}^3}{V_B{}^3}=\dfrac{3}{\sqrt{3}},\ \left(\dfrac{V_A}{V_B}\right)^3=\sqrt{3}$

$\therefore \dfrac{V_A}{V_B}=(\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{1}{6}}$ 정답_ ①

045

$$\sqrt{\sqrt[5]{a}\times\frac{4}{\sqrt[3]{a}}}\div\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}\times\frac{8}{\sqrt{a}}}\times\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}\times\frac{32}{\sqrt{a}}}$$

$$=\frac{\sqrt{\sqrt[5]{a}}\cdot\sqrt{4}}{\sqrt{\sqrt[3]{a}}}\div\frac{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}\cdot\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}\times\frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{\sqrt{a}}}$$

$$=\frac{2\sqrt[10]{a}}{\sqrt[6]{a}}\div\frac{2\sqrt[15]{a}}{\sqrt[6]{a}}\times\frac{2\sqrt[15]{a}}{\sqrt[10]{a}} \cdots\cdots ❶$$

$$=\frac{2\sqrt[10]{a}}{\sqrt[6]{a}}\times\frac{\sqrt[6]{a}}{2\sqrt[15]{a}}\times\frac{2\sqrt[15]{a}}{\sqrt[10]{a}}=2 \cdots\cdots ❷$$

정답_ 2

단계	채점 기준	비율
❶	거듭제곱근의 성질을 이용하여 주어진 식 간단히 하기	60%
❷	주어진 식의 값 구하기	40%

046

(i) $A-B=(3\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})-(\sqrt{2}+3\sqrt[3]{3})$

$=2(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3})=2(\sqrt[6]{8}-\sqrt[6]{9})<0$

$\therefore A<B$ ❶

(ii) $C-D=(2\sqrt[3]{3}-3\sqrt{2})-(2\sqrt{2}-3\sqrt[3]{3})$

$=5(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})=5(\sqrt[6]{9}-\sqrt[6]{8})>0$

$\therefore C>D$ ❷

(iii) $A-C=(3\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})-(2\sqrt[3]{3}-3\sqrt{2})$

$=6\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$

$=4\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-\sqrt[3]{3})$

$=4\sqrt{2}+(\sqrt[6]{512}-\sqrt[6]{9})>0$

$\therefore A>C$ ❸

(i), (ii), (iii)에서 $D<C<A<B$이므로 가장 큰 수 B와 가장 작은 수 D의 합은

$B+D=(\sqrt{2}+3\sqrt[3]{3})+(2\sqrt{2}-3\sqrt[3]{3})$

$=3\sqrt{2}$ ❹

정답_ $3\sqrt{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	A와 B의 대소 비교하기	30%
❷	C와 D의 대소 비교하기	30%
❸	A와 C의 대소 비교하기	30%
❹	가장 큰 수와 가장 작은 수의 합 구하기	10%

047

$2\sqrt{2}=2^1\times2^{\frac{1}{2}}=2^{1+\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^1}=2^{\frac{1}{2}-1}=2^{-\frac{1}{2}}$ ❶

$\therefore (2\sqrt{2})^6+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-18}=(2^{\frac{3}{2}})^6+(2^{-\frac{1}{2}})^{-18}$

$=2^9+2^9=2\cdot2^9=2^{10}$ ❷

$\therefore n=10$ ❸

정답_ 10

단계	채점 기준	비율
❶	$2\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$를 유리수 지수를 이용하여 나타내기	40%
❷	주어진 식 간단히 하기	50%
❸	n의 값 구하기	10%

048

$\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}$의 값이 자연수가 되려면 $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$가 각각 자연수가 되어야 한다. ❶

(i) $\sqrt{a}$가 자연수가 되려면 a는 제곱수이어야 한다.

그런데 $10\le a\le 20$이므로 $a=16$ ❷

(ii) $\sqrt[3]{b}=b^{\frac{1}{3}}$이 자연수가 되려면 $b=(\text{자연수})^{3n}$ (n은 0 또는 자연수)의 꼴이어야 한다.

그런데 $100\le b\le 130$이므로 $b=125$ ❸

$\therefore a+b=16+125=141$ ❹

정답_ 141

단계	채점 기준	비율
❶	$\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}$의 값이 자연수가 되기 위한 조건 구하기	10%
❷	a의 값 구하기	40%
❸	b의 값 구하기	40%
❹	$a+b$의 값 구하기	10%

049

$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=2$의 양변을 제곱하면

$a+a^{-1}-2=4 \quad \therefore a+a^{-1}=6$ …… ㉠

❶

$(a-a^{-1})^2=a^2+a^{-2}-2=(a+a^{-1})^2-4=6^2-4=32$

이때, $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=2>0$에서 $a>1$이므로 $a-a^{-1}>0$

$\therefore a-a^{-1}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ …… ㉡

❷

㉠, ㉡에 의해

$\frac{a-a^{-1}}{a+a^{-1}}=\frac{4\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ❸

정답_ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	$a+a^{-1}$의 값 구하기	40%
❷	$a-a^{-1}$의 값 구하기	40%
❸	$\frac{a-a^{-1}}{a+a^{-1}}$의 값 구하기	20%

050

$\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}=2$에서 $3^x+3^{-x}=2(3^x-3^{-x})$

$3^x+3^{-x}=2\cdot3^x-2\cdot3^{-x}$, $3^x=3\cdot3^{-x}$

$(3^x)^2=3$이므로 $9^x=3$ ❶

$\therefore 9^x+9^{-x}=9^x+\dfrac{1}{9^x}=3+\dfrac{1}{3}=\dfrac{10}{3}$ ❷

정답_ $\dfrac{10}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	9^x의 값 구하기	60%
❷	9^x+9^{-x}의 값 구하기	40%

051

박테리아가 1분마다 k배로 증식한다고 하면 오후 12시 n분의 박테리아의 수는

$N\times k^n$ ❶

같은 날 오후 12시 30분의 박테리아의 수가 $10N$이므로

$N\times k^{30}=10N$

$\therefore k^{30}=10$ ❷

같은 날 오후 12시 50분의 박테리아의 수는

$N\times k^{50}=N\times(k^{30})^{\frac{5}{3}}=10^{\frac{5}{3}}N$ ❸

정답_ $10^{\frac{5}{3}}N$

단계	채점 기준	비율
❶	1분마다 k배씩 증식할 때 12시 n분의 박테리아의 수 구하기	40%
❷	k^{30}의 값 구하기	40%
❸	12시 50분의 박테리아의 수 구하기	20%

052

p는 a의 m제곱근 중 실수인 것이므로 $p=\sqrt[m]{a}$

q는 a의 n제곱근 중 실수인 것이므로 $q=\sqrt[n]{a}$

ㄱ은 옳다.

p의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{p}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

q의 m제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[m]{q}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

$\therefore \sqrt[n]{p}=\sqrt[m]{q}$

ㄴ은 옳지 않다.

a^n의 m제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$

a^m의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

(반례) $m=3,\ n=9,\ a=\dfrac{1}{2}$이면

$$a^{\frac{n}{m}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{9}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1}{8}=\frac{1}{\sqrt[3]{512}}$$

$$a^{\frac{m}{n}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{9}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

이므로 $a^{\frac{n}{m}}<a^{\frac{m}{n}}$, 즉 $\sqrt[m]{a^n}<\sqrt[n]{a^m}$이므로 옳지 않다.

ㄷ도 옳다.

pq의 $m+n$제곱근 중 양수인 것은

$$\sqrt[m+n]{pq}=(pq)^{\frac{1}{m+n}}=(a^{\frac{1}{m}}a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m+n}}$$
$$=(a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m+n}}=(a^{\frac{m+n}{mn}})^{\frac{1}{m+n}}=a^{\frac{1}{mn}}$$

a의 mn제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[mn]{a}=a^{\frac{1}{mn}}$

$\therefore \sqrt[m+n]{pq}=\sqrt[mn]{a}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_ ④

053

$(\sqrt[3]{2^5})^{\frac{1}{3}}=(2^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{5}{9}}$

$2^{\frac{5}{9}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되려면 $(2^{\frac{5}{9}})^n$이 자연수이어야 한다.

$(2^{\frac{5}{9}})^n=(2^5)^{\frac{n}{9}}=32^{\frac{n}{9}}$에서 32는 어떤 자연수의 9제곱수가 아니므로 $\dfrac{n}{9}$이 음이 아닌 정수일 때, $(2^{\frac{5}{9}})^n$이 자연수가 된다.

따라서 n은 0 또는 9의 배수이어야 한다.

그런데 $2\le n\le 100$이므로 n은 9, 18, 27, …, 99로 11개이다.

정답_ ③

054

$a=-2,\ b=\sqrt{2}$일 때

$a*b=2^ab^2=2^{-2}\times(\sqrt{2})^2=\dfrac{1}{4}\cdot 2=\dfrac{1}{2}$

따라서 (가)의 값은 $\dfrac{1}{2}$이다.

$a=\dfrac{1}{2},\ b=\sqrt[4]{8}$일 때

$$\begin{aligned}a*b&=2^ab^2=2^{\frac{1}{2}}\times(\sqrt[4]{8})^2\\&=2^{\frac{1}{2}}\times 8^{\frac{2}{4}}\\&=(2\cdot 8)^{\frac{1}{2}}\\&=(4^2)^{\frac{1}{2}}=4\end{aligned}$$

따라서 (나)의 값은 4이다. 정답_ ⑤

055

사고가 발생한 지 1시간 후에 $x=10$이 되었으므로 주어진 관계식에 $t=1, x=10$을 대입하면

$$\begin{aligned}k&=\pi(10^{\frac{5}{2}}-35\cdot 10^{\frac{3}{2}}+300\sqrt{10})\\&=\pi(\sqrt{10^5}-35\sqrt{10^3}+300\sqrt{10})\\&=\pi(100\sqrt{10}-350\sqrt{10}+300\sqrt{10})\\&=50\sqrt{10}\pi\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{\pi}{k}=\dfrac{1}{50\sqrt{10}}$

원유가 모두 유출되는 것은 $x=0$일 때이므로 주어진 관계식에 $x=0$을 대입하면

$t=\dfrac{\pi}{k}\times 300\sqrt{10}=\dfrac{300\sqrt{10}}{50\sqrt{10}}=6$(시간) 정답_ ①

02 로그

056

(1) $\log_9 x=\frac{3}{2}$에서 $x=9^{\frac{3}{2}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}=3^3=27$

(2) $\log_8 x=\frac{2}{3}$에서 $x=8^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^2=4$

(3) $\log_4 x=-\frac{1}{2}$에서 $x=4^{-\frac{1}{2}}=(2^2)^{-\frac{1}{2}}=2^{-1}=\frac{1}{2}$

(4) $\log_x 16=4$에서 $16=x^4$

양변에 $\frac{1}{4}$제곱을 하면 $16^{\frac{1}{4}}=(x^4)^{\frac{1}{4}}$

$\therefore x=(2^4)^{\frac{1}{4}}=2$

(5) $\log_x 81=\frac{4}{3}$에서 $81=x^{\frac{4}{3}}$

양변에 $\frac{3}{4}$제곱을 하면 $81^{\frac{3}{4}}=(x^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{4}}$

$\therefore x=(3^4)^{\frac{3}{4}}=3^3=27$

(6) $\log_x 4=0.4=\frac{2}{5}$에서 $4=x^{\frac{2}{5}}$

양변에 $\frac{5}{2}$제곱을 하면 $4^{\frac{5}{2}}=(x^{\frac{2}{5}})^{\frac{5}{2}}$

$\therefore x=(2^2)^{\frac{5}{2}}=2^5=32$

정답_ (1) 27 (2) 4 (3) $\frac{1}{2}$ (4) 2 (5) 27 (6) 32

057

$\log_2 x=\sqrt{2}$에서 $x=2^{\sqrt{2}}$

$\log_2 y=\frac{1}{2}$에서 $y=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

$\therefore x^y=(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=2^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=2^2=4$

정답_ ④

058

$\log_2 \frac{a}{4}=b$에서 $2^b=\frac{a}{4}$

$\therefore \frac{2^b}{a}=\frac{\frac{a}{4}}{a}=\frac{1}{4}$

정답_ ③

059

$\log_3(1+\log_3 x)=2$에서 $1+\log_3 x=3^2$

$\therefore \log_3 x=8$

$\log_3 x=8$에서 $x=3^8$

따라서 $a=3$, $b=8$이므로 $a+b=11$

정답_ ①

060

밑의 조건에 의해 $8-x>0$, $8-x\neq1$

$x<8$, $x\neq7$ $\therefore x<7$ 또는 $7<x<8$ …… ㉠

진수의 조건에 의해 $x-3>0$

$\therefore x>3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3<x<7$ 또는 $7<x<8$

따라서 정수 x는 4, 5, 6으로 그 합은

$4+5+6=15$

정답_ ②

061

밑의 조건에 의해 $x-3>0$, $x-3\neq1$, 즉 $x>3$, $x\neq4$

$\therefore 3<x<4$ 또는 $x>4$ …… ㉠

진수의 조건에 의해 $-x^2+10x-16>0$

$x^2-10x+16<0$, $(x-2)(x-8)<0$

$\therefore 2<x<8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3<x<4$ 또는 $4<x<8$

따라서 정수 x는 5, 6, 7로 3개이다.

정답_ ③

062

실수 a의 값에 관계없이 항상 로그가 정의되려면 모든 실수 a에 대하여 밑은 1이 아닌 양수이고, 진수는 양수이어야 한다.

ㄱ은 항상 정의된다.

(i) 밑은 $a^2-a+2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\geq\frac{7}{4}$이므로 항상 1이 아닌 양수이다.

(ii) 진수는 $a^2+1\geq1$이므로 항상 양수이다.

ㄴ은 항상 정의되지는 않는다.

(반례) $a=0$일 때, 밑이 $2|a|+1=1$이므로 로그가 정의되지 않는다.

ㄷ도 항상 정의되지는 않는다.

(반례) $a=1$일 때, 진수가 $a^2-2a+1=(a-1)^2=0$이므로 로그가 정의되지 않는다.

따라서 항상 정의되는 것은 ㄱ이다.

정답_ ①

063

(1) $\log_a x^2y^3z^4=\log_a x^2+\log_a y^3+\log_a z^4$

$=2\log_a x+3\log_a y+4\log_a z$

$=2A+3B+4C$

(2) $\log_a \frac{x^3y^2}{z}=\log_a x^3+\log_a y^2-\log_a z$

$=3\log_a x+2\log_a y-\log_a z$

$=3A+2B-C$

(3) $\log_a \sqrt{xy^3z}=\log_a (xy^3z)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_a xy^3z$

$=\frac{1}{2}(\log_a x+\log_a y^3+\log_a z)$

$=\frac{1}{2}(\log_a x+3\log_a y+\log_a z)$

$=\frac{1}{2}(A+3B+C)$

$$(4)\ \log_a \frac{x^2}{\sqrt{yz}} = \log_a x^2 - \log_a \sqrt{yz}$$
$$= \log_a x^2 - \log_a (yz)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2\log_a x - \frac{1}{2}\log_a yz$$
$$= 2\log_a x - \frac{1}{2}(\log_a y + \log_a z)$$
$$= 2A - \frac{1}{2}(B+C)$$
$$= 2A - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C$$

정답_ (1) $2A+3B+4C$ (2) $3A+2B-C$
(3) $\frac{1}{2}(A+3B+C)$ (4) $2A-\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C$

064

ㄱ은 옳지 않다.
진수의 곱을 합으로 분해한다. 즉,
$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
ㄴ, ㄷ도 옳지 않다.
진수의 몫을 차로 분해한다. 즉,
$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
ㄹ도 옳지 않다.
진수의 지수가 앞으로 나온다. 즉,
$\log_a x^n = n\log_a x$
따라서 옳은 것은 없으므로 0개이다. 정답_ ⑤

다른 풀이

ㄴ. 밑의 변환 공식에 의해
$$\frac{\log_a x}{\log_a y} = \log_y x$$
ㄹ. $(\log_a x)^n = \log_a x \cdot \log_a x \cdot \log_a x \cdot \cdots \cdot \log_a x$
$\log_a x^n = \log_a (x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x)$
$\therefore (\log_a x)^n \neq \log_a x^n$

065

(ㄹ)에서 $\log_2(-2)^2 = 2\log_2(-2)$가 처음으로 잘못되었다.
$\log_2(-2)$는 정의되지 않는다. 정답_ ④

보충 설명

모든 로그의 성질은 밑이 1이 아닌 양수이고 진수가 양수일 때 성립한다. 로그의 성질 $\log_2 x^2 = 2\log_2 x$도 $x>0$일 때 성립한다.

066

$r=\log_a x$, $s=\log_a y$로 놓으면
$a^r = x$, $a^s = \boxed{\text{(가)}\ y}$
지수법칙에 의해
$a^{r+s} = a^r a^s = \boxed{\text{(나)}\ xy}$
로그의 정의에 의해
$r+s = \log_a \boxed{\text{(나)}\ xy}$
$\therefore \log_a xy = \log_a x + \log_a y$ 정답_ ④

067

$$(1)\ \log_2 48 + \log_2 \frac{1}{3} = \log_2\left(48\times\frac{1}{3}\right) = \log_2 16$$
$$= \log_2 2^4 = 4\log_2 2 = 4$$
$$(2)\ \log_6 54 - \log_6 9 = \log_6 (54 \div 9) = \log_6 6 = 1$$
$$(3)\ 3\log_3 \sqrt[3]{12} + \log_3 \frac{3}{4} = \log_3 (\sqrt[3]{12})^3 + \log_3 \frac{3}{4}$$
$$= \log_3 12 + \log_3 \frac{3}{4}$$
$$= \log_3\left(12\cdot\frac{3}{4}\right) = \log_3 9$$
$$= \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 2$$
$$(4)\ \frac{1}{2}\log_3 27 - \log_3\sqrt{3} = \frac{1}{2}\log_3 3^3 - \frac{1}{2}\log_3 3$$
$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

정답_ (1) 4 (2) 1 (3) 2 (4) 1

068

$$\log_2 3 + \log_2 6 - \log_2 9 = \log_2\left(\frac{3\cdot 6}{9}\right)$$
$$= \log_2 2 = 1$$

정답_ ①

069

$$\log_4\sqrt{16} + \log_{2^{-1}}\frac{1}{2} - \log_8 1$$
$$= \log_4 4 + \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} - \log_8 1$$
$$= 1+1-0 = 2$$

정답_ ⑤

070

$$\log_3(4-\sqrt{7}) + \log_3(4+\sqrt{7})$$
$$= \log_3(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7}) = \log_3 9$$
$$= \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 2$$

정답_ ②

071

$$2\log_2 2\sqrt{3} - \log_2\frac{9}{8} + \frac{1}{3}\log_2 216$$
$$= \log_2 (2\sqrt{3})^2 - \log_2\frac{9}{8} + \log_2 (6^3)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \log_2 12 - \log_2\frac{9}{8} + \log_2 6$$
$$= \log_2\left(12\cdot\frac{8}{9}\cdot 6\right) = \log_2 64 = \log_2 2^6$$
$$= 6\log_2 2 = 6$$

정답_ ④

072

$\log_2\left(1-\frac{1}{2}\right)+\log_2\left(1-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_2\left(1-\frac{1}{32}\right)$

$=\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{2}{3}+\cdots+\log_2\frac{31}{32}$

$=\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{31}{32}\right)$

$=\log_2\frac{1}{32}$

$=\log_2 2^{-5}$

$=-5\log_2 2=-5$

정답_ ⑤

073

(1) $\log_2 9\cdot\log_3 8=\frac{\log_{10}9}{\log_{10}2}\cdot\frac{\log_{10}8}{\log_{10}3}$

$=\frac{\log_{10}3^2}{\log_{10}2}\cdot\frac{\log_{10}2^3}{\log_{10}3}$

$=\frac{2\log_{10}3}{\log_{10}2}\cdot\frac{3\log_{10}2}{\log_{10}3}$

$=2\cdot3=6$

(2) $\log_2 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 8=\frac{\log_{10}5}{\log_{10}2}\cdot\frac{\log_{10}7}{\log_{10}5}\cdot\frac{\log_{10}8}{\log_{10}7}$

$=\frac{\log_{10}5}{\log_{10}2}\cdot\frac{\log_{10}7}{\log_{10}5}\cdot\frac{3\log_{10}2}{\log_{10}7}$

$=3$

(3) 밑과 진수를 바꾸면

$\frac{1}{\log_{\frac{9}{2}}3}+\frac{1}{\log_2 3}=\log_3\frac{9}{2}+\log_3 2$

$=\log_3\left(\frac{9}{2}\cdot2\right)$

$=\log_3 9=\log_3 3^2$

$=2\log_3 3=2$

(4) $\frac{1}{\log_{24}2}-\frac{1}{\log_6 2}=\log_2 24-\log_2 6$

$=\log_2\frac{24}{6}$

$=\log_2 4=\log_2 2^2$

$=2\log_2 2=2$

정답_ (1) 6 (2) 3 (3) 2 (4) 2

074

$\log_2 48-\log_2 3+\frac{\log_3 64}{\log_3 2}=\log_2 48-\log_2 3+\log_2 64$

$=\log_2\left(\frac{48\cdot64}{3}\right)$

$=\log_2(16\cdot64)$

$=\log_2 2^{10}=10\log_2 2$

$=10$

정답_ ⑤

075

$\frac{1}{\log_6 3}+2\log_3 2-\frac{3}{\log_2 3}=\log_3 6+2\log_3 2-3\log_3 2$

$=\log_3 6-\log_3 2=\log_3\frac{6}{2}$

$=\log_3 3=1$

정답_ ②

076

주어진 식에서 밑과 진수를 바꾸면

$\log_x 2+\log_x 3+\log_x 4=\log_x a+\log_x 5$

$\log_x(2\cdot3\cdot4)=\log_x 5a$

$5a=24 \quad \therefore a=\frac{24}{5}=4.8$

정답_ ⑤

077

$3\log_{10}a=4\log_{10}b$에서

$\frac{\log_{10}b}{\log_{10}a}=\frac{3}{4} \quad \therefore \log_a b=\frac{3}{4}$

$\therefore \frac{8}{9}\log_a b=\frac{8}{9}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2}{3}$

정답_ ②

078

$\log_a x=\frac{1}{2}$, $\log_b x=\frac{1}{3}$, $\log_c x=\frac{2}{3}$에서 밑과 진수를 바꾸면

$\log_x a=2,\ \log_x b=3,\ \log_x c=\frac{3}{2}$

$\therefore \log_{abc}x=\frac{1}{\log_x abc}$

$=\frac{1}{\log_x a+\log_x b+\log_x c}$

$=\frac{1}{2+3+\frac{3}{2}}=\frac{2}{13}$

정답_ ④

079

$\log_a b=x$, $\log_c a=y$라고 하면

$a^x=b$, $c^y=a$

이때, $b=a^x=(c^y)^x=c^{\boxed{(가)\ xy}}$이므로 $\boxed{(가)\ xy}=\log_c b$

즉, $\log_a b\cdot\log_c a=\log_c b$이다.

여기서 $\boxed{(나)\ a\neq1}$이므로 $\log_c a\neq0$이다.

($\because$ a는 $\log_a b$의 밑이므로 $a\neq1$)

$\therefore \log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

정답_ ①

080

$\log_9 36-\log_3 2=\log_{3^2}6^2-\log_3 2=\log_3 6-\log_3 2$

$=\log_3\frac{6}{2}=\log_3 3=1$

정답_ ③

081

$2\log_{\frac{1}{3}}\frac{4}{3}-\log_9\frac{9}{16}+\log_{\sqrt{3}}2\sqrt{3}$

$=2\log_{3^{-1}}\frac{4}{3}-\log_{3^2}\frac{9}{16}+\log_{3^{\frac{1}{2}}}2\sqrt{3}$

$=-2\log_3\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\log_3\frac{9}{16}+2\log_3 2\sqrt{3}$

$=\log_3\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}-\log_3\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}+\log_3(2\sqrt{3})^2$

$=\log_3\frac{9}{16}-\log_3\frac{3}{4}+\log_3 12$

$=\log_3\left(\frac{9}{16}\cdot\frac{4}{3}\cdot 12\right)$

$=\log_3 9=\log_3 3^2=2$

정답_ ④

082

$(\log_2 3+\log_4 3)(\log_3 2+\log_9 2)$

$=(\log_2 3+\log_{2^2} 3)(\log_3 2+\log_{3^2} 2)$

$=\left(\log_2 3+\frac{1}{2}\log_2 3\right)\left(\log_3 2+\frac{1}{2}\log_3 2\right)$

$=\frac{3}{2}\log_2 3\cdot\frac{3}{2}\log_3 2$

$=\frac{9}{4}\cdot\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2}\cdot\frac{\log_{10}2}{\log_{10}3}=\frac{9}{4}$

정답_ ⑤

083

$\log_5 30-\log_{25}4=\log_5 30-\log_{5^2}2^2$

$=\log_5 30-\log_5 2$

$=\log_5\frac{30}{2}=\log_5 15$

$\therefore$ (주어진 식)$=\log_5 15\cdot\log_3 5-1$

$=\frac{\log_3 15}{\log_3 5}\cdot\log_3 5-1$

$=\log_3 15-1=\log_3 15-\log_3 3$

$=\log_3\frac{15}{3}=\log_3 5$

정답_ ④

084

ㄱ은 옳다.

$2^{\log_3 5}=5^{\log_3 2}$

ㄴ도 옳다.

$2^{\log_2 3}=3^{\log_2 2}=3$

ㄷ도 옳다.

$2^{\log_4 3}=2^{\log_{2^2}3}=2^{\frac{1}{2}\log_2 3}=2^{\log_2 3^{\frac{1}{2}}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

ㄹ도 옳다.

$4^{\log_2 3}=(2^2)^{\log_2 3}=2^{2\log_2 3}=2^{\log_2 3^2}=3^2=9$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이므로 4개이다.

정답_ ⑤

085

ㄱ은 옳다.

$2^{\log_2 7-\log_2 6}=2^{\log_2\frac{7}{6}}=\frac{7}{6}$

ㄴ도 옳다.

$2\log_3 2+\log_3 5-\log_3 6$

$=\log_3 2^2+\log_3 5-\log_3 6$

$=\log_3\left(\frac{4\cdot 5}{6}\right)=\log_3\frac{10}{3}$

$\therefore 3^{2\log_3 2+\log_3 5-\log_3 6}=3^{\log_3\frac{10}{3}}=\frac{10}{3}$

ㄷ은 옳지 않다.

$5^{\log_5 1+\log_5 2+\log_5 3+\log_5 4+\log_5 5}$

$=5^{\log_5(1\times 2\times 3\times 4\times 5)}$

$=5^{\log_5 120}=120$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ②

086

주어진 식의 좌변에 밑이 c인 로그를 취하여 정리하면

$\log_c \boxed{(가)\ a^{\log_b c}}=\boxed{(나)\ \log_b c}\cdot\log_c a$

$=\boxed{(나)\ \log_b c}\cdot\frac{\log_b a}{\log_b c}$

$=\boxed{(다)\ \log_b a}$

$\therefore a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

정답_ ②

087

$a=\log_4 9=\log_{2^2}3^2=\frac{2}{2}\log_2 3=\log_2 3$

$\frac{1}{a}=\frac{1}{\log_2 3}=\log_3 2$

$\therefore\left(\frac{1}{2}\right)^a+3^{\frac{1}{a}}=2^{-a}+3^{\frac{1}{a}}$

$=2^{-\log_2 3}+3^{\log_3 2}$

$=2^{\log_2\frac{1}{3}}+3^{\log_3 2}$

$=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$

정답_ ④

088

로그의 밑의 변환에 의해

$P=\frac{\log_b(\log_{b^2}a)}{\log_b a}=\log_a(\log_{b^2}a)$

$\therefore a^P=\log_{b^2}a=\frac{1}{2}\log_b a$

정답_ ②

089

$3<8<9$에서 $\log_3 3<\log_3 8<\log_3 9$

$1<\log_3 8<2$ $\quad\therefore \log_3 8=1.\times\times\times$

따라서 $\log_3 8$의 정수 부분은

$a=1$

$\log_3 8$의 소수 부분은 정수 부분을 뺀 수이므로

$b=\log_3 8-1=\log_3 8-\log_3 3=\log_3 \frac{8}{3}$

$\therefore\ 2^a+3^b=2^1+3^{\log_3 \frac{8}{3}}=2+\frac{8}{3}=\frac{14}{3}$ 정답_ ④

090

$10<35<100$에서 $\log_{10} 10<\log_{10} 35<\log_{10} 100$

$1<\log_{10} 35<2 \qquad \therefore\ \log_{10} 35=1.\times\times\times$

따라서 $\log_{10} 35$의 정수 부분은 $n=1$

$\log_{10} 35$의 소수 부분은 정수 부분을 뺀 수이므로

$a=\log_{10} 35-1=\log_{10} 35-\log_{10} 10$

$=\log_{10} \frac{35}{10}=\log_{10} \frac{7}{2}$

$\therefore\ 10^n-2\times 10^a=10^1-2\times 10^{\log_{10} \frac{7}{2}}$

$=10-2\cdot\frac{7}{2}=3$ 정답_ ②

091

$$\log_{0.6} 15=\frac{\log_{10} 15}{\log_{10} 0.6}=\frac{\log_{10} (3\cdot 5)}{\log_{10} \frac{6}{10}}$$

$$=\frac{\log_{10} \frac{3\cdot 10}{2}}{\log_{10} \frac{2\cdot 3}{10}}=\frac{\log_{10} 3+\log_{10} 10-\log_{10} 2}{\log_{10} 2+\log_{10} 3-\log_{10} 10}$$

$$=\frac{b+1-a}{a+b-1}=\frac{-a+b+1}{a+b-1}$$ 정답_ ③

092

$\log_2 3=a$, $\log_3 7=b$에서 $\log_3 2=\frac{1}{a}$, $\log_3 7=b$

$$\therefore\ \log_{42} 56=\frac{\log_3 56}{\log_3 42}=\frac{\log_3 (2^3\cdot 7)}{\log_3 (2\cdot 3\cdot 7)}$$

$$=\frac{3\log_3 2+\log_3 7}{\log_3 2+\log_3 3+\log_3 7}$$

$$=\frac{\frac{3}{a}+b}{\frac{1}{a}+1+b}=\frac{3+ab}{1+a+ab}$$ 정답_ ④

093

$\log_2 5=a$, $\log_3 2=b$에서 $\log_2 5=a$, $\log_2 3=\frac{1}{b}$

$$\therefore\ \log_6 15=\frac{\log_2 15}{\log_2 6}=\frac{\log_2 3+\log_2 5}{\log_2 2+\log_2 3}$$

$$=\frac{\frac{1}{b}+a}{1+\frac{1}{b}}=\frac{1+ab}{b+1}$$

따라서 $f(a,\ b)=\frac{ab+1}{b+1}$이므로

$f(4,\ 2)=\frac{4\cdot 2+1}{2+1}=\frac{9}{3}=3$ 정답_ ②

094

$\log_2 12=\log_2 (2^2\cdot 3)=\log_2 2^2+\log_2 3$

$=2+\log_2 3=a$

이므로 $\log_2 3=a-2$

$$\therefore\ \log_6 4=\frac{\log_2 4}{\log_2 6}=\frac{\log_2 2^2}{\log_2 (2\cdot 3)}$$

$$=\frac{2\log_2 2}{\log_2 2+\log_2 3}$$

$$=\frac{2}{1+(a-2)}=\frac{2}{a-1}$$ 정답_ ②

095

$\log_6 9=\log_6 3^2=2\log_6 3=a$에서 $\log_6 3=\frac{a}{2}$

$\therefore\ \log_6 2=\log_6 \frac{6}{3}=\log_6 6-\log_6 3$

$=1-\log_6 3=1-\frac{a}{2}$

$$\therefore\ \log_{18} 12=\frac{\log_6 12}{\log_6 18}=\frac{\log_6 (6\cdot 2)}{\log_6 (6\cdot 3)}$$

$$=\frac{\log_6 6+\log_6 2}{\log_6 6+\log_6 3}$$

$$=\frac{1+\left(1-\frac{a}{2}\right)}{1+\frac{a}{2}}=\frac{4-a}{2+a}$$ 정답_ ③

다른 풀이

$\log_6 9=\log_6 3^2=2\log_6 3=a$에서 $\log_6 3=\frac{a}{2}$

$$\therefore\ \log_{18} 12=\frac{\log_6 12}{\log_6 18}=\frac{\log_6 \frac{36}{3}}{\log_6 (6\cdot 3)}$$

$$=\frac{\log_6 6^2-\log_6 3}{\log_6 6+\log_6 3}$$

$$=\frac{2-\frac{a}{2}}{1+\frac{a}{2}}=\frac{4-a}{2+a}$$

096

$\log_2 35=\log_2 (5\cdot 7)=\log_2 5+\log_2 7$이므로

$\log_2 5+\log_2 7=a$ ······ ㉠

$\log_2 245=\log_2 (5\cdot 7^2)=\log_2 5+\log_2 7^2$

$=\log_2 5+2\log_2 7$

이므로

$\log_2 5+2\log_2 7=b$ ······ ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$\log_2 7 = b - a$

㉠×2−㉡을 하면

$\log_2 5 = 2a - b$

$\therefore \log_2 175 = \log_2 (5^2 \cdot 7) = \log_2 5^2 + \log_2 7$

$= 2\log_2 5 + \log_2 7$

$= 2(2a - b) + b - a$

$= 3a - b$

정답_ ③

097

$\log_2 ab = 8$에서 $\log_2 a + \log_2 b = 8$ ······ ㉠

$\log_2 \frac{a}{b} = 2$에서 $\log_2 a - \log_2 b = 2$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2\log_2 a = 10,\ \log_2 a = 5$

$\therefore a = 2^5 = 32$

㉠−㉡을 하면

$2\log_2 b = 6,\ \log_2 b = 3$

$\therefore b = 2^3 = 8$

$\therefore \log_2 (a + 4b) = \log_2 (32 + 4 \cdot 8) = \log_2 64$

$= \log_2 2^6 = 6\log_2 2 = 6$

정답_ ④

098

$10^x = a,\ 10^y = b$에서

$x = \log_{10} a,\ y = \log_{10} b$

$$\therefore \log_{\sqrt{a}} b = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} \sqrt{a}} = \frac{\log_{10} b}{\frac{1}{2}\log_{10} a} = \frac{y}{\frac{1}{2}x} = \frac{2y}{x}$$

정답_ ①

099

$2^a = x,\ 2^b = y,\ 2^c = z$에서

$a = \log_2 x,\ b = \log_2 y,\ c = \log_2 z$

$$\therefore \log_{x^2y} yz^2 = \frac{\log_2 yz^2}{\log_2 x^2y} = \frac{\log_2 y + \log_2 z^2}{\log_2 x^2 + \log_2 y}$$

$$= \frac{\log_2 y + 2\log_2 z}{2\log_2 x + \log_2 y} = \frac{b + 2c}{2a + b}$$

정답_ ③

100

$2^a = 5$에서 $a = \log_2 5$

$5^b = \sqrt{2}$에서 $b = \log_5 \sqrt{2}$

$\therefore ab = \log_2 5 \times \log_5 \sqrt{2}$

$$= \frac{\log_3 5}{\log_3 2} \times \frac{\log_3 \sqrt{2}}{\log_3 5}$$

$$= \frac{\log_3 5}{\log_3 2} \times \frac{\frac{1}{2}\log_3 2}{\log_3 5} = \frac{1}{2}$$

정답_ ④

101

$a^x = b^y = 3$의 각 변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 a^x = \log_3 b^y = \log_3 3,\ x\log_3 a = y\log_3 b = 1$

이므로

$\log_3 a = \frac{1}{x},\ \log_3 b = \frac{1}{y}$

$$\therefore \log_{ab} b^3 = \frac{\log_3 b^3}{\log_3 ab} = \frac{3\log_3 b}{\log_3 a + \log_3 b}$$

$$= \frac{\frac{3}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{3x}{x + y}$$

정답_ ③

102

구하려는 로그의 밑이 a이므로 $a^4b^5 = 1$의 양변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a a^4b^5 = \log_a 1,\ \log_a a^4 + \log_a b^5 = 0$

$4 + 5\log_a b = 0$

$\therefore \log_a b = -\frac{4}{5}$

$\therefore \log_a a^5b^4 = \log_a a^5 + \log_a b^4 = 5 + 4\log_a b$

$= 5 + 4 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{9}{5}$

정답_ ①

103

구하려는 로그의 밑이 x이므로 $x^3 = y^2$의 양변에 밑이 x인 로그를 취하면

$\log_x x^3 = \log_x y^2,\ 3 = 2\log_x y$

$\therefore \log_x y = \frac{3}{2}$

$\therefore \log_x \frac{x^2}{y^3} = \log_x x^2 - \log_x y^3 = 2 - 3\log_x y$

$= 2 - 3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$

정답_ ①

104

16과 8이 둘 다 2의 거듭제곱임에 착안하여 주어진 식의 각 변에 밑이 2인 로그를 취한다.

$3^a = 16$에서 $\log_2 3^a = \log_2 16,\ \log_2 3^a = \log_2 2^4$

$a\log_2 3 = 4 \quad \therefore \frac{4}{a} = \log_2 3$ ······ ㉠

$6^b = 8$에서 $\log_2 6^b = \log_2 8,\ \log_2 6^b = \log_2 2^3$

$b\log_2 6 = 3 \quad \therefore \frac{3}{b} = \log_2 6$ ······ ㉡

㉠, ㉡에 의해

$\frac{4}{a} - \frac{3}{b} = \log_2 3 - \log_2 6 = \log_2 \frac{3}{6}$

$= \log_2 \frac{1}{2} = -1$

정답_ ①

다른 풀이

$p^x=q$의 양변에 $\frac{1}{x}$제곱을 하면 $p=q^{\frac{1}{x}}$임을 이용한다.

$3^a=16$에서 $3=16^{\frac{1}{a}}=(2^4)^{\frac{1}{a}}$ $\therefore 3=2^{\frac{4}{a}}$ …… ㉠

$6^b=8$에서 $6=8^{\frac{1}{b}}=(2^3)^{\frac{1}{b}}$ $\therefore 6=2^{\frac{3}{b}}$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{3}{6}=\frac{2^{\frac{4}{a}}}{2^{\frac{3}{b}}}$

$\frac{1}{2}=2^{\frac{4}{a}-\frac{3}{b}}$, $2^{-1}=2^{\frac{4}{a}-\frac{3}{b}}$

$\therefore \frac{4}{a}-\frac{3}{b}=-1$

105

4와 8이 둘 다 2의 거듭제곱임에 착안하여 주어진 식의 각 변에 밑이 2인 로그를 취한다.

$\left(\frac{1}{5}\right)^x=4$에서 $\log_2\left(\frac{1}{5}\right)^x=\log_2 4$, $\log_2\left(\frac{1}{5}\right)^x=\log_2 2^2$

$x\log_2\frac{1}{5}=2$ $\therefore \frac{2}{x}=\log_2\frac{1}{5}$ …… ㉠

$30^y=8$에서 $\log_2 30^y=\log_2 8$, $\log_2 30^y=\log_2 2^3$

$y\log_2 30=3$ $\therefore \frac{3}{y}=\log_2 30$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\log_2\frac{1}{5}+\log_2 30$$
$$=\log_2\left(\frac{1}{5}\cdot 30\right)=\log_2 6$$

$\therefore 2^{\frac{2}{x}+\frac{3}{y}}=2^{\log_2 6}=6$ 정답_ ⑤

다른 풀이

$p^x=q$의 양변에 $\frac{1}{x}$제곱을 하면 $p=q^{\frac{1}{x}}$임을 이용한다.

$\left(\frac{1}{5}\right)^x=4$에서 $\frac{1}{5}=4^{\frac{1}{x}}=(2^2)^{\frac{1}{x}}$

$\therefore \frac{1}{5}=2^{\frac{2}{x}}$ …… ㉠

$30^y=8$에서 $30=8^{\frac{1}{y}}=(2^3)^{\frac{1}{y}}$

$\therefore 30=2^{\frac{3}{y}}$ …… ㉡

㉠×㉡을 하면 $\frac{1}{5}\cdot 30=2^{\frac{2}{x}}\times 2^{\frac{3}{y}}$

$\therefore 2^{\frac{2}{x}+\frac{3}{y}}=6$

106

36이 6의 거듭제곱임에 착안하여 주어진 식의 각 변에 밑이 6인 로그를 취한다.

$8^a=\frac{1}{36}$에서 $\log_6 8^a=\log_6\frac{1}{36}$, $\log_6 8^a=\log_6 6^{-2}$

$a\log_6 8=-2$ $\therefore \frac{1}{a}=-\frac{\log_6 8}{2}$ …… ㉠

$27^b=\frac{1}{36}$에서 $\log_6 27^b=\log_6\frac{1}{36}$, $\log_6 27^b=\log_6 6^{-2}$

$b\log_6 27=-2$ $\therefore \frac{1}{b}=-\frac{\log_6 27}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\left(-\frac{\log_6 8}{2}\right)+\left(-\frac{\log_6 27}{2}\right)$$
$$=-\frac{\log_6 8+\log_6 27}{2}=-\frac{\log_6(8\cdot 27)}{2}$$
$$=-\frac{\log_6 6^3}{2}=-\frac{3}{2}$$

정답_ ①

다른 풀이

$p^x=q$의 양변에 $\frac{1}{x}$제곱을 하면 $p=q^{\frac{1}{x}}$임을 이용한다.

$8^a=\frac{1}{36}$에서 $8=\left(\frac{1}{36}\right)^{\frac{1}{a}}$ …… ㉠

$27^b=\frac{1}{36}$에서 $27=\left(\frac{1}{36}\right)^{\frac{1}{b}}$ …… ㉡

㉠×㉡을 하면 $8\times 27=\left(\frac{1}{36}\right)^{\frac{1}{a}}\times\left(\frac{1}{36}\right)^{\frac{1}{b}}$

$216=\left(\frac{1}{36}\right)^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, $6^3=6^{-2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$

$3=-2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$, $-\frac{3}{2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

$\therefore \frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{3}{2}$

107

$2^x=24$에서 $x=\log_2 24=\log_2(2^3\cdot 3)=3+\log_2 3$

$3^y=24$에서 $y=\log_3 24=\log_3(2^3\cdot 3)=1+3\log_3 2$

$$\therefore (x-3)(y-1)=(3+\log_2 3-3)(1+3\log_3 2-1)$$
$$=\log_2 3\times 3\log_3 2$$
$$=\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2}\times\frac{3\log_{10}2}{\log_{10}3}$$
$$=3$$

정답_ ③

108

1000이 10의 거듭제곱임에 착안하여 주어진 식의 각 변에 밑이 10인 로그를 취한다.

$(20.4)^a=1000$에서 $\log_{10}(20.4)^a=\log_{10}10^3$

$a\log_{10}20.4=3$ $\therefore \frac{1}{a}=\frac{\log_{10}20.4}{3}$ …… ㉠

$(0.0204)^b=1000$에서 $\log_{10}(0.0204)^b=\log_{10}10^3$

$b\log_{10}0.0204=3$ $\therefore \frac{1}{b}=\frac{\log_{10}0.0204}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{\log_{10}20.4}{3}-\frac{\log_{10}0.0204}{3}$$
$$=\frac{\log_{10}20.4-\log_{10}0.0204}{3}$$
$$=\frac{\log_{10}\frac{20.4}{0.0204}}{3}=\frac{\log_{10}1000}{3}=\frac{3}{3}=1$$

$\therefore \log_{10}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\log_{10}1=0$ 정답_ ③

다른 풀이

$p^x=q$의 양변에 $\frac{1}{x}$제곱을 하면 $p=q^{\frac{1}{x}}$임을 이용한다.

$(20.4)^a=1000$에서 $20.4=1000^{\frac{1}{a}}$ ⋯⋯ ㉠

$(0.0204)^b=1000$에서 $0.0204=1000^{\frac{1}{b}}$ ⋯⋯ ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{20.4}{0.0204}=\frac{1000^{\frac{1}{a}}}{1000^{\frac{1}{b}}}$, $1000=1000^{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$

$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=1$ $\therefore \log_{10}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\log_{10}1=0$

109

$2^x=9^y=18^z=k$로 놓고, 각 변에 밑이 10인 로그를 취하면

$\log_{10}2^x=\log_{10}9^y=\log_{10}18^z=\log_{10}k$

$x\log_{10}2=y\log_{10}9=z\log_{10}18=\log_{10}k$

$\therefore \frac{1}{x}=\frac{\log_{10}2}{\log_{10}k}, \frac{1}{y}=\frac{\log_{10}9}{\log_{10}k}, \frac{1}{z}=\frac{\log_{10}18}{\log_{10}k}$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{\log_{10}2}{\log_{10}k}+\frac{\log_{10}9}{\log_{10}k}-\frac{\log_{10}18}{\log_{10}k}$

$=\frac{\log_{10}2+\log_{10}9-\log_{10}18}{\log_{10}k}$

$=\frac{\log_{10}\frac{2\cdot 9}{18}}{\log_{10}k}=\frac{\log_{10}1}{\log_{10}k}=0$ 정답_ ③

다른 풀이

$2^x=9^y=18^z=k$로 놓으면

$2^x=k$에서 $2=k^{\frac{1}{x}}$ ⋯⋯ ㉠

$9^y=k$에서 $9=k^{\frac{1}{y}}$ ⋯⋯ ㉡

$18^z=k$에서 $18=k^{\frac{1}{z}}$ ⋯⋯ ㉢

㉠×㉡÷㉢을 하면 $\frac{2\times 9}{18}=\frac{k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}}{k^{\frac{1}{z}}}$

$k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}=1$ $\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0$

110

$a^x=b^y=c^z=k$로 놓고, 각 변에 밑이 10인 로그를 취하면

$\log_{10}a^x=\log_{10}b^y=\log_{10}c^z=\log_{10}k$

$x\log_{10}a=y\log_{10}b=z\log_{10}c=\log_{10}k$

$\therefore \frac{1}{x}=\frac{\log_{10}a}{\log_{10}k}, \frac{1}{y}=\frac{\log_{10}b}{\log_{10}k}, \frac{1}{z}=\frac{\log_{10}c}{\log_{10}k}$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=\frac{\log_{10}a}{\log_{10}k}+\frac{2\log_{10}b}{\log_{10}k}+\frac{3\log_{10}c}{\log_{10}k}$

$=\frac{\log_{10}a+\log_{10}b^2+\log_{10}c^3}{\log_{10}k}$

$=\frac{\log_{10}ab^2c^3}{\log_{10}k}=\frac{\log_{10}1}{\log_{10}k}=0$ ⇦ $ab^2c^3=1$

정답_ ③

다른 풀이

$a^x=b^y=c^z=k$로 놓으면

$a^x=k$에서 $a=k^{\frac{1}{x}}$ ⋯⋯ ㉠

$b^y=k$에서 $b=k^{\frac{1}{y}}$ ⋯⋯ ㉡

$c^z=k$에서 $c=k^{\frac{1}{z}}$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 $ab^2c^3=1$에 대입하면

$k^{\frac{1}{x}}\times(k^{\frac{1}{y}})^2\times(k^{\frac{1}{z}})^3=1$, $k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{2}{y}}\times k^{\frac{3}{z}}=1$

$k^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}}=1$ $\therefore \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=0$

111

$x^2-6x+2=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=6, \alpha\beta=2$

$\therefore \log_3(\alpha+1)+\log_3(\beta+1)=\log_3(\alpha+1)(\beta+1)$

$=\log_3(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)$

$=\log_3(2+6+1)$

$=\log_3 9=\log_3 3^2=2$ 정답_ ②

112

$x^2-3x+1=0$의 두 근이 $\log_2 a$, $\log_2 b$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\log_2 a+\log_2 b=3$, $\log_2 a\cdot\log_2 b=1$

$\therefore \log_a b+\log_b a=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}+\frac{\log_2 a}{\log_2 b}$

$=\frac{(\log_2 b)^2+(\log_2 a)^2}{\log_2 a\cdot\log_2 b}$

$=\frac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\log_2 a\cdot\log_2 b}{\log_2 a\cdot\log_2 b}$

$=\frac{3^2-2\cdot 1}{1}=7$ 정답_ ②

113

① 주어진 관계식은 무엇인가?

$v=150\log_{10}d+100$

② 주어진 값은 무엇인가?

$v=250$

③ 구하는 값은 무엇인가?

d km

$v=150\log_{10}d+100$에서 $v=250$이므로

$250=150\log_{10}d+100$, $150\log_{10}d=150$

$\log_{10}d=1$ $\therefore d=10(\text{km})$ 정답_ ③

114

① 주어진 관계식은 무엇인가?

$t=\frac{1}{k}\log_2\frac{T-T_s}{T_0-T_s}$

② 주어진 값은 무엇인가?

$T_s=20,\ T_0=100,\ t=10,\ T=60$

③ 구하는 값은 무엇인가?

k

$t=\frac{1}{k}\log_2\frac{T-T_s}{T_0-T_s}$에서 $T_s=20,\ T_0=100,\ t=10,\ T=60$

이므로

$10=\frac{1}{k}\log_2\frac{60-20}{100-20},\ 10=\frac{1}{k}\log_2\frac{1}{2}$

$10k=\log_2 2^{-1}=-1 \qquad \therefore k=-\frac{1}{10}$

정답_ ③

115

① 주어진 관계식은 무엇인가?

$\log_{10}Q_t-\log_{10}Q_0=kt$

② 주어진 값은 무엇인가?

$Q_a=\frac{1}{4}Q_0,\ Q_b=\frac{1}{10}Q_0,\ Q_{2a+b}=\frac{Q_0}{p}$

③ 구하는 값은 무엇인가?

p

(i) $t=a$일 때, $\log_{10}Q_a-\log_{10}Q_0=ak$

$Q_a=\frac{1}{4}Q_0$이므로 $\log_{10}\frac{Q_0}{4}-\log_{10}Q_0=ak$

$\therefore \log_{10}\frac{1}{4}=ak$

(ii) $t=b$일 때, $\log_{10}Q_b-\log_{10}Q_0=bk$

$Q_b=\frac{1}{10}Q_0$이므로 $\log_{10}\frac{Q_0}{10}-\log_{10}Q_0=bk$

$\therefore \log_{10}\frac{1}{10}=bk$

(iii) $t=2a+b$일 때, $\log_{10}Q_{2a+b}-\log_{10}Q_0=(2a+b)k$

$Q_{2a+b}=\frac{Q_0}{p}$이므로 $\log_{10}\frac{Q_0}{p}-\log_{10}Q_0=(2a+b)k$

$\therefore \log_{10}\frac{1}{p}=(2a+b)k \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때,

$(2a+b)k=2ak+bk=2\log_{10}\frac{1}{4}+\log_{10}\frac{1}{10}$

$=\log_{10}\frac{1}{16}+\log_{10}\frac{1}{10}=\log_{10}\left(\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{10}\right)$

$=\log_{10}\frac{1}{160} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

이므로 ㉠, ㉡에 의해 $p=160$

정답_ 160

116

밑이 없으면 밑에 10이 숨어 있는 것이다.

$\log 10^n=\log_{10}10^n=n\log_{10}10=n$

(1) $\log 1000=\log_{10}10^3=3\log_{10}10=3$

(2) $\log 0.0001=\log_{10}\frac{1}{10000}=\log_{10}10^{-4}=-4$

(3) $\log\sqrt{0.1}=\log_{10}(10^{-1})^{\frac{1}{2}}=\log_{10}10^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$

(4) $\log\frac{1}{\sqrt[3]{100}}=\log_{10}\frac{1}{\sqrt[3]{10^2}}=\log_{10}10^{-\frac{2}{3}}=-\frac{2}{3}$

정답_ (1) 3 (2) -4 (3) $-\frac{1}{2}$ (4) $-\frac{2}{3}$

117

$\log 2$, $\log 3$으로부터 $\log 7$을 제외한 1에서 9까지의 자연수에 대한 상용로그의 값을 구할 수 있다.

(1) $\log 1=0$

(2) $\log 4=\log 2^2=2\log 2=2\times 0.3010=0.6020$

(3) $\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2$

$=1-0.3010=0.6990$

(4) $\log 6=\log(2\cdot 3)=\log 2+\log 3$

$=0.3010+0.4771=0.7781$

(5) $\log 8=\log 2^3=3\log 2=3\times 0.3010=0.9030$

(6) $\log 9=\log 3^2=2\log 3=2\times 0.4771=0.9542$

정답_ (1) 0 (2) 0.6020 (3) 0.6990 (4) 0.7781 (5) 0.9030 (6) 0.9542

118

(1) $\log 258=\log(2.58\times 100)=\log(2.58\times 10^2)$

$=\log 2.58+\log 10^2=0.4116+2$

$=2.4116$

(2) $\log 25800=\log(2.58\times 10000)=\log(2.58\times 10^4)$

$=\log 2.58+\log 10^4=0.4116+4$

$=4.4116$

(3) $\log 0.258=\log(2.58\times 10^{-1})=\log 2.58+\log 10^{-1}$

$=0.4116-1=-0.5884$

(4) $\log 0.0258=\log(2.58\times 10^{-2})=\log 2.58+\log 10^{-2}$

$=0.4116-2=-1.5884$

정답_ (1) 2.4116 (2) 4.4116 (3) -0.5884 (4) -1.5884

119

$a=\log(1+\sqrt{2})$에서 $10^a=1+\sqrt{2}$

$$\therefore \frac{10^a+10^{-a}}{10^a-10^{-a}}=\frac{1+\sqrt{2}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}-\frac{1}{1+\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)}{1+\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

정답_ ③

120

100달러에서 시작하여 매년 10 %씩 증가하므로 n년 후의 1인당 국민소득은

$100(1+0.1)^n$

n년 후의 1인당 국민소득이 10000달러이면

$100(1+0.1)^n=10000$

$\therefore 1.1^n=10^2$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 1.1^n=\log 10^2$

$\therefore n\log 1.1=2$

이때

$$\log 1.1=\log\frac{11}{10}=\log 11-\log 10$$
$$=1.04-1=0.04$$

이므로

$0.04n=2 \qquad \therefore n=\dfrac{2}{0.04}=50$

따라서 50년 후에 1인당 국민소득이 10000달러가 된다.

정답_ ③

121

공전주기가 135년이므로

$135^2=d^3$

양변에 상용로그를 취하면

$2\log 135=3\log d$

$2(\log 1.35+\log 100)=3\log d$

$\log 1.35=0.130$이므로

$2(0.130+2)=3\log d,\ 4.260=3\log d$

$\therefore \log d=1.420$

$\log 26.3=1.420$이므로

$\log d=\log 26.3 \qquad \therefore d=26.3$

정답_ ③

122

처음 박테리아의 수를 A라 하고, 20시간이 지난 후 박테리아의 수를 처음의 k배라고 하면 매시간 16 %씩 증가하므로

$A(1+0.16)^{20}=kA$

$\therefore k=1.16^{20}$

주어진 표에서 $\log 1.16=0.0645$이므로

$$\log k=20\log 1.16=20\times 0.0645$$
$$=1.2900$$

주어진 표에서 $\log 1.95=0.2900$이므로

$$1.29=1+0.29$$
$$=1+\log 1.95$$
$$=\log(10\times 1.95)=\log 19.5$$

따라서 $\log k=\log 19.5$이므로 $\quad k=19.5$

정답_ ⑤

123

밑의 조건에 의해 $x-1>0,\ x-1\neq 1$이므로

$x>1,\ x\neq 2$

$\therefore 1<x<2$ 또는 $x>2$ …… ㉠

………… ❶

진수의 조건에 의해 $\quad -x^2-4x+12>0$

$x^2+4x-12<0,\ (x+6)(x-2)<0$

$\therefore -6<x<2$ …… ㉡

………… ❷

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1<x<2$ ………… ❸

따라서 $a=1,\ b=2$이므로 $\quad a+b=3$ ………… ❹

정답_ 3

단계	채점 기준	비율
❶	밑의 조건 구하기	30%
❷	진수의 조건 구하기	30%
❸	x의 값의 범위 구하기	20%
❹	$a+b$의 값 구하기	20%

124

$$(\log_a b+\log_b a)+(\log_b c+\log_c b)+(\log_c a+\log_a c)$$
$$=(\log_a b+\log_a c)+(\log_b a+\log_b c)+(\log_c a+\log_c b)$$
$$=\log_a bc+\log_b ac+\log_c ab \quad \cdots\cdots\cdots ❶$$
$$=\log_a\frac{1}{a}+\log_b\frac{1}{b}+\log_c\frac{1}{c} \quad \cdots\cdots\cdots ❷$$
$$=-1-1-1=-3 \quad \cdots\cdots\cdots ❸$$

정답_ -3

단계	채점 기준	비율
❶	로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 하기	40%
❷	$abc=1$을 이용하여 주어진 식을 간단히 하기	40%
❸	주어진 식의 값 구하기	20%

125

$8<10<16$에서 $\quad \log_2 8<\log_2 10<\log_2 16$

$3<\log_2 10<4 \qquad \therefore \log_2 10=3.\times\times\times$

$\log_2 10$의 정수 부분은 $\quad x=3$

$\log_2 10$의 소수 부분은 정수 부분을 뺀 수이므로

$$y=\log_2 10-3$$
$$=\log_2 10-\log_2 8$$
$$=\log_2\frac{10}{8}=\log_2\frac{5}{4} \quad \cdots\cdots\cdots ❶$$

$$\therefore 2^y-2^{-y}=2^{\log_2\frac{5}{4}}-2^{-\log_2\frac{5}{4}}$$
$$=2^{\log_2\frac{5}{4}}-2^{\log_2\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}}$$
$$=\frac{5}{4}-\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}=\frac{5}{4}-\frac{4}{5}=\frac{9}{20} \quad \cdots\cdots\cdots ❷$$

$$\therefore \frac{2^y-2^{-y}}{2^x+2^{-x}}=\frac{\frac{9}{20}}{2^3+2^{-3}}=\frac{\frac{9}{20}}{8+\frac{1}{8}}$$

$$=\frac{\frac{9}{20}}{\frac{65}{8}}=\frac{18}{325} \cdots\cdots ❸$$

정답_ $\frac{18}{325}$

단계	채점 기준	비율
❶	x, y의 값 구하기	40%
❷	2^y-2^{-y}의 값 구하기	30%
❸	$\frac{2^y-2^{-y}}{2^x+2^{-x}}$의 값 구하기	30%

126

$a^2=b^3=c^5$의 각 변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a a^2=\log_a b^3=\log_a c^5$, $2=3\log_a b=5\log_a c$

$\therefore \log_a b=\frac{2}{3}$, $\log_a c=\frac{2}{5}$ ······ ㉠

······ ❶

$a^2=b^3=c^5$의 각 변에 밑이 b인 로그를 취하면

$\log_b a^2=\log_b b^3=\log_b c^5$, $2\log_b a=3=5\log_b c$

$\therefore \log_b a=\frac{3}{2}$, $\log_b c=\frac{3}{5}$ ······ ㉡

······ ❷

$a^2=b^3=c^5$의 각 변에 밑이 c인 로그를 취하면

$\log_c a^2=\log_c b^3=\log_c c^5$, $2\log_c a=3\log_c b=5$

$\therefore \log_c a=\frac{5}{2}$, $\log_c b=\frac{5}{3}$ ······ ㉢

······ ❸

㉠, ㉡, ㉢에서 가장 큰 수의 값은 $\log_c a=\frac{5}{2}$ ······ ❹

정답_ $\frac{5}{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	$\log_a b$, $\log_a c$의 값 구하기	30%
❷	$\log_b a$, $\log_b c$의 값 구하기	30%
❸	$\log_c a$, $\log_c b$의 값 구하기	30%
❹	가장 큰 수의 값 구하기	10%

127

$2^a=4^b=5^c=10$의 각 변에 밑이 10인 로그를 취하면

$\log_{10} 2^a=\log_{10} 4^b=\log_{10} 5^c=1$ ······ ❶

$a\log_{10} 2=b\log_{10} 4=c\log_{10} 5=1$

$\therefore \frac{1}{a}=\log_{10} 2$, $\frac{1}{b}=\log_{10} 4$, $\frac{1}{c}=\log_{10} 5$ ······ ❷

$\therefore \frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\log_{10} 2-\log_{10} 4-\log_{10} 5$

$=\log_{10} \frac{2}{4\cdot5}=\log_{10} \frac{1}{10}=-1$ ······ ❸

정답_ -1

단계	채점 기준	비율
❶	$2^a=4^b=5^c=10$의 각 변에 밑이 10인 로그 취하기	20%
❷	$\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$의 값 구하기	40%
❸	$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$의 값 구하기	40%

128

$x^2-7x+7=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=7$, $\alpha\beta=7$ ······ ❶

$\therefore p=\frac{5}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{5}{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}$

$=\frac{5}{7^2-2\cdot7}$

$=\frac{5}{35}=7^{-1}$ ······ ❷

$\therefore \log_p \alpha+\log_p \beta=\log_p \alpha\beta=\log_{7^{-1}} 7$

$=-\log_7 7=-1$ ······ ❸

정답_ -1

단계	채점 기준	비율
❶	$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기	30%
❷	p의 값 구하기	30%
❸	$\log_p \alpha+\log_p \beta$의 값 구하기	40%

129

100만 원에 구입한 골동품의 가격이 매년 a %씩 증가하여 14년 후에는 173만 원이 되었으므로

$100\times\left(1+\frac{a}{100}\right)^{14}=173$

$\therefore \left(1+\frac{a}{100}\right)^{14}=1.73$ ······ ㉠

······ ❶

㉠의 양변에 상용로그를 취하면

$14\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\log 1.73$

상용로그표에서 $\log 1.73=0.238$이므로

$\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\frac{0.238}{14}=0.017$

이때, 상용로그표에서 $\log 1.04=0.017$이므로

$1+\frac{a}{100}=1.04$

$\therefore a=4$ ······ ❷

정답_ 4

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 조건을 식으로 나타내기	40%
❷	a의 값 구하기	60%

130

$\log_{x-3}(-x^2+2x+8)$이 정의되려면

밑의 조건에 의해 $x-3>0$, $x-3\neq1$

$x>3$, $x\neq4$

$\therefore 3<x<4$ 또는 $x>4$ ······ ㉠

진수의 조건에 의해 $-x^2+2x+8>0$

$x^2-2x-8<0$, $(x+2)(x-4)<0$

$\therefore -2<x<4$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3<x<4$ ······ ㉢

이차항의 계수가 1이고 ㉢을 해로 갖는 이차부등식은

$(x-3)(x-4)<0$, $x^2-7x+12<0$

따라서 $a=-7$, $b=12$이므로

$b-a=12-(-7)=19$ 정답_ 19

131

ㄱ은 옳다.

$2^{2^2}=2^4=16$, $(2^2)^2=4^2=16$

$\therefore a^{a^a}=(a^a)^a$

ㄴ은 옳지 않다.

$a^8=8^{8^8}=8^{8^7\cdot8}=(8^{8^7})^8$

$\therefore a=8^{8^7}$

ㄷ도 옳다.

$\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 8^{8^8})=\log_{\frac{1}{2}}(8^8\log_2 8)=\log_{\frac{1}{2}}(2^{24}\cdot3)$

$=\log_{2^{-1}}2^{24}+\log_{2^{-1}}3$

$=-24-\log_2 3$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_ ③

132

(가)에서 $\sqrt[3]{xy}=a^b$ $\therefore xy=(a^b)^3=a^{3b}$

(나)에서 $\sqrt{b^{x+y}}=(\sqrt{b})^a$

양변을 제곱하면 $b^{x+y}=(\sqrt{b})^{2a}=b^a$ $\therefore x+y=a$

$\therefore \log_a(x^2y+xy^2)=\log_a xy(x+y)$

$=\log_a(a^{3b}\cdot a)$

$=\log_a a^{3b+1}=3b+1$ 정답_ ②

133

a, b는 선분으로 연결된 이웃한 세 개의 수의 평균이므로

(i) $a=\dfrac{b+\log_3\frac{1}{2}+\log_{\frac{1}{2}}4}{3}$

이때, $\log_{\frac{1}{2}}4=\log_{2^{-1}}2^2=-2\log_2 2=-2$이므로

$3a=b+\log_3\dfrac{1}{2}-2$ ······ ㉠

(ii) $b=\dfrac{a+\log_3 54+4^{\log_2\sqrt{7}}}{3}$

이때, $4^{\log_2\sqrt{7}}=2^{2\log_2\sqrt{7}}=2^{\log_2 7}=7$이므로

$3b=a+\log_3 54+7$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$3(a+b)=a+b+\log_3\dfrac{1}{2}+\log_3 54+5$

이때, $\log_3\dfrac{1}{2}+\log_3 54=\log_3\left(\dfrac{1}{2}\cdot54\right)=\log_3 27=3$이므로

$3(a+b)=a+b+3+5$

$2(a+b)=8$ $\therefore a+b=4$ 정답_ ①

134

$ab=\log_2 3\cdot\log_3 5=\log_2 3\cdot\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}=\log_2 5$

$abc=ab\times\log_5 7=\log_2 5\times\dfrac{\log_2 7}{\log_2 5}=\log_2 7$

이므로

$\dfrac{2ab}{1+a+abc}=\dfrac{2\log_2 5}{\log_2 2+\log_2 3+\log_2 7}$

$=\dfrac{\log_2 5^2}{\log_2(2\cdot3\cdot7)}$

$=\dfrac{\log_2 25}{\log_2 42}$

$=\log_{42}25$

$\therefore N=25$ 정답_ 25

135

$b=a^{a^3}$에서 양변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a b=\log_a a^{a^3}=a^3$ $\therefore \log_b a=\dfrac{1}{a^3}=a^{-3}$

$p=\log_{10}(\log_b a)=\log_{10}a^{-3}=-3\log_{10}a$

$q=a^{\log_a(\log_{10}a)}=\log_{10}a$

$\therefore \dfrac{p}{q}=\dfrac{-3\log_{10}a}{\log_{10}a}=-3$ 정답_ ①

136

$2^a=5^b=k$로 놓으면 $a=\log_2 k$, $b=\log_5 k$

$\dfrac{1}{a}=\log_k 2$, $\dfrac{1}{b}=\log_k 5$

$a+b=2ab$의 양변을 ab로 나누면

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=2$, $\log_k 2+\log_k 5=2$, $\log_k(2\cdot5)=2$

$\log_k 10=2$, $k=\sqrt{10}$ $\therefore k^2=10$

$\therefore 8^a\times5^b=2^{3a}\times5^b=2^{3a}\times2^a=2^{4a}=(2^a)^4=k^4$

$=(k^2)^2=10^2=100$ 정답_ 100

137

$64<65<128$에서 $\log_2 64<\log_2 65<\log_2 128$

$\log_2 2^6 < \log_2 65 < \log_2 2^7$, $6 < \log_2 65 < 7$

$\therefore \log_2 65 = 6.\times\times\times$

따라서 $\log_2 65$의 정수 부분은 6

$\log_2 65$의 소수 부분은 정수 부분을 뺀 수이므로

$a = \log_2 65 - 6$

$25 < 72 < 125$에서 $\log_5 25 < \log_5 72 < \log_5 125$

$2 < \log_5 72 < 3$

$\therefore \log_5 72 = 2.\times\times\times$

따라서 $\log_5 72$의 정수 부분은 2

$\log_5 72$의 소수 부분은 정수 부분을 뺀 수이므로

$b = \log_5 72 - 2$

$$\begin{aligned}\therefore 2^{p+a} \times 5^{q+b} &= 2^{p+\log_2 65 - 6} \times 5^{q+\log_5 72 - 2} \\ &= 2^{\log_2 65} \times 2^{p-6} \times 5^{\log_5 72} \times 5^{q-2} \\ &= 65 \times 2^{p-6} \times 72 \times 5^{q-2} \\ &= (5 \times 13) \times 2^{p-6} \times (2^3 \times 3^2) \times 5^{q-2} \\ &= (2 \times 5)^2 \times 13 \times 3^2 \times 2^{p-5} \times 5^{q-3} \\ &= 100 \times 13 \times 9 \times 2^{p-5} \times 5^{q-3}\end{aligned}$$

여기서 $2^{p+a} \times 5^{q+b}$의 값이 100의 배수가 되려면 p와 q는 $p \geq 5$, $q \geq 3$인 자연수이어야 한다.

따라서 $p+q$의 최솟값은 $5+3=8$ 정답_ 8

138

'도' 음의 초당 진동수가 440 Hz이므로 '도' 음보다 한 음 높은 '레' 음의 초당 진동수는

$440 \times \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^2 = 440 \times 2^{\frac{1}{6}}$ (Hz)

$x = 2^{\frac{1}{6}}$이라 하고 양변에 상용로그를 취하면

$\log x = \frac{1}{6} \log 2 = \frac{1}{6} \times 0.30 = 0.05$

주어진 표에서 $\log 1.12 = 0.05$이므로

$x = 1.12$

따라서 구하는 '레' 음의 초당 진동수는

$440 \times 1.12 = 492.8$ (Hz) 정답_ ①

03 지수함수

139

ㄱ은 지수함수가 아니다.

$y = x^3$은 다항함수이다.

ㄷ은 지수함수가 아니다.

$y = \left(\frac{1}{x}\right)^2$ 은 유리함수이다.

따라서 지수함수인 것은 ㄴ, ㄹ이다. 정답_ ⑤

140

$f(k) = 3f(2)$에서 $2^k = 3 \cdot 2^2$

$\therefore k = \log_2 (3 \cdot 2^2) = \log_2 3 + \log_2 2^2 = 2 + \log_2 3$ 정답_ ②

141

$$\begin{aligned}(g \circ f)(2^x) &= g(f(2^x)) = g(2^x + 1) \\ &= (2^x+1)^2 - 2(2^x+1) + 1 \\ &= 2^{2x} + 2 \cdot 2^x + 1 - 2 \cdot 2^x - 2 + 1 \\ &= 2^{2x}\end{aligned}$$

$(g \circ f)(2^x) = 1$에서 $2^{2x} = 1$

$2x = 0$ $\therefore x = 0$ 정답_ ③

142

$2f(x) = f(x+1) - 8f(x-1)$에서

$2a^x = a^{x+1} - 8a^{x-1}$

양변을 a^x으로 나누면 $2 = a - \frac{8}{a}$

$a^2 - 2a - 8 = 0$, $(a-4)(a+2) = 0$ $\therefore a = 4$ ($\because a > 0$)

따라서 $f(x) = a^x = 4^x$이므로

$$\begin{aligned}\log_2 \{f(2)f(3)\} &= \log_2 (4^2 \cdot 4^3) = \log_2 4^5 \\ &= \log_2 2^{10} = 10\end{aligned}$$ 정답_ ⑤

143

$g(\sqrt{2}) = k$, $g\left(\frac{1}{4}\right) = l$로 놓으면

$f(k) = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $f(l) = \frac{1}{4} = 2^{-2}$이므로

$2^k = 2^{\frac{1}{2}}$, $2^l = 2^{-2}$ $\therefore k = \frac{1}{2}$, $l = -2$

$\therefore g(\sqrt{2})g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$ 정답_ ②

144

$g(-2) = k$로 놓으면 $f(k) = -2$이므로

$\frac{3^k + 3^{-k}}{3^k - 3^{-k}} = -2$, $\frac{3^{2k}+1}{3^{2k}-1} = -2$

$3^{2k} + 1 = -2(3^{2k} - 1)$, $3 \cdot 3^{2k} = 1$, $3^{2k+1} = 1$

$2k + 1 = 0$ $\therefore k = -\frac{1}{2}$ 정답_ ①

145

③ $f(3) = a^3$, $\sqrt[3]{f(6)} = \sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$

$\therefore f(3) \neq \sqrt[3]{f(6)}$ 정답_ ③

146

ㄱ은 옳다.

$a^x \times a^y = a^{x+y}$이므로

$f(x) \times f(y) = f(x+y)$

ㄴ도 옳다.

$a^x \div a^y = a^{x-y}$이므로

$f(x) \div f(y) = f(x-y)$

ㄷ은 옳지 않다.

$\{f(x)\}^y = (a^x)^y = a^{xy}$, $f(x^y) = a^{x^y}$이므로

$\{f(x)\}^y \neq f(x^y)$

ㄹ도 옳다.

$f(-x) = a^{-x} = (a^x)^{-1} = \dfrac{1}{a^x} = \dfrac{1}{f(x)}$이므로

$f(x) = \dfrac{1}{f(-x)}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 정답_ ③

147

ㄱ은 옳지 않다.

$f(-x) = \dfrac{2^{-x}+2^x}{2}$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}}+2^{-\frac{1}{x}}}{2}$

$\therefore f(-x) \neq f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

ㄴ은 옳다.

$$f(x)g(x) = \frac{2^x+2^{-x}}{2} \times \frac{2^x-2^{-x}}{2} = \frac{(2^x)^2-(2^{-x})^2}{4}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{2^{2x}-2^{-2x}}{2} = \frac{1}{2}g(2x)$$

ㄷ도 옳다.

$$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2 = \left(\frac{2^x+2^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2^x-2^{-x}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{2^{2x}+2^{-2x}+2}{4} + \frac{2^{2x}+2^{-2x}-2}{4}$$
$$= \frac{2(2^{2x}+2^{-2x})}{4}$$
$$= \frac{2^{2x}+2^{-2x}}{2} = f(2x)$$

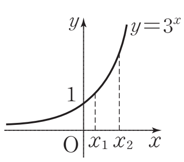
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ④

148

④ $f(x)=3^x$은 밑이 1보다 큰 지수함수이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 오른쪽 그림에서 $x_1 < x_2$이면

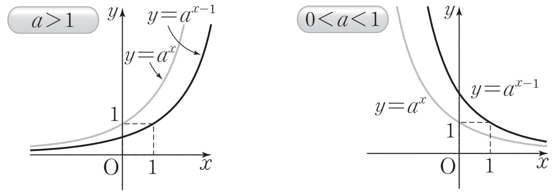
$f(x_1) < f(x_2)$



정답_ ④

149

함수 $y=a^{x-1}$의 그래프는 함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



ㄷ은 옳지 않다.

함수 $y=a^{x-1}$의 그래프는 점 $(1,\ 1)$을 지난다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 정답_ ⑤

150

$y=f(g(x))=f\left(\dfrac{|x|}{2}\right)=3^{\frac{|x|}{2}}$

(i) $x \geq 0$일 때

$y=f(g(x))=3^{\frac{x}{2}}=(\sqrt{3})^x$

(ii) $x < 0$일 때

$y=f(g(x))=3^{-\frac{x}{2}}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$

따라서 함수 $y=f(g(x))$의 그래프의 개형은 ②이다. 정답_ ②

151

ㄱ. $y=\dfrac{1}{2^x}=2^{-x}$이므로 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면 얻을 수 있다.

ㄴ. $y=\sqrt{2^x}=(2^x)^{\frac{1}{2}}=(2^{\frac{1}{2}})^x=(\sqrt{2})^x$이므로 $y=2^x$의 그래프와 평행이동 또는 대칭이동에 의해 겹쳐질 수 없다.

ㄷ. $y=4 \cdot 2^x=2^2 \cdot 2^x=2^{x+2}$이므로 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=2^x$의 그래프와 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ③

152

함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 $y=2^{x-m}+n$

이때, $y=2^{x-m}+n$의 그래프가 두 점 $(-2,\ -1)$, $(0,\ 5)$를 지나므로

$-1=2^{-2-m}+n$ ······ ㉠

$5=2^{-m}+n$ ······ ㉡

㉡−㉠을 하면

$2^{-m}-2^{-2-m}=6$, $2^{-m}\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=6$

$2^{-m}=8=2^3$ $\therefore m=-3$

$5=2^3+n$에서 $n=-3$

$\therefore m+n=-6$ 정답_③

153

함수 $f(x)=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 되므로

$g(x)=2^{x-m}+n$

점 $A(1,\ f(1))$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 점 $A'(3,\ g(3))$이 되므로

$1+m=3 \quad \therefore m=2$

이때, $g(x)=2^{x-2}+n$이고 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $2^{-2}+n=1 \quad \therefore n=\frac{3}{4}$

$\therefore m+n=2+\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$ 정답_①

154

$f(x)=x+1$이므로

$y=2^{f(x)-1}=2^{(x+1)-1}=2^x$

따라서 $y=2^{f(x)-1}$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ②이다.

정답_②

155

주어진 그래프에서 $f(b)=a^b=3,\ f(c)=a^c=6$이므로

$f(b)\times f(c)=a^b\times a^c=a^{b+c}=18$

$\therefore f\left(\frac{b+c}{2}\right)=a^{\frac{b+c}{2}}=18^{\frac{1}{2}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ 정답_③

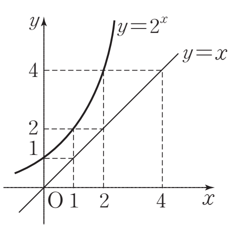
156

직선 $y=x$ 위의 점은 x좌표와 y좌표가 서로 같다.

따라서 $a=1,\ b=2,\ c=4$이므로

$a-b+c=3$

$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{a-b+c}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$



정답_①

157

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$라고 하면

P, Q의 y좌표가 모두 7이므로 $4^\alpha=7,\ 2^\beta=7$

$\therefore \alpha=\log_4 7,\ \beta=\log_2 7$

$\therefore \overline{PQ}=\beta-\alpha=\log_2 7-\log_4 7=\frac{1}{2}\log_2 7$ 정답_①

158

점 C는 함수 $y=2^x$의 그래프 위의 점이므로 C의 x좌표를 a라고 하면 $C(a,\ 16)$이므로

$2^a=16 \quad \therefore a=4$

따라서 □ABCD는 한 변의 길이가 4인 정사각형이다.

이때, $\overline{AD}=4$이므로 $A(0,\ 12)$

점 E는 함수 $y=2^x$의 그래프 위의 점이므로 점 E의 x좌표를 b라고 하면 $E(b,\ 12)$이므로

$2^b=12 \quad \therefore b=\log_2 12$

$\therefore \overline{EB}=4-\log_2 12=\log_2 16-\log_2 12$

$=\log_2\frac{4}{3}$ 정답_③

159

함수 $y=3^{x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 함수 $y=3^{x-2}$의 그래프이다.

$\therefore \overline{AB}=3$

$\overline{AB}=\overline{AC}$이므로 $\overline{AC}=3$

점 A의 좌표를 $(a,\ 3^{a+1})$이라고 하면 점 C의 좌표는 $(a,\ 3^{a-2})$이므로

$\overline{AC}=3^{a+1}-3^{a-2}=3\cdot 3^a-\frac{1}{9}\cdot 3^a=\frac{26}{9}\cdot 3^a=3$

$\therefore 3^a=\frac{27}{26}$

따라서 점 A의 y좌표는

$3^{a+1}=3\cdot 3^a=3\times\frac{27}{26}=\frac{81}{26}$ 정답_①

160

곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=h(x)$는 y축에 대하여 대칭이므로

$2=f(-2)=h(2)$에서 두 점 P, R의 x좌표는 각각 $-2,\ 2$

점 Q의 x좌표를 α라고 하면 $\overline{PQ}=2\overline{QR}$이므로

$\alpha-(-2)=2(2-\alpha),\ 3\alpha=2$

$\therefore \alpha=\frac{2}{3}$

$g(\alpha)=2$에서 $b^{\frac{2}{3}}=2$

$\therefore b=2^{\frac{3}{2}}$

$\therefore g(4)=b^4=(2^{\frac{3}{2}})^4=2^6=64$ 정답_⑤

161

$A=2^{\sqrt{3}}$

$B=\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^4}=2^{\frac{4}{3}}$

$C=\sqrt[4]{256}=\sqrt[4]{2^8}=2^{\frac{8}{4}}=2^2$

이때, 밑이 1보다 크고 $\frac{4}{3}<\sqrt{3}<2$이므로

$2^{\frac{4}{3}}<2^{\sqrt{3}}<2^2$

$\therefore B<A<C$ 정답_ ③

162

ㄱ은 옳다.

$\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[4]{32}=\sqrt[4]{2^5}=2^{\frac{5}{4}}$

$\frac{3}{2}>\frac{5}{4}$이므로 $2^{\frac{3}{2}}>2^{\frac{5}{4}}$ $\therefore \sqrt{8}>\sqrt[4]{32}$

ㄴ도 옳다.

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

이때, $\frac{1}{4}<\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$

ㄷ도 옳다.

$\{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\}^{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2$, $(\sqrt{2})^{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}}=(\sqrt{2})^{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\sqrt{2}}}=(\sqrt{2})^{2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$

이때, $1>\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{2}>1$이므로 $(\sqrt{2})^2>(\sqrt{2})^{2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$

$\therefore \{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\}^{\sqrt{2}}>(\sqrt{2})^{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

163

$0<a<1$에서 $a^0>a^a>a^1$

$\therefore 1>a^a>a$

$0<a<1$이고, $1>a^a>a$이므로 $a^1<a^{a^a}<a^a$

$\therefore a<a^{a^a}<a^a$ 정답_ ②

164

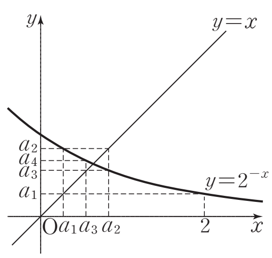
$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1, 2, 3)$에서

$a_2=f(a_1)$, $a_3=f(a_2)$,

$a_4=f(a_3)$이므로 오른쪽 그림에서 a_2, a_3, a_4 사이의 대소 관계는

$a_3<a_4<a_2$

정답_ ④



165

(1) $x=-1$일 때, $y=2^{-3}=\frac{1}{8}$

$x=1$일 때 $y=2^1=2$

따라서 최댓값은 2, 최솟값은 $\frac{1}{8}$이다.

(2) $x=0$일 때, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{0+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{1}{3}$

$x=2$일 때, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{2+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

따라서 최댓값은 $\frac{1}{3}$, 최솟값은 $\frac{1}{27}$이다.

(3) $x=1$일 때, $y=2\cdot3^0-1=1$

$x=2$일 때, $y=2\cdot3^1-1=5$

따라서 최댓값은 5, 최솟값은 1이다.

(4) $x=-1$일 때, $y=-3\cdot2^2+1=-11$

$x=0$일 때, $y=-3\cdot2^1+1=-5$

따라서 최댓값은 -5, 최솟값은 -11이다.

정답_(1) 최댓값 : 2, 최솟값 : $\frac{1}{8}$ (2) 최댓값 : $\frac{1}{3}$, 최솟값 : $\frac{1}{27}$
(3) 최댓값 : 5, 최솟값 : 1 (4) 최댓값 : -5, 최솟값 : -11

166

함수 $f(x)$는 밑이 1보다 크므로 $x=1$일 때 최댓값을 갖는다.

즉, $M=f(1)=2$

함수 $g(x)$는 밑이 1보다 작으므로 $x=1$일 때 최솟값을 갖는다.

즉, $m=g(1)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$\therefore Mm=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ 정답_ ②

167

$y=2^{x+1}\cdot3^{-(x+1)}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$

밑이 1보다 작으므로 $x=-2$일 때 최댓값, $x=1$일 때 최솟값을 갖는다.

$\therefore M=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}$, $m=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

$\therefore 3Mm=3\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{9}=2$ 정답_ ②

168

$f(x)=a^{x-1}$에서 $f(2)=a$, $f(5)=a^4$

(i) $0<a<1$일 때, 최댓값은 $f(2)$, 최솟값은 $f(5)$이므로

$f(2)=27f(5)$에서 $a=27a^4$, $a^3=\frac{1}{27}$ $\therefore a=\frac{1}{3}$

(ii) $a>1$일 때, 최댓값은 $f(5)$, 최솟값은 $f(2)$이므로

$f(5)=27f(2)$에서 $a^4=27a$, $a^3=27$ $\therefore a=3$

(i), (ii)에서 구하는 모든 실수 a의 값의 곱은 $\frac{1}{3}\cdot3=1$ 정답_ ①

169

(1) $x^2-2x+3=(x-1)^2+2$의 최솟값은 2이고, 밑이 1보다 크므로 주어진 함수는 최솟값 $2^2=4$를 갖는다.

(2) $-x^2+2x=-(x-1)^2+1$의 최댓값은 1이고, 밑이 1보다 크므로 주어진 함수는 최댓값 $\frac{3}{2}$을 갖는다.

(3) $x^2-8x+15=(x-4)^2-1$의 최솟값은 -1이고, 밑이 1보다 작으므로 주어진 함수는 최댓값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$을 갖는다.

(4) $-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$의 최댓값은 1이고, 밑이 1보다 작으므로 주어진 함수는 최솟값 $\frac{2}{3}$를 갖는다.

정답_ (1) 최솟값 : 4 (2) 최댓값 : $\frac{3}{2}$

(3) 최댓값 : 3 (4) 최솟값 : $\frac{2}{3}$

170

$f(x)=2^{x^2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}=2^{x^2}\times2^{-2x+3}=2^{x^2-2x+3}$

밑이 1보다 크므로 지수가 최소일 때, $f(x)$도 최소가 된다.

이때, $x^2-2x+3=(x-1)^2+2$의 최솟값은 2이므로

$f(x)$의 최솟값은 $2^2=4$ 정답_ ⑤

171

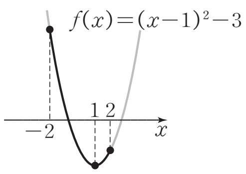
$a>1$이므로 지수가 최대일 때, y의 값이 최대가 된다. 이때, $-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$의 최댓값은 4이므로 y의 최댓값은 a^4이다.

즉, $a^4=16$이고, $a>1$이므로 $a=2$ 정답_ ⑤

172

$f(x)=x^2-2x-2$로 놓고

$f(x)=(x-1)^2-3$의 그래프를 그린 후, $-2\le x\le2$의 부분만 잘라내면 오른쪽 그림과 같으므로



$f(x)$의 최댓값은

$f(-2)=6$

따라서 함수 $y=2^{x^2-2x-2}$은 $x=-2$일 때, 최댓값 $2^6=64$를 가지므로 $a=-2$, $b=64$

$\therefore a+b=62$ 정답_ ②

173

$y=9^x-2\cdot3^{x+1}+1=(3^x)^2-6\cdot3^x+1$

$3^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$y=t^2-6t+1=(t-3)^2-8$

따라서 $t=3$, 즉 $x=1$일 때, y는 최솟값 -8을 가지므로

$a=1$, $b=-8$

$\therefore a+b=-7$ 정답_ ④

174

$y=9^x-2k\cdot3^{x+1}+3=(3^x)^2-6k\cdot3^x+3$

$3^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$y=t^2-6kt+3=(t-3k)^2-9k^2+3$

y의 최솟값이 -6이므로 $-9k^2+3=-6$, $k^2=1$

$\therefore k=1$ $(\because k>0)$ 정답_ ①

175

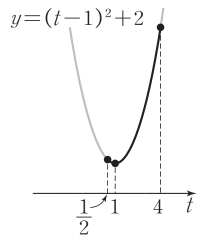
$y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+3=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+3$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$

이때, $-2\le x\le1$이므로 $\frac{1}{2}\le t\le4$

$y=(t-1)^2+2$의 그래프를 그린 후, $\frac{1}{2}\le t\le4$의 부분만 잘라내면 오른쪽 그림과 같다.



$t=1$, 즉 $x=0$일 때 최솟값 2, $t=4$, 즉 $x=-2$일 때 최댓값 11을 가지므로

$a=0$, $b=2$, $c=-2$, $d=11$

$\therefore a+b+c+d=0+2+(-2)+11=11$ 정답_ ①

176

$2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$2^x+2^{-x}\ge2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}$

$=2$ (단, 등호는 $2^x=2^{-x}$, 즉 $x=0$일 때 성립)

따라서 주어진 함수의 최솟값은 2이다. 정답_ ②

177

$2^x>0$, $2^y>0$, $x+y=1$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$2^x+2^y\ge2\sqrt{2^x\cdot2^y}=2\sqrt{2^{x+y}}$

$=2\sqrt{2}$ $\left(\text{단, 등호는 } 2^x=2^y\text{, 즉 } x=y=\frac{1}{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 2^x+2^y의 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다. 정답_ ②

178

$3^{a+x}>0$, $3^{a-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$3^{a+x}+3^{a-x}\ge2\sqrt{3^{a+x}\cdot3^{a-x}}=2\sqrt{3^{2a}}$

$=2\cdot3^a$ (단, 등호는 $3^{a+x}=3^{a-x}$, 즉 $x=0$일 때 성립)

따라서 주어진 함수의 최솟값은 $2\cdot3^a$이므로

$2\cdot3^a=18$, $3^a=9$ $\therefore a=2$ 정답_ ②

179

$2^x+2^{-x}=t$로 놓으면

$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$이므로

$y=t^2-2+6t+4=t^2+6t+2=(t+3)^2-7$

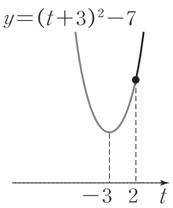
$2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$t=2^x+2^{-x}$

$\ge2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=2$

(단, 등호는 $2^x=2^{-x}$, 즉 $x=0$일 때 성립)

$y=(t+3)^2-7$의 그래프를 그린 후, $t\geq 2$의 부분만 잘라내면 오른쪽 그림과 같으므로 $t=2$일 때, 최솟값 18을 갖는다.



정답_ ④

180

두 함수 $y=2^x$, $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프와 직선 $x=k$의 교점은

각각 $\mathrm{P}(k,\ 2^k)$, $\mathrm{Q}\left(k,\ -\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=2^k+\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$2^k>0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^k>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$\overline{\mathrm{PQ}}=2^k+\left(\frac{1}{2}\right)^k \geq 2\sqrt{2^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k} =2 \left(\text{단, 등호는 } 2^k=\left(\frac{1}{2}\right)^k\text{, 즉 } k=0\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값은 2이다.

정답_ ④

181

(1) $2^{2x+1}=32$에서 $2^{2x+1}=2^5$이므로

$2x+1=5,\ 2x=4 \quad \therefore x=2$

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}=81$에서 $3^{-2x+1}=3^4$이므로

$-2x+1=4,\ -2x=3 \quad \therefore x=-\frac{3}{2}$

(3) $100^{x+1}=\frac{1}{\sqrt{10}}$에서 $10^{2x+2}=10^{-\frac{1}{2}}$이므로

$2x+2=-\frac{1}{2},\ 2x=-\frac{5}{2} \quad \therefore x=-\frac{5}{4}$

(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+2}=4^{x+2}$에서 $2^{x-2}=2^{2x+4}$이므로

$x-2=2x+4 \quad \therefore x=-6$

정답_ (1) $x=2$ (2) $x=-\frac{3}{2}$ (3) $x=-\frac{5}{4}$ (4) $x=-6$

182

$\left(\frac{1}{4}\right)^{1-x}=8\sqrt[4]{2}$에서 $\quad 2^{-2+2x}=2^{3+\frac{1}{4}}$

$-2+2x=3+\frac{1}{4},\ 2x=\frac{21}{4} \quad \therefore x=\frac{21}{8}$

따라서 $p=8,\ q=21$이므로 $\quad p+q=29$

정답_ ⑤

183

$(2^x-8)(3^{2x}-9)=0$에서 $\quad 2^x=8$ 또는 $3^{2x}=9$

$2^x=8$에서 $2^x=2^3$이므로 $\quad x=3$

$3^{2x}=9$에서 $3^{2x}=3^2$이므로 $\quad x=1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=3^2+1^2=10$

정답_ ⑤

184

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^3+6}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-2x^2-5x}$에서 $\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{x^3+6}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2+5x}$

$x^3+6=2x^2+5x \quad \therefore x^3-2x^2-5x+6=0$

따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 구하는 모든 x의 값의 곱은 -6이다.

정답_ ①

185

(1) $4^x-5\cdot 2^x+4=0$에서 $\quad (2^x)^2-5\cdot 2^x+4=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-5t+4=0$

$(t-1)(t-4)=0 \quad \therefore t=1$ 또는 $t=4$

$2^x=1$ 또는 $2^x=4$이므로 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

(2) $9^x-8\cdot 3^x-9=0$에서 $\quad (3^x)^2-8\cdot 3^x-9=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-8t-9=0$

$(t+1)(t-9)=0 \quad \therefore t=-1$ 또는 $t=9$

이때, $t>0$이므로 $\quad t=9$

$3^x=9 \quad \therefore x=2$

정답_ (1) $x=0$ 또는 $x=2$ (2) $x=2$

186

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$이므로 $\quad 2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$

즉, 주어진 방정식은 $\quad (2+\sqrt{3})^x+\frac{1}{(2+\sqrt{3})^x}=4$

$(2+\sqrt{3})^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t+\frac{1}{t}=4$

$t^2+1=4t,\ t^2-4t+1=0 \quad \therefore t=2\pm\sqrt{3}$

(i) $t=2+\sqrt{3}$일 때

$(2+\sqrt{3})^x=2+\sqrt{3} \quad \therefore x=1$

(ii) $t=2-\sqrt{3}$일 때

$(2+\sqrt{3})^x=2-\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^{-1} \quad \therefore x=-1$

(i), (ii)에서 구하는 모든 근의 곱은 $\quad 1\cdot(-1)=-1$

정답_ ②

187

주어진 연립방정식을 정리하면 $\begin{cases}3^x+3^y=12\\3^x\cdot 3^y=27\end{cases}$

$3^x=A,\ 3^y=B\ (A>0,\ B>0)$로 놓으면 $\begin{cases}A+B=12\\AB=27\end{cases}$

합이 12, 곱이 27인 두 수는 3과 9이므로

$A=3,\ B=9$ 또는 $A=9,\ B=3$

$\therefore 3^x=3,\ 3^y=9$ 또는 $3^x=9,\ 3^y=3$

따라서 $x=1,\ y=2$ 또는 $x=2,\ y=1$이므로

$\alpha^2+\beta^2=1^2+2^2=5$

정답_ ③

188

$a^x+\frac{1}{a^x}=\frac{5}{2}$에 $x=1$을 대입하면

$a+\frac{1}{a}=\frac{5}{2}$, $2a^2-5a+2=0$

$(2a-1)(a-2)=0$ $\quad\therefore a=2\ (\because a>1)$

$2^x+\frac{1}{2^x}=\frac{5}{2}$에서 $2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$, $2t^2-5t+2=0$

$(2t-1)(t-2)=0$ $\quad\therefore t=2$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

$2^x=2$ 또는 $2^x=\frac{1}{2}$이므로 $\quad x=1$ 또는 $x=-1$

따라서 구하는 다른 한 근은 -1이다. 정답_ ①

189

$3^{x+2}+3^{x-2}=1+9^x$에서 $\quad 9\cdot 3^x+\frac{3^x}{9}=1+(3^x)^2$

위의 식의 양변에 9를 곱하여 정리하면

$9(3^x)^2-82\cdot 3^x+9=0$ …… ㉠

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad 9t^2-82t+9=0$ …… ㉡

㉠의 두 근이 α, β이므로 ㉡의 두 근은 3^α, 3^β이다.

㉡에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$3^\alpha\cdot 3^\beta=1$, $3^{\alpha+\beta}=1$ $\quad\therefore \alpha+\beta=0$ 정답_ ③

190

$4^x-2^{x+1}-a=0$에서 $\quad (2^x)^2-2\cdot 2^x-a=0$ …… ㉠

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-2t-a=0$ …… ㉡

㉠의 두 근을 α, β라고 하면 ㉡의 두 근은 2^α, 2^β이다.

㉡에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$2^\alpha\cdot 2^\beta=-a$ $\quad\therefore 2^{\alpha+\beta}=-a$ …… ㉢

㉠의 두 근의 합이 -1이므로 $\quad \alpha+\beta=-1$

이것을 ㉢에 대입하면 $\quad 2^{-1}=-a$, $a=-\frac{1}{2}$

$\therefore 40a^2=40\cdot\frac{1}{4}=10$ 정답_ ⑤

191

$2^{2x}-a\cdot 2^x+4=0$에서 $2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-at+4=0$ …… ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 근을 가져야 한다.

이때, 서로 다른 두 양의 근을 α, β라고 하면 판별식 D에 대하여

(ⅰ) $\frac{D}{4}=a^2-16>0$에서 $\quad (a+4)(a-4)>0$

$\quad\therefore a>4$ 또는 $a<-4$

(ⅱ) $\alpha+\beta=a>0$

(ⅲ) $\alpha\beta=4>0$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 공통부분을 구하면 $\quad a>4$ 정답_ ①

192

(1) (ⅰ) $x=1$을 대입하면 $\quad 1^4=1^8=1$

(ⅱ) $x\neq 1$일 때, $x+3=9-x$에서 $\quad 2x=6$ $\quad\therefore x=3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\quad x=1$ 또는 $x=3$

(2) (ⅰ) $x=0$을 대입하면 $\quad 1^0=3^0=1$

(ⅱ) $x\neq 0$일 때, $x+1=3$에서 $\quad x=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

정답_ (1) $x=1$ 또는 $x=3$ (2) $x=0$ 또는 $x=2$

193

(ⅰ) 밑이 같으므로 $\quad x^2-3x-2=x+3$

$x^2-4x-5=0$, $(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=5\ (\because x>1)$

(ⅱ) $x-1=1$에서 $\quad x=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\quad x=2$ 또는 $x=5$

따라서 모든 근의 합은 $\quad 2+5=7$ 정답_ ③

194

(ⅰ) 지수가 같으면 밑도 같아야 하므로

$x-1=2$ $\quad\therefore x=3$

(ⅱ) $x-2=0$, 즉 $x=2$를 대입하면 $\quad 1^0=2^0=1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식을 만족시키는 정수 x는 2, 3이므로 그 합은 $\quad 2+3=5$ 정답_ ③

195

(ⅰ) $x=-2$를 대입하면 $\quad 5^0=1$

(ⅱ) $x^2-x-1=1$일 때, $\quad x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$x=-1$을 대입하면 $\quad 1^1=1$

$x=2$를 대입하면 $\quad 1^4=1$

(ⅲ) $x^2-x-1=-1$일 때, $\quad x^2-x=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=1$

$x=0$을 대입하면 $\quad (-1)^2=1$

$x=1$을 대입하면 $\quad (-1)^3=-1\neq 1$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 주어진 방정식을 만족시키는 정수 x는 -2, -1, 0, 2로 4개이다. 정답_ ④

196

(1) $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x-3}\geq\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}$에서 $\quad 2x-3\leq x-1$ $\quad\therefore x\leq 2$

(2) $8^{x-1}<\frac{1}{\sqrt{2}}$에서 $\quad 2^{3x-3}<2^{-\frac{1}{2}}$

$3x-3<-\frac{1}{2}$, $3x<\frac{5}{2}$ $\quad\therefore x<\frac{5}{6}$

(3) $4^x\leq(\sqrt{2})^{3x-1}$에서 $\quad 2^{2x}\leq 2^{\frac{3x-1}{2}}$

$2x\le\frac{3x-1}{2}$, $4x\le 3x-1$ $\quad\therefore x\le -1$

(4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x<\sqrt[3]{3}<\left(\frac{1}{9}\right)^{x-1}$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-2}$

$2x-2<-\frac{1}{3}<x$ $\quad\therefore -\frac{1}{3}<x<\frac{5}{6}$

정답_(1) $x\le 2$ (2) $x<\frac{5}{6}$ (3) $x\le -1$ (4) $-\frac{1}{3}<x<\frac{5}{6}$

197

$\left(\frac{1}{5}\right)^{3-x}\ge 5^{2x-5}$에서 $5^{x-3}\ge 5^{2x-5}$

$x-3\ge 2x-5$ $\quad\therefore x\le 2$

따라서 구하는 자연수 x의 최댓값은 2이다. 정답_ ②

198

$(3^x-5)(3^x-100)<0$에서 $5<3^x<100$

$3<3^x<3^5$ $\quad\therefore 1<x<5$

따라서 구하는 자연수 x는 2, 3, 4이므로 그 합은

$2+3+4=9$ 정답_ ③

199

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}>\frac{1}{81}$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}>\left(\frac{1}{3}\right)^4$

$2x<4$ $\quad\therefore x<2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$8^{x^2+2x-4}\le 4^{x^2+x}$에서 $2^{3x^2+6x-12}\le 2^{2x^2+2x}$

$3x^2+6x-12\le 2x^2+2x$, $x^2+4x-12\le 0$

$(x+6)(x-2)\le 0$ $\quad\therefore -6\le x\le 2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-6\le x<2$

따라서 구하는 정수 x는 $-6, -5, \cdots, 1$로 8개이다.

정답_ ⑤

200

(1) $4^x-6\cdot 2^x+8<0$에서 $(2^x)^2-6\cdot 2^x+8<0$

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-6t+8<0$, $(t-2)(t-4)<0$, 즉 $2<t<4$

$2<2^x<4$, $2^1<2^x<2^2$ $\quad\therefore 1<x<2$

(2) $9^x-4\cdot 3^x-45\le 0$에서 $(3^x)^2-4\cdot 3^x-45\le 0$

$3^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-4t-45\le 0$, $(t-9)(t+5)\le 0$, 즉 $-5\le t\le 9$

이때, $t>0$에서 $t+5>0$이므로

$t-9\le 0$, $t\le 9$ $\quad\therefore 0<t\le 9$

그런데 $t=3^x$은 x의 값에 관계없이 항상 0보다 크므로

$t\le 9$, $3^x\le 9$ $\quad\therefore x\le 2$

정답_(1) $1<x<2$ (2) $x\le 2$

201

$2^{2x-1}-2^{x+2}-2^{x-2}+2<0$에서

$\frac{1}{2}\cdot(2^x)^2-4\cdot 2^x-\frac{1}{4}\cdot 2^x+2<0$

위의 식의 양변에 4를 곱하면

$2\cdot(2^x)^2-16\cdot 2^x-2^x+8<0$

$\therefore 2\cdot(2^x)^2-17\cdot 2^x+8<0$

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 $2t^2-17t+8<0$

$(2t-1)(t-8)<0$ $\quad\therefore \frac{1}{2}<t<8$

$2^{-1}<2^x<2^3$ $\quad\therefore -1<x<3$ 정답_ ④

202

$x^{2x-1}<x^{x+3}$에서

(i) $x=1$일 때에는 부등식이 성립하지 않는다.

(ii) $0<x<1$일 때, $2x-1>x+3$ $\quad\therefore x>4$

그런데 $0<x<1$이므로 이 범위에서 해는 없다.

(iii) $x>1$일 때, $2x-1<x+3$ $\quad\therefore x<4$

그런데 $x>1$이므로 $1<x<4$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $1<x<4$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=4$이므로 $\alpha+\beta=5$ 정답_ ③

203

$x^{x^2-6}>x^x$에서

(i) $x=1$일 때에는 부등식이 성립하지 않는다.

(ii) $0<x<1$일 때

$x^2-6<x$에서 $x^2-x-6<0$

$(x-3)(x+2)<0$ $\quad\therefore -2<x<3$

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$

(iii) $x>1$일 때

$x^2-6>x$에서 $x^2-x-6>0$

$(x-3)(x+2)>0$ $\quad\therefore x<-2$ 또는 $x>3$

그런데 $x>1$이므로 $x>3$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$0<x<1$ 또는 $x>3$

따라서 주어진 수 중에서 집합 S의 원소인 것은 4이다.

정답_ ⑤

204

$\frac{1}{2}<2^{ax(x+1)}$에서 $2^{-1}<2^{ax^2+ax}$

$-1<ax^2+ax$ $\quad\therefore ax^2+ax+1>0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

(i) $a=0$일 때, ㉠은 $0\cdot x^2+0\cdot x+1=1>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ⅱ) $a \neq 0$일 때, 이차방정식 $ax^2+ax+1=0$의 판별식 D에 대하여 $a>0$이고 $D=a^2-4a<0$이어야 하므로 $0<a<4$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $0 \leq a < 4$

따라서 구하는 정수 a는 0, 1, 2, 3으로 4개이다. 정답_ ④

205

$(3^{x+2}-1)(3^{x-p}-1) \leq 0$의 양변에 $3^{-2} \times 3^p$을 곱하면

$3^{-2} \cdot 3^p(3^{x+2}-1)(3^{x-p}-1) \leq 0$, $(3^x-3^{-2})(3^x-3^p) \leq 0$

p가 자연수이므로 $3^{-2} \leq 3^x \leq 3^p$ $\quad \therefore -2 \leq x \leq p$

$-2 \leq x \leq p$를 만족시키는 정수 x는 $-2, -1, 0, 1, \cdots, p$이고,

정수 x의 개수가 20이므로

$p+3=20$ $\quad \therefore p=17$ 정답_ ②

206

$a^{2x}-28 \cdot a^x+b<0$에서 $a^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-28t+b<0$ ...... ㉠

$0<x<3$에서 $a^0<a^x<a^3$ ($\because a>1$)

$\therefore 1<t<a^3$ ...... ㉡

이때, ㉠의 해가 ㉡이므로 이차방정식 $t^2-28t+b=0$의 두 근은 1, a^3이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$1+a^3=28$, $1 \times a^3=b$

$a^3=27$, $a^3=b$

$a=3$, $b=27$이므로 $a+b=30$ 정답_ ④

207

$\left(\frac{1}{10}\right)^{x-3} > \left(\frac{1}{10}\right)^{2-x}$에서

$x-3<2-x$ $\quad \therefore x<\frac{5}{2}$ ...... ㉠

$4^x-3 \cdot 2^{x+2}+32<0$에서 $(2^x)^2-12 \cdot 2^x+32<0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-12t+32<0$

$(t-4)(t-8)<0$, $4<t<8$

$2^2<2^x<2^3$ $\quad \therefore 2<x<3$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2<x<\frac{5}{2}$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=\frac{5}{2}$이므로 $\alpha\beta=5$ 정답_ ⑤

208

3000마리의 대장균이 60분 후에 24000마리가 되므로

$3000a^{60}=24000$, $a^{60}=8$ $\quad \therefore a=8^{\frac{1}{60}}$

따라서 한 마리의 대장균이 x분 후 $8^{\frac{x}{60}}$ 마리가 되므로

$3000 \cdot 8^{\frac{x}{60}}=192000$, $8^{\frac{x}{60}}=64=8^2$ $\quad \therefore x=120$

즉, 120분 후에 192000마리가 된다. 정답_ 120분 후

209

이 금융상품에 초기자산 w_0을 투자하고 15년이 지난 시점에서의 기대자산은 초기자산의 3배이므로

$3w_0=\frac{w_0}{2}10^{15a}(1+10^{15a})$

$10^{15a}(1+10^{15a})=6$

$10^{15a}=t\ (t>0)$로 놓으면

$t(1+t)=6$, $t^2+t-6=0$, $(t+3)(t-2)=0$

$t>0$이므로 $t=2$

이 금융상품에 초기자산 w_0을 투자하고 30년이 지난 시점에서의 기대자산은 초기자산의 k배이므로

$kw_0=\frac{w_0}{2}10^{30a}(1+10^{30a})$

이때 $10^{30a}=(10^{15a})^2=t^2=4$이므로

$k=\frac{1}{2} \cdot 10^{30a}(1+10^{30a})=\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5=10$ 정답_ ②

210

$k=3$을 대입하면 $A_3=\{n \mid 27^2 \leq f(n) \leq 27^3, n\text{은 자연수}\}$ ...... ❶

즉, $27^2 \leq 3^{n+1} \leq 27^3$에서 $3^6 \leq 3^{n+1} \leq 3^9$, $6 \leq n+1 \leq 9$

$\therefore 5 \leq n \leq 8$ ...... ❷

따라서 집합 A_3의 모든 원소의 합은 $5+6+7+8=26$ ...... ❸

정답_ 26

단계	채점 기준	비율
❶	집합 A_3을 조건제시법으로 나타내기	20%
❷	부등식 $27^{k-1} \leq f(n) \leq 27^k$의 해 구하기	50%
❸	A_3의 모든 원소의 합 구하기	30%

211

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-1}}=-\sqrt{\frac{a}{a-1}}$이므로 $a>0$, $a-1<0$

$\therefore 0<a<1$ ...... ❶

밑 a가 1보다 작은 양수이므로 $a^{x(x+2)}>a^{4x+3}$에서

$x(x+2)<4x+3$ ...... ❷

$x^2-2x-3<0$, $(x+1)(x-3)<0$

$\therefore -1<x<3$ ...... ❸

따라서 구하는 정수 x는 0, 1, 2로 3개이다. ...... ❹

정답_ 3

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값의 범위 구하기	30%
❷	지수의 크기 비교하기	30%
❸	x의 값의 범위 구하기	20%
❹	정수 x의 개수 구하기	20%

212

등식으로 주어진 함수를 역수로 나타내면

$$\frac{1}{y}=\frac{3^{2x}+3^x+1}{3^{x+3}}=\frac{3^{2x}+3^x+1}{3^x\cdot 3^3}$$

$$=\frac{1}{27}\left(3^x+\frac{1}{3^x}\right)+\frac{1}{27}$$ ❶

$3^x>0$, $\frac{1}{3^x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$3^x+\frac{1}{3^x}\geq 2\sqrt{3^x\cdot\frac{1}{3^x}}$$

$$=2\left(\text{단, 등호는 } 3^x=\frac{1}{3^x}\text{, 즉 } x=0\text{일 때 성립}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{y}\geq\frac{1}{27}\times 2+\frac{1}{27}=\frac{1}{9}$$ ❷

$\frac{1}{y}\geq\frac{1}{9}$이고, $y>0$이므로 $0<y\leq 9$

따라서 y의 최댓값은 9이다. ❸

정답_ 9

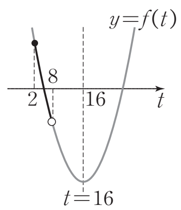
단계	채점 기준	비율
❶	$\frac{1}{y}$을 x에 대한 식으로 나타내기	40%
❷	$\frac{1}{y}$의 최솟값 구하기	40%
❸	y의 최댓값 구하기	20%

213

$4^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은 $t^2-32t+a=0$

$\frac{1}{2}\leq x<\frac{3}{2}$에서 $4^{\frac{1}{2}}\leq 4^x<4^{\frac{3}{2}}$이므로 t에 대한 방정식의 한 근의 범위가 $2\leq t<8$이 되어야 한다. ❶

$f(t)=t^2-32t+a$로 놓으면 대칭축이 직선 $t=16$이므로 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, $f(2)=-60+a\geq 0$이고,

$f(8)=-192+a<0$이어야 하므로

$60\leq a<192$ ❷

따라서 $p=60$, $q=192$이므로 $p+q=252$ ❸

정답_ 252

단계	채점 기준	비율
❶	$4^x=t$로 치환한 방정식의 한 근의 범위 구하기	30%
❷	a의 값의 범위 구하기	50%
❸	$p+q$의 값 구하기	20%

214

$2^x=A$, $3^y=B\ (A>0,\ B>0)$로 놓으면

$$\begin{cases}3A-2B=6\\ \frac{A}{4}-\frac{B}{3}=-1\end{cases},\quad \begin{cases}3A-2B=6 & \cdots\cdots ㉠\\ 3A-4B=-12 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

❶

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$A=8$, $B=9$ ❷

$2^x=8$, $3^y=9$에서 $2^x=2^3$, $3^y=3^2$

$\therefore x=3,\ y=2$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=2$이므로 ❸

$\alpha^2+\beta^2=3^2+2^2=13$ ❹

정답_ 13

단계	채점 기준	비율
❶	$2^x=A$, $3^y=B$로 놓고 A, B에 대한 연립방정식 만들기	30%
❷	A, B의 값 구하기	20%
❸	α, β의 값 구하기	30%
❹	$\alpha^2+\beta^2$의 값 구하기	20%

215

$2^{x+3}<4^{x+1}\leq\left(\frac{1}{8}\right)^{x-14}$에서 $2^{x+3}<2^{2x+2}\leq 2^{-3x+42}$

$x+3<2x+2\leq -3x+42\qquad \therefore 1<x\leq 8$ $\cdots\cdots$ ㉠

❶

$4^x+8<9\cdot 2^x$에서 $(2^x)^2-9\cdot 2^x+8<0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-9t+8<0$, $(t-1)(t-8)<0$, $1<t<8$

$1<2^x<8$, $2^0<2^x<2^3\qquad \therefore 0<x<3$ $\cdots\cdots$ ㉡

❷

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $1<x<3$

이것을 해로 갖고 이차항의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-3)<0\qquad \therefore x^2-4x+3<0$

따라서 $a=4$, $b=3$이므로 $ab=12$ ❸

정답_ 12

단계	채점 기준	비율
❶	집합 A의 원소 구하기	40%
❷	집합 B의 원소 구하기	40%
❸	ab의 값 구하기	20%

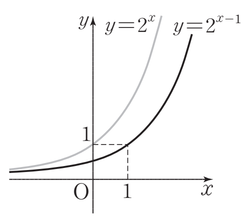
216

ㄱ은 옳지 않다.

$y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면 $-y=2^x$, 즉 $y=-2^x$의 그래프가 된다.

ㄴ은 옳다.

$y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $y=2^{x-1}$의 그래프가 되고, 오른쪽 그림과 같이 $y=2^x$의 그래프보다 아래쪽에 놓이게 된다.



ㄷ도 옳다.

$y=\sqrt{2}\cdot 2^x=2^{x+\frac{1}{2}}$이므로 $y=2^{x+\frac{1}{2}}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동하면 $y=2^x$의 그래프를 얻을 수 있다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 정답_③

217

ㄱ은 옳다.

$(a,\ b)\in G$이면 $b=5^a$이므로

$\sqrt{b}=\sqrt{5^a}=5^{\frac{a}{2}}\qquad \therefore \left(\frac{a}{2},\ \sqrt{b}\right)\in G$

ㄴ도 옳다.

$(-a, b)\in G$이면 $b=5^{-a}$이므로

$\frac{1}{b}=5^a\qquad \therefore \left(a, \frac{1}{b}\right)\in G$

ㄷ은 옳지 않다.

(반례) $a=\frac{1}{2}$, $b=5$일 때, $(2a,\ b)=(1,\ 5)$에서 $5=5^1$이므로 $(2a, b)\in G$이지만 $(a, b^2)=\left(\frac{1}{2},\ 5^2\right)$에서 $5^2\neq 5^{\frac{1}{2}}$이므로 $(a,\ b^2)\notin G$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 정답_②

218

$f(1)=5$, $f(2)=25$, $f(3)=125$이므로 주어진 관계식에서

(좌변)$=f(5)\cdot f(25)\cdot f(125)=5^5\cdot 5^{25}\cdot 5^{125}=5^{155}$

(우변)$=f(5^k)=5^{5^k}$

$5^{155}=5^{5^k}$, $155=5^k$

따라서 $k=\log_5 155$이므로 $m=155$ 정답_③

219

ㄱ은 옳지 않다.

$f(a)=3^a=p$, $f(b)=3^b=q$이므로

$a=\log_3 p$, $b=\log_3 q$

$\therefore a+b=\log_3 p+\log_3 q$

$=\log_3 pq\neq\log_3 p\cdot\log_3 q$

ㄴ은 옳다.

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=3^{\frac{a+b}{2}}=\sqrt{3^{a+b}}=\sqrt{3^a\cdot 3^b}=\sqrt{pq}$

ㄷ도 옳지 않다.

점 C의 좌표를 C$(0,\ 1)$이라고 하면

$\frac{q-p}{b-a}=(\overline{\text{AB}}$의 기울기$)$

$\frac{q-1}{b}=\frac{q-1}{b-0}=(\overline{\text{BC}}$의 기울기$)$

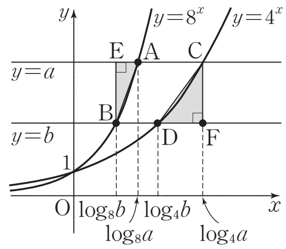
$(\overline{\text{AB}}$의 기울기$)<(\overline{\text{BC}}$의 기울기$)$이므로

$\frac{q-p}{b-a}<\frac{q-1}{b-0}\qquad \therefore \frac{q-p}{b-a}<\frac{q-1}{b}$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다. 정답_②

220

네 점 A, B, C, D의 x좌표를 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때, △AEB와 △CDF는 높이가 같으므로 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다. 즉,

△AEB : △CDF$=\overline{\text{EA}}:\overline{\text{DF}}$ ······㉠

$\overline{\text{EA}}=\log_8 a-\log_8 b=\log_8\frac{a}{b}$

$=\log_{2^3}\frac{a}{b}=\frac{1}{3}\log_2\frac{a}{b}$

$\overline{\text{DF}}=\log_4 a-\log_4 b=\log_4\frac{a}{b}$

$=\log_{2^2}\frac{a}{b}=\frac{1}{2}\log_2\frac{a}{b}$

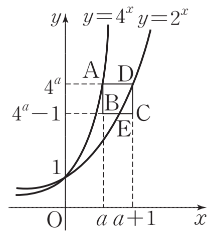
$\therefore \overline{\text{EA}}:\overline{\text{DF}}=\frac{1}{3}\log_2\frac{a}{b}:\frac{1}{2}\log_2\frac{a}{b}=2:3$

㉠에서 △AEB : △CDF$=2:3$이므로

△CDF$=\frac{3}{2}\times$△AEB$=\frac{3}{2}\cdot 20=30$ 정답_③

221

점 A의 x좌표를 a라고 하면



A$(a,\ 4^a)$, D$(a+1,\ 2^{a+1})$

이때, 점 A와 점 D의 y좌표가 같으므로

$4^a=2^{a+1}$, $2^{2a}=2^{a+1}$

$2a=a+1\qquad \therefore a=1$

따라서 점 B의 좌표는 $(a,\ 4^a-1)$, 즉 $(1,\ 3)$이고 점 B와 점 E의 y좌표가 같으므로 점 E의 좌표를 $(b, 3)$이라고 하면 $3=2^b\qquad \therefore b=\log_2 3$

즉, E$(\log_2 3,\ 3)$이므로 $p=\log_2 3$, $q=3$

$\therefore 2^p\cdot q=2^{\log_2 3}\cdot 3=3\cdot 3=9$ 정답_③

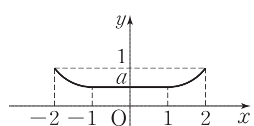
222

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (-2\le x\le -1)\\ 1 & (-1\le x\le 1)\\ -x+2 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

이므로 $g(x)=\begin{cases} a^{x+2} & (-2\le x\le -1)\\ a & (-1\le x\le 1)\\ a^{-x+2} & (1\le x\le 2)\end{cases}$

(i) $0<a<1$일 때

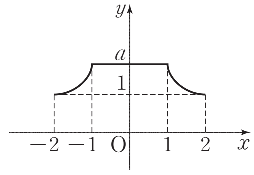
$$g(x)=\begin{cases} a^{x+2} & \text{: 감소함수}\\ a & \text{: 상수함수}\\ a^{-x+2} & \text{: 증가함수}\end{cases}$$



이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 위의 그림과 같다.

(ii) $a>1$일 때

$$g(x)=\begin{cases} a^{x+2} & :\text{증가함수} \\ a & :\text{상수함수} \\ a^{-x+2} & :\text{감소함수} \end{cases}$$



이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 위의 그림과 같다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_⑤

223

$2^x-2^{-x+3}=2\sqrt{17}$에서 $2^x-\dfrac{8}{2^x}=2\sqrt{17}$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t-\dfrac{8}{t}=2\sqrt{17}$

$t^2-2\sqrt{17}t-8=0$

근의 공식에 의해

$t=\sqrt{17}\pm\sqrt{17+8}=\sqrt{17}\pm5$

$t>0$이므로 $t=\sqrt{17}+5$

따라서 $2^x=\sqrt{17}+5$이므로 $a=5, b=17$

$\therefore a+b=22$ 정답_⑤

04 로그함수

224

(1) $-x>0$에서 $x<0$이므로 정의역은 $\{x\,|\,x<0\}$

(2) $x-2>0$에서 $x>2$이므로 정의역은 $\{x\,|\,x>2\}$

(3) $1-2x>0$에서 $x<\dfrac{1}{2}$이므로 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{1}{2}\right\}$

(4) $2-x>0$에서 $x<2$이므로 정의역은 $\{x\,|\,x<2\}$

정답_(1) $\{x\,|\,x<0\}$ (2) $\{x\,|\,x>2\}$ (3) $\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{1}{2}\right\}$ (4) $\{x\,|\,x<2\}$

225

함수 $y=\log_2(x^2+ax+4)$가 실수 전체의 집합에서 정의되려면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+ax+4>0$이 성립해야 한다.

이때, 이차방정식 $x^2+ax+4=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=a^2-16<0,\ (a+4)(a-4)<0$

$\therefore -4<a<4$

따라서 구하는 정수 a는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$으로 7개이다.

정답_④

226

ㄱ. 두 함수의 정의역은 모두 $\{x\,|\,x>0$인 실수$\}$이고,

$\log_3 x^3=3\log_3 x$이므로 두 함수는 서로 같다.

ㄴ. 함수 $y=\log_5 x^2$의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq0$인 실수$\}$이고,

함수 $y=2\log_5 x$의 정의역은 $\{x\,|\,x>0$인 실수$\}$이다.

즉, 정의역이 다르므로 두 함수는 서로 다르다.

ㄷ. 함수 $y=\log(x-1)(x-2)$가 정의되려면

$(x-1)(x-2)>0$ $\therefore x<1$ 또는 $x>2$

함수 $y=\log(x-1)+\log(x-2)$가 정의되려면

$x-1>0$이고 $x-2>0$ $\therefore x>2$

즉, 정의역이 다르므로 두 함수는 서로 다르다.

따라서 서로 같은 함수끼리 짝 지어진 것은 ㄱ이다.

정답_①

참고

로그의 성질 $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$에 의해 ㄷ이 성립한다고 생각하지 않는다.

로그의 성질은 $a>0,\ a\neq1,\ M>0,\ N>0$인 조건 하에 성립하는 것이다.

227

함수 $f(x)=2\log_2(x-1)$이 정의되려면

$x-1>0$ $\therefore A=\{x\,|\,x>1\}$

함수 $g(x)=2\log_2|x-1|$이 정의되려면

$|x-1|>0, x-1\neq0$ $\therefore B=\{x\,|\,x\neq1$인 실수$\}$

함수 $h(x)=\log_2(x-1)^2$이 정의되려면

$(x-1)^2>0, x-1\neq0$ $\therefore C=\{x\,|\,x\neq1$인 실수$\}$

$\therefore A\subset B=C$ 정답_③

참고

위의 풀이에서 두 함수

$f(x)=2\log_2(x-1),\ h(x)=\log_2(x-1)^2$

은 정의역이 다르므로 서로 다른 함수이다. 그러나 두 함수

$g(x)=2\log_2|x-1|,\ h(x)=\log_2(x-1)^2$

은 서로 같은 함수이다.

228

$$f(x)=\log_2\sqrt{1+\frac{1}{x+1}}=\log_2\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$

이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(k)$

$=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{5}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{k+2}{k+1}$

$=\dfrac{1}{2}\log_2\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{k+2}{k+1}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{k+2}{2}=4$

$\log_2\dfrac{k+2}{2}=8,\ \dfrac{k+2}{2}=2^8$ $\therefore k=2^9-2=510$ 정답_④

229

$(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(9^4)=g(3^8)$

$$=\log_{3^8}3=\frac{1}{8}\log_3 3=\frac{1}{8}$$

정답_①

230

(1) $y=7^x$에서 $x=\log_7 y$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\log_7 x$

(2) $y=2\cdot 3^{x-1}$에서 $\frac{y}{2}=3^{x-1}$이므로

$x-1=\log_3\frac{y}{2}$ $\therefore x=\log_3\frac{y}{2}+1$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\log_3\frac{x}{2}+1$

(3) $y=\log_2(x+3)-2$에서 $y+2=\log_2(x+3)$이므로

$x+3=2^{y+2}$ $\therefore x=2^{y+2}-3$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=2^{x+2}-3$

(4) $y=2\log_{\frac{1}{3}}(1-x)$에서 $\frac{y}{2}=\log_{\frac{1}{3}}(1-x)$이므로

$1-x=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{2}}$ $\therefore x=-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{2}}+1$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}}+1$

정답_(1) $y=\log_7 x$ (2) $y=\log_3\frac{x}{2}+1$

(3) $y=2^{x+2}-3$ (4) $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}}+1$

231

$y=\log_4(x-2)+3$에서 $y-3=\log_4(x-2)$이므로

$x-2=4^{y-3}$ $\therefore x=4^{y-3}+2$

x와 y를 서로 바꾸면 $f(x)$의 역함수는 $f^{-1}(x)=4^{x-3}+2$

$\therefore f^{-1}(4)=4+2=6$

정답_③

232

$f(m)=2,\ f(n)=3$에서 $\log_a m=2,\ \log_a n=3$

$\therefore a^2=m,\ a^3=n$

$f^{-1}(7)=k$ (k는 상수)로 놓으면 $f(k)=7,\ \log_a k=7$

$\therefore k=a^7=(a^2)^2\cdot a^3=m^2n$

정답_②

233

$y=\log_2 x+3$에서 $\log_2 x=y-3,\ x=2^{y-3}$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는 $g(x)=2^{x-3}$

$y=f(x+2)=\log_2(x+2)+3$에서 $\log_2(x+2)=y-3$

$x+2=2^{y-3},\ x=2^{y-3}-2$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는 $y=2^{x-3}-2=g(x)-2$

따라서 함수 $f(x+2)$의 역함수는 $g(x)-2$이다.

정답_④

234

$(g\circ f)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$y=1+3\log_2 x$에서 $y-1=3\log_2 x$

$\frac{y-1}{3}=\log_2 x,\ 2^{\frac{y-1}{3}}=x$

x와 y를 서로 바꾸면 $f(x)$의 역함수는 $g(x)=2^{\frac{x-1}{3}}$

$\therefore g(13)=2^{\frac{13-1}{3}}=2^4=16$

정답_16

235

$g(x)$가 $f(x)$의 역함수이므로

$(g\circ g\circ g)(k)=(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(k)$

$=(f\circ f\circ f)^{-1}(k)=18$

$\therefore k=(f\circ f\circ f)(18)=(f\circ f)(7)=f\left(\frac{3}{2}\right)$

$=\log_2\frac{3}{2}-2=\log_2 3-\log_2 2-2$

$=\log_2 3-3$

정답_②

236

② 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지난다.

③ 점근선은 $x=0$이다.

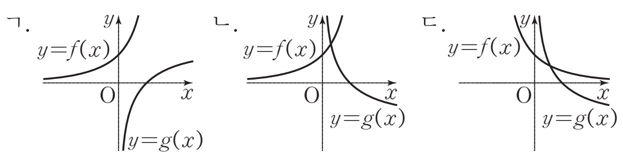
④ 밑이 1보다 큰 로그함수이므로 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다.

⑤ 그래프는 $y=2^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

정답_①

237

보기의 각 경우를 그래프로 그리면 다음과 같다.



따라서 두 그래프가 항상 만나는 경우는 ㄴ, ㄷ이다.

정답_⑤

238

$y=a+\log_2(x-b)$의 그래프의 점근선의 방정식이

$x=b$이므로 $b=3$

$y=a+\log_2(x-3)$의 그래프가 점 $(7,\ 5)$를 지나므로

$5=a+\log_2 4$에서 $a=3$

$\therefore a+b=6$

정답_6

239

$f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=\log_2 x$ ······ ㉠

㉠의 양변에 x 대신 $\frac{1}{x}$을 대입하면

$f\left(\frac{1}{x}\right)+3f(x)=\log_2 \frac{1}{x}=-\log_2 x$ ······ ㉡

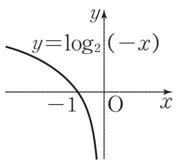
㉡$\times 3-$㉠을 하면 $8f(x)=-4\log_2 x$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}\log_2 x$

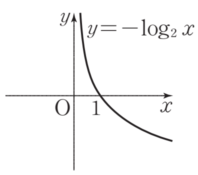
따라서 $f(1)=0, f(2)=-\frac{1}{2}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ④이다. 정답_ ④

240

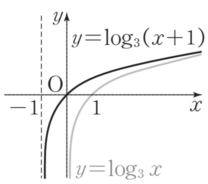
(1) $y=\log_2(-x)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



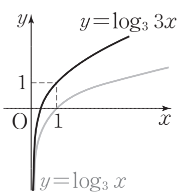
(2) $y=-\log_2 x$, 즉 $-y=\log_2 x$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



(3) $y=\log_3(x+1)$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



(4) $y=\log_3 3x=1+\log_3 x$
즉, $y-1=\log_3 x$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



정답_ 풀이 참조

241

함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 함수는

$y+2=\log_3(x-1)$

이 그래프가 점 $(4,\ a)$를 지나므로

$a+2=\log_3 3, a+2=1 \qquad \therefore a=-1$

정답_ ①

242

$y=\log_3(6x-72)=\log_3\{3\cdot 2(x-12)\}$

$\quad =\log_3 3+\log_3 2(x-12)=1+\log_3 2(x-12)$

$\therefore y-1=\log_3 2(x-12)$

이 함수의 그래프는 함수 $y=\log_3 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 12만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$m=12, n=1 \qquad \therefore m+n=13$ 정답_ ③

243

함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동하면 $y=\log_2(x-a)$

점 $(9,\ 2)$는 $y=\log_2(x-a)$의 그래프 위의 점이므로

$2=\log_2(9-a),\ 9-a=2^2 \qquad \therefore a=5$

한편, $y=\log_b x$에서 $b>0, b\neq 1$이고

점 $(9,\ 2)$는 $y=\log_b x$의 그래프 위의 점이므로

$2=\log_b 9, b^2=9 \qquad \therefore b=3\ (\because b>0)$

$\therefore 10a+b=10\cdot 5+3=53$ 정답_ 53

244

ㄱ. $y=\log(2x+1)=\log 2\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$\quad =\log 2+\log\left(x+\frac{1}{2}\right)$

위의 함수의 그래프는 함수 $y=\log x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 $\log 2$만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\log\frac{1}{2}x=\log x-\log 2 \qquad \therefore y+\log 2=\log x$

위의 함수의 그래프는 함수 $y=\log x$의 그래프를 y축의 방향으로 $-\log 2$만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=2\log x-1$의 그래프는 함수 $y=\log x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

ㄹ. $y=\log(-x+1)=\log\{-(x-1)\}$

위의 함수의 그래프는 함수 $y=\log(-x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

한편, 함수 $y=\log(-x)$의 그래프는 함수 $y=\log x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\log x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 식은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 정답_ ⑤

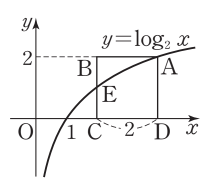
245

점 A의 좌표를 $(a,\ 2)$라고 하면

$\log_2 a=2 \qquad \therefore a=4$

따라서 점 C의 좌표는 $(2,\ 0)$, 점 E의 좌표는 $(2,\ 1)$이므로

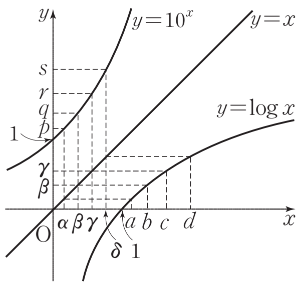
$\overline{\mathrm{CE}}=1$



정답_ ①

246

직선 $y=x$ 위의 점은 x좌표와 y좌표가 같으므로 그림에서



$f(b)=\beta,\ f(c)=\gamma$

$\therefore f(b)f(c)=\beta\gamma$

한편, $y=10^x$의 그래프의 y절편은 1이고, $y=\log x$의 그래프의 x절편은 1이므로 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$는 1보다 작고, $a,\ p,\ q$는 1보다 크다.

이때, $0<\gamma<1$에서 $0<\beta\gamma<\beta$이므로 주어진 다섯 개의 값 중 $f(b)f(c)=\beta\gamma$에 가장 가까운 것은 α이다. 정답_ ①

247

$\overline{QR}=2$이므로 $b-a=2$

두 점 Q, R의 y좌표가 같으므로

$\log_{\frac{1}{2}} a=\log_2 b,\ \log_{2^{-1}} a=\log_2 b,\ -\log_2 a=\log_2 b$

$\log_2 a+\log_2 b=0,\ \log_2 ab=0 \qquad \therefore ab=1$

$\therefore a^2+b^2=(b-a)^2+2ab=2^2+2\cdot 1=6$ 정답_ ②

248

함수 $y=2^{x-2}$에서 $x-2=\log_2 y,\ x=\log_2 y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는 $y=\log_2 x+2$

함수 $y=\log_2 x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동하면 함수 $y=\log_2(x+2)+a+2$의 그래프이므로

$g(x)=\log_2(x+2)+a+2$

두 함수 $f(x)=2^{x-2},\ g(x)=\log_2(x+2)+a+2$의 그래프가 직선 $y=1$과 만나는 점은 각각 $A(2,\ 1), B(2^{-a-1}-2,\ 1)$이다.

선분 AB의 중점의 좌표가 $(8,\ 1)$이므로

$\dfrac{2+2^{-a-1}-2}{2}=8,\ 2^{-a-1}=16=2^4,\ -a-1=4$

$\therefore a=-5$ 정답_ -5

249

점 A의 x좌표를 a라고 하면 $\log_{\frac{1}{4}} a=k$에서

$a=\left(\dfrac{1}{4}\right)^k=2^{-2k}$

점 B의 x좌표를 b라고 하면 $\log_2 b=k$에서 $b=2^k$

$\therefore \overline{AB}=b-a=2^k-2^{-2k}$

점 C의 x좌표가 2^{-2k}이므로 점 C의 y좌표는

$\log_2 2^{-2k}=-2k$

점 D의 x좌표를 d라고 하면 $\log_{\frac{1}{4}} d=-2k$에서

$d=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2k}=2^{4k}$

$\therefore \overline{CD}=2^{4k}-2^{-2k}$

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\dfrac{1}{5}$이므로 $\dfrac{2^k-2^{-2k}}{2^{4k}-2^{-2k}}=\dfrac{1}{5}$

분모, 분자에 각각 2^{2k}을 곱하면

$\dfrac{2^{3k}-1}{2^{6k}-1}=\dfrac{1}{5},\ \dfrac{2^{3k}-1}{(2^{3k})^2-1}=\dfrac{1}{5}$

$\dfrac{2^{3k}-1}{(2^{3k}-1)(2^{3k}+1)}=\dfrac{1}{5},\ \dfrac{1}{2^{3k}+1}=\dfrac{1}{5}$

$2^{3k}+1=5,\ 2^{3k}=2^2$

$3k=2 \qquad \therefore k=\dfrac{2}{3}$ 정답_ ③

250

$b<a<1$의 각 변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a b>\log_a a>\log_a 1 \qquad \therefore \log_a b>1>0$ …… ㉠

$b<a<1$의 각 변에 밑이 b인 로그를 취하면

$\log_b b>\log_b a>\log_b 1 \qquad \therefore 1>\log_b a>0$ …… ㉡

$\log_a \dfrac{a}{b}=\log_a a-\log_a b=1-\log_a b$

이때, ㉠에서 $1-\log_a b<0$이므로 $\log_a \dfrac{a}{b}<0$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의해 $\log_a \dfrac{a}{b}<\log_b a<\log_a b$ 정답_ ⑤

251

$1<x<3$의 각 변에 밑이 3인 로그를 취하면

$0<\log_3 x<1$

(i) $A-B=\log_3 x^2-(\log_3 x)^2$

$\qquad =(2-\log_3 x)\log_3 x>0$

$\therefore B<A$

(ii) $0<\log_3 x<1$에서 $0<B=(\log_3 x)^2<1$

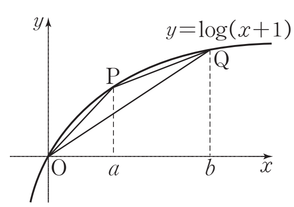
$\log_3 x<1$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$C=\log_3(\log_3 x)<0$

$\therefore C<B$

(i), (ii)에서 $C<B<A$ 정답_ ①

252



위의 그림에서 $P(a,\ \log(a+1)),\ Q(b,\ \log(b+1))$이므로 세 직선 OP, PQ, OQ의 기울기를 각각 m_1, m_2, m_3이라고 하면

$m_1=\dfrac{\log(a+1)-0}{a-0}=\dfrac{1}{a}\log(a+1)=A$

$$m_2=\frac{\log(b+1)-\log(a+1)}{b-a}=\frac{1}{b-a}\log\frac{b+1}{a+1}=C$$

$$m_3=\frac{\log(b+1)-0}{b-0}=\frac{1}{b}\log(b+1)=B$$

이때, 그림에서 $m_2<m_3<m_1$이므로 $C<B<A$ 정답_ ⑤

253

(1) $x=\frac{1}{100}$일 때 $y=\log\frac{1}{100}=-2$, $x=1000$일 때 $y=\log 1000=3$이므로 최댓값은 3, 최솟값은 -2이다.

(2) $x=2$일 때 $y=\log_{\frac{1}{2}}8=-3$, $x=8$일 때 $y=\log_{\frac{1}{2}}32=-5$이므로 최댓값은 -3, 최솟값은 -5이다.

(3) $x=3$일 때 $y=\log_3 9=2$, $x=12$일 때 $y=\log_3 27=3$이므로 최댓값은 3, 최솟값은 2이다.

(4) $x=1$일 때 $y=\log_{\frac{1}{3}}3+3=2$, $x=4$일 때 $y=\log_{\frac{1}{3}}9+3=1$이므로 최댓값은 2, 최솟값은 1이다.

정답_ (1) 최댓값 : 3, 최솟값 : -2 (2) 최댓값 : -3, 최솟값 : -5 (3) 최댓값 : 3, 최솟값 : 2 (4) 최댓값 : 2, 최솟값 : 1

254

$-\frac{2}{3}\le x\le 26$에서 $\frac{1}{3}\le x+1\le 27$

각 변에 밑이 $\frac{1}{3}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{3}}27\le\log_{\frac{1}{3}}(x+1)\le\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$

$\log_{3^{-1}}3^3\le\log_{\frac{1}{3}}(x+1)\le 1$

$\therefore -3\le y\le 1$

따라서 $a=-3$, $b=1$이므로 $a+b=-2$ 정답_ ③

255

$y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)$에서 밑이 1보다 작으므로 감소함수이다.

(i) $x=8$일 때, 최솟값 -2를 가지므로

$-2=\log_{\frac{1}{2}}(8-a)$, $8-a=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=2^2=4$ $\therefore a=4$

(ii) $x=6$일 때, 최댓값 M을 가지므로

$M=\log_{\frac{1}{2}}(6-4)=\log_{2^{-1}}2=-1$

$\therefore aM=4\cdot(-1)=-4$ 정답_ ④

256

$y=\log_2(3x-1)+k$에서 밑이 1보다 크므로 증가함수이다.

$x=1$일 때, 최솟값은 $y=\log_2 2+k=1+k$

$x=3$일 때, 최댓값은 $y=\log_2 8+k=3+k$

최댓값이 최솟값의 2배이므로

$3+k=2(1+k)$ $\therefore k=1$ 정답_ ⑤

257

(1) $x^2-2x+3=(x-1)^2+2$의 최솟값은 2이고, 밑이 1보다 크므로 주어진 함수는 최솟값 $\log_2 2=1$을 갖는다.

(2) $-x^2+4x+5=-(x-2)^2+9$의 최댓값은 9이고, 밑이 1보다 크므로 주어진 함수는 최댓값 $\log_3 9=2$를 갖는다.

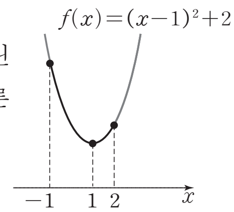
(3) $x^2+2x+4=(x+1)^2+3$의 최솟값은 3이고, 밑이 1보다 작으므로 주어진 함수는 최댓값 $\log_{\frac{1}{3}}3=-1$을 갖는다.

(4) $-x^2+8x+16=-(x-4)^2+32$의 최댓값은 32이고, 밑이 1보다 작으므로 주어진 함수는 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}}32=-5$를 갖는다.

정답_ (1) 최솟값 : 1 (2) 최댓값 : 2 (3) 최댓값 : -1 (4) 최솟값 : -5

258

$f(x)=x^2-2x+3$으로 놓고 $f(x)=(x-1)^2+2$의 그래프를 그린 후, $-1\le x\le 2$의 부분만 잘라내면 오른쪽 그림과 같다.



이때, $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 2, $x=-1$일 때 최댓값 6을 가지므로

$2\le f(x)\le 6$에서

$\log_{\frac{1}{2}}6\le\log_{\frac{1}{2}}f(x)\le\log_{\frac{1}{2}}2$ $\therefore -\log_2 6\le y\le -1$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 -1이다. 정답_ ⑤

259

$y=x^2-2x+5=(x-1)^2+4$는 최솟값 4를 갖는다.

$y=\log_a(x^2-2x+5)$가 최솟값을 가지려면 밑이 1보다 커야 하므로 $a>1$

이때, $y=\log_a(x^2-2x+5)$의 최솟값이 2이므로

$\log_a 4=2$에서 $a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>1$) 정답_ ⑤

260

$y=(\log_2 x)^2-2\log_2 x-8$에서 $\log_2 x=t$로 놓으면

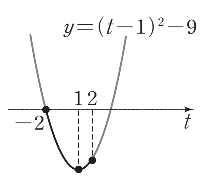
$y=t^2-2t-8=(t-1)^2-9$

이때, $\frac{1}{4}\le x\le 4$이므로 $\log_2\frac{1}{4}\le\log_2 x\le\log_2 4$

$\log_2 2^{-2}\le\log_2 x\le\log_2 2^2$

$\therefore -2\le t\le 2$

$y=(t-1)^2-9$의 그래프를 그린 후, $-2\le t\le 2$의 부분만 잘라내면 오른쪽 그림과 같다.



$t=-2$일 때 최댓값 0, $t=1$일 때 최솟값 -9를 가지므로

$M=0$, $m=-9$

$\therefore M+m=-9$ 정답_ ⑤

261

$y=(\log_3 x)(\log_{\frac{1}{3}} x)+2\log_3 x+10$

$\quad=(\log_3 x)(-\log_3 x)+2\log_3 x+10$

$\quad=-(\log_3 x)^2+2\log_3 x+10$

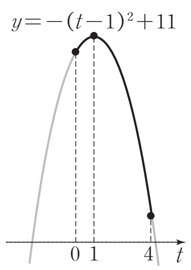
$\log_3 x=t$로 놓으면 $\quad y=-t^2+2t+10=-(t-1)^2+11$

이때, $1\le x\le 81$이므로

$\log_3 1\le \log_3 x\le \log_3 81,\ \log_3 1\le \log_3 x\le \log_3 3^4$

$\therefore 0\le t\le 4$

$y=-(t-1)^2+11$의 그래프를 그린 후, $0\le t\le 4$의 부분만 잘라내면 오른쪽 그림과 같다.



$t=4$일 때 최솟값 2, $t=1$일 때 최댓값 11을 가지므로

$M=11,\ m=2 \qquad \therefore M+m=13$

정답_③

262

$y=\left(\log_2 \frac{x}{4}\right)\left(\log_4 \frac{x}{2}\right)=\left(\log_2 \frac{x}{2^2}\right)\left(\log_{2^2} \frac{x}{2}\right)$

$\quad=\frac{1}{2}(\log_2 x-\log_2 2^2)(\log_2 x-\log_2 2)$

$\quad=\frac{1}{2}(\log_2 x-2)(\log_2 x-1)$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$y=\frac{1}{2}(t-2)(t-1)=\frac{1}{2}(t^2-3t+2)$

$\quad=\frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{8}$

따라서 $t=\frac{3}{2}$일 때, 최솟값 $-\frac{1}{8}$을 갖는다.

$\log_2 x=\frac{3}{2}$에서 $x=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$이므로

$a=2\sqrt{2},\ b=-\frac{1}{8} \qquad \therefore a^2b=8\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)=-1$ 정답_①

263

$2^{\log x}=x^{\log 2}$이므로 $2^{\log x}=t\ (t>1)$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2-4t-3=(t-2)^2-7$

그러므로 $t=2$일 때, 최솟값 -7을 갖는다.

$t=2$에서 $\quad 2^{\log x}=2, \log x=1 \qquad \therefore x=10$

따라서 $a=10, b=-7$이므로 $\quad a+b=3$ 정답_③

264

$y=\frac{x^4}{100}\div x^{\log x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log y=\log\left(\frac{x^4}{100}\div x^{\log x}\right)=\log\left(\frac{x^4}{100x^{\log x}}\right)$

$\qquad=\log x^4-\log 100-\log x^{\log x}$

$\qquad=-(\log x)^2+4\log x-2$

$\log x=t$로 놓으면 $\quad \log y=-t^2+4t-2=-(t-2)^2+2$

이므로 $t=2$일 때 $\log y$는 최댓값 2를 갖는다.

$t=\log x=2, \log y=2$에서 $\quad x=100, y=100$

따라서 $a=100, b=100$이므로

$\frac{a+b}{100}=\frac{100+100}{100}=2$ 정답_②

265

$y=4x^{2-\log_2 x}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 y=\log_2 4x^{2-\log_2 x}=\log_2 4+\log_2 x^{2-\log_2 x}$

$\qquad=2+(2-\log_2 x)\log_2 x$

$\qquad=-(\log_2 x)^2+2\log_2 x+2$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$\log_2 y=-t^2+2t+2=-(t-1)^2+3$

이므로 $t=1$일 때, $\log_2 y$는 최댓값 3을 갖는다.

$\log_2 y=3$에서 $\quad y=8$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 8이다. 정답_①

266

$y=(100x)^{6-\log x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log y=\log(100x)^{6-\log x}=(6-\log x)\log 100x$

$\qquad=(6-\log x)(2+\log x)$

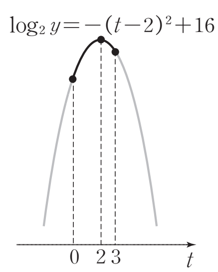
$\qquad=-(\log x)^2+4\log x+12$

$\log x=t$로 놓으면

$\log y=-t^2+4t+12=-(t-2)^2+16$

이때, $1\le x\le 1000$이므로 $\quad 0\le t\le 3$

$\log y=-(t-2)^2+16$의 그래프를 그린 후, $0\le t\le 3$의 부분만 잘라내면 오른쪽 그림과 같다.



$t=2$일 때 최댓값 16, $t=0$일 때 최솟값 12를 가지므로

$12\le \log y\le 16 \qquad \therefore 10^{12}\le y\le 10^{16}$

따라서 $M=10^{16}, m=10^{12}$이므로

$\frac{M}{m}=\frac{10^{16}}{10^{12}}=10^4$ 정답_②

267

$x>1$에서 $\log_2 x>0, \log_x 16>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$\log_2 x+\log_x 16\ge 2\sqrt{\log_2 x\cdot\log_x 16}$

$\qquad=2\sqrt{\log_2 x\cdot\frac{4}{\log_2 x}}$

$\qquad=2\sqrt{4}=4$

(단, 등호는 $\log_2 x=\log_x 16$, 즉 $x=4$일 때 성립)

따라서 $\log_2 x+\log_x 16$의 최솟값은 4이다. 정답_②

268

$x>0, y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$\frac{3x+y}{2} \geq \sqrt{3xy}$ (단, 등호는 $3x=y$일 때 성립)

$\frac{6}{2} \geq \sqrt{3xy}, 9 \geq 3xy$

$\therefore xy \leq 3$

양변에 밑이 $\frac{1}{3}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{3}} xy \geq \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$

따라서 $\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} y = \log_{\frac{1}{3}} xy$의 최솟값은 -1이다.

정답_ ②

269

$\log_2\left(x+\frac{4}{y}\right)+\log_2\left(y+\frac{4}{x}\right)=\log_2\left(x+\frac{4}{y}\right)\left(y+\frac{4}{x}\right)$

$=\log_2\left(xy+\frac{16}{xy}+8\right)$

$x>0, y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$xy+\frac{16}{xy} \geq 2\sqrt{xy \cdot \frac{16}{xy}}=8$ (단, 등호는 $xy=4$일 때 성립)

$\therefore \log_2\left(x+\frac{4}{y}\right)+\log_2\left(y+\frac{4}{x}\right) \geq \log_2 16=\log_2 2^4=4$

따라서 $\log_2\left(x+\frac{4}{y}\right)+\log_2\left(y+\frac{4}{x}\right)$의 최솟값은 4이다.

정답_ ④

270

(1) $\log_2(x+6)=5$에서 $x+6=2^5$ $\therefore x=26$

(2) $\log_2\{\log_3(x-1)\}=2$에서 $\log_3(x-1)=2^2=4$

$x-1=3^4=81$ $\therefore x=82$

(3) $\log_3(x-1)=2\log_3 2$에서 $\log_3(x-1)=\log_3 4$

$x-1=4$ $\therefore x=5$

(4) $\log_2 x=1+\log_2(x-6)$에서 $\log_2 x=\log_2 2(x-6)$

$x=2(x-6)$ $\therefore x=12$

정답_ (1) $x=26$ (2) $x=82$ (3) $x=5$ (4) $x=12$

271

$\log(x^2+3)-\log(x-1)=\log 2x$에서

$\log(x^2+3)=\log 2x+\log(x-1)$

$\log(x^2+3)=\log 2x(x-1)$

$x^2+3=2x(x-1), x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

이때, $x=-1$은 원래 식의 진수가 음수가 되므로 버린다.

따라서 주어진 방정식의 해는 $x=3$이므로 구하는 모든 근의 합은 3이다.

정답_ ④

272

$\log_3(x-4)=\log_9(5x+4)$에서

$\log_3(x-4)=\frac{1}{2}\log_3(5x+4)$

$2\log_3(x-4)=\log_3(5x+4)$

$\log_3(x-4)^2=\log_3(5x+4)$

$(x-4)^2=5x+4,\ x^2-13x+12=0$

$(x-1)(x-12)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=12$

이때, $x=1$은 원래 식의 진수가 음수가 되므로 버린다.

따라서 구하는 해는 $x=12$이다.

정답_ $x=12$

273

$\log_2 x+\log_2(4-x)-k=0$에서

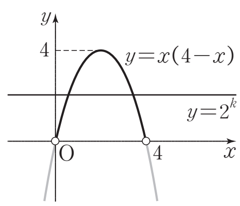
$\log_2 x(4-x)=k$ $\therefore x(4-x)=2^k$ …… ㉠

이때, 진수는 양수이어야 하므로

$x>0, 4-x>0$ $\therefore 0<x<4$ …… ㉡

주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 실근을 가지려면 ㉡의 범위에서 ㉠이 서로 다른 두 개의 실근을 가져야 한다.

$0<x<4$에서 곡선 $y=x(4-x)$와 직선 $y=2^k$의 교점이 2개이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$0<2^k<4$ $\therefore k<2$

따라서 자연수 k는 1뿐이므로 1개이다.

정답_ ①

274

(1) $(\log x)^2-\log x^3=0$에서 $(\log x)^2-3\log x=0$

$\log x=t$로 놓으면 $t^2-3t=0$

$t(t-3)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=3$

$\log x=0$ 또는 $\log x=3$ $\therefore x=1$ 또는 $x=1000$

(2) $(\log_3 x)^2-\log_3 x^2-3=0$에서 $(\log_3 x)^2-2\log_3 x-3=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

$\log_3 x=-1$ 또는 $\log_3 x=3$ $\therefore x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=27$

정답_ (1) $x=1$ 또는 $x=1000$ (2) $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=27$

275

$(\log_2 x)^2-3\log_2 x+2=0$에서 $\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-3t+2=0, (t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$

$\log_2 x=1$ 또는 $\log_2 x=2$ $\therefore x=2$ 또는 $x=4$

$\therefore \alpha+\beta=6$

정답_ ③

276

$\log_2 x + 3\log_x 2 = 4$에서

$\log_2 x + \frac{3}{\log_2 x} = 4$

$\log_2 x = t$로 놓으면 $t + \frac{3}{t} = 4$

$t^2 - 4t + 3 = 0$, $(t-1)(t-3) = 0$ $\therefore t = 1$ 또는 $t = 3$

$\log_2 x = 1$ 또는 $\log_2 x = 3$ $\therefore x = 2$ 또는 $x = 8$

따라서 구하는 모든 근의 합은 $2 + 8 = 10$ 정답_ ①

277

$\log_2 x - \log_x 8 = 2$에서 $\log_2 x - 3\log_x 2 = 2$

$\therefore \log_2 x - \frac{3}{\log_2 x} = 2$

$\log_2 x = t$로 놓으면 $t - \frac{3}{t} = 2$, $t^2 - 2t - 3 = 0$

$(t+1)(t-3) = 0$ $\therefore t = -1$ 또는 $t = 3$

$\log_2 x = -1$ 또는 $\log_2 x = 3$ $\therefore x = \frac{1}{2}$ 또는 $x = 8$

따라서 구하는 모든 근의 곱은 $\frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ 정답_ ②

278

$2^{\log x} = x^{\log 2}$이므로 $2^{\log x} = t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2 = 6t - 8$, $t^2 - 6t + 8 = 0$

$(t-2)(t-4) = 0$ $\therefore t = 2$ 또는 $t = 4$

(i) $t = 2$일 때, $2^{\log x} = 2$, $\log x = 1$ $\therefore x = 10$

(ii) $t = 4$일 때, $2^{\log x} = 4$, $\log x = 2$ $\therefore x = 100$

(i), (ii)에 의해 $\alpha + \beta = 10 + 100 = 110$ 정답_ ⑤

279

$\log_{\frac{1}{2}} x \cdot \log_2 x + 2\log_2 x + k = 0$에 $x = 16$을 대입하면

$\log_{\frac{1}{2}} 16 \cdot \log_2 16 + 2\log_2 16 + k = 0$

$-16 + 8 + k = 0$ $\therefore k = 8$

즉, 주어진 방정식은 $\log_{\frac{1}{2}} x \cdot \log_2 x + 2\log_2 x + 8 = 0$

$\therefore (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 8 = 0$

$\log_2 x = t$로 놓으면 $t^2 - 2t - 8 = 0$

$(t+2)(t-4) = 0$ $\therefore t = -2$ 또는 $t = 4$

$\log_2 x = -2$ 또는 $\log_2 x = 4$ $\therefore x = \frac{1}{4}$ 또는 $x = 16$

따라서 구하는 다른 한 근은 $\frac{1}{4}$이다. 정답_ ①

280

$\log_2 x + a\log_x 8 = 2$에 $x = 8$을 대입하면

$\log_2 8 + a\log_8 8 = 2$, $\log_2 2^3 + a = 2$

$3 + a = 2$ $\therefore a = -1$

따라서 주어진 방정식은 $\log_2 x - \log_x 8 = 2$

$\log_2 x - 3\log_x 2 = 2$, $\log_2 x - \frac{3}{\log_2 x} = 2$

$\log_2 x = t$로 놓으면 $t - \frac{3}{t} = 2$, $t^2 - 2t - 3 = 0$

$(t+1)(t-3) = 0$ $\therefore t = -1$ 또는 $t = 3$

$\log_2 x = -1$ 또는 $\log_2 x = 3$ $\therefore x = \frac{1}{2}$ 또는 $x = 8$

이때, 다른 한 근은 $\frac{1}{2}$이므로 $b = \frac{1}{2}$

$\therefore a + b = -\frac{1}{2}$ 정답_ ②

281

$(\log_2 x - 3)\log_2 x = 1$에서

$(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x - 1 = 0$ ⋯⋯ ㉠

$\log_2 x = t$로 놓으면 $t^2 - 3t - 1 = 0$ ⋯⋯ ㉡

이때, ㉠의 두 근을 α, β라고 하면 ㉡의 두 근은 $\log_2 \alpha$, $\log_2 \beta$이므로 이차방정식 ㉡에서 근과 계수의 관계에 의해

$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 3$, $\log_2 \alpha\beta = 3$ $\therefore \alpha\beta = 2^3 = 8$

따라서 구하는 두 근의 곱은 8이다. 정답_ ③

282

$(\log x)^2 - k\log x - 2 = 0$ ⋯⋯ ㉠

$\log x = t$로 놓으면 $t^2 - kt - 2 = 0$ ⋯⋯ ㉡

이때, ㉠의 두 근을 α, β라고 하면 ㉡의 두 근은 $\log \alpha$, $\log \beta$이므로 이차방정식 ㉡에서 근과 계수의 관계에 의해

$\log \alpha + \log \beta = k$ $\therefore \log \alpha\beta = k$

한편, 주어진 조건에서 $\alpha\beta = 100$이므로

$k = \log 100 = 2$ 정답_ ②

283

$x^{\log x} = x^2$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x} = \log x^2$ $\therefore (\log x)^2 = 2\log x$

$\log x = t$로 놓으면 $t^2 = 2t$, $t(t-2) = 0$

$t = 0$ 또는 $t = 2$ $\therefore \log x = 0$ 또는 $\log x = 2$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = 100$

따라서 $\alpha = 1$, $\beta = 100$이므로 $\alpha\beta = 100$ 정답_ ④

284

$x^{\log_2 x} = 8x^2$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x} = \log_2 8x^2$, $\log_2 x \cdot \log_2 x = \log_2 8 + \log_2 x^2$

$(\log_2 x)^2 = 3 + 2\log_2 x$

$\therefore (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 3 = 0$

$\log_2 x = t$로 놓으면 $t^2 - 2t - 3 = 0$

$(t+1)(t-3) = 0$ $\therefore t = -1$ 또는 $t = 3$

$\log_2 x=-1$ 또는 $\log_2 x=3$이므로 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=8$

$\therefore \alpha\beta=\frac{1}{2}\cdot 8=4$ 정답_ 4

285

$x^{\log x}=\frac{1000}{x^2}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}=\log\frac{1000}{x^2}$, $\log x\cdot\log x=\log 1000-\log x^2$

$\therefore (\log x)^2+2\log x-3=0$

$\log x=t$로 놓으면 $t^2+2t-3=0$

$(t+3)(t-1)=0$ $\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

$\log x=-3$ 또는 $\log x=1$ $\therefore x=\frac{1}{1000}$ 또는 $x=10$

따라서 $\alpha=\frac{1}{1000}$, $\beta=10$이므로 $\alpha\beta^4=10$ 정답_ ②

286

$\log x+\log(y-1)=2$에서 $\log x(y-1)=2$

$x(y-1)=100$ $\therefore x=\frac{100}{y-1}$ …… ㉠

$\log(x-y)=\log x-\log y$에서

$\log(x-y)=\log\frac{x}{y}$

$x-y=\frac{x}{y}$, $xy-y^2=x$, $x(y-1)=y^2$

$\therefore x=\frac{y^2}{y-1}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해 $\frac{100}{y-1}=\frac{y^2}{y-1}$ $\therefore y^2=100$

이때, 로그의 진수는 양수이어야 하므로 $y>1$ $\therefore y=10$

이 값을 ㉠에 대입하면 $x=\frac{100}{9}$

따라서 $\alpha=\frac{100}{9}$, $\beta=10$이므로 $\frac{\beta^2}{\alpha}=9$ 정답_ ①

287

$\log_3 x\cdot\log_2 y=\frac{\log x}{\log 3}\cdot\frac{\log y}{\log 2}=\frac{\log x}{\log 2}\cdot\frac{\log y}{\log 3}$

$=\log_2 x\cdot\log_3 y$

이므로 주어진 방정식의 해는

연립방정식 $\begin{cases}\log_2 x+\log_3 y=6\\ \log_2 x\cdot\log_3 y=8\end{cases}$의 해와 같다.

$\log_2 x=X$, $\log_3 y=Y$로 놓으면 $\begin{cases}X+Y=6\\ XY=8\end{cases}$

이때, 두 근의 합이 6, 곱이 8인 이차방정식 $t^2-6t+8=0$을 생각하면 $(t-2)(t-4)$에서 $t=2$ 또는 $t=4$

$\therefore X=2, Y=4$ 또는 $X=4, Y=2$

(i) $X=2, Y=4$, 즉 $\log_2 x=2$, $\log_3 y=4$일 때

$x=4, y=81$

그런데 $\alpha>\beta$이어야 하므로 이 값은 버린다.

(ii) $X=4, Y=2$, 즉 $\log_2 x=4$, $\log_3 y=2$일 때

$x=16, y=9$

(i), (ii)에 의해 $\alpha=16$, $\beta=9$이므로

$\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{16\cdot 9}=4\cdot 3=12$ 정답_ ②

288

$\log_2(x-2)-\log_2 y=1$에서 $\log_2\frac{x-2}{y}=1$

$\frac{x-2}{y}=2$, $2y=x-2$ …… ㉠

$2^x-2\cdot 4^{-y}=7$에서 $2^x-2\cdot 2^{-2y}=7$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $2^x-2\cdot 2^{2-x}-7=0$

등식의 양변에 2^x을 곱하면 $(2^x)^2-7\cdot 2^x-8=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-7t-8=0$

$(t-8)(t+1)=0$ $\therefore t=8\ (\because t>0)$

$t=2^x=8$에서 $x=3$이므로 ㉠에 대입하면 $y=\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로 $10\alpha\beta=15$ 정답_ ③

289

진수는 양수이어야 하므로 $x>0, y>0$

$\log_2 x+\log_2 y=(\log_2 xy)^2$에서

$\log_2 xy=(\log_2 xy)^2$, $\log_2 xy(\log_2 xy-1)=0$

$\log_2 xy=t$로 놓으면 $t(t-1)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=1$

$\log_2 xy=0$ 또는 $\log_2 xy=1$ $\therefore xy=1$ 또는 $xy=2$

$\therefore y=\frac{1}{x}$ 또는 $y=\frac{2}{x}$

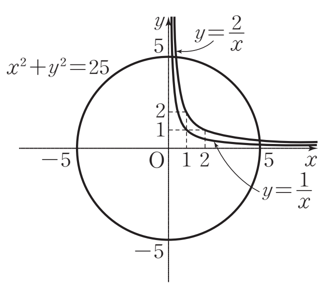
주어진 연립방정식의 해는 $x>0, y>0$에서

원 $x^2+y^2=25$와 곡선

$y=\frac{1}{x}$ 또는 $y=\frac{2}{x}$의 교점의

좌표와 같다.

따라서 오른쪽 그림에 의해 구하는 해의 순서쌍 (x, y)의 개수는 4이다. 정답_ ④



290

(1) 진수는 양수이어야 하므로

$x-1>0$ $\therefore x>1$ …… ㉠

$\log_3(x-1)\le 2$에서 $\log_3(x-1)\le\log_3 9$

$x-1\le 9$ $\therefore x\le 10$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $1<x\le10$

(2) 진수는 양수이어야 하므로

$x+2>0 \quad \therefore x>-2$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)>1$에서 $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$

$x+2<\frac{1}{2} \quad \therefore x<-\frac{3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-2<x<-\frac{3}{2}$

(3) 진수는 양수이어야 하므로

$2x-1>0, x+3>0 \quad \therefore x>\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\log_2(2x-1)>\log_2(x+3)$에서

$2x-1>x+3 \quad \therefore x>4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $x>4$

(4) 진수는 양수이어야 하므로

$2-x>0, x+1>0 \quad \therefore -1<x<2$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(2-x)\le\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$에서

$2-x\ge x+1 \quad \therefore x\le\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-1<x\le\frac{1}{2}$

정답_ (1) $1<x\le10$ (2) $-2<x<-\frac{3}{2}$

(3) $x>4$ (4) $-1<x\le\frac{1}{2}$

291

진수는 양수이어야 하므로

$x-4>0, x-2>0 \quad \therefore x>4$ …… ㉠

$2\log_{\frac{1}{3}}(x-4)>\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$에서

$\log_{\frac{1}{3}}(x-4)^2>\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$

$(x-4)^2<x-2, x^2-9x+18<0$

$(x-3)(x-6)<0 \quad \therefore 3<x<6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $4<x<6$

따라서 $a=4, b=6$이므로 $ab=24$ 정답_ ④

292

진수는 양수이어야 하므로

$2x+1>0, x-2>0 \quad \therefore x>2$ …… ㉠

$\log_3(2x+1)\ge1+\log_3(x-2)$에서

$\log_3(2x+1)\ge\log_3 3(x-2)$

$2x+1\ge3(x-2), 2x+1\ge3x-6 \quad \therefore x\le7$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2<x\le7$

따라서 자연수 x는 3, 4, 5, 6, 7이므로 그 합은

$3+4+5+6+7=25$ 정답_ ④

293

진수는 양수이어야 하므로

$x-3>0, x+1>0 \quad \therefore x>3$ …… ㉠

$\log_2(x-3)+\log_2(x+1)<5$에서

$\log_2(x-3)+\log_2(x+1)<\log_2 2^5$

$\therefore \log_2(x-3)(x+1)<\log_2 32$

$(x-3)(x+1)<32, x^2-2x-35<0$

$(x+5)(x-7)<0 \quad \therefore -5<x<7$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $3<x<7$

$3<x<7$을 해로 갖고, 이차항의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-3)(x-7)<0, x^2-10x+21<0$

따라서 $a=1, b=-10$이므로 $a+b=-9$ 정답_ ③

294

(1) 진수는 양수이어야 하므로

$x>0,\ x^2>0 \quad \therefore x>0$ …… ㉠

$(\log_3 x)^2+\log_3 x^2>0$에서 $(\log_3 x)^2+2\log_3 x>0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2+2t>0$

$t(t+2)>0 \quad \therefore t<-2$ 또는 $t>0$

$\log_3 x<-2$ 또는 $\log_3 x>0$

$\therefore x<\frac{1}{9}$ 또는 $x>1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $0<x<\frac{1}{9}$ 또는 $x>1$

(2) 진수는 양수이어야 하므로

$x>0,\ x^2>0 \quad \therefore x>0$ …… ㉠

$(\log_2 x)^2+\log_2 x^2-8\le0$에서

$(\log_2 x)^2+2\log_2 x-8\le0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2+2t-8\le0$

$(t+4)(t-2)\le0 \quad \therefore -4\le t\le2$

$-4\le\log_2 x\le2 \quad \therefore \frac{1}{16}\le x\le4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{1}{16}\le x\le4$

정답_ (1) $0<x<\frac{1}{9}$ 또는 $x>1$ (2) $\frac{1}{16}\le x\le4$

295

진수는 양수이어야 하므로

$x>0, x^5>0 \quad \therefore x>0$ …… ㉠

$(\log_2 x)^2<\log_2 x^5-6$에서

$(\log_2 x)^2-5\log_2 x+6<0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-5t+6<0$

$(t-2)(t-3)<0 \quad \therefore 2<t<3$

$2<\log_2 x<3 \quad \therefore 4<x<8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $4<x<8$

따라서 $\alpha=4, \beta=8$이므로 $\alpha\beta=32$ 정답_ ⑤

296

진수는 양수이어야 하므로

$9x>0, x>0 \qquad \therefore x>0$ ······ ㉠

$\log_3 9x \cdot \log_3 x \le 15$에서

$(\log_3 3^2+\log_3 x)(\log_3 x)\le 15$

$\therefore (2+\log_3 x)(\log_3 x)\le 15$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $(2+t)t\le 15$

$t^2+2t-15\le 0, (t+5)(t-3)\le 0 \qquad \therefore -5\le t\le 3$

$-5\le \log_3 x\le 3 \qquad \therefore 3^{-5}\le x\le 3^3$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $3^{-5}\le x\le 3^3$

따라서 구하는 자연수 x의 최댓값은 3^3이다. 정답_ ①

297

진수는 양수이어야 하므로 $x>0$ ······ ㉠

$x^{\log x}\le 10$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}\le \log 10 \qquad \therefore (\log x)^2\le 1$

$\log x=t$로 놓으면 $t^2\le 1$

$(t+1)(t-1)\le 0 \qquad \therefore -1\le t\le 1$

$-1\le \log x\le 1 \qquad \therefore \frac{1}{10}\le x\le 10$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{1}{10}\le x\le 10$ 정답_ ①

298

진수는 양수이어야 하므로 $x>0$ ······ ㉠

$x^{\log x}>1000x^2$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x}>\log 1000x^2$, $\log x\cdot\log x>\log 1000+\log x^2$

$\therefore (\log x)^2-2\log x-3>0$

$\log x=t$로 놓으면 $t^2-2t-3>0$

$(t+1)(t-3)>0 \qquad \therefore t<-1$ 또는 $t>3$

$\log x<-1$ 또는 $\log x>3$

$\therefore x<\frac{1}{10}$ 또는 $x>1000$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $0<x<\frac{1}{10}$ 또는 $x>1000$

따라서 $S=\left\{x \,\middle|\, 0<x<\frac{1}{10} \text{ 또는 } x>1000\right\}$이므로 주어진 수 중에서 집합 S의 원소가 아닌 것은 10^2이다. 정답_ ②

299

진수는 양수이어야 하므로 $x>0$ ······ ㉠

$\left(\frac{1}{2}x\right)^{\log_{\frac{1}{2}}x-2}\ge 2^{-4}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2\left(\frac{1}{2}x\right)^{\log_{\frac{1}{2}}x-2}\ge \log_2 2^{-4}$, $(\log_{\frac{1}{2}}x-2)\log_2\frac{1}{2}x\ge\log_2 2^{-4}$

$(-\log_2 x-2)\left(\log_2\frac{1}{2}+\log_2 x\right)\ge -4$

$(\log_2 x+2)(-1+\log_2 x)\le 4$

$\therefore (\log_2 x)^2+\log_2 x-6\le 0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2+t-6\le 0$

$(t+3)(t-2)\le 0,\ -3\le t\le 2$

$-3\le \log_2 x\le 2 \qquad \therefore \frac{1}{8}\le x\le 4$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{1}{8}\le x\le 4$

따라서 구하는 자연수 x는 1, 2, 3, 4로 4개이다. 정답_ ④

300

이차함수 $y=x^2-2(\log a)x+\log a+2$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2-2(\log a)x+\log a+2=0$이 허근을 가져야 하므로 판별식 D에 대하여

$\frac{D}{4}=(\log a)^2-\log a-2<0$

$\log a=t$로 놓으면 $t^2-t-2<0$

$(t+1)(t-2)<0 \qquad \therefore -1<t<2$

$-1<\log a<2 \qquad \therefore \frac{1}{10}<a<100$

따라서 $\alpha=\frac{1}{10}, \beta=100$이므로 $\alpha\beta=10$ 정답_ ③

301

부등식 $x^2-2(\log_2 a)x+3\log_2 a+4>0$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면 이차방정식

$x^2-2(\log_2 a)x+3\log_2 a+4=0$이 허근을 가져야 하므로 판별식 D에 대하여

$\frac{D}{4}=(\log_2 a)^2-3\log_2 a-4<0$

$\log_2 a=t$로 놓으면 $t^2-3t-4<0$

$(t+1)(t-4)<0 \qquad \therefore -1<t<4$

$-1<\log_2 a<4 \qquad \therefore \frac{1}{2}<a<16$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}, \beta=16$이므로 $\alpha\beta=8$ 정답_ ③

302

진수는 양수이어야 하므로

$x\ne 5, x>0, x+2>0$

$\therefore 0<x<5$ 또는 $x>5$ ······ ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}|x-5|>-3$에서

$|x-5|<\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$, $|x-5|<8$

$-8<x-5<8 \qquad \therefore -3<x<13$ ······ ㉡

$\log_3 x+\log_3(x+2)\ge 1$에서

$\log_3 x(x+2)\ge\log_3 3$

$x(x+2)\geq 3, x^2+2x-3\geq 0$

$(x+3)(x-1)\geq 0 \quad \therefore x\leq -3$ 또는 $x\geq 1$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$1\leq x<5$ 또는 $5<x<13$

따라서 구하는 정수 x는 $1, 2, 3, 4, 6, \cdots, 12$로 11개이다.

정답_ ④

303

태풍의 중심 기압이 900(hPa)일 때

$V_A=4.86(1010-900)^{0.5}=4.86\cdot 110^{0.5}$

태풍의 중심 기압이 960(hPa)일 때

$V_B=4.86(1010-960)^{0.5}=4.86\cdot 50^{0.5}$

$\therefore \dfrac{V_A}{V_B}=\dfrac{4.86\cdot 110^{0.5}}{4.86\cdot 50^{0.5}}=2.2^{0.5}$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log \frac{V_A}{V_B}=\log 2.2^{0.5}=\frac{1}{2}\log(2\cdot 1.1)$$

$$=\frac{1}{2}(\log 2+\log 1.1)$$

$$=\frac{1}{2}(0.3010+0.0414)=0.1712$$

여기서 $\log 1.483=0.1712$이므로

$\dfrac{V_A}{V_B}=1.483$

정답_ ④

304

처음 과자 1봉지에 들어가는 실제 과자의 질량을 a, 과자 1봉지당 가격을 b라고 하면 n년 후 과자 1봉지에 들어가는 실제 과자의 질량은 $0.9^n\times a$, 과자 1봉지의 가격은 $1.2^n\times b$이므로 n년 후 실제 과자의 단위 질량당 가격이 처음의 2배 이상이 되려면

$\dfrac{1.2^n\times b}{0.9^n\times a}\geq 2\times\dfrac{b}{a}, \left(\dfrac{1.2}{0.9}\right)^n\geq 2 \quad \therefore \left(\dfrac{4}{3}\right)^n\geq 2$

양변에 상용로그를 취하면 $n(\log 4-\log 3)\geq \log 2$

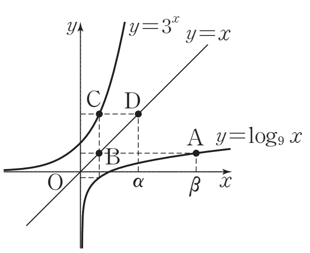
$$n\geq \frac{\log 2}{\log 4-\log 3}=\frac{\log 2}{2\log 2-\log 3}$$

$$=\frac{0.3}{2\times 0.3-0.48}=\frac{0.3}{0.12}=2.5$$

따라서 n의 최솟값은 3이므로 최소 3년 후에 과자의 단위 질량당 가격이 처음의 2배 이상이 된다.

정답_ 3년 후

305



오른쪽 그림에서

$A(\beta, \log_9\beta)$,

$B(\log_9\beta, \log_9\beta)$

점 B와 C는 x좌표가 같으므로 $C(\log_9\beta, 3^{\log_9\beta})$

점 C와 점 D는 y좌표가 같으므로 $D(\alpha, 3^{\log_9\beta})$

점 D는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 $\alpha=3^{\log_9\beta}=\beta^{\log_9 3}=\beta^{\frac{1}{2}}$ …… ❶

즉, $\beta=\alpha^2$이므로 $\alpha\beta=8$에 대입하면 $\alpha^3=8$

$\therefore \alpha=2, \ \beta=\alpha^2=4$ …… ❷

$\therefore \alpha+\beta=2+4=6$ …… ❸

정답_ 6

단계	채점 기준	비율
❶	α, β 사이의 관계식 구하기	40%
❷	α, β의 값 구하기	40%
❸	$\alpha+\beta$의 값 구하기	20%

306

$f(x)=x^2-4x+11$로 놓고

$f(x)=(x-2)^2+7$의 그래프를 그린 후, $2\leq x\leq 5$의 부분만 잘라내면 오른쪽 그림과 같다.

$x=2$일 때 최솟값 7, $x=5$일 때 최댓값 16을 가지므로 $7\leq f(x)\leq 16$ …… ❶

$7\leq f(x)\leq 16$에서 $y=\log_a f(x)$의 최솟값이 -2이어야 하므로

(i) $a>1$일 때, 최솟값은 $\log_a 7=-2$

$a^{-2}=7, a^2=\dfrac{1}{7} \quad \therefore a=\dfrac{1}{\sqrt{7}} \ (\because a>0)$

그런데 이 값은 $a>1$에 속하지 않으므로 버린다.

(ii) $0<a<1$일 때, 최솟값은 $\log_a 16=-2$

$a^{-2}=16, a^2=\dfrac{1}{16} \quad \therefore a=\dfrac{1}{4} \ (\because a>0)$

(i), (ii)에서 $a=\dfrac{1}{4}$ …… ❷

$7\leq f(x)\leq 16$에서 $y=\log_{\frac{1}{4}} f(x)$의 최댓값은

$\log_{\frac{1}{4}} 7=-\log_4 7=\log_4\dfrac{1}{7} \quad \therefore k=7$ …… ❸

정답_ 7

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)=x^2-4x+11$의 최댓값, 최솟값 구하기	30%
❷	a의 값 구하기	40%
❸	k의 값 구하기	30%

307

$\log_2 x\cdot\log_2\dfrac{16}{x}=\dfrac{m}{16}$에서 $(\log_2 x)(\log_2 16-\log_2 x)=\dfrac{m}{16}$

$\therefore (\log_2 x)(4-\log_2 x)=\dfrac{m}{16}$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t(4-t)=\dfrac{m}{16}$

$4t-t^2=\dfrac{m}{16} \quad \therefore 16t^2-64t+m=0$ …… ㉠

…… ❶

주어진 방정식의 해가 존재하려면 이차방정식 ㉠이 실근을 가져

야 하므로 ㉠의 판별식 D에 대하여

$\frac{D}{4}=32^2-16m\geq 0$ $\quad\therefore m\leq 64$ ········· ❷

따라서 구하는 m의 최댓값은 64이다. ········· ❸

정답_ 64

단계	채점 기준	비율
❶	$\log_2 x=t$로 치환하여 주어진 식을 t에 대한 방정식으로 나타내기	40%
❷	m의 값의 범위 구하기	40%
❸	m의 최댓값 구하기	20%

308

$f(x)=x^2+2x+4$라고 하면 x^2+2x+4를 $x-\log_3 a$로 나눈 나머지는

$f(\log_3 a)=(\log_3 a)^2+2\log_3 a+4$ ······ ㉠

········· ❶

x^2+2x+4를 $x-\log_3 9a$로 나눈 나머지는

$f(\log_3 9a)=(\log_3 9a)^2+2\log_3 9a+4$

$=(2+\log_3 a)^2+2(2+\log_3 a)+4$ ······ ㉡

········· ❷

㉠과 ㉡이 서로 같아야 하므로

$(\log_3 a)^2+2\log_3 a+4=(2+\log_3 a)^2+2(2+\log_3 a)+4$

$\log_3 a=t$로 놓으면

$t^2+2t+4=(2+t)^2+2(2+t)+4$, $4t=-8$

$\therefore t=-2$

즉, $\log_3 a=-2$이므로 ········· ❸

$a=3^{-2}=\frac{1}{9}$ ········· ❹

정답_ $\frac{1}{9}$

단계	채점 기준	비율
❶	x^2+2x+4를 $x-\log_3 a$로 나눈 나머지 구하기	20%
❷	x^2+2x+4를 $x-\log_3 9a$로 나눈 나머지 구하기	20%
❸	$\log_3 a$의 값 구하기	40%
❹	a의 값 구하기	20%

309

$3^{5(1-x)}\leq\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-1}$에서 $\quad 3^{5(1-x)}\leq 3^{1-x^2}$

$5(1-x)\leq 1-x^2$, $x^2-5x+4\leq 0$, $(x-1)(x-4)\leq 0$

$\therefore 1\leq x\leq 4$ ······ ㉠

········· ❶

$(\log_2 x)^2-4\log_2 x+3<0$에서 진수는 양수이어야 하므로

$x>0$ ······ ㉡

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-4t+3<0$, $(t-1)(t-3)<0$

$\therefore 1<t<3$

즉, $1<\log_2 x<3$이므로 $\quad 2<x<8$ ······ ㉢

········· ❷

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$2<x\leq 4$ ········· ❸

따라서 자연수 x는 3, 4이므로 그 곱은 $3\cdot 4=12$ ········· ❹

정답_ 12

단계	채점 기준	비율
❶	$3^{5(1-x)}\leq\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-1}$의 해 구하기	30%
❷	$(\log_2 x)^2-4\log_2 x+3<0$의 해 구하기	40%
❸	연립부등식의 해 구하기	20%
❹	자연수 x의 곱 구하기	10%

310

$x^{\log_3 x}\geq ax^4$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}\geq\log_3 ax^4$, $\log_3 x\cdot\log_3 x\geq\log_3 a+\log_3 x^4$

$\therefore (\log_3 x)^2-4\log_3 x-\log_3 a\geq 0$ ······ ㉠

········· ❶

$\log_3 x=t$로 놓으면 $\quad t^2-4t-\log_3 a\geq 0$ ······ ㉡

········· ❷

$x>0$에서 부등식 ㉠이 항상 성립하려면 모든 실수 t에 대하여 이차부등식 ㉡이 항상 성립해야 하므로 $t^2-4t-\log_3 a=0$의 판별식 D에 대하여

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-\log_3 a)\leq 0$, $\log_3 a\leq -4$

$0<a\leq 3^{-4}$ $\quad\therefore 0<a\leq\frac{1}{81}$ ········· ❸

정답_ $0<a\leq\frac{1}{81}$

단계	채점 기준	비율
❶	양변에 로그를 취하여 주어진 부등식 변형하기	40%
❷	$\log_3 x=t$로 치환하여 t에 대한 부등식으로 나타내기	10%
❸	a의 값의 범위 구하기	50%

311

ㄱ은 옳다.

$y=a^{x-1}$에서 x와 y를 서로 바꾸면 $\quad x=a^{y-1}$

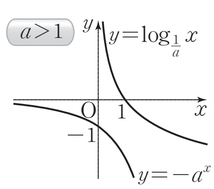
양변에 밑이 a인 로그를 취하면 $\quad y-1=\log_a x$

$\therefore y=1+\log_a x$

따라서 $y=a^{x-1}$과 $y=1+\log_a x$는 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

ㄴ은 옳지 않다.

함수 $y=-a^x$의 그래프와 함수 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 만나지 않는다.



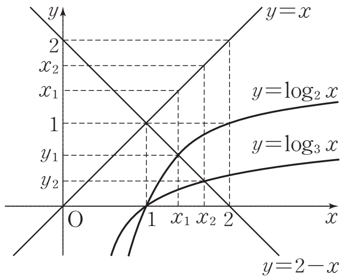
ㄷ도 옳다.

함수 $y=ka^x$의 그래프는 $k=a^{-a}$일 때, $y=ka^x=a^{x-a}$이므로 점 $(a,\ 1)$을 지나고, $y=\log_a x$의 그래프도 점 $(a,\ 1)$을 지난다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_ ③

312

주어진 직선과 두 로그함수의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



ㄱ은 옳다.

위의 그림에서 $x_1>1, y_2<1$이므로 $x_1>y_2$

ㄴ도 옳다.

두 점 $(x_1,\ y_1), (x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 기울기는 -1이므로 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$ $\quad\therefore x_2-x_1=y_1-y_2$

ㄷ도 옳다.

직선 $y=2-x$ 위의 점 $(x,\ y)$에 대하여

$xy=x(2-x)=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$

이때 $x>1$에서 $-(x-1)^2+1$의 값은 x가 커질수록 작아지고 $1<x_1<x_2<2$이므로 $x_1y_1>x_2y_2$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

313

$\mathrm{P}(a,\ \log_{\frac{1}{9}}a), \mathrm{Q}(a,\ \log_3 a)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\log_{\frac{1}{9}}a-\log_3 a=-\dfrac{1}{2}\log_3 a-\log_3 a$

$=-\dfrac{3}{2}\log_3 a$

$\mathrm{R}(b,\ \log_{\frac{1}{9}}b), \mathrm{S}(b,\ \log_3 b)$이므로

$\overline{\mathrm{SR}}=\log_3 b-\log_{\frac{1}{9}}b=\log_3 b+\dfrac{1}{2}\log_3 b$

$=\dfrac{3}{2}\log_3 b$

$\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{SR}}=2:1$이므로

$\left(-\dfrac{3}{2}\log_3 a\right):\left(\dfrac{3}{2}\log_3 b\right)=2:1, \log_3 a=-2\log_3 b$

$\therefore a=\dfrac{1}{b^2}$ …… ㉠

선분 PR의 중점의 x좌표가 $\dfrac{9}{8}$이므로

$\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{9}{8}$ $\quad\therefore a+b=\dfrac{9}{4}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\dfrac{1}{b^2}+b=\dfrac{9}{4}, 4b^3-9b^2+4=0$

$(b-2)(4b^2-b-2)=0$ $\quad\therefore b=2$

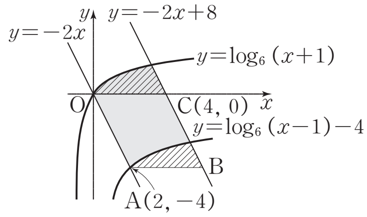
$b=2$를 ㉠에 대입하면 $a=\dfrac{1}{4}$

$\therefore 40(b-a)=40\left(2-\dfrac{1}{4}\right)=70$ 정답_ 70

314

곡선 $y=\log_6(x-1)-4$는 곡선 $y=\log_6(x+1)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 빗금 친 부분의 넓이가 같으므로 구하는 넓이는 평행사변형 OABC의 넓이와 같다.



이때, 두 점 A, C의 좌표는 각각 A(2, −4), C(4, 0)이므로 $\overline{\mathrm{OC}}=4$

따라서 평행사변형 OABC의 넓이는 $4\cdot4=16$ 정답_ 16

315

$x>1, y>1$이므로 $\log_2 x>0,\ \log_2 y>0$

산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$3=\log_2 x+\log_2 y$

$\ge 2\sqrt{\log_2 x\cdot\log_2 y}$ (단, 등호는 $\log_2 x=\log_2 y$일 때 성립)

$\therefore \sqrt{\log_2 x\cdot\log_2 y}\le\dfrac{3}{2}$

양변을 제곱하면 $\log_2 x\cdot\log_2 y\le\dfrac{9}{4}$

$$\begin{aligned}\therefore \log_x 2+\log_y 2&=\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_2 y}\\&=\frac{\log_2 x+\log_2 y}{\log_2 x\cdot\log_2 y}\\&=\frac{3}{\log_2 x\cdot\log_2 y}\\&\ge 3\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

따라서 $\log_x 2+\log_y 2$의 최솟값은 $\dfrac{4}{3}$ 정답_ ⑤

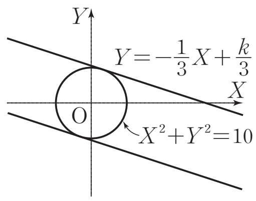
316

$(\log_2 x)^2+(\log_2 y)^2=10$에서 $\log_2 x=X, \log_2 y=Y$로 놓으면 $X^2+Y^2=10$ …… ㉠

이때, $\log_2 xy^3=\log_2 x+3\log_2 y=k$ (k는 상수)로 놓으면

$X+3Y=k$ $\quad\therefore Y=-\dfrac{1}{3}X+\dfrac{k}{3}$ …… ㉡

오른쪽 그림에서 직선 ㉡이 원 ㉠과 접할 때 k의 최댓값과 최솟값이 발생한다.



이때, 원의 중심 O$(0,\ 0)$과 직선 $X+3Y-k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{10}$과 같으므로

$\frac{|0+0-k|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$에서 $|k|=10$ $\quad\therefore k=\pm10$

$\log_2 xy^3=k=\pm10$에서 xy^3의 최댓값과 최솟값은 각각

$M=2^{10},\ m=2^{-10}$ $\quad\therefore Mm=2^{10}\cdot2^{-10}=1$ 정답_①

317

$(\log_2 x)^2-4\log_2 x+k=0$ …… ㉠

$4x^2-5x+1=0$에서 $(4x-1)(x-1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=1$

따라서 ㉠의 한 근이 $\frac{1}{4}<x<1$을 만족시켜야 한다.

$(\log_2 x)^2-4\log_2 x+k=0$에서 $\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-4t+k=0$ …… ㉡

이때, $\frac{1}{4}<x<1$에서 $\log_2\frac{1}{4}<\log_2 x<\log_2 1$

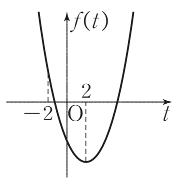
$\therefore -2<t<0$ …… ㉢

㉡의 한 근이 ㉢을 만족시켜야 하므로

$f(t)=t^2-4t+k$로 놓으면

$f(t)=(t-2)^2-4+k$

의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, 이차함수 $y=f(t)$의 그래프가 -2와 0 사이에서 t축과 만나야 하므로

$f(-2)=12+k>0,\ f(0)=k<0$ $\quad\therefore -12<k<0$

ㄱ은 옳다.

상수 k의 값의 범위는 $-12<k<0$

ㄴ은 옳지 않다.

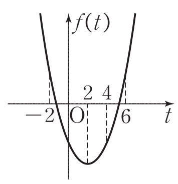
㉠의 두 근을 α, β라고 하면 ㉡의 두 근은 $\log\alpha,\ \log\beta$이므로 이차방정식 ㉡에서 근과 계수의 관계에 의해

$\log_2\alpha+\log_2\beta=4,\ \log_2\alpha\beta=4$ $\quad\therefore \alpha\beta=16$

따라서 방정식 ㉠의 두 근의 곱은 16이다.

ㄷ도 옳다.

이차함수 $y=f(t)$의 그래프는 직선 $t=2$에 대하여 대칭이므로 -2와 0 사이에서 t축과 만나면 오른쪽 그림과 같이 4와 6 사이에서도 t축과 만난다.



따라서 ㉡이 $4<t<6$인 근을 가지므로 ㉠은 $4<\log_2 x<6$, 즉 $16<x<64$인 근을 갖는다.

그러므로 방정식 ㉠의 다른 한 근은 방정식 $(x-16)(x-64)=0$의 두 근 사이에 있다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_③

318

$[\log_2 x]^2-8[\log_2 x]+15<0$에서

$([\log_2 x]-3)([\log_2 x]-5)<0$

$3<[\log_2 x]<5$ $\quad\therefore [\log_2 x]=4$ ($\because [\log_2 x]$는 정수)

따라서 $4\le\log_2 x<5$ $\quad\therefore 16\le x<32$ …… ㉠

$\log_{0.5}\left(\frac{x}{4}-1\right)\ge-2$에서 $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{4}-1\right)\ge\log_{\frac{1}{2}}4$

밑이 1보다 작으므로 $\frac{x}{4}-1\le4$ $\quad\therefore x\le20$

이때, 진수는 양수이어야 하므로 $\frac{x}{4}-1>0$ $\quad\therefore x>4$

$\therefore 4<x\le20$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $A=\{x\,|\,16\le x<32\},\ B=\{x\,|\,4<x\le20\}$이므로

$A\cap B=\{x\,|\,16\le x\le20\}=\{x\,|\,(x-16)(x-20)\le0\}$

$=\{x\,|\,x^2-36x+320\le0\}$

따라서 $a=-36,\ b=320$이므로 $a+b=284$ 정답_④

319

주어진 조건에 의해

$A(n)=\{x\,|\,\log_2 x\le n\}=\{x\,|\,0<x\le2^n\}$

$B(n)=\{x\,|\,\log_4 x\le n\}=\{x\,|\,0<x\le4^n\}$

ㄱ은 옳지 않다.

$A(1)=\{x\,|\,0<x\le2\}$

ㄴ은 옳다.

$A(4)=\{x\,|\,0<x\le2^4\}=\{x\,|\,0<x\le4^2\}=B(2)$

ㄷ도 옳다.

$\{x\,|\,0<x\le2^n\}\subset\{x\,|\,0<x\le4^n\}$이므로 $2^n\le4^n$

이때, $4^{-n}\le2^{-n}$이므로 $\{x\,|\,0<x\le4^{-n}\}\subset\{x\,|\,0<x\le2^{-n}\}$

$\therefore B(-n)\subset A(-n)$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 정답_⑤

II 삼각함수

05 삼각함수

320

(1) $30^\circ=30\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{6}$

(2) $165^\circ=165\times\frac{\pi}{180}=\frac{11}{12}\pi$

(3) $-150^\circ=-150\times\frac{\pi}{180}=-\frac{5}{6}\pi$

(4) $\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{4}\times180^\circ=135^\circ$

(5) $-\frac{2}{3}\pi=-\frac{2}{3}\times180^\circ=-120^\circ$

(6) $3=3\times\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{540^\circ}{\pi}$

정답_ (1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{11}{12}\pi$ (3) $-\frac{5}{6}\pi$
(4) 135° (5) -120° (6) $\frac{540^\circ}{\pi}$

321

① $\frac{\pi}{3}=\frac{1}{3}\times180^\circ=60^\circ$

② $36^\circ=36\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{5}$

③ $110^\circ=110\times\frac{\pi}{180}=\frac{11}{18}\pi$

④ $195^\circ=195\times\frac{\pi}{180}=\frac{13}{12}\pi$

⑤ $\frac{3}{2}\pi=\frac{3}{2}\times180^\circ=270^\circ$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 정답_ ③

322

세 각의 크기를 모두 호도법으로 나타내면

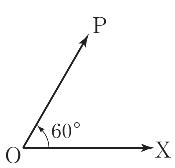
$1^\circ=\frac{\pi}{180}$, $1=\frac{180}{180}$, $\frac{\pi}{3}=\frac{60\pi}{180}$

이때, $\pi=3.14\cdots>3$이므로 분자끼리 비교하면

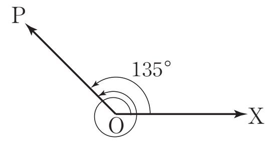
$\pi<180<60\pi$ $\quad\therefore 1^\circ<1<\frac{\pi}{3}$ 정답_ ①

323

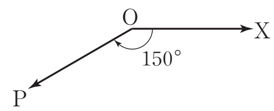
(1) 시계 반대 방향으로 60°만큼 회전한다.



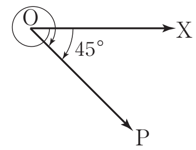
(2) $495^\circ=360^\circ\times1+135^\circ$이므로 시계 반대 방향으로 한 바퀴 회전한 후 135°만큼 더 회전한다.



(3) 시계 방향으로 150°만큼 회전한다.



(4) $405^\circ=360^\circ\times1+45^\circ$이므로 시계 방향으로 한 바퀴 회전한 후 45°만큼 더 회전한다.



답_ 풀이 참조

324

① 동경 OP가 90°를 나타내므로 일반각은 $360^\circ n+90^\circ$이다.

② 동경 OP가 -90° 또는 270°를 나타내므로 일반각은 $360^\circ n+270^\circ$이다.

③ 동경 OP가 -45° 또는 315°를 나타내므로 일반각은 $360^\circ n+315^\circ$이다.

④ 동경 OP가 0°를 나타내므로 일반각은 $360^\circ n$이다.

⑤ 동경 OP가 180°를 나타내므로 일반각은 $360^\circ n+180^\circ$이다.

따라서 옳지 않은 것은 ②이다. 정답_ ②

325

(1) $400^\circ=360^\circ\times1+40^\circ$에서 40°와 동경이 일치하므로 일반각은 $360^\circ n+40^\circ$ (단, n은 정수이다.)

(2) $-380^\circ=360^\circ\times(-2)+340^\circ$에서 340°와 동경이 일치하므로 일반각은 $360^\circ n+340^\circ$ (단, n은 정수이다.)

(3) 일반각은 $2n\pi+\frac{5}{3}\pi$ (단, n은 정수이다.)

(4) $\frac{11}{4}\pi=2\pi\times1+\frac{3}{4}\pi$에서 $\frac{3}{4}\pi$와 동경이 일치하므로 일반각은 $2n\pi+\frac{3}{4}\pi$ (단, n은 정수이다.)

정답_ 풀이 참조

326

$390^\circ=360^\circ\times1+30^\circ$이므로 30°의 동경과 일치한다.

ㄱ. $750^\circ=360^\circ\times2+30^\circ$이므로 30°의 동경과 일치한다.

ㄴ. $690^\circ=360^\circ\times1+330^\circ$이므로 330°의 동경과 일치한다.

ㄷ. $1410^\circ=360^\circ\times3+330^\circ$이므로 330°의 동경과 일치한다.

ㄹ. $-330^\circ=360^\circ\times(-1)+30^\circ$이므로 30°의 동경과 일치한다.

ㅁ. $-390^\circ=360^\circ\times(-2)+330^\circ$이므로 330°의 동경과 일치한다.

따라서 390°와 동경이 일치하지 않는 것은 ㄴ, ㄷ, ㅁ으로 3개이다. 정답_ ③

327

(1) $570^\circ=360^\circ\times1+210^\circ$에서 동경이 210°와 일치하므로 제3사분면의 각이다.

(2) $750^\circ=360^\circ\times2+30^\circ$에서 동경이 30°와 일치하므로 제1사분면의 각이다.

(3) $-210^\circ=360^\circ\times(-1)+150^\circ$에서 동경이 150°와 일치하므로 제2사분면의 각이다.

(4) $690^\circ=360^\circ\times1+330^\circ$에서 동경이 330°와 일치하므로 제4사분면의 각이다.

정답_ (1) 제3사분면의 각 (2) 제1사분면의 각
(3) 제2사분면의 각 (4) 제4사분면의 각

328

① $670^\circ=360^\circ\times1+310^\circ$이므로 제4사분면의 각이다.

② $\frac{7}{4}\pi$는 제4사분면의 각이다.

③ 280°는 제4사분면의 각이다.

④ $\frac{7}{3}\pi=2\pi\times1+\frac{\pi}{3}$이므로 제1사분면의 각이다.

⑤ $-60^\circ=360^\circ\times(-1)+300^\circ$이므로 제4사분면의 각이다.

따라서 제4사분면의 각이 아닌 것은 ④이다. 정답_ ④

329

θ가 제3사분면의 각이므로

$360^\circ n+180^\circ<\theta<360^\circ n+270^\circ$ (단, n은 정수이다.)

$\therefore 120^\circ n+60^\circ<\frac{\theta}{3}<120^\circ n+90^\circ$

(i) $n=3k$ (k는 정수)일 때

$120^\circ\cdot3k+60^\circ<\frac{\theta}{3}<120^\circ\cdot3k+90^\circ$

$\therefore 360^\circ k+60^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ k+90^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때

$120^\circ(3k+1)+60^\circ<\frac{\theta}{3}<120^\circ(3k+1)+90^\circ$

$\therefore 360^\circ k+180^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ k+210^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제3사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때

$120^\circ(3k+2)+60^\circ<\frac{\theta}{3}<120^\circ(3k+2)+90^\circ$

$\therefore 360^\circ k+300^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ k+330^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii), (iii)에서 $\frac{\theta}{3}$의 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제2사분면이다. 정답_ ②

330

2θ가 제1사분면의 각이므로

$360^\circ n<2\theta<360^\circ n+90^\circ$ (단, n은 정수이다.)

$\therefore 180^\circ n<\theta<180^\circ n+45^\circ$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때

$180^\circ\cdot2k<\theta<180^\circ\cdot2k+45^\circ$

$\therefore 360^\circ k<\theta<360^\circ k+45^\circ$

따라서 θ는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때

$180^\circ(2k+1)<\theta<180^\circ(2k+1)+45^\circ$

$\therefore 360^\circ k+180^\circ<\theta<360^\circ k+225^\circ$

따라서 θ는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ의 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제1, 3사분면이다. 정답_ ②

331

θ가 제2사분면의 각이므로

$360^\circ n+90^\circ<\theta<360^\circ n+180^\circ$ (단, n은 정수이다.)

$\therefore 180^\circ n+45^\circ<\frac{\theta}{2}<180^\circ n+90^\circ$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때

$180^\circ\cdot2k+45^\circ<\frac{\theta}{2}<180^\circ\cdot2k+90^\circ$

$\therefore 360^\circ k+45^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ k+90^\circ$

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때

$180^\circ(2k+1)+45^\circ<\frac{\theta}{2}<180^\circ(2k+1)+90^\circ$

$\therefore 360^\circ k+225^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ k+270^\circ$

(i), (ii)에서 $\frac{\theta}{2}$의 동경이 존재할 수 있는 영역은 ④이다.

정답_ ④

332

ㄱ은 옳지 않다.

$180^\circ=\pi$의 양변을 180으로 나누면 $1^\circ=\frac{\pi}{180}$

양변에 π를 곱하면 $\pi^\circ=\frac{\pi^2}{180}$

ㄴ도 옳지 않다.

$-120^\circ=360^\circ\times(-1)+240^\circ$이므로 제3사분면의 각이다.

ㄷ은 옳다.

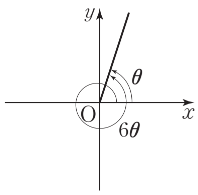
$\frac{7}{3}\pi=2\pi\times1+\frac{\pi}{3}$, $-\frac{5}{3}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{\pi}{3}$이므로

$\frac{\pi}{3}$, $\frac{7}{3}\pi$, $-\frac{5}{3}\pi$의 동경은 모두 일치한다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다. 정답_ ③

333

오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 일치하므로



$6\theta-\theta=2n\pi$ (단, n은 정수이다.)

$5\theta=2n\pi$ $\therefore\ \theta=\frac{2n}{5}\pi$ ...... ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n}{5}\pi<\pi$이므로 $0<n<\frac{5}{2}$ $\therefore\ n=1,\ 2$

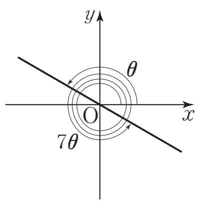
이 값을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{2}{5}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{5}\pi$

따라서 구하는 모든 θ의 크기의 합은

$\frac{2}{5}\pi+\frac{4}{5}\pi=\frac{6}{5}\pi$ 정답_ ⑤

334

오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로



$7\theta-\theta=2n\pi+\pi$ (단, n은 정수이다.)

$6\theta=2n\pi+\pi$

$\therefore\ \theta=\frac{2n+1}{6}\pi$ ...... ㉠

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n+1}{6}\pi<\pi$, $3<2n+1<6$

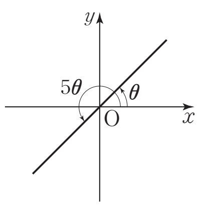
$1<n<\frac{5}{2}$ $\therefore\ n=2$

이 값을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{5}{6}\pi$

$\therefore\ \sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$ 정답_ ⑤

335

오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로



$5\theta-\theta=2n\pi+\pi$ (단, n은 정수이다.)

$4\theta=2n\pi+\pi$

$\therefore\ \theta=\frac{2n+1}{4}\pi$ ...... ㉠

θ는 예각이므로 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, 즉 $0<\frac{2n+1}{4}\pi<\frac{\pi}{2}$

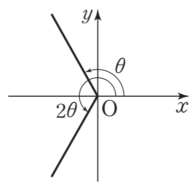
$0<2n+1<2$, $-\frac{1}{2}<n<\frac{1}{2}$ $\therefore\ n=0$

이 값을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ \tan\theta=\tan\frac{\pi}{4}=1$ 정답_ ②

336

오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 각 2θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로



$\theta+2\theta=2n\pi$ (단, n은 정수이다.)

$3\theta=2n\pi$ $\therefore\ \theta=\frac{2n}{3}\pi$ ...... ㉠

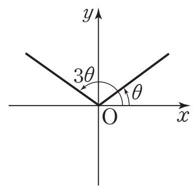
$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n}{3}\pi<\pi$

$\frac{3}{4}<n<\frac{3}{2}$ $\therefore\ n=1$

이 값을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ 정답_ ③

337

오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 각 3θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로



$\theta+3\theta=2n\pi+\pi$ (단, n은 정수이다.)

$4\theta=(2n+1)\pi$

$\therefore\ \theta=\frac{2n+1}{4}\pi$ ...... ㉠

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\frac{2n+1}{4}\pi<\frac{\pi}{2}$, $0<2n+1<2$

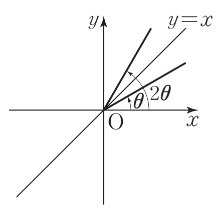
$-\frac{1}{2}<n<\frac{1}{2}$ $\therefore\ n=0$

이 값을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ \cos\theta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 정답_ ④

338

오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 각 2θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로



$\theta+2\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수이다.)

$3\theta=\frac{4n+1}{2}\pi$ $\therefore\ \theta=\frac{4n+1}{6}\pi$ ...... ㉠

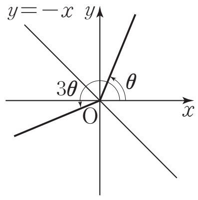
$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\frac{4n+1}{6}\pi<\frac{\pi}{2}$, $0<4n+1<3$

$-\frac{1}{4}<n<\frac{1}{2}$ $\therefore\ n=0$

이 값을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ \sin\theta=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ 정답_ ③

339



오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 각 3θ를 나타내는 동경이 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+3\theta=2n\pi+\frac{3}{2}\pi$ (단, n은 정수이다.)

$4\theta=\frac{4n+3}{2}\pi \qquad \therefore \theta=\frac{4n+3}{8}\pi$ ...... ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $\;0<\frac{4n+3}{8}\pi<\pi,\; 0<4n+3<8$

$-\frac{3}{4}<n<\frac{5}{4} \qquad \therefore n=0, 1$

이 값을 ㉠에 대입하면 $\;\theta=\frac{3}{8}\pi$ 또는 $\theta=\frac{7}{8}\pi$

따라서 모든 θ의 크기의 합은 $\;\frac{3}{8}\pi+\frac{7}{8}\pi=\frac{5}{4}\pi$ 정답_ ④

340

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라고 하면

$r=4,\; \theta=\frac{\pi}{8}$이므로

$l=r\theta=4\cdot\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$

$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\cdot4^2\cdot\frac{\pi}{8}=\pi$ 정답_ $l=\frac{\pi}{2}$, $S=\pi$

341

부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

$l=4\pi,\; S=12\pi$이므로

$S=\frac{1}{2}rl$에서 $\;12\pi=\frac{1}{2}\cdot r\cdot 4\pi \qquad \therefore r=6$

$l=r\theta$에서 $\;4\pi=6\theta \qquad \therefore \theta=\frac{2}{3}\pi$ 정답_ $r=6$, $\theta=\frac{2}{3}\pi$

342

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ, 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

$l=2\pi,\; S=2\pi$이므로

$S=\frac{1}{2}rl$에서 $\;2\pi=\frac{1}{2}\cdot r\cdot 2\pi \qquad \therefore r=2$

$l=r\theta$에서 $\;2\pi=2\theta \qquad \therefore \theta=\pi$ 정답_ ①

343

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 넓이를 S라고 하면

$r=1,\; S=\frac{2}{3}\pi$이므로

$S=\frac{1}{2}r^2\theta$에서 $\;\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\theta \qquad \therefore \theta=\frac{4}{3}\pi$

$\therefore l=r\theta=1\cdot\frac{4}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$ 정답_ ④

344

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ, 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

$\theta=45^\circ=\frac{\pi}{4},\; l=\pi$이므로

$l=r\theta$에서 $\;\pi=r\cdot\frac{\pi}{4} \qquad \therefore r=4$

$\therefore S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}\cdot4\cdot\pi=2\pi$ 정답_ ③

345

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ, 넓이를 S라고 하면

$\theta=2,\; S=36$이므로

$S=\frac{1}{2}r^2\theta$에서 $\;36=\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot 2$

$r^2=36 \qquad \therefore r=6\;(\because r>0)$

따라서 부채꼴의 호의 길이는

$r\theta=6\cdot2=12$ 정답_ ④

346

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라고 하면 부채꼴의 둘레의 길이는

$2r+r\theta=2r+r\cdot\frac{2}{3}\pi=6+2\pi$

$(3+\pi)r=9+3\pi \qquad \therefore r=3$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\cdot3^2\cdot\frac{2}{3}\pi=3\pi$ 정답_ ③

347

부채꼴의 호의 길이를 l cm라고 하면 둘레의 길이가 80 cm이므로

$2a+l=80 \qquad \therefore l=80-2a$

$S=\frac{1}{2}al=\frac{1}{2}a(80-2a)=-(a-20)^2+400\;\;(0<a<40)$

따라서 $a=20$(cm)일 때 부채꼴의 넓이의 최댓값은 400 cm^2이다.

$a=20$이면 $l=80-2a=40$이므로 $\;40=20b \qquad \therefore b=2$

$\therefore a+b=22$ 정답_ ⑤

348

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l, 둘레의 길이를 a라고 하면

$2r+l=a \qquad \therefore l=a-2r$

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(a-2r)=-\left(r-\frac{a}{4}\right)^2+\frac{a^2}{16}\;\left(0<r<\frac{a}{2}\right)$

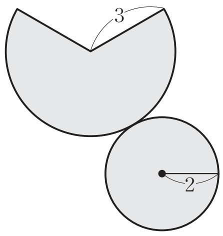
따라서 $r=\frac{a}{4}$일 때 부채꼴의 넓이의 최댓값은 $\frac{a^2}{16}$이다.

$r=\frac{a}{4}$이면 $\;l=a-2r=\frac{a}{2}$이므로

$l=r\theta$에서 $\;\frac{a}{2}=\frac{a}{4}\cdot\theta \qquad \therefore \theta=2$ 정답_ ②

349

주어진 조건을 이용하여 전개도를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



옆면인 부채꼴의 호의 길이는

$2\pi\cdot2=4\pi$

이므로 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\pi=6\pi$

따라서 원뿔의 겉넓이는

(부채꼴의 넓이)+(밑면인 원의 넓이)

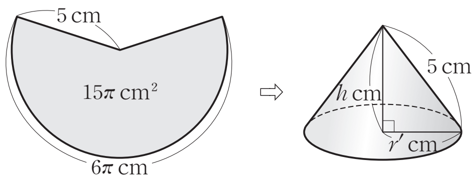
$=6\pi+\pi\cdot2^2=6\pi+4\pi=10\pi$

정답_③

350

부채꼴의 반지름의 길이를 r cm, 호의 길이를 l cm, 넓이를 S cm^{2}라고 하면 $l=6\pi, S=15\pi$

$S=\frac{1}{2}rl$에서 $15\pi=\frac{1}{2}\cdot r\cdot6\pi$ $\therefore r=5$(cm)



위의 그림과 같이 부채꼴로 만든 원뿔의 높이를 h cm, 밑면인 원의 반지름의 길이를 r' cm라고 하면

$2\pi r'=6\pi$ $\therefore r'=3$(cm)

$\therefore h=\sqrt{5^2-3^2}=4$(cm)

따라서 원뿔의 부피는

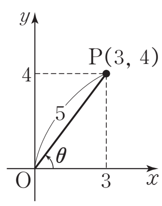
$\frac{1}{3}\pi\cdot r'^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi\cdot3^2\cdot4=12\pi$(cm^3)

정답_②

351

점 P(3, 4)에 대하여 $x=3$, $y=4$

$\overline{\mathrm{OP}}=r$로 놓으면 $r=\sqrt{3^2+4^2}=5$



(1) $\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{4}{5}$

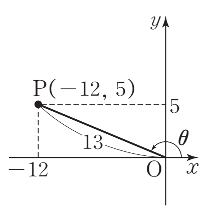
(2) $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{3}{5}$

(3) $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{4}{3}$

정답_(1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{3}{5}$ (3) $\frac{4}{3}$

352

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-12)^2+5^2}=13$이므로



$\sin\theta=\frac{5}{13}$, $\cos\theta=-\frac{12}{13}$,

$\tan\theta=-\frac{5}{12}$

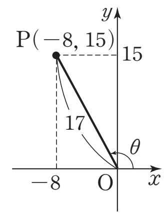
$\therefore 13\sin\theta-13\cos\theta+12\tan\theta$

$=5-(-12)+(-5)=12$

정답_③

353

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-8)^2+15^2}=17$이므로



$\sin\theta=\frac{15}{17}$, $\cos\theta=-\frac{8}{17}$,

$\tan\theta=-\frac{15}{8}$

$$\therefore \frac{17\sin\theta+16\tan\theta}{17\cos\theta+3}=\frac{17\cdot\frac{15}{17}+16\cdot\left(-\frac{15}{8}\right)}{17\cdot\left(-\frac{8}{17}\right)+3}=\frac{-15}{-5}=3$$

정답_⑤

354

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-1)^2+(-a)^2}=\sqrt{1+a^2}$이므로

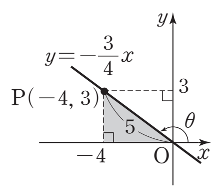
$\cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{1+a^2}}=-\frac{2}{3}$, $2\sqrt{1+a^2}=3$

$4(1+a^2)=9$, $a^2=\frac{5}{4}$ $\therefore a=\frac{\sqrt{5}}{2}$ ($\because a>0$)

정답_⑤

355

오른쪽 그림과 같이 점 P의 좌표를 P$(-4,\ 3)$으로 놓으면



$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$이므로

$\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\tan\theta=-\frac{3}{4}$

$\therefore 5\sin\theta-4\tan\theta=5\cdot\frac{3}{5}-4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$

$=3+3=6$

정답_②

356

(1) 사인이 음수이고, 코사인이 양수인 사분면은 '올사탄코'에서 코사인 동네인 제4사분면의 각이다.

(2) 코사인이 음수이고, 탄젠트가 양수인 사분면은 '올사탄코'에서 탄젠트 동네인 제3사분면의 각이다.

(3) 사인이 양수이고, 탄젠트가 음수인 사분면은 '올사탄코'에서 사인 동네인 제2사분면의 각이다.

(4) 사인이 음수이고, 코사인이 음수인 사분면은 '올사탄코'에서 탄젠트 동네인 제3사분면의 각이다.

정답_(1) 제4사분면의 각 (2) 제3사분면의 각
(3) 제2사분면의 각 (4) 제3사분면의 각

357

$\sin\theta\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

즉, θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이므로 보기 중 항상 옳은 것은 ④이다.

정답_④

358

$\sin\theta\tan\theta>0$이므로 $\sin\theta$와 $\tan\theta$의 부호는 같다.

이때, $\sin\theta+\tan\theta<0$이므로 $\sin\theta<0$, $\tan\theta<0$

따라서 θ는 제4사분면의 각이다. 정답_ ④

359

(i) $\sin\theta\cos\theta<0$에서 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 부호가 서로 다르므로 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\tan\theta>0$에서 $\cos\theta$와 $\tan\theta$의 부호가 서로 같으므로 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제2사분면의 각이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 θ의 크기가 될 수 있는 것은 ② 이다. 정답_ ②

360

$\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$을 모두 만족시키는 θ는 제4사분면의 각이므로 $360^\circ n+270^\circ<\theta<360^\circ n+360^\circ$ (단, n은 정수이다.)

$\therefore 180^\circ n+135^\circ<\dfrac{\theta}{2}<180^\circ n+180^\circ$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때

$$180^\circ\cdot 2k+135^\circ<\frac{\theta}{2}<180^\circ\cdot 2k+180^\circ$$

$$\therefore 360^\circ k+135^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ k+180^\circ$$

따라서 $\dfrac{\theta}{2}$는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때

$$180^\circ(2k+1)+135^\circ<\frac{\theta}{2}<180^\circ(2k+1)+180^\circ$$

$$360^\circ k+315^\circ<\frac{\theta}{2}<360^\circ k+360^\circ$$

따라서 $\dfrac{\theta}{2}$는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 $\dfrac{\theta}{2}$의 동경이 존재하는 사분면은 제2, 4사분면이다.

$\therefore m=2$ 또는 $m=4$ 정답_ ④

361

x가 제3사분면의 각이므로 $\cos x<0$, $\sin x<0$

$$\begin{aligned}\therefore \cos x-\sin x+|\cos x|+\sqrt{\sin^2 x}&=\cos x-\sin x+|\cos x|+|\sin x|\\&=\cos x-\sin x-\cos x-\sin x\\&=-2\sin x\end{aligned}$$

정답_ ④

362

θ가 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

$-1\le\cos\theta\le1$이므로 $1+\cos\theta\ge0$이고, $\sin\theta-\cos\theta<0$

$$\begin{aligned}\therefore |1+\cos\theta|+\sqrt{\sin^2\theta}-\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}&=|1+\cos\theta|+|\sin\theta|-|\sin\theta-\cos\theta|\\&=1+\cos\theta-\sin\theta+\sin\theta-\cos\theta=1\end{aligned}$$

정답_ ③

363

$$\begin{aligned}&\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}-\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\\&=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}-\frac{1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}\\&=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}-\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\\&=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}-\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=0\end{aligned}$$

정답_ ②

364

$$\begin{aligned}&\left(\sin\theta+\frac{1}{\sin\theta}\right)^2+\left(\cos\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)^2-\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)^2\\&=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{1}{\tan^2\theta}\right)\\&\quad+\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta\right)+2\\&=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)\\&\quad+\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)+2\\&=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+2\\&=1+\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}+2=1+1+1+2=5\end{aligned}$$

정답_ ⑤

365

ㄱ은 옳지 않다.

$$\begin{aligned}\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}&=\frac{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}\\&=\frac{1+2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}\\&=\frac{2(1+\sin\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}=\frac{2}{\cos\theta}\end{aligned}$$

ㄴ은 옳다.

$$\begin{aligned}&(1+\tan^2\theta)\left(1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)(1-\sin^2\theta)(1-\cos^2\theta)\\&=\left(1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)\left(1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)(1-\sin^2\theta)(1-\cos^2\theta)\\&=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}(1-\sin^2\theta)(1-\cos^2\theta)\\&=\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta=1\end{aligned}$$

ㄷ도 옳다.

$$\begin{aligned}\tan^2\theta-\sin^2\theta&=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta\\&=\frac{\sin^2\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}\\&=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\sin^2\theta\\&=\tan^2\theta\sin^2\theta\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ④

366

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

$$\therefore \sin\theta\tan\theta=\sin\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{\frac{8}{9}}{-\frac{1}{3}}=-\frac{8}{3}$$

정답_ ②

367

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

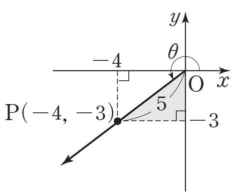
$\therefore \cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$

θ가 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

$\therefore \cos\theta=-\frac{4}{5},\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$ 정답_ ①

368

θ가 제3사분면의 각이고 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$이므로 θ의 동경은 오른쪽 그림의 반직선 OP와 같다.



이때, $P(-4,\ -3)$이므로

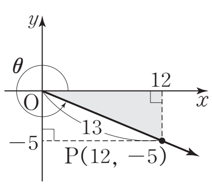
$\overline{OP}=\sqrt{5^2-(-4)^2}=3$

따라서 $\sin\theta=-\frac{3}{5},\ \tan\theta=\frac{3}{4}$이므로

$\sin\theta+\tan\theta=-\frac{3}{5}+\frac{3}{4}=\frac{3}{20}$ 정답_ ②

369

θ가 제4사분면의 각이고 $\tan\theta=-\frac{5}{12}$이므로 θ의 동경은 오른쪽 그림의 반직선 OP와 같다.



이때, $P(12,\ -5)$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{12^2+(-5)^2}=13$

따라서 $\sin\theta=-\frac{5}{13},\ \cos\theta=\frac{12}{13}$이므로

$13(\sin\theta-\cos\theta)=13\left(-\frac{5}{13}-\frac{12}{13}\right)=-17$ 정답_ ①

370

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4},\ 2\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{9}{16}=\frac{11}{16}$

정답_ (1) $-\frac{3}{8}$ (2) $\frac{11}{16}$

371

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$

$$\therefore \frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}}=-\frac{3}{4}$$

정답_ ②

372

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\cdot\frac{1}{2}=2$

θ가 제1사분면의 각이므로

$\sin\theta>0,\ \cos\theta>0$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$ 정답_ ④

373

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$

θ가 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 정답_ ④

374

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$

$$\frac{1}{\cos\theta}\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan^2\theta}\right)=\frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)$$
$$=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

이때,

$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{13}{27}$

이므로

$\frac{1}{\cos\theta}\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan^2\theta}\right)=\frac{\frac{13}{27}}{\left(-\frac{4}{9}\right)^2}=\frac{39}{16}$ 정답_ ④

375

이차방정식 $2x^2-x+a=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로

근과 계수의 관계에 의해

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$ ...... ㉠

$\sin\theta\cos\theta=\frac{a}{2}$ ...... ㉡

㉠의 양변을 제곱하면 $\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

㉡에서 $\frac{a}{2}=-\frac{3}{8}$ $\therefore a=-\frac{3}{4}$ 정답_ ⑤

376

이차방정식 $2x^2-\sqrt{2}x+a=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로

근과 계수의 관계에 의해

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ...... ㉠

$\sin\theta\cos\theta=\frac{a}{2}$ ...... ㉡

㉠의 양변을 제곱하면 $\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$

이때, ㉡에서 $\frac{a}{2}=-\frac{1}{4}$ $\therefore a=-\frac{1}{2}$

$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$

$\therefore \frac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{a}=\frac{\frac{5\sqrt{2}}{8}}{-\frac{1}{2}}=-\frac{5\sqrt{2}}{4}$ 정답_ ②

377

계수가 유리수인 이차방정식 $x^2-(\sin\theta+\cos\theta)x+1=0$의 한 근이 $\sqrt{2}-1$이므로 다른 한 근은 $\sqrt{2}+1$이다.

근과 계수의 관계에 의해

$(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)=\sin\theta+\cos\theta$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=2\sqrt{2}$

양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=8$

$1+2\sin\theta\cos\theta=8$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{7}{2}$ 정답_ ⑤

378

각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$7\theta-\theta=2n\pi$ (단, n은 정수이다.)

$6\theta=2n\pi$ $\therefore \theta=\frac{n\pi}{3}$ ...... ㉠

.... ❶

이때, θ는 예각이므로 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, 즉 $0<\frac{n\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$

$0<n<\frac{3}{2}$ $\therefore n=1$

이 값을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{\pi}{3}$ .... ❷

$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ .... ❸

정답_ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	θ를 일반각으로 나타내기	40%
❷	θ의 크기 구하기	40%
❸	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$의 값 구하기	20%

379

반지름의 길이가 r인 부채꼴의 호의 길이를 l이라고 하면 $l=r\theta$이므로 둘레의 길이는 $2r+r\theta=r(2+\theta)$ ······ ㉠

한편, 반지름의 길이가 $2r$인 원의 둘레의 길이는

$2\pi\cdot 2r=4\pi r$ ······ ㉡

······ ❶

㉠=㉡에서 $r(2+\theta)=4\pi r$ $\quad\therefore \theta=4\pi-2$ ······ ❷

$\therefore \sin\dfrac{\theta+2}{8}=\sin\dfrac{(4\pi-2)+2}{8}$

$=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$ ······ ❸

정답_ 1

단계	채점 기준	비율
❶	부채꼴의 둘레의 길이와 원의 둘레의 길이 구하기	40%
❷	θ의 크기 구하기	30%
❸	$\sin\dfrac{\theta+2}{8}$ 의 값 구하기	30%

380

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면 둘레의 길이가 20이므로

$2r+l=20$ $\quad\therefore l=20-2r$ ······ ❶

$S=\dfrac{1}{2}rl=\dfrac{1}{2}r(20-2r)=-(r-5)^2+25$ (단, $0<r<10$)

따라서 $r=5$일 때, 부채꼴의 넓이의 최댓값은 25이다.

즉, $r=5$, $M=25$이므로 ······ ❷

$r+M=30$ ······ ❸

정답_ 30

단계	채점 기준	비율
❶	부채꼴의 호의 길이를 r에 대한 식으로 나타내기	30%
❷	r, M의 값 구하기	60%
❸	$r+M$의 값 구하기	10%

381

$\angle AOP=\theta$로 놓으면 $\overparen{AP}=r\theta$

이때, $\overparen{AP}=\overline{AB}$이므로 $r\theta=2r$ $\quad\therefore \theta=2$ ······ ❶

$\angle AOP=2$이므로 $\angle BOP=\pi-\theta=\pi-2$ ······ ❷

$\therefore \dfrac{(\text{부채꼴 OAP의 넓이})}{(\text{부채꼴 OBP의 넓이})}=\dfrac{\frac{1}{2}r^2\cdot 2}{\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot(\pi-2)}=\dfrac{2}{\pi-2}$ ······ ❸

정답_ $\dfrac{2}{\pi-2}$

단계	채점 기준	비율
❶	$\angle AOP$의 크기 구하기	30%
❷	$\angle BOP$의 크기 구하기	20%
❸	$\dfrac{(\text{부채꼴 OAP의 넓이})}{(\text{부채꼴 OBP의 넓이})}$ 의 값 구하기	50%

382

$\sqrt{\sin\theta\cos\theta}=-\sqrt{\sin\theta}\sqrt{\cos\theta}$ 이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$ ······ ❶

$\therefore |\sin\theta|+\sqrt{\cos^2\theta}-\sqrt{1-\cos^2\theta}-\cos\theta$

$=|\sin\theta|+\sqrt{\cos^2\theta}-\sqrt{\sin^2\theta}-\cos\theta$

$=|\sin\theta|+|\cos\theta|-|\sin\theta|-\cos\theta$ ······ ❷

$=-\sin\theta-\cos\theta+\sin\theta-\cos\theta$

$=-2\cos\theta$ ······ ❸

정답_ $-2\cos\theta$

단계	채점 기준	비율
❶	$\sin\theta$, $\cos\theta$의 부호 구하기	30%
❷	주어진 식의 근호 없애기	40%
❸	주어진 식 간단히 하기	30%

383

이차방정식 $2x^2+kx+1=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{k}{2}$ ······ ㉠

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ ······ ㉡

······ ❶

㉠의 양변을 제곱하여 정리하면 $1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{k^2}{4}$

이 식에 ㉡을 대입하면 $1+2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{k^2}{4}$, $k^2=8$

$\therefore k=2\sqrt{2}$ ($\because k>0$) ······ ❷

즉, $2x^2+2\sqrt{2}x+1=0$에서 $(\sqrt{2}x+1)^2=0$ $\quad\therefore x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

따라서 $\sin\theta=\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로

$\dfrac{k}{\tan\theta}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{1}=2\sqrt{2}$ ······ ❸

정답_ $2\sqrt{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	$\sin\theta+\cos\theta$, $\sin\theta\cos\theta$의 값 구하기	30%
❷	k의 값 구하기	35%
❸	$\dfrac{k}{\tan\theta}$ 의 값 구하기	35%

384

동경 OP가 나타내는 한 각의 크기는 $\pi+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{7}{6}\pi$이므로 일반각은 $\theta=2n\pi+\dfrac{7}{6}\pi$ (단, n은 정수이다.)

$-4\pi\le\theta\le 4\pi$에서 $-4\pi\le 2n\pi+\dfrac{7}{6}\pi\le 4\pi$

$-4\le 2n+\dfrac{7}{6}\le 4$, $-\dfrac{31}{12}\le n\le\dfrac{17}{12}$ $\quad\therefore n=-2,\ -1,\ 0,\ 1$

따라서 θ의 크기는 $-\frac{17}{6}\pi$, $-\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{19}{6}\pi$이므로 모든 θ의 크기의 합은 $-\frac{17}{6}\pi-\frac{5}{6}\pi+\frac{7}{6}\pi+\frac{19}{6}\pi=\frac{2}{3}\pi$ 정답_ ④

385

두 각 $\theta, 5\theta$를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=2n\pi+\pi$ (단, n은 정수이다.)

$6\theta=(2n+1)\pi \quad \therefore \theta=\frac{2n+1}{6}\pi$

이때, $0<\theta<\pi$이므로 $0<\frac{2n+1}{6}\pi<\pi$, $-\frac{1}{2}<n<\frac{5}{2}$

$\therefore n=0,\ 1,\ 2$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$ …… ㉠

두 각 $\theta, 2\theta$를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+2\theta=2m\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, m은 정수이다.)

$3\theta=\left(2m+\frac{1}{2}\right)\pi \quad \therefore \theta=\left(\frac{2}{3}m+\frac{1}{6}\right)\pi$

이때, $0<\theta<\pi$이므로 $0<\left(\frac{2}{3}m+\frac{1}{6}\right)\pi<\pi$, $-\frac{1}{4}<m<\frac{5}{4}$

$\therefore m=0,\ 1 \quad \therefore \theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 각 θ의 크기는

$\theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$ 정답_ ①, ⑤

386

부채꼴의 중심각의 크기를 θ, 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 16이므로

$2r+l=16 \quad \therefore l=16-2r$ …… ㉠

넓이가 12 이상이 되어야 하므로 $S=\frac{1}{2}rl\geq 12$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{1}{2}r(16-2r)\geq 12$

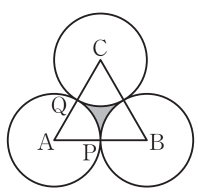
$r^2-8r+12\leq 0$, $(r-2)(r-6)\leq 0 \quad \therefore 2\leq r\leq 6$

한편, $l=r\theta$에서 $\theta=\frac{l}{r}=\frac{16-2r}{r}=\frac{16}{r}-2$이므로 r가 최솟값을 가질 때, θ는 최댓값을 갖는다.

따라서 $r=2$일 때, 구하는 중심각의 크기의 최댓값은

$\frac{16}{2}-2=6$ 정답_ ⑤

387



오른쪽 그림은 주어진 입체의 단면도의 한 부분이다.

삼각형 ABC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로 그 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2=\sqrt{3}$

부채꼴 APQ는 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이므로 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

세 개의 원기둥으로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라고 하면

$S=$(삼각형 ABC의 넓이)-3(부채꼴 APQ의 넓이)

$=\sqrt{3}-3\cdot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

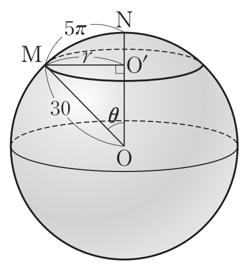
위 그림에서 어두운 부분을 밑면으로 하고 높이가 5인 입체의 부피는 $\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)\cdot 5$

구하는 원기둥 사이의 어두운 부분의 부피를 V라고 하면

$V=4\cdot\left\{\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)\cdot 5\right\}=20\sqrt{3}-10\pi$

따라서 $a=20,\ b=-10$이므로 $a+b=10$ 정답_ 10

388



오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 O라 하고, 구 위의 한 점 N에서 실의 한 끝이 놓인 지점을 M이라고 하면

$\overline{OM}=\overline{ON}=30$

이때, $\angle MON=\theta$로 놓으면 부채꼴 OMN의 호의 길이는

$30\theta=5\pi \quad \therefore \theta=\frac{\pi}{6}$

구하는 자취의 길이는 점 M이 그리는 원의 둘레의 길이이다.

이 원의 중심을 O′이라 하고, 이 원의 반지름의 길이를 r라고 하면

$\sin\theta=\frac{r}{30}$에서 $r=30\sin\frac{\pi}{6}=15$

따라서 구하는 자취의 길이, 즉 원 O′의 둘레의 길이 l은

$l=2\pi\cdot 15=30\pi \quad \therefore \frac{l}{\pi}=\frac{30\pi}{\pi}=30$ 정답_ ③

389

부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 θ, 반지름의 길이를 r, 넓이를 S라고 하면 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$

이때, 부채꼴 OAB에서

중심각의 크기를 10 % 줄이면 $\theta-0.1\theta=0.9\theta$

반지름의 길이를 10 % 늘이면 $r+0.1r=1.1r$

따라서 새로 만들어진 부채꼴의 넓이를 S'이라고 하면

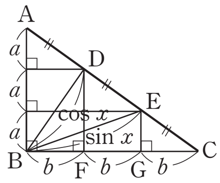
$S'=\frac{1}{2}\times(1.1r)^2\times 0.9\theta=\frac{1}{2}r^2\theta\times(1.1)^2\times 0.9$

$=\frac{1}{2}r^2\theta\times 1.089=1.089S$

따라서 새로 만들어진 부채꼴의 넓이는 처음보다 8.9 % 증가한다. 정답_ ③

390

점 D, E에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 F, G라 하고, $\overline{AB}=3a$, $\overline{BC}=3b$라고 하면



삼각형 DBF에서

$\cos^2 x=(2a)^2+b^2$ ...... ㉠

삼각형 EBG에서

$\sin^2 x=a^2+(2b)^2$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면 $1=5(a^2+b^2)$ $\therefore a^2+b^2=\frac{1}{5}$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{(3a)^2+(3b)^2}=3\sqrt{a^2+b^2}$

$=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

정답_ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

391

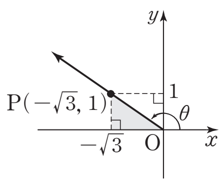
$\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=2+\sqrt{3}$에서 $1-\tan\theta=(1+\tan\theta)(2+\sqrt{3})$

$(3+\sqrt{3})\tan\theta=-1-\sqrt{3}$

$\therefore \tan\theta=-\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

θ가 제2사분면의 각이고

$\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 θ의 동경은 오른쪽 그림의 반직선 OP와 같다.



이때, $\mathrm{P}(-\sqrt{3},\ 1)$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$

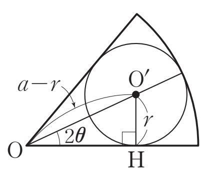
따라서 $\sin\theta=\frac{1}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\therefore \sin\theta-\cos^2\theta=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$

정답_ ②

392

오른쪽 그림과 같이 부채꼴에 내접하는 원의 중심을 O′, 점 O′에서 부채꼴의 반지름에 내린 수선의 발을 H, 원 O′의 반지름의 길이를 r라고 하면 $\triangle$O′OH는 직각삼각형이고, $\angle$O′OH$=2\theta$이므로



$\sin 2\theta=\frac{r}{a-r}$, $(a-r)\sin 2\theta=r$

$a\sin 2\theta-r\sin 2\theta=r$, $(1+\sin 2\theta)r=a\sin 2\theta$

$\therefore r=\frac{a\sin 2\theta}{1+\sin 2\theta}$

정답_ ④

393

이차방정식 $2x^2+x\cos\theta+3\cos\theta\tan\theta=0$의 두 실근을 α, β라고 할 때, 서로 다른 부호의 실근을 가지고 음의 근의 절댓값이 양의 근보다 크려면 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=-\frac{\cos\theta}{2}<0$ $\therefore \cos\theta>0$ ...... ㉠

$\alpha\beta=\frac{3\cos\theta\tan\theta}{2}<0$ $\therefore \cos\theta\tan\theta<0$ ...... ㉡

㉠에서 $\cos\theta>0$이려면 θ는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이어야 한다.

㉡에서 $\cos\theta\tan\theta=\sin\theta<0$이려면 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이어야 한다.

따라서 ㉠과 ㉡을 동시에 만족시키는 θ는 제4사분면의 각이므로 θ의 크기가 될 수 있는 것은 ②이다.

정답_ ②

394

이차방정식의 계수가 유리수이므로 한 근이 $3+2\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $3-2\sqrt{2}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의해

$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=6$

$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=6$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{6}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{3}$

이때, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

정답_ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

395

계수가 실수인 이차방정식 $x^2-\sqrt{3}x+2a=0$의 한 근이 $\cos\theta+i\sin\theta$이므로 다른 한 근은 $\cos\theta-i\sin\theta$이다.

근과 계수의 관계에 의해

$(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta-i\sin\theta)=\sqrt{3}$이므로

$2\cos\theta=\sqrt{3}$ $\therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

θ가 제1사분면의 각이므로 $\theta=\frac{\pi}{6}$

또 $(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)=2a$이므로

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=2a$, $2a=1$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore a\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$

정답_ $\frac{\pi}{12}$

06 삼각함수의 그래프

396

(1) $y=\sin x$의 주기는 2π이므로 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

(2) $y=\cos x$의 주기는 2π이므로 $\dfrac{2\pi}{1}=2\pi$

(3) $y=\tan x$의 주기는 π이므로 $\dfrac{\pi}{2}$ 정답_ (1) π (2) 2π (3) $\dfrac{\pi}{2}$

397

주어진 함수의 주기는

① $\dfrac{2\pi}{\pi}=2$ ② $\dfrac{2\pi}{\sqrt{2}\pi}=\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{2\pi}{\sqrt{2}\pi}=\sqrt{2}$

④ $\dfrac{2\pi}{\frac{\sqrt{2}}{\pi}}=\sqrt{2}\pi^2$ ⑤ $\dfrac{\pi}{\pi}=1$

따라서 주어진 함수 중 주기가 2인 것은 ①이다. 정답_ ①

398

$y=\sin\dfrac{\pi}{2}x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

$y=\cos\dfrac{\pi}{3}x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$

따라서 주어진 함수는 4와 6의 최소공배수인 12의 배수마다 같은 값을 가지므로 구하는 주기는 12이다. 정답_ 12

399

함수 $y=\cos\dfrac{x}{a}$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{a}}=2a\pi$

함수 $y=\tan ax$의 주기는 $\dfrac{\pi}{a}$

두 함수의 주기가 같으므로 $2a\pi=\dfrac{\pi}{a}$에서 $2a^2=1$, $a^2=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because a>0$) 정답_ ①

400

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이므로 함수 $f(x)$의 주기는 2이다.

주어진 함수의 주기는

① 2π ② $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$ ③ $\dfrac{2\pi}{\pi}=2$

④ $\dfrac{2\pi}{\sqrt{2}\pi}=\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{2\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi}=2\sqrt{2}$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ③이다. 정답_ ③

401

$f(x-1)=f(x+1)$에 x 대신 $x+1$을 대입하면

$f(x)=f(x+2)$

즉, 함수 $f(x)$의 주기는 2이다.

주어진 함수의 주기는

① $\dfrac{2\pi}{1}=2\pi$ ② $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$ ③ $\dfrac{2\pi}{\pi}=2$

④ $\dfrac{2\pi}{\frac{2}{\pi}}=\pi^2$ ⑤ $\dfrac{\pi}{2}$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ③이다. 정답_ ③

402

조건 (가)에 의해 함수 $f(x)$의 주기는 3이다.

$\therefore f\left(\dfrac{2017}{3}\right)=f\left(\dfrac{1}{3}+672\right)=f\left(\dfrac{1}{3}+3\times224\right)=f\left(\dfrac{1}{3}\right)$

조건 (나)에 의해 $0\le x<3$일 때, $f(x)=\sin\pi x$이므로

$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore f\left(\dfrac{2017}{3}\right)=f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 정답_ ⑤

403

함수 $f(x)$의 주기가 a이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x+a)=f(x)$

이때, $x=0$을 대입하면

$$f(a)=f(0)=\cos 0+\sin\frac{\pi}{6}+1$$
$$=1+\frac{1}{2}+1=\frac{5}{2}$$

정답_ ④

404

① $\cos\left(-\dfrac{8}{3}\pi\right)=\cos\dfrac{8}{3}\pi=\cos\left(2\pi+\dfrac{2}{3}\pi\right)=\cos\dfrac{2}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}$

② $\sin\dfrac{13}{4}\pi=\sin\left(3\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)$
$=-\sin\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

③ $\tan 495^\circ=\tan(360^\circ+135^\circ)=\tan 135^\circ$
$=\tan(180^\circ-45^\circ)=-\tan 45^\circ=-1$

④ $\sin 870^\circ=\sin(360^\circ\times2+150^\circ)=\sin 150^\circ$
$=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$

⑤ $\cos\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right)=\cos\dfrac{5}{6}\pi=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 정답_ ④

405

$$\sin 840^\circ=\sin(360^\circ\times2+120^\circ)=\sin 120^\circ$$
$$=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\cos 840° = \cos(360° \times 2 + 120°) = \cos 120°$

$= \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

$\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \frac{\sin 840° - \cos 150°}{\sin 150° - \cos 840°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{3}$ 정답_⑤

406

ㄱ은 옳지 않다.

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$, $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$

ㄴ은 옳다.

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$, $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$

ㄷ도 옳다.

$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$,

$-\tan(\pi - \theta) = -(-\tan\theta) = \tan\theta$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 정답_④

407

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6} + \tan\frac{\pi}{4}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$ 정답_④

408

(주어진 식)$= \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} + \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}$

$= \frac{\sin\theta(1 - \cos\theta) + \sin\theta(1 + \cos\theta)}{(1 + \cos\theta)(1 - \cos\theta)}$

$= \frac{2\sin\theta}{1 - \cos^2\theta} = \frac{2\sin\theta}{\sin^2\theta} = \frac{2}{\sin\theta}$ 정답_④

409

(주어진 식)$= \frac{\cos\theta}{-\cos\theta \cdot (-\cos\theta)^2} - \frac{-\sin\theta \cdot (-\tan\theta)^2}{\sin\theta}$

$= -\frac{1}{\cos^2\theta} + \tan^2\theta = -\frac{1 - \sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$= -\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = -1$ 정답_①

410

삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$A + B + C = \pi$ $\therefore B + C = \pi - A$

$\therefore \cos\frac{B + C - 2\pi}{2} = \cos\frac{\pi - A - 2\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi + A}{2}\right)$

$= \cos\frac{\pi + A}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}\right)$

$= -\sin\frac{A}{2} = -\frac{1}{3}$ 정답_②

411

(1) $\theta - 45° = x$로 놓으면 $45° + \theta = x + 90°$이므로

$\sin^2(45° + \theta) + \sin^2(45° - \theta)$

$= \sin^2(45° + \theta) + \sin^2(-x)$

$= \sin^2(x + 90°) + (-\sin x)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$

$= 1$

(2) $\theta - 40° = x$로 놓으면 $\theta + 50° = x + 90°$이므로

$\cos^2(\theta - 40°) + \cos^2(\theta + 50°)$

$= \cos^2 x + \cos^2(x + 90°) = \cos^2 x + (-\sin x)^2$

$= \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ 정답_(1) 1 (2) 1

412

$\cos(-110°) = \cos 110° = \cos(180° - 70°) = -\cos 70° = a$

이므로

$\cos 70° = -a$

이때, $\sin^2 70° = 1 - \cos^2 70° = 1 - a^2$이므로

$\cos 160° = \cos(90° + 70°)$

$= -\sin 70° = -\sqrt{1 - a^2}$ ($\because \sin 70° > 0$)

정답_①

413

$\theta = \frac{\pi}{20}$에서 $10\theta = \frac{\pi}{2}$

$\sin 9\theta = \sin(10\theta - \theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$,

$\sin 7\theta = \sin(10\theta - 3\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right) = \cos 3\theta$

$\therefore$ (주어진 식)

$= (\sin^2\theta + \sin^2 9\theta) + (\sin^2 3\theta + \sin^2 7\theta) + \sin^2 5\theta$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta) + (\sin^2 3\theta + \cos^2 3\theta) + \sin^2\frac{\pi}{4}$

$= 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ 정답_③

414

$\cos 89° = \cos(90° - 1°) = \sin 1°$,

$\cos 88° = \cos(90° - 2°) = \sin 2°$,

$\vdots$

$\cos 46° = \cos(90° - 44°) = \sin 44°$이므로

(주어진 식)

$=(\cos^2 1^\circ+\cos^2 89^\circ)+(\cos^2 2^\circ+\cos^2 88^\circ)+\cdots$
$\quad+(\cos^2 44^\circ+\cos^2 46^\circ)+\cos^2 45^\circ$

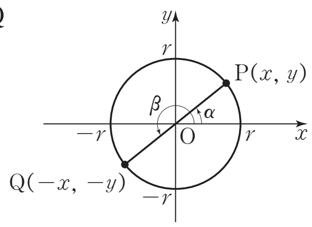
$=(\cos^2 1^\circ+\sin^2 1^\circ)+(\cos^2 2^\circ+\sin^2 2^\circ)+\cdots$
$\quad+(\cos^2 44^\circ+\sin^2 44^\circ)+\sin^2 45^\circ$

$=1+1+\cdots+1+1+\frac{1}{2}=44+\frac{1}{2}=\frac{89}{2}$ 정답_ $\frac{89}{2}$

415

ㄱ, ㄴ은 옳다.

오른쪽 그림에서 두 점 P, Q가 원점에 대하여 대칭이면



$\sin\alpha=\frac{y}{r}$, $\cos\alpha=\frac{x}{r}$

$\sin\beta=-\frac{y}{r}$,

$\cos\beta=-\frac{x}{r}$

$\therefore \sin\alpha+\sin\beta=0,\ \cos\alpha+\cos\beta=0$

즉, 주어진 그림에서 점 P_2와 P_7, 점 P_3과 P_8, 점 P_4와 P_9, 점 P_5와 P_{10}, 점 P_6과 P_1이 원점에 대하여 대칭이므로

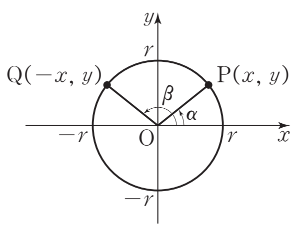
$\sin\theta+\sin 6\theta=0,\ \sin 2\theta+\sin 7\theta=0,\ \cdots,$
$\sin 5\theta+\sin 10\theta=0$

$\therefore \sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\cdots+\sin 10\theta=0$

같은 방법으로 $\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos 10\theta=0$

ㄷ도 옳다.

오른쪽 그림에서 두 점 P, Q가 y축에 대하여 대칭이면



$\tan\alpha=\frac{y}{x}$, $\tan\beta=-\frac{y}{x}$

$\therefore \tan\alpha+\tan\beta=0$

즉, 주어진 그림에서 점 P_2와 P_5, 점 P_3과 P_4, 점 P_7과 P_{10}, 점 P_8과 P_9, 점 P_6과 P_1이 y축에 대하여 대칭이므로

$\tan\theta+\tan 4\theta=0,\ \tan 2\theta+\tan 3\theta=0,$
$\tan 6\theta+\tan 9\theta=0,\ \tan 7\theta+\tan 8\theta=0,$
$\tan 5\theta+\tan 10\theta=0$

$\therefore \tan\theta+\tan 2\theta+\tan 3\theta+\cdots+\tan 10\theta=0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

416

① 정의역은 실수 전체의 집합이다.
② 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이다.
④ 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
⑤ 일대일함수이려면 계속 증가하거나 계속 감소해야 한다.

정답_ ③

417

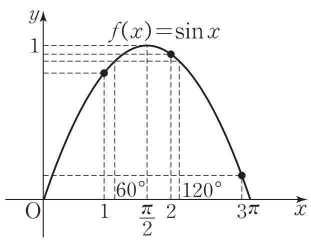
④ $\cos(-x)=\cos x$이므로 $y=\cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 정답_ ④

418

① 정의역은 $x\ne n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합이다.
② 치역은 실수 전체의 집합이다.
③ 주기는 π이다.
④ $\tan(-x)=-\tan x$이므로 $y=\tan x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 정답_ ⑤

419

함수 $f(x)=\sin x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=\frac{\pi}{2}=1.57\cdots$에 대하여 대칭이므로



$\sin 3<\sin 1<\sin 2$

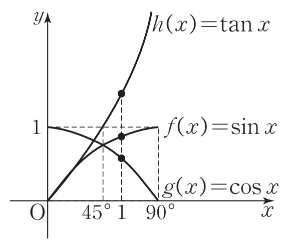
$\therefore f(3)<f(1)<f(2)$

정답_ ④

420

$\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$45^\circ=\frac{\pi}{4}=0.785\cdots$



이때, $0^\circ<x<90^\circ$에서 $\sin x$는 증가하고, $\cos x$는 감소하므로 오른쪽 그림과 같이

$\cos 1<\sin 1$

한편, $\tan 45^\circ=1<\tan 1$이므로

$\cos 1<\sin 1<\tan 1 \quad \therefore g(1)<f(1)<h(1)$ 정답_ ③

421

$C=-\sin 300^\circ=-\sin(270^\circ+30^\circ)=\cos 30^\circ$이고,

$0^\circ<x<90^\circ$일 때 $y=\cos x$는 감소하는 함수이므로

$\cos 40^\circ<\cos 30^\circ \quad \therefore A<C$

$\cos 30^\circ<1,\ \tan 45^\circ=1$이고, $0^\circ<x<90^\circ$일 때 $y=\tan x$는 증가하는 함수이므로

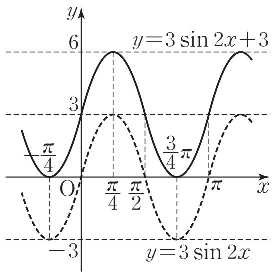
$\cos 30^\circ<1=\tan 45^\circ<\tan 50^\circ \quad \therefore C<B$

$\therefore A<C<B$ 정답_ ②

422

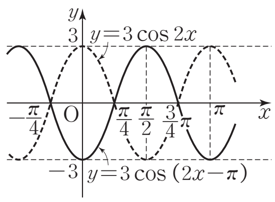
(1) $y=3\sin 2x+3$의 그래프는 $y=3\sin 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다. 이때, $y=3\sin 2x$의 그

래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배, y축의 방향으로 3배한 것이다.
따라서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 치역은 $\{y \mid 0 \le y \le 6\}$, 주기는 π이다.



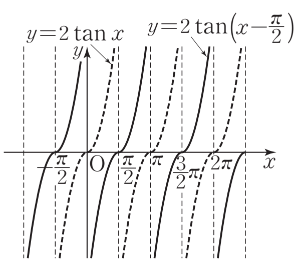
(2) $y=3\cos(2x-\pi)=3\cos 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는

$y=3\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이다. 이때, $y=3\cos 2x$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배, y축의 방향으로 3배한 것이다.
따라서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 치역은 $\{y \mid -3 \le y \le 3\}$, 주기는 π이다.



(3) $y=2\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=2\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

이때, $y=2\tan x$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배한 것이다.
따라서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 치역은 실수 전체의 집합, 주기는 π이다.



정답_ 풀이 참조

423

$y=\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동하면

$y=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$

$=-\cos 2x$

정답_ ④

424

함수 $y=\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동하면

$y=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos(2x-\pi)=\cos(\pi-2x)=-\cos 2x$

이 함수의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=-\cos 2x \quad \therefore y=\cos 2x$

정답_ ③

425

$y=2\sin(3x-3)+1=2\sin 3(x-1)+1$이므로

함수 $y=2\sin(3x-3)+1$의 그래프는 함수 $y=2\sin 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=1,\ b=1$이므로 $a+b=2$

정답_ ②

426

함수 $y=\tan x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=\tan x \quad \therefore y=-\tan x$ ⋯⋯ ㉠

평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+\pi,\ y)$는 x축의 방향으로 π만큼의 평행이동을 의미한다.

따라서 ㉠의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼 평행이동하면

$y=-\tan(x-\pi)=\tan(\pi-x)=-\tan x$

정답_ ④

427

함수 $y=\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

함수 $y=|\sin 2x|$의 주기는 $y=\sin 2x$의 주기의 $\frac{1}{2}$이므로 $\frac{\pi}{2}$

함수 $y=\tan 3x$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$

함수 $y=|\tan 3x|$의 주기는 $y=\tan 3x$의 주기와 같으므로 $\frac{\pi}{3}$

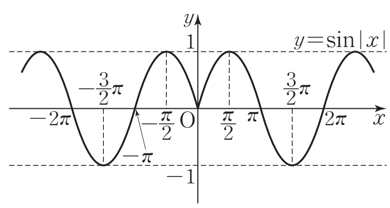
정답_ ②

428

① $y=|\sin(x+\pi)|=|-\sin x|=|\sin x|$는 주기가 π인 주기함수이다.

② $y=\cos\left(|x|-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-|x|\right)=\sin|x|$

이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주기함수가 아니다.



③ $y=|\cos(x-\pi)|$

$=|\cos(\pi-x)|$

$=|-\cos x|=|\cos x|$는 주기가 π인 주기함수이다.

④ $y=\sin\left(|x|+\frac{\pi}{2}\right)=\cos|x|$는 주기가 2π인 주기함수이다.

⑤ $y=|\tan(x-\pi)|=|-\tan(\pi-x)|=|\tan x|$는 주기가 π인 주기함수이다.

따라서 주어진 함수 중 주기함수가 아닌 것은 ②이다.

정답_ ②

429

함수 $y=\sin \pi x+1$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$

ㄱ. $y=\sin 2\pi x$의 주기가 1이므로 $y=|\sin 2\pi x|$의 주기는 $\frac{1}{2}$이다.

ㄴ. $y=\cos\frac{\pi}{2}x$의 주기가 4이므로 $y=\left|\cos\frac{\pi}{2}x\right|$의 주기는 2이다.

ㄷ. $y=\tan\frac{\pi}{2}x$의 주기가 2이므로 $y=\left|\tan\frac{\pi}{2}x\right|$의 주기는 2이다.

따라서 함수 $y=\sin \pi x+1$과 주기가 같은 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ④

430

(1) $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$의 최댓값은 2, 최솟값은 -2

(2) $y=-3\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1$의 최댓값은 $|-3|-1=2$, 최솟값은 $-|-3|-1=-4$

(3) $y=\tan\frac{\pi}{4}x+1$의 최댓값과 최솟값은 없다.

정답_ (1) 최댓값 : 2, 최솟값 : -2
(2) 최댓값 : 2, 최솟값 : -4
(3) 최댓값, 최솟값 : 없다

431

함수 $y=2\sin\left(3\pi x+\frac{\pi}{2}\right)-1$에서

최댓값은 $2-1=1$, 최솟값은 $-2-1=-3$이므로

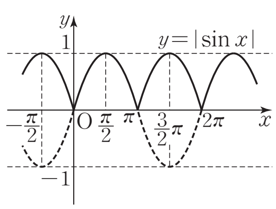
$M=1$, $m=-3$

$\therefore Mm=1\cdot(-3)=-3$

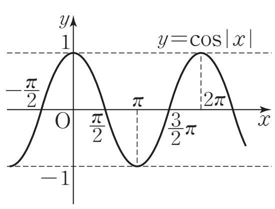
정답_ ①

432

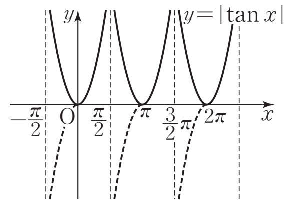
(1) $y=|\sin x|$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프의 x축 아래쪽을 위쪽으로 접어 올린 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 최댓값은 1, 최솟값은 0이다.



(2) $y=\cos|x|$의 그래프는 $x\geq 0$일 때 $y=\cos x$의 그래프를 그린 후, $x<0$인 부분은 $y=\cos x\ (x\geq 0)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면 되므로 오른쪽 그림과 같다. 즉, $y=\cos x$의 그래프와 같다.
따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.



(3) $y=|\tan x|$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프의 x축 아래쪽을 위쪽으로 접어 올린 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 최댓값은 없고, 최솟값은 0이다.



정답_ (1) 최댓값 : 1, 최솟값 : 0
(2) 최댓값 : 1, 최솟값 : -1
(3) 최댓값 : 없다, 최솟값 : 0

433

함수 $f(x)=a\sin bx+c$의 최댓값이 1, 최솟값이 -3이고

$a>0$, $b>0$이므로 $a+c=1$, $-a+c=-3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $c=-1$

또한 주기가 π이므로 $\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\quad\therefore b=2$

정답_ $a=2$, $b=2$, $c=-1$

434

함수 $y=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1$에서

최댓값은 $2+1=3$, 최솟값은 $-2+1=-1$이고

주기는 $\frac{2\pi}{1}=2\pi$이므로 $a=3$, $b=-1$, $c=2\pi$

$\therefore \cos\frac{c}{a+b}=\cos\frac{2\pi}{3-1}=\cos\pi=-1$

정답_ ①

435

조건 (가)에서 함수 $f(x)=a\sin bx+c$의 주기가 $\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore b=4$

조건 (나)에서 최솟값이 0이므로 $-a+c=0$ ⋯⋯ ㉠

조건 (다)에서 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=4$이므로 $a\sin\frac{\pi}{2}+c=4$

$\therefore a+c=4$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $c=2$

$\therefore a+b+c=2+4+2=8$

정답_ ④

436

함수 $f(x)=a\cos\frac{x}{2}+b$의 최댓값이 7이므로

$a+b=7$ ⋯⋯ ㉠

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=5$이므로 $a\cos\frac{\pi}{3}+b=5$

$\therefore \frac{a}{2}+b=5$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=3$

따라서 $f(x)$의 최솟값은 $-a+b=-4+3=-1$

정답_ ②

437

함수 $f(x)=a\cos\left(bx-\frac{\pi}{3}\right)+c$의 주기가 2π이므로

$\frac{2\pi}{b}=2\pi$　　$\therefore b=1$

이때, $f(x)=a\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+c$이고

최댓값이 5이므로　$a+c=5$　　…… ㉠

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=3$이므로　$a\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{3}\right)+c=3$

$a\cos\frac{\pi}{3}+c=3$　　$\therefore \frac{a}{2}+c=3$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면　$a=4,\ c=1$

$\therefore a+2b+3c=4+2\cdot1+3\cdot1=9$

정답_ ④

438

함수 $f(x)=a\,|\sin bx|+c$의 주기가 $\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$　　$\therefore b=2$

이때, $f(x)=a\,|\sin 2x|+c$이고 최댓값이 6이므로

$a+c=6$　　…… ㉠

$f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=4$이므로　$a\left|\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right|+c=4$

$\therefore \frac{a}{2}+c=4$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면　$a=4,\ c=2$

$\therefore a+b-c=4+2-2=4$

정답_ ④

439

함수 $y=a\cos bx$의 그래프에서 최댓값이 2, 최솟값이 -2이고 $a>0$이므로　$a=2$

주기가 4π이고 $b>0$이므로　$\frac{2\pi}{b}=4\pi$　　$\therefore b=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

정답_ ④

440

함수 $y=a\sin(bx+c)+d$의 그래프에서 최댓값이 3, 최솟값이 -1이고 $a>0$이므로　$a+d=3,\ -a+d=-1$

두 식을 연립하여 풀면　$a=2,\ d=1$

주기는 $\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$이고 $b>0$이므로　$\frac{2\pi}{b}=\pi$　　$\therefore b=2$

따라서 주어진 함수의 식은　$y=2\sin(2x+c)+1$

주어진 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=2\sin(0+c)+1,\ \sin c=1$　$\therefore c=\frac{\pi}{2}$ $(\because 0<c<\pi)$

$\therefore abcd=2\cdot2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot1=2\pi$

정답_ ④

441

함수 $y=\tan(ax-b)$의 그래프에서 주기는 $\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$

이고 $a>0$이므로　$\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{2}$　　$\therefore a=2$

따라서 주어진 함수의 식은　$y=\tan(2x-b)$　　…… ㉠

한편, 주어진 그래프는 $y=\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이므로

$y=\tan 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$　　…… ㉡

㉠, ㉡이 일치해야 하므로　$b=\frac{\pi}{2}$

$\therefore ab=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$

정답_ ②

442

함수 $y=a\sin(bx-c)$의 그래프에서 최댓값이 3, 최솟값이 -3이고 $a>0$이므로　$a=3$

주기는 $\frac{4}{3}\pi-\frac{\pi}{3}=\pi$이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=\pi$　　$\therefore b=2$

따라서 주어진 함수의 식은　$y=3\sin(2x-c)$　　…… ㉠

한편, 주어진 그래프는 $y=3\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 것이므로

$y=3\sin 2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=3\sin\left(2x-\frac{2}{3}\pi\right)$　　…… ㉡

㉠, ㉡이 일치해야 하므로　$c=\frac{2}{3}\pi$

$\therefore abc=3\cdot2\cdot\frac{2}{3}\pi=4\pi$

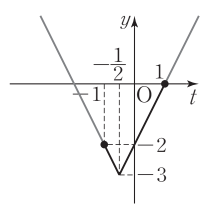
정답_ ⑤

443

$y=|2\sin x+1|-3$에서 $\sin x=t$ $(-1\le t\le 1)$로 놓으면

$y=|2t+1|-3$　　…… ㉠

이때, ㉠의 그래프는 점 $\left(-\frac{1}{2},\ -3\right)$에서 꺾이는 ∨자 모양의 그래프이므로 $-1\le t\le 1$의 부분만 잘라 내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $t=1$일 때 최댓값은 0이고,

$t=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 -3이므로

$M=0,\ m=-3$　　$\therefore M+m=-3$

정답_ ①

444

$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$이므로

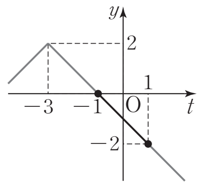
$y=2-\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-3\right|=2-|-\cos x-3|$

$=2-|\cos x+3|$

이때, $\cos x=t\ (-1\le t\le 1)$로 놓으면

$y=2-|t+3|$ ⋯⋯ ㉠

이때, ㉠의 그래프는 점 $(-3,\ 2)$에서 꺾이는 ∧자 모양의 그래프이므로 $-1\le t\le 1$의 부분만 잘라 내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $t=-1$일 때 최댓값은 0이고, $t=1$일 때 최솟값은 -2이므로 최댓값과 최솟값의 곱은 0이다.

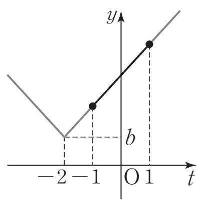
정답_ ③

445

$y=a|\cos x+2|+b$에서 $\cos x=t\ (-1\le t\le 1)$로 놓으면

$y=a|t+2|+b$ ⋯⋯ ㉠

이때, $a>0$이므로 ㉠의 그래프는 점 $(-2,\ b)$에서 꺾이는 ∨자 모양의 그래프이므로 $-1\le t\le 1$의 부분만 잘라 내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $t=1$일 때 최댓값은 $3a+b$이고, $t=-1$일 때 최솟값은 $a+b$이므로 $3a+b=4,\ a+b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=1$

$\therefore ab=1$

정답_ ①

446

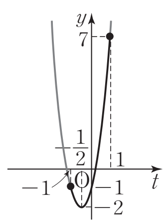
$y=3-4\cos^2 x+4\sin x=3-4(1-\sin^2 x)+4\sin x$

$=4\sin^2 x+4\sin x-1$

이때, $\sin x=t\ (-1\le t\le 1)$로 놓으면

$y=4t^2+4t-1=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-2$ ⋯⋯ ㉠

이때, ㉠의 그래프는 점 $\left(-\frac{1}{2},\ -2\right)$가 꼭짓점이고 ∪자 모양의 그래프이므로 $-1\le t\le 1$의 부분만 잘라 내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $t=1$일 때 최댓값은 7이고, $t=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 -2이므로

$M=7,\ m=-2 \quad \therefore M+m=5$

정답_ ⑤

447

$y=2\cos^2 x-4\sin x-1$

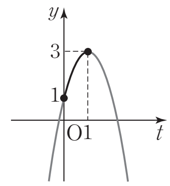
$=2(1-\sin^2 x)+4\sin x-1$

$=-2\sin^2 x+4\sin x+1$

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$일 때 $0\le\sin x\le 1$이므로 $\sin x=t\ (0\le t\le 1)$로 놓으면

$y=-2t^2+4t+1=-2(t-1)^2+3$ ⋯⋯ ㉠

이때, ㉠의 그래프는 점 $(1,\ 3)$이 꼭짓점이고 ∩자 모양의 그래프이므로 $0\le t\le 1$의 부분만 잘라 내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $t=1$일 때 최댓값은 3이고, $t=0$일 때 최솟값은 1이다.

정답_ ③

448

$y=a\cos^2 x-a\sin x+b$

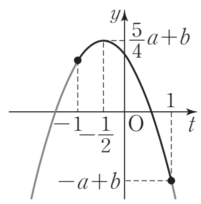
$=a(1-\sin^2 x)-a\sin x+b$

$=-a\sin^2 x-a\sin x+a+b$

이때, $\sin x=t\ (-1\le t\le 1)$로 놓으면

$y=-at^2-at+a+b=-a\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}a+b$ ⋯⋯ ㉠

이때, $a>0$이므로 ㉠의 그래프는 점 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{5}{4}a+b\right)$가 꼭짓점이고 ∩자 모양의 그래프이므로 $-1\le t\le 1$의 부분만 잘라 내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 최댓값은 $t=-\frac{1}{2}$일 때 8, 최솟값은 $t=1$일 때 -1이므로 $\frac{5}{4}a+b=8,\ -a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=3$

$\therefore a+b=7$

정답_ ③

449

$\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos^2 x,\ \sin(x+\pi)=-\sin x$이므로

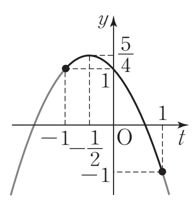
$y=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin(x+\pi)=\cos^2 x-\sin x$

$=1-\sin^2 x-\sin x$

이때, $\sin x=t\ (-1\le t\le 1)$로 놓으면

$y=-t^2-t+1=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$ ⋯⋯ ㉠

이때, ㉠의 그래프는 점 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{5}{4}\right)$가 꼭짓점이고 ∩자 모양의 그래프이므로 $-1\le t\le 1$의 부분만 잘라 내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $t=-\frac{1}{2}$일 때 최댓값은 $\frac{5}{4}$이고, $t=1$일 때 최솟값은 -1이므로

$M=\frac{5}{4},\ m=-1 \quad \therefore M+m=\frac{5}{4}+(-1)=\frac{1}{4}$

정답_ ①

450

$\tan(\pi-x)=-\tan x$이므로

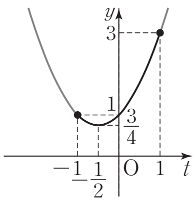
$y=\tan^2 x-\tan(\pi-x)+1=\tan^2 x+\tan x+1$

$-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$에서 $-1 \le \tan x \le 1$이므로

$\tan x = t\ (-1 \le t \le 1)$로 놓으면

$y = t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ …… ㉠

이때, ㉠의 그래프는 점 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$이 꼭짓점이고 ∪자 모양의 그래프이므로 $-1 \le t \le 1$의 부분만 잘라 내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $t=1$일 때 최댓값은 3이고,

$t = -\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $\frac{3}{4}$이므로

$M=3,\ m=\frac{3}{4}$ $\quad \therefore M-m = 3-\frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

정답_ ④

451

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta,\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right) = -\cos\theta,$

$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$이므로

$y = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + 2\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right) + 2\sin(\pi+\theta)$

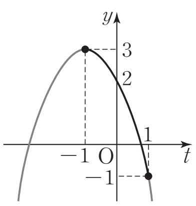
$= (-\sin\theta)^2 + 2(-\cos\theta)^2 - 2\sin\theta$

$= -\sin^2\theta - 2\sin\theta + 2$

이때, $\sin\theta = t\ (-1 \le t \le 1)$로 놓으면

$y = -t^2 - 2t + 2 = -(t+1)^2 + 3$ …… ㉠

이때, ㉠의 그래프는 점 $(-1,\ 3)$이 꼭짓점이고 ∩자 모양의 그래프이므로 $-1 \le t \le 1$의 부분만 잘라 내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $t=-1$일 때 최댓값은 3이고,

$t=1$일 때 최솟값은 -1이므로

$M=3,\ m=-1$

$\therefore M+m = 3+(-1) = 2$

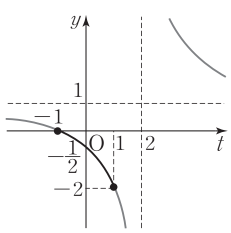
정답_ ②

452

$\sin x = t\ (-1 \le t \le 1)$로 놓으면

$y = \frac{t+1}{t-2} = \frac{(t-2)+3}{t-2} = \frac{3}{t-2} + 1$ …… ㉠

이때, ㉠의 그래프는 $y = \frac{3}{t}$의 그래프를 t축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 $-1 \le t \le 1$의 부분만 잘라 내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $t=-1$일 때 최댓값은 0이고, $t=1$일 때 최솟값은 -2이므로 $M=0,\ m=-2$

$\therefore M+m = -2$

정답_ ①

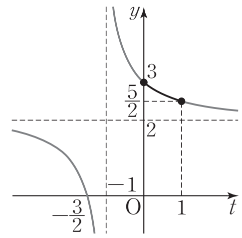
453

$0 \le x \le \frac{\pi}{4}$에서 $0 \le \tan x \le 1$이므로

$\tan x = t\ (0 \le t \le 1)$로 놓으면

$y = \frac{2t+3}{t+1} = \frac{2(t+1)+1}{t+1} = \frac{1}{t+1} + 2$ …… ㉠

이때, ㉠의 그래프는 $y = \frac{1}{t}$의 그래프를 t축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $0 \le t \le 1$의 부분만 잘라내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $t=0$일 때 최댓값은 3이고,

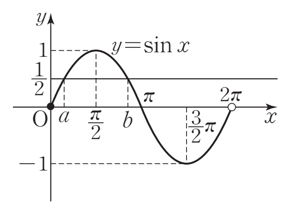
$t=1$일 때 최솟값은 $\frac{5}{2}$이므로 $M=3,\ m=\frac{5}{2}$

$\therefore M+m = 3+\frac{5}{2} = \frac{11}{2}$

정답_ ④

454

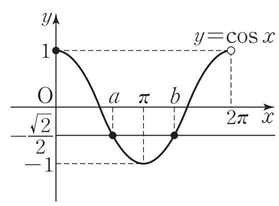
(1) $y=\sin x$의 그래프를 그린 후 $0 \le x < 2\pi$의 부분만 잘라내면 오른쪽 그림과 같다.



이때, $\sin x = \frac{1}{2}$의 해는 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표인 a, b와 같으므로

$x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$

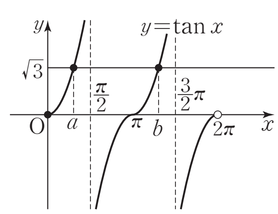
(2) $y=\cos x$의 그래프를 그린 후 $0 \le x < 2\pi$의 부분만 잘라 내면 오른쪽 그림과 같다.



이때, $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는

곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 그래프의 교점의 x좌표로 a, b와 같으므로 $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$ 또는 $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$

(3) $y=\tan x$의 그래프를 그린 후 $0 \le x < 2\pi$의 부분만 잘라 내면 오른쪽 그림과 같다.



이때, $\tan x = \sqrt{3}$의 해는

곡선 $y=\tan x$와 직선 $y=\sqrt{3}$의 그래프의 교점의 x좌표인 a, b와 같으므로

$x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$

정답_ (1) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ (2) $x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

(3) $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

455

$2\sin x=\sqrt{2}$에서 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0\le x<4\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{9}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{4}\pi$

따라서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\pi+\frac{9}{4}\pi+\frac{11}{4}\pi=6\pi$

$\therefore k=6$

정답_ 6

456

$\sin x=\cos x$에서 $\frac{\sin x}{\cos x}=1$ $\therefore \tan x=1$

$0\le x<2\pi$이므로 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$

정답_ ②

457

$2\theta=t$로 놓으면 $2\cos t=\sqrt{2}$, $\cos t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때, $0\le\theta<2\pi$에서 $0\le 2\theta<4\pi$이므로 $0\le t<4\pi$

$0\le t<4\pi$에서 방정식 $\cos t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는

$t=\frac{\pi}{4}$ 또는 $t=\frac{7}{4}\pi$ 또는 $t=\frac{9}{4}\pi$ 또는 $t=\frac{15}{4}\pi$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{8}$ 또는 $\theta=\frac{7}{8}\pi$ 또는 $\theta=\frac{9}{8}\pi$ 또는 $\theta=\frac{15}{8}\pi$

따라서 θ의 크기가 될 수 없는 것은 ④이다.

정답_ ④

458

$\sqrt{3}\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=3$에서 $x+\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면

$\sqrt{3}\tan t=3$, $\tan t=\sqrt{3}$

이때, $0\le x<2\pi$에서 $\frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{6}<\frac{13}{6}\pi$이므로

$\therefore \frac{\pi}{6}\le t<\frac{13}{6}\pi$

$\frac{\pi}{6}\le t<\frac{13}{6}\pi$에서 $\tan t=\sqrt{3}$의 해는

$t=\frac{\pi}{3}$ 또는 $t=\frac{4}{3}\pi$

(i) $t=\frac{\pi}{3}$일 때, $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ $\therefore x=\frac{\pi}{6}$

(ii) $t=\frac{4}{3}\pi$일 때, $x+\frac{\pi}{6}=\frac{4}{3}\pi$ $\therefore x=\frac{7}{6}\pi$

(i), (ii)에서 주어진 방정식을 만족시키는 모든 x의 값의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{7}{6}\pi=\frac{4}{3}\pi$

정답_ ②

459

$2\cos^2 x+3\sin x-3=0$에서

$2(1-\sin^2 x)+3\sin x-3=0$

$2\sin^2 x-3\sin x+1=0$, $(2\sin x-1)(\sin x-1)=0$

$\therefore \sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$

$0\le x<2\pi$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$의 해는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

$\sin x=1$의 해는 $x=\frac{\pi}{2}$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi$

정답_ ②

460

$2\sin^2 A-3\cos A=3$에서 $2(1-\cos^2 A)-3\cos A=3$

$2\cos^2 A+3\cos A+1=0$

$(2\cos A+1)(\cos A+1)=0$ ······ ㉠

이때, $0<A<\pi$이므로 $-1<\cos A<1$

따라서 ㉠의 해는 $\cos A=-\frac{1}{2}$ $\therefore A=\frac{2}{3}\pi$

한편, 삼각형 ABC에서 $A+B+C=\pi$이므로

$B+C=\pi-A=\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \sin\frac{B+C-2\pi}{2}=\sin\frac{\frac{\pi}{3}-2\pi}{2}=\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$

$=-\sin\frac{5}{6}\pi=-\frac{1}{2}$

정답_ ③

461

$\sin^2 x=1+\sin x\cos x$에서 $1-\cos^2 x=1+\sin x\cos x$

$\cos^2 x+\sin x\cos x=0$, $\cos x(\cos x+\sin x)=0$

$\therefore \cos x=0$ 또는 $\cos x=-\sin x$

(i) $\cos x=0$일 때, $0\le x<\pi$에서 $x=\frac{\pi}{2}$

(ii) $\cos x=-\sin x$일 때, $\frac{\sin x}{\cos x}=-1$ $\therefore \tan x=-1$

$0\le x<\pi$에서 $x=\frac{3}{4}\pi$

(i), (ii)에서 $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{3}{4}\pi$이므로 $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{3}{2}$

정답_ ③

462

$2\cos\theta-1=\sin\theta$에서 $2\cos\theta=\sin\theta+1$

양변을 제곱하면 $4\cos^2\theta=\sin^2\theta+2\sin\theta+1$

$4(1-\sin^2\theta)=\sin^2\theta+2\sin\theta+1$

$5\sin^2\theta+2\sin\theta-3=0$, $(5\sin\theta-3)(\sin\theta+1)=0$

이때, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\sin\theta<1$이므로

$\sin\theta=\frac{3}{5}$

정답_ ③

463

$2\sin\theta=\tan\theta$에서 $2\sin\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

양변에 $\cos\theta$를 곱하면

$2\sin\theta\cos\theta=\sin\theta,\ \sin\theta(2\cos\theta-1)=0$

$\therefore \sin\theta=0$ 또는 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

(i) $\sin\theta=0$일 때, $0\le\theta<2\pi$에서 $\theta=0$ 또는 $\theta=\pi$

(ii) $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$일 때, $0\le\theta<2\pi$에서 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\dfrac{5}{3}\pi$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$0+\pi+\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{5}{3}\pi=3\pi$ 정답_ ⑤

464

$\tan x+\dfrac{\sqrt{3}}{\tan x}=1+\sqrt{3}$의 양변에 $\tan x$를 곱하여 정리하면

$\tan^2 x-(1+\sqrt{3})\tan x+\sqrt{3}=0$

$(\tan x-1)(\tan x-\sqrt{3})=0$

$\therefore \tan x=1$ 또는 $\tan x=\sqrt{3}$

(i) $\tan x=1$일 때, $0\le x<2\pi$이므로 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{5}{4}\pi$

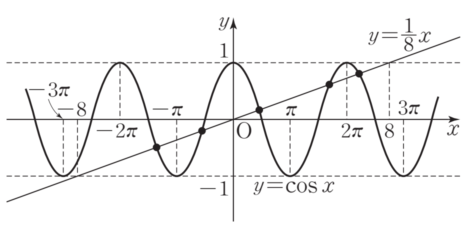
(ii) $\tan x=\sqrt{3}$일 때, $0\le x<2\pi$이므로 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$

(i), (ii)에서 주어진 방정식을 만족시키는 x는 $\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{4}{3}\pi$로 4개이다. 정답_ ④

465

방정식 $\cos x=\dfrac{1}{8}x$의 실근의 개수는 두 함수 $y=\cos x$, $y=\dfrac{1}{8}x$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

이때, $y=\dfrac{1}{8}x$에서 $y=1$이면 $x=8$, $y=-1$이면 $x=-8$이고, $2\pi<8<3\pi$이므로 두 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.

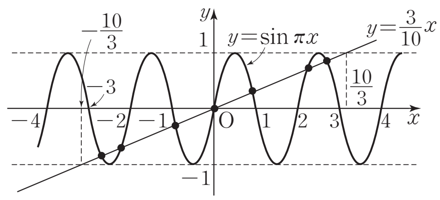


따라서 두 함수 $y=\cos x$, $y=\dfrac{1}{8}x$의 그래프의 교점은 5개이므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 5이다. 정답_ ③

466

방정식 $\sin\pi x=\dfrac{3}{10}x$의 실근의 개수는 두 함수 $y=\sin\pi x$, $y=\dfrac{3}{10}x$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

이때, $y=\sin\pi x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\pi}=2$이고 $y=\dfrac{3}{10}x$에서 $y=1$이면 $x=\dfrac{10}{3}$, $y=-1$이면 $x=-\dfrac{10}{3}$이므로 두 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.

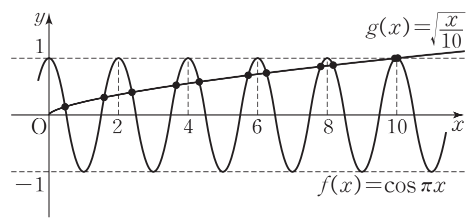


따라서 두 함수 $y=\sin\pi x$, $y=\dfrac{3}{10}x$의 그래프의 교점은 7개이므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 7이다. 정답_ ④

467

방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수는 두 함수 $f(x)=\cos\pi x$, $g(x)=\sqrt{\dfrac{x}{10}}$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

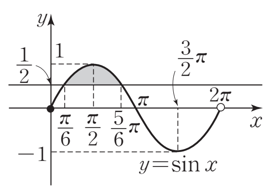
이때, $f(x)=\cos\pi x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\pi}=2$이고, $g(x)=\sqrt{\dfrac{x}{10}}$에서 $g(x)=1$이면 $x=10$이므로 두 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 두 함수 $f(x)=\cos\pi x$, $g(x)=\sqrt{\dfrac{x}{10}}$의 그래프의 교점은 11개이므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 11이다. 정답_ ⑤

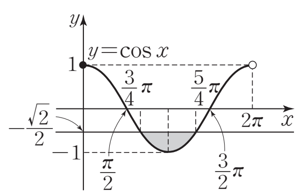
468

(1) $\sin x>\dfrac{1}{2}$의 해는 $y=\sin x$의 그래프가 $y=\dfrac{1}{2}$의 그래프보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로 $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5}{6}\pi$

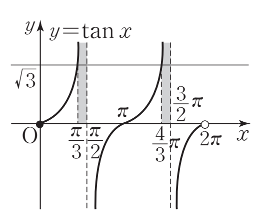


(2) $\cos x\le-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 $y=\cos x$의 그래프가 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$의 그래프보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$\dfrac{3}{4}\pi\le x\le\dfrac{5}{4}\pi$



(3) $\tan x>\sqrt{3}$의 해는 $y=\tan x$의 그래프가 $y=\sqrt{3}$의 그래프보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로



$\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\dfrac{4}{3}\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi$

정답_ (1) $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5}{6}\pi$ (2) $\dfrac{3}{4}\pi\le x\le\dfrac{5}{4}\pi$

(3) $\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\dfrac{4}{3}\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi$

469

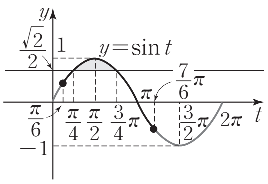
$\theta+\dfrac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $\sin t>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$0\le\theta\le\pi$에서 $\dfrac{\pi}{6}\le\theta+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{7}{6}\pi$이므로 $\dfrac{\pi}{6}\le t\le\dfrac{7}{6}\pi$

$\dfrac{\pi}{6}\le t\le\dfrac{7}{6}\pi$에서 부등식

$\sin t>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$의 해는

$\dfrac{\pi}{4}<t\le\dfrac{3}{4}\pi$이므로



$\dfrac{\pi}{4}<\theta+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{3}{4}\pi$ $\quad\therefore \dfrac{\pi}{12}<\theta<\dfrac{7}{12}\pi$

따라서 $\alpha=\dfrac{\pi}{12}$, $\beta=\dfrac{7}{12}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\dfrac{7}{12}\pi-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{2}$

정답_ ④

470

$2\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)<1$에서 $\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)<\dfrac{1}{2}$

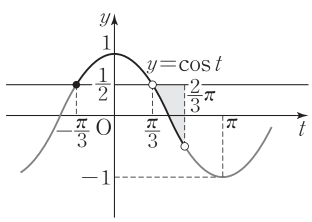
이때, $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $\cos t<\dfrac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 $-\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{2}{3}\pi$이므로 $-\dfrac{\pi}{3}\le t<\dfrac{2}{3}\pi$

$-\dfrac{\pi}{3}\le t<\dfrac{2}{3}\pi$에서 부등식

$\cos t<\dfrac{1}{2}$의 해는

$\dfrac{\pi}{3}<t<\dfrac{2}{3}\pi$이므로



$\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{2}{3}\pi$ $\quad\therefore \dfrac{4}{3}\pi<x<2\pi$

따라서 $a=\dfrac{4}{3}\pi$, $b=2\pi$이므로

$b-a=2\pi-\dfrac{4}{3}\pi=\dfrac{2}{3}\pi$

정답_ ①

471

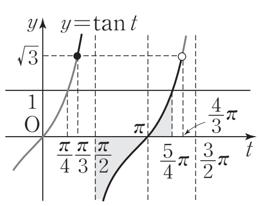
$x+\dfrac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $\tan t<1$

$0\le x<\pi$에서 $\dfrac{\pi}{3}\le x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{4}{3}\pi$이므로 $\dfrac{\pi}{3}\le t<\dfrac{4}{3}\pi$

$\dfrac{\pi}{3}\le t<\dfrac{4}{3}\pi$에서 부등식

$\tan t<1$의 해는

$\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{5}{4}\pi$이므로



$\dfrac{\pi}{2}<x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5}{4}\pi$

$\therefore \dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{11}{12}\pi$

따라서 $a=\dfrac{\pi}{6}$, $b=\dfrac{11}{12}\pi$이므로

$b-a=\dfrac{11}{12}\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{4}\pi$

정답_ ②

472

$2\cos^2 x+5\sin x+1<0$에서

$2(1-\sin^2 x)+5\sin x+1<0$

$2\sin^2 x-5\sin x-3>0$

$(2\sin x+1)(\sin x-3)>0$

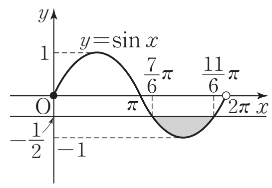
$\sin x-3<0$이므로 $2\sin x+1<0$

$\therefore \sin x<-\dfrac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 부등식

$\sin x<-\dfrac{1}{2}$의 해는

$\dfrac{7}{6}\pi<x<\dfrac{11}{6}\pi$



따라서 $a=\dfrac{7}{6}\pi$, $b=\dfrac{11}{6}\pi$이므로

$a+b=\dfrac{7}{6}\pi+\dfrac{11}{6}\pi=3\pi$

정답_ ⑤

473

$\cos^2\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos\theta-1\ge 0$에서 $\sin^2\theta-\cos\theta-1\ge 0$

$(1-\cos^2\theta)-\cos\theta-1\ge 0$, $\cos^2\theta+\cos\theta\le 0$

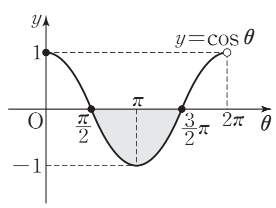
$\cos\theta(\cos\theta+1)\le 0$

$\therefore -1\le\cos\theta\le 0$

$0\le x<2\pi$에서 부등식

$-1\le\cos\theta\le 0$의 해는

$\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{3}{2}\pi$



따라서 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, $\beta=\dfrac{3}{2}\pi$이므로

$\dfrac{\beta}{\alpha}=3$

정답_ ⑤

474

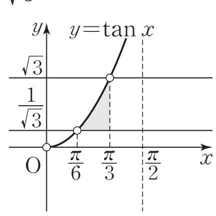
$0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos x>0$이므로 주어진 부등식의 양변을 $\cos^2 x$로 나누어 정리하면

$(\sqrt{3}\tan x-1)(\tan x-\sqrt{3})<0$ $\quad\therefore \dfrac{1}{\sqrt{3}}<\tan x<\sqrt{3}$

오른쪽 그림에서 부등식

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\tan x<\sqrt{3}$의 해는

$\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{3}$



따라서 $a=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{\pi}{3}$이므로

$b-a=\frac{\pi}{6}$

정답_ ①

475

모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

방정식 $x^2+(2\cos\theta+1)x+1=0$의 판별식 D에 대하여

$D=(2\cos\theta+1)^2-4<0$, $4\cos^2\theta+4\cos\theta-3<0$

$(2\cos\theta+3)(2\cos\theta-1)<0$

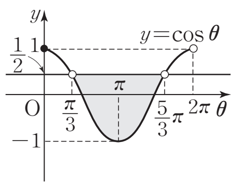
이때, $2\cos\theta+3>0$이므로 $2\cos\theta-1<0$

$\therefore \cos\theta<\frac{1}{2}$

$0\le\theta<2\pi$에서

부등식 $\cos\theta<\frac{1}{2}$의 해는

$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{5}{3}\pi$



정답_ ②

476

이차방정식 $x^2-4x\sin\theta+3=0$의 판별식 D에 대하여

$\frac{D}{4}=(-2\sin\theta)^2-3=0$ $\therefore \sin^2\theta=\frac{3}{4}$

이때, $0\le\theta<\pi$에서 $\sin\theta\ge0$이므로 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\le\theta<\pi$에서 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\frac{2}{3}\pi$

따라서 구하는 모든 θ의 크기의 합은 $\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi=\pi$

정답_ ③

477

이차방정식 $x^2-(2\sin\theta-1)x+1=0$이 실근을 가지려면

판별식 D에 대하여 $D\ge0$이어야 하므로

$D=(2\sin\theta-1)^2-4\ge0$, $4\sin^2\theta-4\sin\theta-3\ge0$

$\therefore (2\sin\theta+1)(2\sin\theta-3)\ge0$

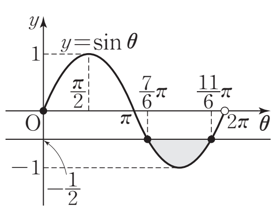
이때, $-1\le\sin\theta\le1$에서 $2\sin\theta-3<0$이므로

$2\sin\theta+1\le0$ $\therefore \sin\theta\le-\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 부등식

$\sin\theta\le-\frac{1}{2}$의 해는

$\frac{7}{6}\pi\le\theta\le\frac{11}{6}\pi$



따라서 $\alpha=\frac{7}{6}\pi$, $\beta=\frac{11}{6}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{11}{6}\pi-\frac{7}{6}\pi=\frac{2}{3}\pi$

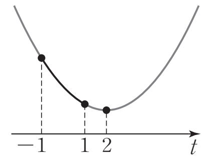
정답_ $\frac{2}{3}\pi$

478

$\cos\theta=t$ $(-1\le t\le1)$로 놓으면 $t^2-4t-a\ge0$

$f(t)=t^2-4t-a$로 놓으면

$f(t)=(t-2)^2-a-4$



오른쪽 그림과 같이 $-1\le t\le1$에서 함수

$f(t)$는 $t=1$일 때 최솟값 $f(1)=-a-3$

을 가지므로 $-1\le t\le1$인 모든 실수 t에 대하여 부등식

$f(t)\ge0$이 성립하려면 $-a-3\ge0$ $\therefore a\le-3$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 실수 a의 최댓값은 -3이다.

정답_ ②

479

함수 $f(x)=a\tan\frac{\pi}{7}x$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{7}}=7$이므로

$f(x+7)=f(x)$ ❶

또한, $\tan(-\theta)=-\tan\theta$이므로 $f(-x)=-f(x)$ ❷

$f(6)=f(-1+7)=f(-1)=-f(1)$

$f(12)=f(5+7)=f(5)=f(-2+7)=f(-2)=-f(2)$

$f(16)=f(9+7)=f(9)=f(2+7)=f(2)$

$\therefore f(6)+f(12)+f(16)=-f(1)-f(2)+f(2)$

$=-f(1)=-3$ ❸

정답_ -3

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x+7)=f(x)$임을 보이기	30%
❷	$f(-x)=-f(x)$임을 보이기	30%
❸	$f(6)+f(12)+f(16)$의 값 구하기	40%

480

함수 $y=a\sin bx$의 주기가 $\pi-0=\pi$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\therefore b=2$ ❶

함수 $y=\tan x$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, c\right)$를 지나므로

$c=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ ❷

함수 $y=a\sin 2x$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$을 지나므로

$\sqrt{3}=a\sin\frac{2}{3}\pi$, $\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\therefore a=2$ ❸

$\therefore abc=2\cdot2\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ ❹

정답_ $4\sqrt{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	b의 값 구하기	30%
❷	c의 값 구하기	30%
❸	a의 값 구하기	30%
❹	abc의 값 구하기	10%

481

주어진 그래프에서 최댓값이 2, 최솟값이 -2이고

$a>0$이므로 $a=2$ ❶

주기는 $\frac{5}{6}\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\therefore b=2$ ❷

따라서 주어진 함수의 식은 $y=2\cos(2x+c)$ …… ㉠

한편, 주어진 그래프는 $y=2\cos 2x$의 그래프를 x축의 방향으로

$-\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이므로

$y=2\cos 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ …… ㉡

㉠, ㉡이 일치해야 하므로 $c=\frac{\pi}{3}$ ❸

$\therefore abc=2\cdot 2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$ ❹

정답_ $\frac{4}{3}\pi$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값 구하기	30%
❷	b의 값 구하기	30%
❸	c의 값 구하기	30%
❹	abc의 값 구하기	10%

482

$y=\sin^2\pi x+\cos\pi x$

$=(1-\cos^2\pi x)+\cos\pi x$

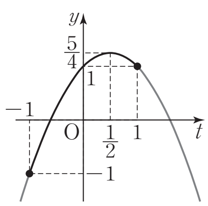
$=-\cos^2\pi x+\cos\pi x+1$ ❶

이때, $\cos\pi x=t$ $(-1\le t\le 1)$로 놓으면

$y=-t^2+t+1=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$ …… ㉠

❷

이때, ㉠의 그래프는 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{4}\right)$가 꼭짓점이고, ∩자 모양의 그래프이므로 $-1\le t\le 1$의 부분만 잘라 내면 오른쪽 그림과 같다.



$t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{5}{4}$를 가지므로

$t=\cos\pi x=\frac{1}{2}$에서 $\pi x=\frac{\pi}{3}$ $(\because 0\le x\le 1)$

$\therefore x=\frac{1}{3}$ ❸

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{5}{4}$이므로 $a+b=\frac{1}{3}+\frac{5}{4}=\frac{19}{12}$ ❹

정답_ $\frac{19}{12}$

단계	채점 기준	비율
❶	y를 코사인에 대한 식으로 나타내기	20%
❷	$\cos x=t$로 치환하여 y를 t에 대한 식으로 나타내기	30%
❸	최댓값과 그때의 x의 값 구하기	30%
❹	$a+b$의 값 구하기	20%

483

$2\sin^2 x=1+\cos x$에서 $2(1-\cos^2 x)=1+\cos x$

$2\cos^2 x+\cos x-1=0$, $(\cos x+1)(2\cos x-1)=0$

$\therefore \cos x=-1$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

이때, $\frac{3}{2}\pi\le x<2\pi$에서 $0\le\cos x<1$이므로

$\cos x=\frac{1}{2}$ ❶

따라서 $\frac{3}{2}\pi\le x<2\pi$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$의 해는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ❷

정답_ $x=\frac{5}{3}\pi$

단계	채점 기준	비율
❶	$\cos x$의 값 구하기	60%
❷	방정식의 해 구하기	40%

484

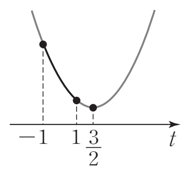
$\cos\theta=t$로 놓으면 $-1\le\cos\theta\le 1$이므로

$-1\le t\le 1$ ❶

$t^2-3t-a+9=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}-a\ge 0$

$f(t)=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}-a$ ❷

로 놓으면 함수 $f(t)$의 그래프는 직선 $t=\frac{3}{2}$에 대하여 대칭이므로



$-1\le t\le 1$에서 $t=1$일 때 최솟값

$f(1)=\frac{1}{4}+\frac{27}{4}-a=7-a$를 갖는다. ❸

따라서 $7-a\ge 0$이므로

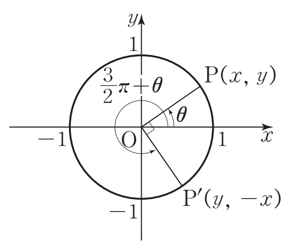
$a\le 7$ ❹

정답_ $a\le 7$

단계	채점 기준	비율
❶	$\cos\theta=t$로 놓고 t의 값의 범위 구하기	20%
❷	주어진 부등식의 좌변을 $f(t)$로 나타내기	20%
❸	$f(t)$의 최솟값 구하기	40%
❹	a의 값의 범위 구하기	20%

485

오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경 OP와 각 $\frac{3}{2}\pi+\theta$를 나타내는 동경 OP′은 서로 $\boxed{^{(가)}\text{수직}}$이다. 그러므로 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면 점 P′의 좌표는 $\boxed{^{(나)}(y,\ -x)}$이다.



따라서 $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)$와 $\sin\theta$를 x, y로 나타내면

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\boxed{^{(다)}y}$, $\sin\theta=\boxed{^{(다)}y}$

$\therefore \cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta$ 정답_ ④

486

$y=\dfrac{4\sin^2 x+1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\dfrac{4\sin^2 x+1}{\sin x}=4\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$4\sin x+\frac{1}{\sin x}\ge 2\sqrt{4\sin x\cdot\frac{1}{\sin x}}$$
$$=4\left(\text{단, 등호는 } 4\sin x=\frac{1}{\sin x}\text{일 때 성립}\right)$$

이므로 주어진 함수의 최솟값은 4이다.

$\therefore b=4$

최솟값을 가질 때의 a의 값을 구하면

$4\sin x=\frac{1}{\sin x}$에서 $4\sin^2 x=1$ $\quad\therefore \sin^2 x=\frac{1}{4}$

이때, $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin x>0$이므로

$\sin x=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore a=x=\frac{\pi}{6}$

$\therefore ab=\frac{\pi}{6}\cdot 4=\frac{2}{3}\pi$ 정답_ ②

487

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$이므로

$9\sin^2(\pi+\alpha+\beta)+9\cos\gamma$

$=9\sin^2(\pi+\pi-\gamma)+9\cos\gamma$

$=9\sin^2\gamma+9\cos\gamma$

$=9(1-\cos^2\gamma)+9\cos\gamma$

$=-9\left\{\left(\cos\gamma-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right\}$

한편, $a^2+b^2=3ab\cos\gamma$이므로

$\cos\gamma=\dfrac{a^2+b^2}{3ab}=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$

이때, a, b는 양수이므로

$\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\ge\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=\frac{2}{3}$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

즉, $\frac{2}{3}\le\cos\gamma\le 1$이므로 $\cos\gamma=\frac{2}{3}$일 때, 주어진 식의 최댓값은

$-9\left\{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right\}=11$ 정답_ ③

488

함수 $y=a\sin bt$의 주기가 5초이므로 $\frac{2\pi}{b}=5$ $\quad\therefore b=\frac{2}{5}\pi$

함수 $y=a\sin bt$의 최댓값이 0.6(리터/초)이므로 $a=0.6$

함수 $y=a\sin bt$, 즉 $y=0.6\sin\frac{2}{5}\pi t$에서 처음으로 흡입률이 -0.3(리터/초)일 때는 $-0.3=0.6\sin\frac{2}{5}\pi t$

$\sin\frac{2}{5}\pi t=-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}\pi t=\frac{7}{6}\pi$ $\quad\therefore t=\frac{35}{12}$(초) 정답_ ①

489

이차방정식 $x^2+x+a=0$의 한 허근이 $\cos\theta+i\sin\theta$이고 a가 실수이므로 다른 한 허근은 $\cos\theta-i\sin\theta$이다.

근과 계수의 관계에 의해

$(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta-i\sin\theta)=-1$에서

$2\cos\theta=-1$ $\quad\therefore \cos\theta=-\frac{1}{2}$

이때, $0<\theta<\pi$이므로 $\theta=\frac{2}{3}\pi$

$(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)=a$에서

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=a$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore \dfrac{\theta}{a}=\dfrac{\frac{2}{3}\pi}{1}=\frac{2}{3}\pi$ 정답_ ④

490

$y=2\sin\frac{1}{4}(x-\pi)=2\sin\left(\frac{1}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)$이므로

$\frac{x}{4}-\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $y=2\sin t$

$0\le x\le 10\pi$에서 $-\frac{\pi}{4}\le\frac{x}{4}-\frac{\pi}{4}\le\frac{9}{4}\pi$이므로

$-\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{9}{4}\pi$

함수 $y=2\sin\frac{1}{4}(x-\pi)$ $(0\le x\le 10\pi)$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표는 방정식 $2\sin\frac{1}{4}(x-\pi)=1$의 해와 같다.

이때, $-\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{9}{4}\pi$에서 방정식 $2\sin t=1$, 즉 $\sin t=\frac{1}{2}$의 해는

$t=\frac{\pi}{6}$ 또는 $t=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{13}{6}\pi$

(i) $t=\frac{\pi}{6}$일 때, $\frac{x}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}$ $\quad\therefore x=\frac{5}{3}\pi$

(ii) $t=\frac{5}{6}\pi$일 때, $\frac{x}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi$ $\quad\therefore x=\frac{13}{3}\pi$

(iii) $t=\frac{13}{6}\pi$일 때, $\frac{x}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{13}{6}\pi$ $\quad\therefore x=\frac{29}{3}\pi$

따라서 세 점 $\mathrm{A}\left(\frac{5}{3}\pi, 1\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{29}{3}\pi, 1\right)$, $\mathrm{P}(7\pi, -2)$를 삼각형의 꼭짓점으로 할 때, 삼각형 PAB의 넓이는 최대가 되므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{29}{3}\pi-\frac{5}{3}\pi\right)\times\{1-(-2)\}=12\pi$ 정답_ 12π

491

$\sin^2\theta-2\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)-a-1=0$에서

$\sin^2\theta-2\sin\theta-a-1=0$

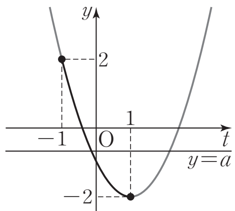
$\therefore \sin^2\theta-2\sin\theta-1=a$

위의 방정식을 만족시키는 θ가 존재하려면 $y=\sin^2\theta-2\sin\theta-1$의 그래프와 직선 $y=a$가 교점을 가져야 한다.

$y=\sin^2\theta-2\sin\theta-1$에서

$\sin\theta=t\ (-1\le t\le 1)$로 놓으면

$y=t^2-2t-1=(t-1)^2-2$



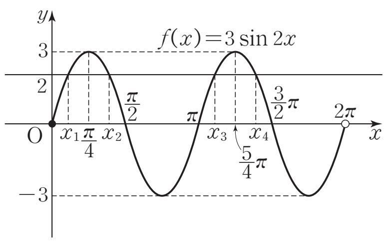
오른쪽 그림에서 주어진 방정식을 만족시키는 θ가 존재하기 위한 a의 값의 범위는

$-2\le a\le 2$

정답_ $-2\le a\le 2$

492

함수 $f(x)=3\sin 2x$의 최댓값과 최솟값은 각각 3, -3이고, 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로 $0\le x<2\pi$에서의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $f(x)=3\sin 2x$의 그래프와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표를 작은 것부터 크기순으로 x_1, x_2, x_3, x_4로 놓으면

두 점 $(x_1,\ 0)$, $(x_2,\ 0)$은 직선 $x=\frac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{4}\qquad \therefore x_1+x_2=\frac{\pi}{2}$ ······ ㉠

두 점 $(x_3,\ 0)$, $(x_4,\ 0)$은 직선 $x=\frac{5}{4}\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{5}{4}\pi\qquad \therefore x_3+x_4=\frac{5}{2}\pi$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha=x_1+x_2+x_3+x_4=3\pi$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{2}f\left(\alpha+\frac{\pi}{8}\right)&=\sqrt{2}\cdot 3\sin 2\left(3\pi+\frac{\pi}{8}\right)\\&=3\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\\&=3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=3\end{aligned}$$

정답_ 3

493

$y=x^2-2x\sin\theta+1=(x-\sin\theta)^2+1-\sin^2\theta$

위의 함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(\sin\theta,\ 1-\sin^2\theta)$이므로

$1-\sin^2\theta<\sqrt{2}\sin\theta-\frac{1}{2}$

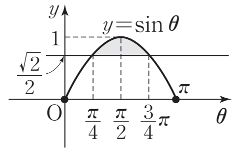
$\sin^2\theta+\sqrt{2}\sin\theta-\frac{3}{2}>0$

$2\sin^2\theta+2\sqrt{2}\sin\theta-3>0$

$(\sqrt{2}\sin\theta-1)(\sqrt{2}\sin\theta+3)>0$

이때, $0\le\theta\le\pi$, $\sqrt{2}\sin\theta+3>0$이므로 $\sqrt{2}\sin\theta-1>0$

$\therefore \sin\theta>\frac{\sqrt{2}}{2}$ ······ ㉠



$0\le\theta\le\pi$에서 부등식 ㉠의 해는

$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3}{4}\pi$

따라서 $a=\frac{\pi}{4}$, $b=\frac{3}{4}\pi$이므로

$b-a=\frac{\pi}{2}$

정답_ ③

494

이차방정식 $x^2+4x\sin\theta+6\cos\theta=0$의 두 근을 α, β라고 하면 두 근이 모두 음수이므로 판별식 D에 대하여

(i) $\frac{D}{4}=(2\sin\theta)^2-6\cos\theta\ge 0$

$4\sin^2\theta-6\cos\theta\ge 0$

$4(1-\cos^2\theta)-6\cos\theta\ge 0$, $2\cos^2\theta+3\cos\theta-2\le 0$

$\therefore (2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)\le 0$

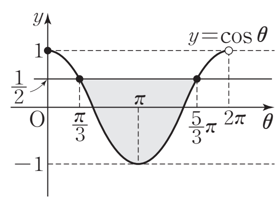
$-1\le\cos\theta\le 1$에서 $\cos\theta+2>0$이므로

$2\cos\theta-1\le 0$

$\therefore \cos\theta\le\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 부등식 $\cos\theta\le\frac{1}{2}$의 해는

$\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{5}{3}\pi$ ······ ㉠



(ii) $\alpha+\beta=-4\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta>0$ ······ ㉡

(iii) $\alpha\beta=6\cos\theta>0\qquad \therefore \cos\theta>0$ ······ ㉢

㉡, ㉢에서 θ는 제1사분면의 각이다. 즉, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ······ ㉣

주어진 조건을 만족시키는 θ의 크기의 범위는 ㉠, ㉣의 공통부분이므로

$\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{2}$

정답_ $\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{2}$

495

(1) 사인법칙에 의해 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

$\dfrac{a}{\sin 30^\circ}=\dfrac{10}{\sin 45^\circ}$, $a\sin 45^\circ=10\sin 30^\circ$

$a\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=10\cdot\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore a=5\sqrt{2}$

(2) 사인법칙에 의해 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

$\dfrac{2}{\sin B}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}$, $2\sin 135^\circ=2\sqrt{2}\sin B$

$2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}\sin B$ $\quad\therefore \sin B=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=30^\circ$ 또는 $B=150^\circ$

그런데 $B+C<180^\circ$이므로 $B=30^\circ$

정답_(1) $5\sqrt{2}$ (2) 30°

496

(1) 사인법칙에 의해 $\dfrac{a}{\sin A}=2R$

$\dfrac{3}{\sin 30^\circ}=2R$ $\quad\therefore R=3$

(2) 사인법칙에 의해 $\dfrac{b}{\sin B}=2R$

$\dfrac{6}{\sin B}=2\cdot 2\sqrt{3}$ $\quad\therefore \sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=60^\circ$ 또는 $B=120^\circ$

(3) 사인법칙에 의해 $\dfrac{c}{\sin C}=2R$

$\dfrac{c}{\sin 120^\circ}=2\cdot 8$ $\quad\therefore c=2\cdot 8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$

정답_(1) 3 (2) 60° 또는 120° (3) $8\sqrt{3}$

497

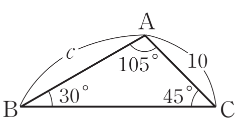
$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이가 30이므로 사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin 150^\circ}=2\cdot 30$ $\quad\therefore \overline{BC}=2\cdot 30\cdot\dfrac{1}{2}=30$

정답_③

498

$C=180^\circ-(105^\circ+30^\circ)=45^\circ$



사인법칙에 의해

$\dfrac{10}{\sin 30^\circ}=\dfrac{c}{\sin 45^\circ}=2R$

(i) $\dfrac{10}{\sin 30^\circ}=\dfrac{c}{\sin 45^\circ}$에서 $10\sin 45^\circ=c\sin 30^\circ$

$5\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}c$ $\quad\therefore c=10\sqrt{2}$

(ii) $\dfrac{10}{\sin 30^\circ}=2R$에서 $R=\dfrac{5}{\sin 30^\circ}=\dfrac{5}{\frac{1}{2}}=10$

$\therefore cR=10\sqrt{2}\cdot 10=100\sqrt{2}$

정답_④

499

사인법칙에 의해 $\dfrac{2}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=2R$

(i) $\dfrac{2}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}$에서 $2\sqrt{3}\sin A=2\sin 120^\circ$

$2\sqrt{3}\sin A=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore \sin A=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=30^\circ$ 또는 $A=150^\circ$

그런데 $A+C<180^\circ$이므로 $A=30^\circ$

(ii) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=2R$에서 $R=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$

$\therefore \dfrac{\tan 2A}{R}=\dfrac{\tan 60^\circ}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

정답_③

500

$\overline{BM}=\overline{CM}=k$, $\angle BMA=\theta$로 놓으면

$\triangle$ABM에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{k}{\sin\alpha}=\dfrac{12}{\sin\theta}$ $\quad\therefore \sin\alpha=\dfrac{k\sin\theta}{12}$

$\triangle$AMC에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{k}{\sin\beta}=\dfrac{8}{\sin(180^\circ-\theta)}=\dfrac{8}{\sin\theta}$ $\quad\therefore \sin\beta=\dfrac{k\sin\theta}{8}$

$\therefore \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\dfrac{\frac{k\sin\theta}{8}}{\frac{k\sin\theta}{12}}=\dfrac{3}{2}$

정답_⑤

501

$\overline{AC}$가 원 O의 지름이므로 $\angle ABC=90^\circ$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}=2\sqrt{2}$인 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AC}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=4$

삼각형 BCD에서 $\angle CBD=90^\circ-60^\circ=30^\circ$이므로 사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{CD}}{\sin(\angle CBD)}=2R$, $\dfrac{\overline{CD}}{\sin 30^\circ}=4$

$\therefore \overline{CD}=4\cdot\dfrac{1}{2}=2$

정답_①

502

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{a}{2R}+\dfrac{b}{2R}+\dfrac{c}{2R}=\dfrac{a+b+c}{2R}$

$=\dfrac{20}{2\cdot 5}=2$

정답_②

503

삼각형 ABC에서 $A:B:C=1:2:3$이므로

$A=180^{\circ}\cdot\frac{1}{6}=30^{\circ}$

$B=180^{\circ}\cdot\frac{2}{6}=60^{\circ}$

$C=180^{\circ}\cdot\frac{3}{6}=90^{\circ}$

사인법칙의 변형에 의해

$\therefore a:b:c=\sin 30^{\circ}:\sin 60^{\circ}:\sin 90^{\circ}$

$=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:1=1:\sqrt{3}:2$

따라서 $a=k$, $b=\sqrt{3}k$, $c=2k$ $(k>0)$로 놓으면

$\frac{b^2}{ac}=\frac{3k^2}{k\cdot 2k}=\frac{3}{2}$

정답_ ⑤

504

$a+b=5k,\ b+c=7k,\ c+a=6k\ (k>0)$ …… ㉠

로 놓고 세 식의 양변을 변끼리 더하면

$2a+2b+2c=18k$

$\therefore a+b+c=9k$ …… ㉡

㉡에서 ㉠의 각 식을 빼면

$a=2k,\ b=3k,\ c=4k$

따라서 사인법칙의 변형에 의해

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=2k:3k:4k$

$=2:3:4$

정답_ ②

505

$2a+b-2c=0$ …… ㉠

$a-2b+3c=0$ …… ㉡

㉠$\times 2+$㉡을 하면

$5a-c=0 \qquad \therefore c=5a$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$2a+b-10a=0 \qquad \therefore b=8a$

따라서 사인법칙의 변형에 의해

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=a:8a:5a$

$=1:8:5$

정답_ ②

506

(1) 코사인법칙에 의해

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=2^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot\cos 30^{\circ}$

$=4+3-2\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1$

$a>0$이므로 $a=1$

(2) 코사인법칙에 의해

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B=(2\sqrt{2})^2+3^2-2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot\cos 45^{\circ}$

$=8+9-2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=5$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{5}$

(3) 코사인법칙에 의해

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cdot\cos 120^{\circ}$

$=4+9-2\cdot 2\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=19$

$c>0$이므로 $c=\sqrt{19}$

정답_ (1) 1 (2) $\sqrt{5}$ (3) $\sqrt{19}$

507

코사인법칙에 의해

$\overline{AC}^2=3^2+6^2-2\cdot 3\cdot 6\cdot\cos 120^{\circ}$

$=9+36-2\cdot 3\cdot 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=63$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$ ($\because \overline{AC}>0$)

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙에 의해

$\frac{3\sqrt{7}}{\sin 120^{\circ}}=2R \qquad \therefore R=\frac{3\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{21}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$\pi\cdot(\sqrt{21})^2=21\pi$

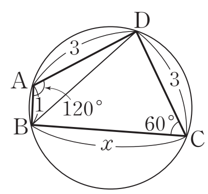
정답_ ④

508

선분 BD를 그으면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의해

$\overline{BD}^2=1^2+3^2-2\cdot 1\cdot 3\cdot\cos 120^{\circ}$

$=1+9-2\cdot 1\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=13$



원에 내접하는 사각형의 대각의 크기의 합이 180°이므로 $C=60^{\circ}$

이때, $\overline{BC}=x$라고 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의해

$\overline{BD}^2=x^2+3^2-2\cdot x\cdot 3\cdot\cos 60^{\circ}$

$13=x^2+9-2\cdot x\cdot 3\cdot\frac{1}{2},\ x^2-3x-4=0$

$(x-4)(x+1)=0$

$\therefore x=4$ ($\because x>0$)

따라서 $\overline{BC}$의 길이는 4이다.

정답_ ③

509

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$\overline{BC}^2=x^2+\frac{16}{x^2}-2\cdot x\cdot\frac{4}{x}\cdot\cos 120^{\circ}$

$=x^2+\frac{16}{x^2}-2\cdot x\cdot\frac{4}{x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=x^2+\frac{16}{x^2}+4$

산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=x^2+\frac{16}{x^2}+4\ge 2\sqrt{x^2\cdot\frac{16}{x^2}}+4$$

$$=12\left(\text{단, 등호는 } x^2=\frac{16}{x^2}\text{일 때 성립}\right)$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}\ge\sqrt{12}=2\sqrt{3}\ (\because\ \overline{\mathrm{BC}}>0)$

따라서 $\overline{\mathrm{BC}}$의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{3}$이다. 정답_ ④

510

$a:b:c=2:\sqrt{3}:3$이므로 $a=2k,\ b=\sqrt{3}k,\ c=3k\ (k>0)$로 놓으면 코사인법칙의 변형에 의해

$$\cos A=\frac{(\sqrt{3}k)^2+(3k)^2-(2k)^2}{2\cdot\sqrt{3}k\cdot 3k}$$

$$=\frac{8k^2}{6\sqrt{3}k^2}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

정답_ ⑤

511

사인법칙의 변형에 의해

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=5:2:4$

이때, $a=5k,\ b=2k,\ c=4k\ (k>0)$로 놓으면 코사인법칙의 변형에 의해

$$\cos C=\frac{(5k)^2+(2k)^2-(4k)^2}{2\cdot 5k\cdot 2k}=\frac{13k^2}{20k^2}=\frac{13}{20}$$

정답_ ⑤

512

삼각형 ABC의 세 변의 길이가 7, 5, 3이므로 코사인법칙의 변형에 의해

$$\cos B=\frac{7^2+3^2-5^2}{2\cdot 7\cdot 3}=\frac{11}{14}$$

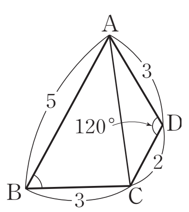
삼각형 ABD에서 $\cos B=\frac{11}{14}$이므로 코사인법칙에 의해

$$\overline{\mathrm{AD}}^2=3^2+2^2-2\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{11}{14}$$

$$=9+4-\frac{66}{7}=\frac{25}{7}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AD}}=\frac{5}{\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{7}\ (\because\ \overline{\mathrm{AD}}>0)$ 정답_ $\frac{5\sqrt{7}}{7}$

513



삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{\mathrm{AC}}^2=3^2+2^2-2\cdot 3\cdot 2\cdot\cos 120^\circ$$

$$=9+4-2\cdot 3\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=19$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{19}\ (\because\ \overline{\mathrm{AC}}>0)$

삼각형 ABC에서 코사인법칙의 변형에 의해

$$\cos B=\frac{5^2+3^2-(\sqrt{19})^2}{2\cdot 5\cdot 3}=\frac{1}{2}$$

그런데 $0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=60^\circ$ 정답_ ③

514

세 내각 중 크기가 가장 작은 각의 크기는 가장 짧은 변의 대각의 크기이다. 이때 $\sqrt{2}<2<\sqrt{3}+1$이므로 가장 작은 각의 크기는 $\overline{\mathrm{BC}}$의 대각의 크기인 A이다.

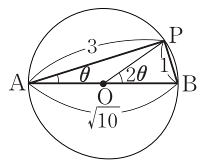
코사인법칙의 변형에 의해

$$\cos A=\frac{2^2+(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot(\sqrt{3}+1)}=\frac{6+2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

그런데 $0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=30^\circ$ 정답_ ②

515



삼각형 ABP에서 $\overline{\mathrm{AB}}$가 원 O의 지름이므로 $\angle\mathrm{APB}=90^\circ$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{AP}}^2}=\sqrt{10-9}=1$

한편, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{10}$이므로 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OB}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

또, $\widehat{\mathrm{PB}}$의 원주각의 크기가 θ이므로 중심각의 크기는 $\angle\mathrm{POB}=2\theta$

삼각형 OBP에서 코사인법칙의 변형에 의해

$$\cos 2\theta=\frac{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2-1^2}{2\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}}=\frac{4}{5}$$

정답_ ⑤

516

함수 $y=\cos x$는 $0^\circ<x<180^\circ$에서 x의 값이 증가함에 따라 y의 값이 감소하므로 C의 크기가 최대일 때 $\cos C$의 값은 최소가 된다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙의 변형에 의해

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4+b^2-1}{2\cdot 2\cdot b}=\frac{b^2+3}{4b}=\frac{b}{4}+\frac{3}{4b}$$

산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$\cos C=\frac{b}{4}+\frac{3}{4b}\ge 2\sqrt{\frac{b}{4}\cdot\frac{3}{4b}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\text{단, 등호는 }\frac{b}{4}=\frac{3}{4b}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 C의 크기가 최대, 즉 $\cos C$가 최소일 때 b의 값은

$$\frac{b}{4}=\frac{3}{4b}$$

$b^2=3$에서 $b=\sqrt{3}\ (\because\ b>0)$ 정답_ ②

517

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙의 변형에 의해

$$\sin A=\frac{a}{2R},\quad \sin B=\frac{b}{2R},\quad \sin C=\frac{c}{2R}$$

이것을 $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$에 대입하면

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2=\left(\frac{b}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2 \qquad \therefore a^2=b^2+c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A=90^\circ$인 직각삼각형이다.

정답_ $A=90^\circ$인 직각삼각형

518

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙의 변형에 의해

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

이것을 $a\sin B=b\sin C=c\sin A$에 대입하면

$$a\cdot\frac{b}{2R}=b\cdot\frac{c}{2R}=c\cdot\frac{a}{2R} \qquad \therefore ab=bc=ca$$

(i) $ab=bc$에서 $a=c$

(ii) $ab=ca$에서 $b=c$

$\therefore a=b=c$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다. 정답_ ①

519

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$\cos^2 A+1=\cos^2 B+\cos^2 C$에서

$(1-\sin^2 A)+1=(1-\sin^2 B)+(1-\sin^2 C)$

$\therefore \sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$ …… ㉠

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙의 변형에 의해

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2=\left(\frac{b}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2 \qquad \therefore a^2=b^2+c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A=90^\circ$인 직각삼각형이다. 정답_ ②

520

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식 D에 대하여

$$\frac{D}{4}=(\sqrt{b}\sin B)^2-a\sin^2 A=0$$

$\therefore b\sin^2 B=a\sin^2 A$ …… ㉠

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 사인법칙의 변형에 의해

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$b\cdot\left(\frac{b}{2R}\right)^2=a\cdot\left(\frac{a}{2R}\right)^2,\ b^3=a^3$$

$\therefore a=b$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다. 정답_ ④

521

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

이것을 $2\sin A\cos B=\sin C$에 대입하면

$$2\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{c}{2R}$$

$c^2+a^2-b^2=c^2,\ a^2=b^2 \qquad \therefore a=b\ (\because a>0,\ b>0)$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다. 정답_ ③

522

코사인법칙의 변형에 의해

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

이것을 $a\cos B-b\cos A=c$에 대입하면

$$a\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c$$

$(c^2+a^2-b^2)-(b^2+c^2-a^2)=2c^2$

$2a^2-2b^2=2c^2 \qquad \therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $A=90^\circ$인 직각삼각형이다. 정답_ ④

523

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

이것을 $\sin A=\sin C\cos B$에 대입하면

$$\frac{a}{2R}=\frac{c}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\ 2a^2=c^2+a^2-b^2 \qquad \therefore c^2=a^2+b^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

이때 코사인법칙에 의해 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

이것을 조건 (나)의 $a^2=b^2+c^2-\sqrt{2}bc$와 변끼리 빼서 정리하면

$$2\cos A=\sqrt{2} \qquad \therefore \cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

그런데 $0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=45^\circ$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$인 직각이등변삼각형이다.

정답_ $C=90^\circ$인 직각이등변삼각형

524

(1) $\triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot10\cdot6\cdot\sin30^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot10\cdot6\cdot\frac{1}{2}=15$

(2) $\triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot8\cdot4\sqrt{2}\cdot\sin45^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot8\cdot4\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=16$

(3) $\triangle ABC=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot6\sqrt{6}\cdot\sin120^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot6\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=18$

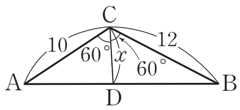
정답_ (1) 15 (2) 16 (3) 18

525

$\overline{CD}=x$로 놓으면

$\triangle ABC=\triangle ADC+\triangle BCD$

이므로



$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 12\cdot \sin 120^\circ=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot x\cdot \sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot 12\cdot x\cdot \sin 60^\circ$

$30\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}}{2}x+3\sqrt{3}x \qquad \therefore x=\frac{60}{11}$

정답_ ③

526

$\overline{BC}=a$로 놓으면 코사인법칙에 의해

$(\sqrt{5})^2=(\sqrt{2})^2+a^2-2\sqrt{2}a\cos 45^\circ$

$5=2+a^2-2a,\ a^2-2a-3=0$

$(a-3)(a+1)=0$

이때, $a>0$이므로 $a=3$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 3\cdot \sin 45^\circ=\frac{3}{2}$

정답_ ②

527

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin A$이므로

$3\sqrt{3}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot \sin A \qquad \therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0<A<\frac{\pi}{2}$이므로 $A=60^\circ$

코사인법칙에 의해

$\overline{BC}^2=3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4\cdot \cos 60^\circ=9+16-24\cdot\frac{1}{2}=13$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{13}\ (\because \overline{BC}>0)$

정답_ ③

528

사인법칙에 의해 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}=\frac{6}{\sin C}$, $2\sqrt{3}\sin C=6\sin 30^\circ$

$2\sqrt{3}\sin C=6\cdot\frac{1}{2} \qquad \therefore \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$

그런데 $C=60^\circ$이면 $A=90^\circ$로 삼각형 ABC는 직각삼각형이 된다. 따라서 삼각형 ABC가 둔각삼각형이 되려면

$C=120^\circ \qquad \therefore A=30^\circ$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin A$

$=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sin 30^\circ=3\sqrt{3}$

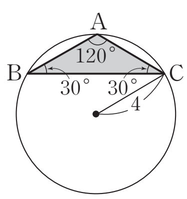
정답_ ③

529

삼각형 ABC에서

$C=180^\circ-(30^\circ+120^\circ)=30^\circ$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $R=4$이므로 사인법칙의 변형에 의해



$\overline{BC}=a=2R\sin A=2\cdot 4\cdot\sin 120^\circ=4\sqrt{3}$

$\overline{BC}=c=2R\sin C=2\cdot 4\cdot \sin 30^\circ=4$

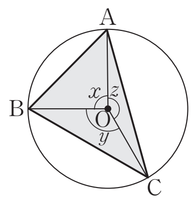
$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}ca\sin B$

$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\sqrt{3}\cdot\sin 30^\circ=4\sqrt{3}$

정답_ ⑤

530

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 꼭짓점과 원의 중심 O를 연결하여 세 개의 삼각형으로 나누어 구하도록 하자.



$\angle AOB=\angle x$, $\angle BOC=\angle y$,

$\angle AOC=\angle z$로 놓으면 부채꼴의 중심각의 크기는 호의 길이에 정비례하므로

$\angle x : \angle y : \angle z=3:4:5$

$\therefore \angle x=360^\circ\cdot\frac{3}{12}=90^\circ$

$y=360^\circ\cdot\frac{4}{12}=120^\circ$

$z=360^\circ\cdot\frac{5}{12}=150^\circ$

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\sin 90^\circ=2$

$\triangle OBC=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot \sin 120^\circ=\sqrt{3}$

$\triangle OCA=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\sin 150^\circ=1$

$\therefore \triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$

$=2+\sqrt{3}+1=3+\sqrt{3}$

정답_ $3+\sqrt{3}$

531

삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c라고 하면 내접원의 반지름의 길이가 4이고, 삼각형의 넓이가 12이므로

$12=\frac{a+b+c}{2}\cdot 4 \qquad \therefore a+b+c=6$

따라서 삼각형의 세 변의 길이의 합은 6이다.

정답_ ②

532

코사인법칙에 의해

$a^2=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos 120^\circ=9+25-30\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=49$

$\therefore a=7\ (\because a>0)$

삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot\sin 120^\circ=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라고 하면

$S=\frac{a+b+c}{2}\cdot r$에서 $\frac{15\sqrt{3}}{4}=\frac{7+3+5}{2}\cdot r$

$\therefore r=\frac{\sqrt{3}}{2}$

정답_ ②

533

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $R=4$이므로 사인법칙의 변형에 의해

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}$$
$$=\frac{a}{8}+\frac{b}{8}+\frac{c}{8}=\frac{3}{2}$$

$\therefore a+b+c=12$

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이가 $r=2$이므로 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{a+b+c}{2}\cdot r=\frac{12}{2}\cdot 2=12$$

정답_ 12

534

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $R=2$이고, 삼각형 ABC의 넓이가 3이므로

$S=\dfrac{abc}{4R}$에서 $3=\dfrac{abc}{4\cdot 2}$

$\therefore abc=24$

정답_ ⑤

535

삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면 세 변의 길이가 4, 5, 6이므로

(i) $S=\dfrac{a+b+c}{2}\cdot r$에서 $S=\dfrac{4+5+6}{2}\cdot r=\dfrac{15}{2}r$

$\therefore r=\dfrac{2}{15}S$

(ii) $S=\dfrac{abc}{4R}=\dfrac{4\cdot 5\cdot 6}{4R}=\dfrac{30}{R}$ $\qquad\therefore R=\dfrac{30}{S}$

$\therefore rR=\dfrac{2}{15}S\cdot\dfrac{30}{S}=4$

정답_ ⑤

536

헤론의 공식에 의해 $s=\dfrac{5+6+7}{2}=9$이므로 삼각형의 넓이는

$$\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}=\sqrt{9\cdot 4\cdot 3\cdot 2}$$
$$=6\sqrt{6}$$

정답_ ⑤

다른 풀이

삼각형 ABC에서 $a=5$, $b=6$, $c=7$로 놓으면 코사인법칙의 변형에 의해

$$\cos A=\frac{6^2+7^2-5^2}{2\cdot 6\cdot 7}=\frac{5}{7}$$

$$\therefore \sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(\frac{5}{7}\right)^2$$
$$=1-\frac{25}{49}=\frac{24}{49}$$

$0^\circ<A<180^\circ$에서 $\sin A>0$이므로

$$\sin A=\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\cdot\frac{2\sqrt{6}}{7}=6\sqrt{6}$$

537

헤론의 공식에 의해 $s=\dfrac{5+7+8}{2}=10$이므로 삼각형의 넓이는

$$\sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)}=\sqrt{10\cdot 5\cdot 3\cdot 2}$$
$$=10\sqrt{3}$$

삼각형의 내접원의 반지름의 길이를 r라고 하면

$S=\dfrac{a+b+c}{2}\cdot r$에서 $10\sqrt{3}=\dfrac{5+7+8}{2}\cdot r$

$\therefore r=\sqrt{3}$

정답_ ③

538

△ABD에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{BD}^2=2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4\cdot\cos 60^\circ=4+16-16\cdot\frac{1}{2}=12$$

$\therefore \overline{BD}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ ($\because \overline{BD}>0$)

$$\triangle ABD=\frac{1}{2}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AB}\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

$$\triangle BCD=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{BD}\cdot\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ □ABCD$=$△ABD$+$△BCD

$$=2\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{2}$$

정답_ ③

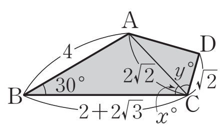
539

△ABC에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{AC}^2=4^2+(2+2\sqrt{3})^2-2\cdot 4\cdot(2+2\sqrt{3})\cdot\cos 30^\circ$$
$$=16+16+8\sqrt{3}-2\cdot 4\cdot(2+2\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=8$$

$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{2}$ ($\because \overline{AC}>0$)

$\angle ACB=x^\circ$, $\angle ACD=y^\circ$로 놓으면



△ABC에서 사인법칙에 의해

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}=\frac{4}{\sin x^\circ}$$

$2\sqrt{2}\sin x^\circ=4\sin 30^\circ$

$2\sqrt{2}\sin x^\circ=4\cdot\dfrac{1}{2}$ $\qquad\therefore \sin x^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ<x^\circ<105^\circ$이므로 $x^\circ=45^\circ$

또, $x^\circ+y^\circ=105^\circ$에서 $y^\circ=60^\circ$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(2+2\sqrt{3})\cdot\sin 30^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(2+2\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}=2+2\sqrt{3}$$

$$\triangle ACD=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sin 60^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

$\therefore$ □ABCD$=$△ABC$+$△ACD

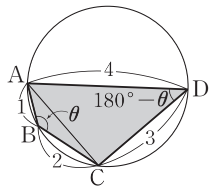
$$=(2+2\sqrt{3})+\sqrt{3}$$
$$=2+3\sqrt{3}$$

따라서 $p=2, q=3$이므로 $p+q=5$

정답_ ③

540

원에 내접하는 사각형의 마주 보는 내각의 크기의 합은 180°이므로 $B=\theta$로 놓으면 $D=180^\circ-\theta$이다.



$\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의해

$\overline{AC}^2=1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cdot\cos\theta$

$\quad=1+4-4\cos\theta=5-4\cos\theta$ …… ㉠

$\triangle$ACD에서 코사인법칙에 의해

$\overline{AC}^2=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cdot\cos(180^\circ-\theta)$

$\quad=3^2+4^2+2\cdot3\cdot4\cdot\cos\theta$

$\quad=9+16+24\cos\theta=25+24\cos\theta$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$25+24\cos\theta=5-4\cos\theta$

$28\cos\theta=-20 \qquad \therefore \cos\theta=-\frac{5}{7}$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{5}{7}\right)^2=1-\frac{25}{49}=\frac{24}{49}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$에서 $\sin\theta>0$이므로 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{6}}{7}$

$\therefore \square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$

$\quad=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\sin(180^\circ-\theta)$

$\quad=\sin\theta+6\sin\theta=7\sin\theta$

$\quad=7\cdot\frac{2\sqrt{6}}{7}=2\sqrt{6}$

정답_ ③

541

$\overline{AD}=\overline{BC}=5$이고, 평행사변형 ABCD의 넓이가 10이므로

$\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\sin A=4\cdot5\cdot\sin A=10$

$\therefore \sin A=\frac{1}{2}$

$90^\circ<A<180^\circ$이므로 $\quad A=150^\circ$

정답_ ④

542

$\square ABCD=\frac{1}{2}\cdot8\cdot10\cdot\sin135^\circ$

$\quad=\frac{1}{2}\cdot8\cdot10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\quad=20\sqrt{2}$

정답_ $20\sqrt{2}$

543

등변사다리꼴의 두 대각선의 길이는 같으므로 대각선의 길이를 x라고 하면

$\frac{1}{2}\cdot x\cdot x\cdot\sin30^\circ=10$

$\frac{1}{2}\cdot x\cdot x\cdot\frac{1}{2}=10,\ x^2=40$

$\therefore x=\sqrt{40}=2\sqrt{10}\ (\because x>0)$

정답_ ④

544

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$\quad=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$에서 $\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \square ABCD=\frac{1}{2}\cdot4\cdot6\cdot\sin\theta$

$\quad=12\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=8\sqrt{2}$

정답_ $8\sqrt{2}$

545

사인법칙에 의해 $\quad\frac{b}{\sin B}=2R$

$\frac{4\sqrt{2}}{\sin B}=2\cdot\frac{4\sqrt{6}}{3} \qquad \therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$ …… ❶

삼각형 ABC가 예각삼각형이므로

$B=60^\circ$ …… ❷

사인법칙에 의해 $\quad\frac{c}{\sin C}=2R$

$\frac{c}{\sin45^\circ}=2\cdot\frac{4\sqrt{6}}{3}$

$\therefore c=\frac{8\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ …… ❸

정답_ $B=60^\circ,\ c=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	$\sin B$의 값 구하기	40%
❷	B의 값 구하기	20%
❸	c의 값 구하기	40%

546

삼각형 ABD는 $\angle A=180^\circ-(50^\circ+40^\circ)=90^\circ$인 직각삼각형이므로 $\overline{BD}$는 외접원의 지름이다. …… ❶

따라서 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$R=\sqrt{3}$ …… ❷

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)}=2R$

$\frac{\overline{AC}}{\sin120^\circ}=2\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3$ …… ❸

정답_ 3

단계	채점 기준	비율
❶	$\overline{BD}$가 외접원의 지름의 길이임을 알아내기	30%
❷	외접원의 반지름의 길이 구하기	20%
❸	$\overline{AC}$의 길이 구하기	50%

547

$a+b=4k,\ b+c=5k,\ c+a=6k\ (k>0)$ …… ㉠

로 놓고 세 식의 양변을 변끼리 더하면

$2a+2b+2c=15k$

$\therefore a+b+c=\dfrac{15}{2}k$ …… ㉡

㉡에서 ㉠의 각 식을 빼면

$a=\dfrac{5}{2}k,\ b=\dfrac{3}{2}k,\ c=\dfrac{7}{2}k$

$\therefore a:b:c=5:3:7$ ❶

$a=5s,\ b=3s,\ c=7s\ (s>0)$로 놓으면 코사인법칙의 변형에 의해

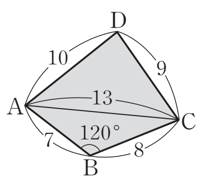
$\cos C=\dfrac{(5s)^2+(3s)^2-(7s)^2}{2\cdot 5s\cdot 3s}=\dfrac{-15s^2}{30s^2}=-\dfrac{1}{2}$ ❷

그런데 $0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=120^\circ$ ❸

정답_ 120°

단계	채점 기준	비율
❶	$a:b:c$ 구하기	40%
❷	$\cos C$의 값 구하기	40%
❸	C의 값 구하기	20%

548



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$\overline{AC}^2=7^2+8^2-2\cdot 7\cdot 8\cdot\cos 120^\circ$

$=49+64-2\cdot 7\cdot 8\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$=169$

$\therefore \overline{AC}=13\ (\because \overline{AC}>0)$ ❶

삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot 7\cdot 8\cdot\sin 120^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 7\cdot 8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=14\sqrt{3}$ ❷

삼각형 ACD의 넓이는 헤론의 공식에 의해

$s=\dfrac{9+10+13}{2}=16$이므로

$\sqrt{16(16-9)(16-10)(16-13)}=\sqrt{16\cdot 7\cdot 6\cdot 3}$

$=12\sqrt{14}$ ❸

$\therefore \square\text{ABCD}=\triangle\text{ABC}+\triangle\text{ACD}$

$=14\sqrt{3}+12\sqrt{14}$ ❹

정답_ $14\sqrt{3}+12\sqrt{14}$

단계	채점 기준	비율
❶	$\overline{AC}$의 길이 구하기	30%
❷	△ABC의 넓이 구하기	30%
❸	△ACD의 넓이 구하기	30%
❹	□ABCD의 넓이 구하기	10%

549

삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면 헤론의 공식에 의해

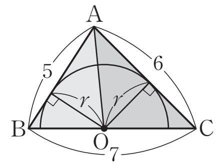
$s=\dfrac{5+6+7}{2}=9$이므로

$S=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$

$=\sqrt{9\cdot 4\cdot 3\cdot 2}$

$=6\sqrt{6}$ ❶

오른쪽 그림에서



$\triangle\text{ABO}=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot r=\dfrac{5}{2}r$

$\triangle\text{AOC}=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot r$

$=3r$ ❷

$S=\triangle\text{ABO}+\triangle\text{AOC}$이므로

$6\sqrt{6}=\dfrac{5}{2}r+3r$

$6\sqrt{6}=\dfrac{11}{2}r\qquad \therefore r=\dfrac{12\sqrt{6}}{11}$ ❸

정답_ $\dfrac{12\sqrt{6}}{11}$

단계	채점 기준	비율
❶	△ABC의 넓이 구하기	40%
❷	△ABO, △AOC의 넓이를 r로 나타내기	30%
❸	r의 값 구하기	30%

550

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 두 대각선의 교점을 E라고 하면 $\overline{AE}=\overline{CE}=a,\ \overline{BE}=\overline{DE}=b$로 놓을 수 있다.

△ABE에서 코사인법칙에 의해

$\overline{AB}^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos 60^\circ$

$\therefore 25=a^2+b^2-ab$ …… ㉠

❶

△AED에서 코사인법칙에 의해

$\overline{AD}^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos 120^\circ$

$\therefore 81=a^2+b^2+ab$ …… ㉡

❷

㉡−㉠을 하면 $2ab=56$

$\therefore ab=28$ ❸

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$2\cdot\dfrac{1}{2}ab\sin 60^\circ+2\cdot\dfrac{1}{2}ab\sin 120^\circ$

$=28\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+28\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=28\sqrt{3}$ ❹

정답_ $28\sqrt{3}$

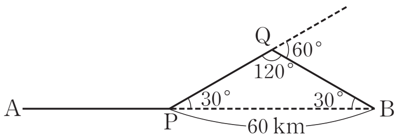
단계	채점 기준	비율
❶	$\overline{AE}=\overline{CE}=a,\ \overline{BE}=\overline{DE}=b$로 놓고 △ABE에 코사인법칙 적용하기	20%
❷	△AED에 코사인법칙 적용하기	20%
❸	ab의 값 구하기	20%
❹	평행사변형 ABCD의 넓이 구하기	40%

551

$\angle PQB=120^\circ$, $\angle PBQ=30^\circ$이므로 삼각형 QPB는 이등변삼각형이다.

따라서 단축되는 거리는

$(\overline{PQ}+\overline{QB})-60=(2\overline{PQ}-60)$ km



삼각형 QPB에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{60}{\sin 120^\circ}=\dfrac{\overline{PQ}}{\sin 30^\circ}$, $\overline{PQ}\sin 120^\circ=60\sin 30^\circ$

$\overline{PQ}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=60\cdot\dfrac{1}{2}$

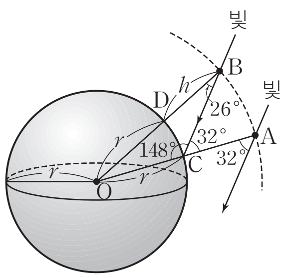
$\therefore \overline{PQ}=20\sqrt{3}$ (km)

따라서 단축되는 거리는 $(40\sqrt{3}-60)$ km이다. 정답_ ③

552

다음 그림에서 두 점 A, B를 지나는 빛은 평행하므로 평행선의 성질에 의해

$\angle BCA=32^\circ$ $\quad\therefore \angle OCB=148^\circ$



삼각형 OBC에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{r+h}{\sin 148^\circ}=\dfrac{r}{\sin 26^\circ}$

$(r+h)\sin 26^\circ=r\sin 148^\circ$

$r\sin 26^\circ+h\sin 26^\circ=r\sin(180^\circ-32^\circ)$

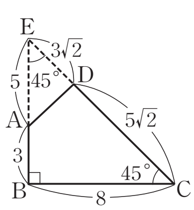
$r\sin 26^\circ+h\sin 26^\circ=r\sin 32^\circ$

$h\sin 26^\circ=(\sin 32^\circ-\sin 26^\circ)r$

$\therefore h=\left(\dfrac{\sin 32^\circ}{\sin 26^\circ}-1\right)r$ 정답_ ④

553

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$의 연장선과 $\overline{CD}$의 연장선이 만나는 점을 E라고 하면



삼각형 EBC는 $\angle C=45^\circ$이므로

$\overline{EB}=\overline{BC}=8$인 직각이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{EA}=5$, $\overline{ED}=3\sqrt{2}$, $\angle E=45^\circ$

삼각형 EAD에서 코사인법칙에 의해

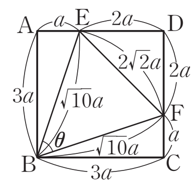
$\overline{AD}^2=5^2+(3\sqrt{2})^2-2\cdot5\cdot3\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ$

$=25+18-2\cdot5\cdot3\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=13$

$\therefore \overline{AD}=\sqrt{13}$ ($\because \overline{AD}>0$) 정답_ ②

554



정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 $3a$라 고 하면 직각삼각형 ABE에서

$\overline{BE}=\sqrt{a^2+(3a)^2}=\sqrt{10}a$

직각삼각형 BCF에서

$\overline{BF}=\sqrt{(3a)^2+a^2}=\sqrt{10}a$

직각삼각형 DEF에서

$\overline{EF}=\sqrt{(2a)^2+(2a)^2}=2\sqrt{2}a$

삼각형 BFE에서 코사인법칙의 변형에 의해

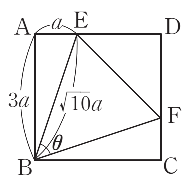
$\cos\theta=\dfrac{(\sqrt{10}a)^2+(\sqrt{10}a)^2-(2\sqrt{2}a)^2}{2\cdot\sqrt{10}a\cdot\sqrt{10}a}$

$=\dfrac{12a^2}{20a^2}=\dfrac{3}{5}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$ 정답_ ⑤

다른 풀이



정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 $3a$라 고 하면 직각삼각형 ABE에서

$\overline{BE}=\sqrt{a^2+(3a)^2}=\sqrt{10}a$

이때, $\overline{BE}=\overline{BF}$이므로

$\triangle BEF=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{BE}\cdot\overline{BF}\cdot\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{10}a\cdot\sqrt{10}a\cdot\sin\theta$

$=5a^2\sin\theta$ …… ㉠

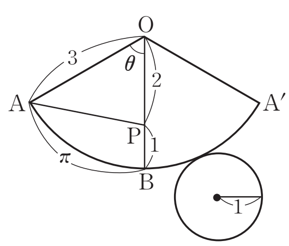
또 $\triangle BEF=\square ABCD-2\triangle ABE-\triangle EFD$

$=9a^2-3a^2-2a^2=4a^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $5a^2\sin\theta=4a^2$ $\quad\therefore \sin\theta=\dfrac{4}{5}$

555

주어진 원뿔의 전개도를 그리면 다음 그림과 같고, 두 점 A, P를 잇는 거리의 최솟값은 $\overline{AP}$이다.



$\overset{\frown}{AA'}$의 길이는 원뿔의 밑면의 둘레의 길이와 같으므로

$\overset{\frown}{AA'}=2\pi\cdot1=2\pi$

$\therefore \overset{\frown}{AB}=\pi$

부채꼴 OAB에서 중심각의 크기를 θ, 호의 길이를 l이라고 하면

$l=r\theta$에서 $\quad \pi=3\theta$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{3}$

삼각형 OAP에서 코사인법칙에 의해

$\overline{AP}^2=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}$

$\quad\;=9+4-12\cdot\dfrac{1}{2}=7$

$\therefore \overline{AP}=\sqrt{7}$ ($\because \overline{AP}>0$)

정답_ ②

556

$\overline{PB}=\overline{PD}=x$로 놓으면 $\overline{BD}=\sqrt{2}$이므로 △PDB에서 코사인법칙의 변형에 의해

$\cos\theta=\dfrac{x^2+x^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot x\cdot x}=1-\dfrac{1}{x^2}$

삼각형 BCE는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le\overline{PB}\le1$, 즉 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le x\le1$

$\dfrac{3}{4}\le x^2\le1$, $1\le\dfrac{1}{x^2}\le\dfrac{4}{3}$

$-\dfrac{4}{3}\le-\dfrac{1}{x^2}\le-1$

$-\dfrac{1}{3}\le1-\dfrac{1}{x^2}\le0$

$\therefore -\dfrac{1}{3}\le\cos\theta\le0$

따라서 $\cos\theta$의 최댓값은 0, 최솟값은 $-\dfrac{1}{3}$이므로 그 합은

$0+\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}$

정답_ ①

557

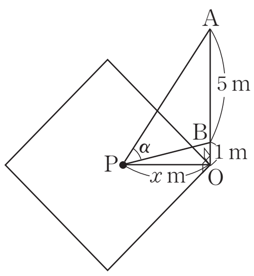
$\overline{OP}=x$ m로 놓으면

$\overline{BP}=\sqrt{x^2+1^2}$ (m)

$\overline{AP}=\sqrt{x^2+6^2}$ (m)

$\alpha\ge45^\circ$가 되려면

$\cos\alpha\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 이어야 하므로



삼각형 PBA에서 코사인법칙의 변형에 의해

$\cos\alpha=\dfrac{(x^2+1^2)+(x^2+6^2)-5^2}{2\cdot\sqrt{x^2+1^2}\cdot\sqrt{x^2+6^2}}$

$\quad\;=\dfrac{x^2+6}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+36}}\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

양변을 제곱하면

$\dfrac{(x^2+6)^2}{(x^2+1)(x^2+36)}\le\dfrac{1}{2}$

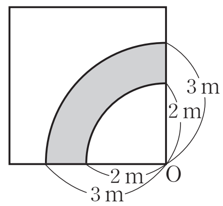
$2(x^4+12x^2+36)\le x^4+37x^2+36$

$x^4-13x^2+36\le0$

$(x^2-4)(x^2-9)\le0$

$4\le x^2\le9 \qquad \therefore 2\le x\le3$

점 P가 존재하는 영역은 $2\le x\le3$에서 오른쪽 그림의 어두운 부분과 같다.



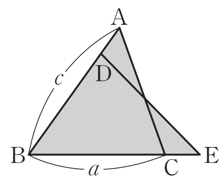
따라서 구하는 넓이는

$\dfrac{1}{4}(9\pi-4\pi)=\dfrac{5}{4}\pi$ (m^2)

정답_ ②

558

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$라 하고 오른쪽 그림과 같이 c를 20 % 줄이고, a를 r % 늘인 삼각형을 삼각형 DBE라고 하면



$\overline{BD}=\left(1-\dfrac{20}{100}\right)c=\dfrac{4}{5}c$

$\overline{BE}=\left(1+\dfrac{r}{100}\right)a$

$\angle B=\theta$로 놓으면 △ABC=△DBE에서

$\dfrac{1}{2}ca\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{5}c\cdot\left(1+\dfrac{r}{100}\right)a\cdot\sin\theta$

$1=\dfrac{4}{5}\cdot\left(1+\dfrac{r}{100}\right)$, $1+\dfrac{r}{100}=\dfrac{5}{4}$

$\dfrac{r}{100}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore r=\dfrac{1}{4}\cdot100=25$

정답_ ⑤

559

$\overline{AP}=x$, $\overline{AQ}=y$로 놓으면

$\triangle APQ=\dfrac{1}{6}\triangle ABC$에서

$\dfrac{1}{2}xy\sin60^\circ=\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot3\cdot\sin60^\circ\right)$

$\therefore xy=4$

삼각형 APQ에서 코사인법칙에 의해

$\overline{PQ}^2=x^2+y^2-2xy\cos60^\circ$

$\quad\;=x^2+y^2-2xy\cdot\dfrac{1}{2}$

$\quad\;=x^2+y^2-4$

산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$x^2+y^2\ge2\sqrt{x^2y^2}=2xy$

$\quad\;=2\cdot4=8$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

$\overline{PQ}^2=x^2+y^2-4\ge8-4=4$

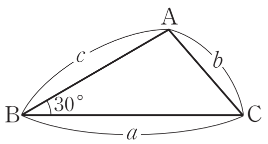
$\therefore \overline{PQ}\ge2$ ($\because \overline{PQ}>0$)

따라서 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 2이다.

정답_ 2

560

삼각형 ABC의 넓이가 9이므로



$\frac{1}{2}ac\sin 30^\circ=\frac{1}{2}ac\cdot\frac{1}{2}=9$

$\therefore ac=36$

코사인법칙에 의해

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos 30^\circ$

$=a^2+c^2-2ac\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=a^2+c^2-36\sqrt{3}$ ······ ㉠

㉠이 최소일 때에는 a^2+c^2이 최소일 때이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$a^2+c^2\ge 2\sqrt{a^2c^2}=2ac=2\cdot 36=72$ ······ ㉡

$\therefore b^2\ge 72-36\sqrt{3}$

㉡에서 등호는 $a^2=c^2$, 즉 $a=c$일 때 성립하므로

$ac=36$에서 $a=c=6$

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}=b$가 최소일 때

$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}=c+a=6+6=12$

정답_ ④

561

$x>0$, $y>0$, $x+y=8$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$, $\frac{8}{2}\ge\sqrt{xy}$

$\therefore xy\le 16$ (단, 등호는 $x=y=4$일 때 성립)

사각형 ABCD의 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}xy\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}xy\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}xy\le\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 16=4\sqrt{3}$

따라서 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $4\sqrt{3}$이다.

정답_ ②

III 수열

08 등차수열과 등비수열

562

(1) $a_1=1=2\times 0+1$

$a_2=3=2\times 1+1$

$a_3=5=2\times 2+1$

$a_4=7=2\times 3+1$

$\vdots$

$\therefore a_n=2(n-1)+1=2n-1$

(2) $a_1=5=5\times 1$

$a_2=10=5\times 2$

$a_3=20=5\times 2^2$

$a_4=40=5\times 2^3$

$\vdots$

$\therefore a_n=5\cdot 2^{n-1}$

정답_ (1) $a_n=2n-1$ (2) $a_n=5\cdot 2^{n-1}$

563

3^1의 일의 자리 숫자는 $a_1=3$

$3^2=9$에서 3^2의 일의 자리 숫자는 9이므로 $a_2=9$

$3^3=27$에서 3^3의 일의 자리 숫자는 7이므로 $a_3=7$

$3^4=81$에서 3^4의 일의 자리 숫자는 1이므로 $a_4=1$

$3^5=243$에서 3^5의 일의 자리 숫자는 3이므로 $a_5=3$

$\vdots$

수열 $\{a_n\}$은 3, 9, 7, 1이 차례로 반복된다.

이때, $2018=4\times 504+2$이므로

$a_{2018}=a_2=9$

정답_ ⑤

564

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$

(1) $a=3$, $d=8-3=5$이므로

$a_n=3+(n-1)\cdot 5=5n-2$

(2) $a=-2$, $d=-5-(-2)=-3$이므로

$a_n=-2+(n-1)\cdot(-3)=-3n+1$

정답_ (1) $a_n=5n-2$ (2) $a_n=-3n+1$

565

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$

$a_3=8$에서 $a+2d=8$ ······ ㉠

$a_7=20$에서 $a+6d=20$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2, d=3$

$\therefore a_{11}=a+10d=2+10\cdot3=32$ 정답_ ②

566

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$

(i) $a_1+a_3=6$에서 $a+(a+2d)=6$

$\therefore a+d=3$ ······ ㉠

(ii) $a_3+a_5=26$에서 $(a+2d)+(a+4d)=26$

$\therefore a+3d=13$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2, d=5$

$\therefore a_{10}=a+9d=-2+9\cdot5=43$ 정답_ ⑤

567

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$

(가)에서 제3항과 제5항의 비가 1 : 4이므로 $a_3 : a_5=1 : 4$

$a_5=4a_3,\ a+4d=4(a+2d)$ $\therefore 3a+4d=0$ ······ ㉠

(나)에서 제2항과 제4항의 합이 4이므로 $a_2+a_4=4$

$(a+d)+(a+3d)=4$ $\therefore a+2d=2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4,\ d=3$

$\therefore a_6=a+5d=-4+5\cdot3=11$ 정답_ ③

568

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$

제5항이 31이므로 $a+4d=31$ ······ ㉠

제9항이 15이므로 $a+8d=15$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=47,\ d=-4$

$\therefore a_n=47+(n-1)\cdot(-4)=-4n+51$

$a_n<0$에서 $-4n+51<0$ $\therefore n>12.75$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제13항이다. 정답_ ①

569

등차수열 $9,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ 24$의 첫째항이 9, 제6항이 24이므로 공차를 d라고 하면

$9+5d=24$ $\therefore d=3$ 정답_ ③

570

n개의 수를 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$이라고 하면

등차수열 $4,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ 34$는 첫째항이 4, 제$(n+2)$항이 34이고 공차가 2이므로

$4+\{(n+2)-1\}\cdot2=34$ $\therefore n=14$ 정답_ ④

571

두 등차수열 $\{a_n\},\ \{b_n\}$의 공차가 각각 -2, 3이므로

$a_2-a_1=-2,\ b_2-b_1=3$

따라서 등차수열 $\{3a_n+5b_n\}$의 공차는

$(3a_2+5b_2)-(3a_1+5b_1)=3(a_2-a_1)+5(b_2-b_1)$

$=3\cdot(-2)+5\cdot3=9$ 정답_ ④

572

두 수열 $\{b_n\},\ \{c_n\}$의 공차가 각각 $d_2,\ d_3$이므로

$d_2=(a_3+a_4)-(a_1+a_2)$

$=\{(a_1+2d_1)+(a_1+3d_1)\}-\{a_1+(a_1+d_1)\}$

$=(2a_1+5d_1)-(2a_1+d_1)=4d_1$

$\therefore d_1=\dfrac{d_2}{4}$ ······ ㉠

$d_3=(a_4+a_5+a_6)-(a_1+a_2+a_3)$

$=\{(a_1+3d_1)+(a_1+4d_1)+(a_1+5d_1)\}$

$-\{a_1+(a_1+d_1)+(a_1+2d_1)\}$

$=(3a_1+12d_1)-(3a_1+3d_1)=9d_1$

$\therefore d_1=\dfrac{d_3}{9}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{d_2}{4}=\dfrac{d_3}{9}$이므로 $9d_2=4d_3$ 정답_ ⑤

573

첫째항이 3, 공차가 d이므로 $a_n=3+(n-1)d$

$a_n=3d$에서 $3+(n-1)d=3d$

$\therefore (n-4)d=-3$

이때, $n,\ d$가 자연수이므로 d는 3의 양의 약수이어야 한다.

따라서 $d=1$ 또는 $d=3$이므로 구하는 d의 값의 합은

$1+3=4$ 정답_ ②

574

$x-1,\ x^2-2x,\ x-3$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(x^2-2x)=(x-1)+(x-3),\ 2x^2-4x=2x-4$

$2x^2-6x+4=0,\ x^2-3x+2=0,\ (x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$ 정답_ $x=1$ 또는 $x=2$

575

$6,\ a,\ b$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a=6+b$ $\therefore b=2a-6$ ······ ㉠

$a^2,\ 10,\ b^2$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$20=a^2+b^2$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $a^2+(2a-6)^2=20$

$5a^2-24a+16=0 \quad \therefore (5a-4)(a-4)=0$

이때, a는 자연수이므로 $\quad a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=2$

$\therefore ab=4\cdot 2=8$

정답_ ④

576

오른쪽 표와 같이 빈칸에 써넣을 6개의 수를 각각 a, b, c, d, e, f라고 하자.

3	a	7
b	c	d
e	11	f

3, a, 7이 등차수열을 이루므로 $\quad a=5$

$a=5$, c, 11이 등차수열을 이루므로 $\quad c=8$

3, $c=8$, f가 등차수열을 이루므로 $\quad f=13$

7, $c=8$, e가 등차수열을 이루므로 $\quad e=9$

3, b, $e=9$가 등차수열을 이루므로 $\quad b=6$

7, d, $f=13$이 등차수열을 이루므로 $\quad d=10$

$\therefore a+b+c+d+e+f=5+6+8+10+9+13=51$

정답_ ③

577

원의 접선의 기울기를 m이라고 하면 점 $(2, 0)$을 지나므로

접선의 방정식은 $\quad y=m(x-2)$

$\therefore mx-y-2m=0$

이때, 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $mx-y-2m=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{2}$와 같으므로

$$\frac{|0-0-2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2},\ |2m|=\sqrt{2m^2+2}$$

양변을 제곱하면 $\quad 4m^2=2m^2+2,\ m^2=1$

$\therefore m=\pm 1$

따라서 직선 AP의 방정식은 $y=-x+2$이므로 $A(0, 2)$이고, 직선 BP의 방정식은 $y=x-2$이므로 $B(0, -2)$이다.

한편, 직선 $y=-x+2$와 직선 $y=kx$의 교점을 $Q(a, b)$라고 하면 $-a+2=ka$에서 $(k+1)a=2$이므로

$$a=\frac{2}{k+1},\ b=\frac{2k}{k+1} \qquad \therefore Q\left(\frac{2}{k+1}, \frac{2k}{k+1}\right)$$

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{2}{k+1}=\frac{2}{k+1}$$

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{2k}{k+1}=\frac{2k}{k+1}$$

$$S_3=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$$

S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2S_2=S_1+S_3$

$$2\cdot\frac{2k}{k+1}=\frac{2}{k+1}+2,\ \frac{4k}{k+1}=\frac{2k+4}{k+1}$$

$4k=2k+4,\ k=2$

$\therefore 100k=200$

정답_ 200

578

삼차방정식 $x^3+3x^2-6x-k=0$의 세 근을 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 근과 계수의 관계에 의해

$(a-d)+a+(a+d)=-3 \qquad \therefore a=-1$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 -1이므로 $x=-1$을 대입하면

$-1+3+6-k=0 \qquad \therefore k=8$

정답_ ④

579

직각삼각형의 세 변의 길이를 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면

(i) 빗변의 길이가 15이므로 $\quad a+d=15 \quad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) 피타고라스 정리에 의해

$(a-d)^2+a^2=(a+d)^2 \qquad \therefore a^2=4ad$

이때, $a>0$이므로 $\quad a=4d \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=12,\ d=3$

따라서 세 변의 길이는 9, 12, 15이므로 직각삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 12=54$

정답_ ①

580

네 사람에게 나누어 준 사탕의 개수를 각각

$a-3d,\ a-d,\ a+d,\ a+3d$

로 놓으면

(i) 가장 적게 받는 사람의 사탕의 개수가 가장 많이 받는 사람의 사탕의 개수의 $\frac{5}{11}$이므로

$$a-3d=\frac{5}{11}(a+3d) \qquad \therefore a=8d \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) 나누어 준 사탕은 총 96개이므로

$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=96$

$\therefore a=24 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad 24=8d \qquad \therefore d=3$

따라서 사탕을 가장 많이 받는 사람의 사탕의 개수는

$a+3d=24+3\cdot 3=33$

정답_ ⑤

참고

네 사람에게 나누어 준 사탕의 개수를 각각

$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d$

로 놓고 풀어도 된다.

581

다섯 사람에게 나누어 주는 빵의 수를 각각

$a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d$

로 놓으면

(ⅰ) 나누어 줄 빵이 총 120개이므로

$(a-2d)+(a-d)+a+(a+d)+(a+2d)=120$

$5a=120 \quad \therefore a=24$ …… ㉠

(ⅱ) 가장 적게 배당받는 사람과 그 다음으로 적게 배당받는 사람의 몫의 합이 나머지 세 사람의 몫의 합의 $\frac{1}{7}$이므로

$(a-2d)+(a-d)=\frac{1}{7}\{a+(a+d)+(a+2d)\}$

$14a-21d=3a+3d$

$\therefore 11a=24d$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $11\cdot24=24d \quad \therefore d=11$

따라서 가장 많이 배당받는 사람의 몫은

$a+2d=24+2\cdot11=46$

정답_ ②

582

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하자.

(1) $S_7=\frac{7(5+35)}{2}=140$

(2) $S_9=\frac{9\{2\cdot(-16)+(9-1)\cdot5\}}{2}=36$

정답_ (1) 140 (2) 36

583

(1) 첫째항이 2, 공차가 $5-2=3$이므로 29를 제n항이라고 하면

$2+(n-1)\cdot3=29, \ 3n-1=29 \quad \therefore n=10$

따라서 항수가 10이므로 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\frac{10(2+29)}{2}=155$

(2) 첫째항이 -19, 공차가 $-17-(-19)=2$이므로 1을 제n항이라고 하면

$-19+(n-1)\cdot2=1, \ 2n-21=1 \quad \therefore n=11$

따라서 항수가 11이므로 첫째항부터 제11항까지의 합은

$\frac{11(-19+1)}{2}=-99$

정답_ (1) 155 (2) -99

584

첫째항이 -5, 공차가 $-1-(-5)=4$인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이 72이므로

$\frac{n\{2\cdot(-5)+(n-1)\cdot4\}}{2}=72$

$2n^2-7n-72=0 \quad \therefore (n-8)(2n+9)=0$

이때, n은 자연수이므로 $n=8$

정답_ ②

585

등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d, d'이라고 하면

$a_1+b_1=-10, \ d+d'=4$

$\therefore (a_1+a_2+\cdots+a_{10})+(b_1+b_2+\cdots+b_{10})$

$=\frac{10(2a_1+9d)}{2}+\frac{10(2b_1+9d')}{2}$

$=\frac{10\{2(a_1+b_1)+9(d+d')\}}{2}$

$=\frac{10\{2\cdot(-10)+9\cdot4\}}{2}=80$

정답_ ③

참고

$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_{10}+b_{10})$으로 놓고, 첫째항이 10, 공차가 4인 등차수열의 합을 생각하여 풀 수도 있다.

586

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

(ⅰ) $S_5=20$에서 $\frac{5(2a+4d)}{2}=20$

$\therefore a+2d=4$ …… ㉠

(ⅱ) $S_{10}=90$에서 $\frac{10(2a+9d)}{2}=90$

$\therefore 2a+9d=18$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0, d=2$

$\therefore S_{20}=\frac{20(2\cdot0+19\cdot2)}{2}=380$

정답_ ④

587

주어진 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

(ⅰ) 첫째항부터 제10항까지의 합이 140이므로

$\frac{10(2a+9d)}{2}=140$

$\therefore 2a+9d=28$ …… ㉠

(ⅱ) 제11항부터 제20항까지의 합이 340이므로

$S_{20}-S_{10}=\frac{20(2a+19d)}{2}-140=340$

$\therefore 2a+19d=48$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5, \ d=2$

따라서 제21항부터 제30항까지의 합은

$S_{30}-S_{20}=\frac{30(2\cdot5+29\cdot2)}{2}-(140+340)$

$=540$

정답_ ④

다른 풀이

첫째항부터 제10항까지의 합을 A라고 하면

$A=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+9d)$
제11항부터 제20항까지의 합을 B라고 하면
$B=(a+10d)+(a+11d)+\cdots+(a+19d)$
제21항부터 제30항까지의 합을 C라고 하면
$C=(a+20d)+(a+21d)+\cdots+(a+29d)$
이때, A, B, C는 $10\times10d$를 공차로 하는 등차수열을 이루므로
$2B=A+C$에서 $2\cdot340=140+C$
$\therefore C=540$

588

첫째항이 31, 공차가 $27-31=-4$이므로 주어진 등차수열을 $\{a_n\}$이라고 하면
$a_n=31+(n-1)\cdot(-4)=-4n+35$
$a_n<0$에서 $-4n+35<0$ $\quad\therefore n>\frac{35}{4}=8.75$
따라서 제9항부터는 음수이므로 첫째항부터 제8항까지의 합이 최대가 된다.
$\therefore a=8$
이때, 구하는 최댓값은 첫째항부터 제8항까지의 합이므로
$b=\frac{8\{2\cdot31+7\cdot(-4)\}}{2}=136$
$\therefore \frac{b}{a}=\frac{136}{8}=17$

정답_ 17

589

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$에서
(i) 제11항이 -10이므로 $a+10d=-10$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
(ii) 첫째항부터 제10항까지의 합이 65이므로
$\frac{10(2a+9d)}{2}=65$ $\quad\therefore 2a+9d=13$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=20,\ d=-3$
즉, 첫째항이 20, 공차가 -3이므로 주어진 등차수열을 $\{a_n\}$이라 고 하면 $a_n=20+(n-1)\cdot(-3)=-3n+23$
$a_n<0$에서 $-3n+23<0$ $\quad\therefore n>7.66\cdots$
따라서 제8항부터는 음수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최대이다.

정답_ ③

590

100 이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 수를 차례로 나열하면
$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ \cdots,\ 95,\ 98$
이때, $2=3\times0+2,\ 98=3\times32+2$이므로 항수는 33이다.
따라서 구하는 값은 첫째항이 2, 끝항이 98, 항수가 33인 등차수열의 합이므로 $\frac{33(2+98)}{2}=1650$

정답_ ③

591

50과 100 사이의 자연수 중에서 3으로 나누어떨어지는 수를 차례로 나열하면
$51,\ 54,\ 57,\ \cdots,\ 99$
이때, $51=3\times17,\ 99=3\times33$이므로 항수는 $33-16=17$이다.
따라서 그 합은 첫째항이 51, 끝항이 99, 항수가 17인 등차수열의 합이므로 $\frac{17(51+99)}{2}=1275$
50과 100 사이의 자연수 중에서 7로 나누어떨어지는 수를 차례로 나열하면
$56,\ 63,\ 70,\ \cdots,\ 98$
이때, $56=7\times8,\ 98=7\times14$이므로 항수는 $14-7=7$이다.
따라서 그 합은 첫째항이 56, 끝항이 98, 항수가 7인 등차수열의 합이므로 $\frac{7(56+98)}{2}=539$
50과 100 사이의 자연수 중에서 21로 나누어떨어지는 수는 63, 84이므로 그 합은 $63+84=147$
따라서 구하는 합은
(3의 배수의 합)+(7의 배수의 합)−(21의 배수의 합)
$=1275+539-147=1667$

정답_ 1667

592

수열 $1,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ 2$가 합이 24인 등차수열을 이룬다고 하면 첫째항이 1, 끝항이 2, 항수가 $n+2$이므로
$\frac{(n+2)(1+2)}{2}=24$ $\quad\therefore n=14$

정답_ ④

593

등차수열 $-3,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ 11$에서 첫째항은 -3, 끝항은 11, 항수는 $n+2$이고, 이 수열의 모든 항의 합이 32이므로
$\frac{(n+2)(-3+11)}{2}=32$ $\quad\therefore n=6$
즉, 등차수열 $-3,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_6,\ 11$에서 제8항이 11이므로
$-3+7d=11$ $\quad\therefore d=2$

정답_ ④

594

선미가 매일 푸는 문제 수는 전날보다 d만큼씩 증가하므로 공차가 d인 등차수열을 이룬다.
(i) 첫째 날에 15문제를 푸는 경우, 아홉째 날까지 문제를 풀고 나면 24문제가 남으므로
$x=15+(15+d)+(15+2d)+\cdots+(15+8d)+24$
$=\frac{9(2\cdot15+8d)}{2}+24=36d+159$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(ii) 첫째 날에 30문제를 푸는 경우, 일곱째 날까지 문제를 풀고 나면 39문제가 남으므로

$x=30+(30+d)+(30+2d)+\cdots+(30+6d)+39$

$=\dfrac{7(2\cdot30+6d)}{2}+39$

$=21d+249$ ······ ㉡

㉠=㉡에서 $36d+159=21d+249$ $\therefore d=6$

$\therefore x=36d+159=36\cdot6+159=375$ 정답_ ③

595

탑의 각 층의 벽돌의 개수는 한 층씩 위로 올라갈수록 일정한 개수만큼 줄어들므로 등차수열을 이룬다.

n층의 벽돌의 개수를 a_n, 공차를 d라고 하면

(i) 15층의 벽돌의 개수가 9이므로

$a_{15}=a_1+14d=9$ ······ ㉠

(ii) 탑 전체 벽돌의 개수는 3층 벽돌의 개수의 10배이므로

$\dfrac{15(2a_1+14d)}{2}=10(a_1+2d)$

$3(a_1+7d)=2(a_1+2d)$

$\therefore a_1+17d=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a_1=51, d=-3$

따라서 탑 전체 벽돌의 개수는

$\dfrac{15(2a_1+14d)}{2}=\dfrac{15\{2\cdot51+14\cdot(-3)\}}{2}=450$ 정답_ ⑤

596

(1) 첫째항이 3, 공비가 $\dfrac{9}{3}=3$이므로

$a_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$

(2) 첫째항이 16, 공비가 $\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}$이므로

$a_n=16\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-5}$

정답_ (1) $a_n=3^n$ (2) $a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-5}$

597

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면 $a_n=ar^{n-1}$

$a_2+a_3=6$에서 $ar+ar^2=6$

$a=1$이므로 $r+r^2=6$, $r^2+r-6=0$

$(r+3)(r-2)=0$ $\therefore r=-3$ 또는 $r=2$

모든 항이 양수이므로 $r>0$ $\therefore r=2$

$\therefore a_6=ar^5=2^5=32$ 정답_ ③

598

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면 $a_n=ar^{n-1}$

제4항이 6이므로 $ar^3=6$ ······ ㉠

제7항이 12이므로 $ar^6=12$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\dfrac{ar^6}{ar^3}=\dfrac{12}{6}$ $\therefore r^3=2$

$r^3=2$를 ㉠에 대입하면 $a=3$

$\therefore a_{10}=ar^9=a\cdot(r^3)^3=3\cdot2^3=24$ 정답_ ④

599

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면 $a_n=ar^{n-1}$

제2항이 6이므로 $ar=6$ ······ ㉠

제5항이 48이므로 $ar^4=48$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\dfrac{ar^4}{ar}=\dfrac{48}{6}$ $\therefore r^3=8$

이때, r는 실수이므로 $r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $a=3$

$\therefore a_n=3\cdot2^{n-1}$

1536이 제n항이라고 하면 $3\cdot2^{n-1}=1536$

$2^{n-1}=512=2^9$, $n-1=9$ $\therefore n=10$ 정답_ ④

600

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면 $a_n=ar^{n-1}$

$a_1+a_2=\dfrac{5}{8}$에서 $a+ar=\dfrac{5}{8}$ ······ ㉠

$a_1a_2a_3=\dfrac{1}{8}$에서 $a\cdot ar\cdot ar^2=\dfrac{1}{8}$ $\therefore (ar)^3=\dfrac{1}{8}$

이때, $ar=a_2$로 실수이므로 $ar=\dfrac{1}{2}$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{8}$ $\therefore a=\dfrac{1}{8}$

$a=\dfrac{1}{8}$을 ㉡에 대입하면 $r=4$

$\therefore a_n=\dfrac{1}{8}\cdot4^{n-1}$

2^7을 제n항이라고 하면 $\dfrac{1}{8}\cdot4^{n-1}=2^7$, $4^{n-1}=2^{10}$

$4^{n-1}=(2^2)^5$, $n-1=5$ $\therefore n=6$ 정답_ ②

601

조건 (나)에서 $a_{n+1}=3a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다.

조건 (가)에서 $a_1=a_2+4$이므로

$a_1=a_1\cdot3+4$, $2a_1=-4$

$\therefore a_1=-2$

$\therefore a_5=(-2)\cdot3^4=-162$ 정답_ ④

602

공비를 $r(r>0)$라고 하면 첫째항이 3, 제5항이 768이므로

$3r^4=768$, $r^4=256$ $\therefore r=4$ ($\because r>0$)

따라서 $a_1=12$, $a_2=48$, $a_3=192$이므로

$a_1+a_2+a_3=12+48+192=252$ 정답_ ③

603

한 변의 길이가 3인 정사각형의 넓이는 $3\times3=9$이고, 한 번 시행할 때마다 $\frac{1}{9}$만큼을 제거하므로 $\frac{8}{9}$만큼이 남는다.

1회 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는 $9\cdot\frac{8}{9}$

2회 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는 $9\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2$

⋮

n회 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는 $9\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^n$

따라서 20회 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$9\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{20}=\frac{8^{20}}{9^{19}}=\frac{2^{60}}{3^{38}}$ 정답_ ④

604

$x-2$, x, 9가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$x^2=9(x-2)$, $x^2-9x+18=0$

$(x-3)(x-6)=0$ $\therefore x=3$ 또는 $x=6$

정답_ $x=3$ 또는 $x=6$

605

이차방정식 $x^2-kx+125=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=k$, $\alpha\beta=125$ ······ ㉠

α, $\beta-\alpha$, β가 등비수열을 이루므로

$(\beta-\alpha)^2=\alpha\beta$ ······ ㉡

$(\beta-\alpha)^2=\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로 ㉡에서

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\alpha\beta$ $\therefore (\alpha+\beta)^2=5\alpha\beta$

위의 식에 ㉠을 대입하면 $k^2=5\cdot125$

$k^2=625$ $\therefore k=25$ ($\because k>0$) 정답_ ③

606

등비수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a이고 공비가 $\frac{1}{2}$이므로

$a_3=a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{a}{4}$, $a_7=a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{a}{64}$

a_3, 2, a_7이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$2^2=a_3\cdot a_7$, $4=\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{64}$

$a^2=16\cdot64=32^2$

$\therefore a=32$ 또는 $a=-32$

그런데 $a>0$이므로 $a=32$ 정답_ ⑤

607

a, 0, b가 등차수열을 이루므로 $2\cdot0=a+b$

$a+b=0$ $\therefore b=-a$ ······ ㉠

$2b$, a, -7이 등비수열을 이루므로 $a^2=2b\cdot(-7)$

$\therefore a^2=-14b$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $a^2=-14\cdot(-a)$

$a^2=14a$, $a(a-14)=0$ $\therefore a=0$ 또는 $a=14$

그런데 $a=0$이면 $b=0$이 되어 0, 0, -7이 등비수열을 이루지 않으므로

$a=14$ 정답_ ③

608

세 수를 a, ar, ar^2으로 놓으면

(i) 세 수의 합이 $\frac{7}{2}$이므로

$a+ar+ar^2=\frac{7}{2}$

$\therefore a(1+r+r^2)=\frac{7}{2}$ ······ ㉠

(ii) 세 수의 곱이 1이므로

$a\cdot ar\cdot ar^2=1$ $\therefore (ar)^3=1$

이때, ar는 실수이므로 $ar=1$ ······ ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{a(1+r+r^2)}{ar}=\frac{7}{2}$

$2r^2-5r+2=0$, $(r-2)(2r-1)=0$

$\therefore r=2$ 또는 $r=\frac{1}{2}$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=2$

따라서 세 수는 $\frac{1}{2}$, 1, 2이므로 세 수의 제곱의 합은

$\frac{1}{4}+1+4=\frac{21}{4}$ 정답_ ⑤

609

삼차방정식 $x^3+4x^2-8x+k=0$의 세 근을 a, ar, ar^2으로 놓으면 근과 계수의 관계에 의해

(i) $a+ar+ar^2=-4$

$\therefore a(1+r+r^2)=-4$ ······ ㉠

(ii) $a\cdot ar+ar\cdot ar^2+ar^2\cdot a=-8$

$\therefore a^2r(1+r+r^2)=-8$ ······ ㉡

(iii) $a\cdot ar\cdot ar^2=-k$

$\therefore k=-(ar)^3$ ...... ㉢

㉡÷㉠을 하면 $\dfrac{a^2r(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)}=\dfrac{-8}{-4}$

$\therefore ar=2$ ...... ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면 $k=-2^3=-8$ 정답_ ①

610

(1) 첫째항부터 제7항까지의 합은

$\dfrac{3(2^7-1)}{2-1}=3(2^7-1)=381$

(2) 첫째항부터 제6항까지의 합은

$\dfrac{4\{1-(-3)^6\}}{1-(-3)}=1-(-3)^6=-728$

정답_ (1) 381 (2) -728

611

(1) 첫째항이 2, 공비가 $\dfrac{4}{2}=2$이므로 256을 제n항이라고 하면

$2\cdot 2^{n-1}=2^n$에서

$2^n=256,\ 2^n=2^8 \qquad \therefore n=8$

따라서 항수가 8이므로 첫째항부터 제8항까지의 합은

$\dfrac{2(2^8-1)}{2-1}=510$

(2) 첫째항이 1, 공비가 $\dfrac{1}{3}$이므로 $\dfrac{1}{243}$을 제n항이라고 하면

$1\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$에서

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{243},\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^5 \qquad \therefore n=6$

따라서 항수가 6이므로 첫째항부터 제6항까지의 합은

$\dfrac{1\cdot\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^6\right\}}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{364}{243}$ 정답_ (1) 510 (2) $\dfrac{364}{243}$

612

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면 $a_n=ar^{n-1}$

$a_1+a_2+a_4=55$에서 $a+ar+ar^3=55$

$r=2$이므로 $a+2a+8a=55,\ 11a=55$

$\therefore a=5$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 5, 공비가 2이므로 첫째항부터 제5항까지의 합은 $\dfrac{5(2^5-1)}{2-1}=155$ 정답_ ⑤

613

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$S_2=\dfrac{a(r^2-1)}{r-1}=\dfrac{a(r+1)(r-1)}{r-1}=a(r+1)$

$S_4=\dfrac{a(r^4-1)}{r-1}=\dfrac{a(r+1)(r-1)(r^2+1)}{r-1}$

$=a(r+1)(r^2+1)$

$\dfrac{S_4}{S_2}=10$이므로 $\dfrac{a(r+1)(r^2+1)}{a(r+1)}=10$

$r^2+1=10,\ r^2=9 \qquad \therefore r=\pm 3$

모든 항이 양수이므로 $r=3$

$\therefore \dfrac{a_6}{a_4}=\dfrac{ar^5}{ar^3}=r^2=9$ 정답_ ⑤

614

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

(i) $S_3=8$이므로

$S_3=\dfrac{a(r^3-1)}{r-1}=8$ ...... ㉠

(ii) $S_6=72$이므로

$S_6=\dfrac{a(r^6-1)}{r-1}$

$=\dfrac{a(r^3+1)(r^3-1)}{r-1}=72$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $r^3+1=9 \qquad \therefore r^3=8$

r는 실수이므로 $r=2$

$\therefore S_9=\dfrac{a(r^9-1)}{r-1}$

$=\dfrac{a(r^3-1)(r^6+r^3+1)}{r-1}$

$=8(2^6+2^3+1)=584$ 정답_ ②

615

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면 $a_8=ar^7$

$S_{10}=\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1},\ S_8=\dfrac{a(r^8-1)}{r-1}$

$\dfrac{a_8}{S_{10}-S_8}=\dfrac{ar^7}{\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}-\dfrac{a(r^8-1)}{r-1}}$

$=\dfrac{r^7(r-1)}{r^{10}-r^8}=\dfrac{r-1}{r^3-r}=\dfrac{1}{r(r+1)}$

이므로 $\dfrac{1}{r(r+1)}=\dfrac{4}{3}$

$4r^2+4r-3=0,\ (2r+3)(2r-1)=0$

이때, r는 1이 아닌 양수이므로 $r=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a_2=10\cdot\dfrac{1}{2}=5$ 정답_ ③

616

$800=2^5\times 5^2$이므로

$x=(5+1)(2+1)=18$

$y=(1+2+2^2+\cdots+2^5)(1+5+5^2)$

$=\dfrac{1\cdot(2^6-1)}{2-1}\times 31=1953$

$\therefore\ x+y=18+1953=1971$ 정답_ ③

617

$15^{100}=(3\times5)^{100}=3^{100}\times5^{100}$이므로 15^{100}의 양의 약수의 총합은

$(1+3+3^2+\cdots+3^{100})(1+5+5^2+\cdots+5^{100})$

$=\dfrac{1\cdot(3^{101}-1)}{3-1}\times\dfrac{1\cdot(5^{101}-1)}{5-1}$

$=\dfrac{3\cdot3^{100}-1}{2}\times\dfrac{5\cdot5^{100}-1}{4}$

$=\dfrac{(3A-1)(5B-1)}{8}$ 정답_ ④

618

이동 거리를 전날의 10 %씩 줄여서 여행하므로

첫째 날 이동 거리는 10 km

둘째 날 이동 거리는 10×0.9 (km)

셋째 날 이동 거리는 10×0.9^2 (km)

⋮

30째 날 이동 거리는 10×0.9^{29} (km)

따라서 30일 동안 이동할 거리는

$10+10\times0.9+10\times0.9^2+\cdots+10\times0.9^{29}$

$=\dfrac{10(1-0.9^{30})}{1-0.9}=\dfrac{10(1-0.04)}{0.1}$

$=96$ (km) 정답_ ④

619

첫째 해의 연봉은 a원

2년째 해의 연봉은 $a\times1.08$원

3년째 해의 연봉은 $a\times1.08^2$원

⋮

19년째 해의 연봉은 $a\times1.08^{18}$원

따라서 입사 19년째 해까지의 연봉의 합은

$a+a\times1.08+a\times1.08^2+\cdots+a\times1.08^{18}$

$=\dfrac{a(1.08^{19}-1)}{1.08-1}$

$=\dfrac{a(4\times1.08-1)}{0.08}$

$=\dfrac{a(4.32-1)}{0.08}$

$=\dfrac{83}{2}a$(원) ⋯⋯ ㉠

20년째 해의 연봉은 $\dfrac{2}{3}a\times1.08^{18}$(원)이므로 20년째 해부터 28년째 해까지 9년 동안의 연봉의 합은

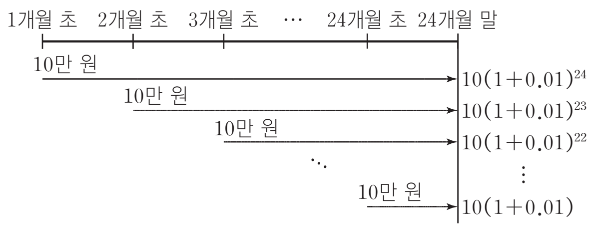
$\dfrac{2}{3}a\times1.08^{18}\times9=\dfrac{8}{3}a\times9=24a$(원) ⋯⋯ ㉡

따라서 구하는 연봉의 총합은 ㉠과 ㉡의 합이므로

$\dfrac{83}{2}a+24a=\dfrac{131}{2}a$ 정답_ ④

620

한 달마다 복리로 계산하므로 한 달 단위로 생각해야 한다. 2년은 24개월이므로 24개월 후의 적립금의 원리합계를 S라고 하면



$S=10\times1.01+10\times1.01^2+10\times1.01^3+\cdots+10\times1.01^{24}$

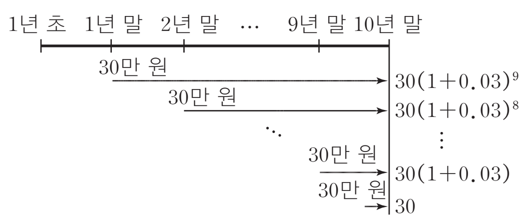
$=\dfrac{10\times1.01(1.01^{24}-1)}{1.01-1}$

$=1010(1.01^{24}-1)$

$=1010(1.3-1)=303$(만 원) 정답_ ③

621

10년 후의 적립금의 원리합계를 S라고 하면



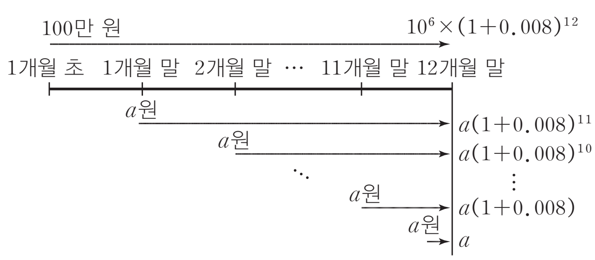
$S=30+30\times1.03+30\times1.03^2+\cdots+30\times1.03^9$

$=\dfrac{30(1.03^{10}-1)}{1.03-1}$

$=1000(1.03^{10}-1)$

$=1000(1.3-1)=300$(만 원) 정답_ ②

622



100만 원의 12개월 후의 원리합계는

$10^6\times1.008^{12}=1.1\times10^6$(원) ⋯⋯ ㉠

매월 말에 a원씩 상환한다고 하면 12개월 말까지 상환할 금액의 원리합계는

$a+a\times1.008+a\times1.008^2+\cdots+a\times1.008^{11}$

$=\dfrac{a(1.008^{12}-1)}{1.008-1}=\dfrac{a(1.1-1)}{0.008}$

$=\dfrac{25}{2}a$(원) ······ ㉡

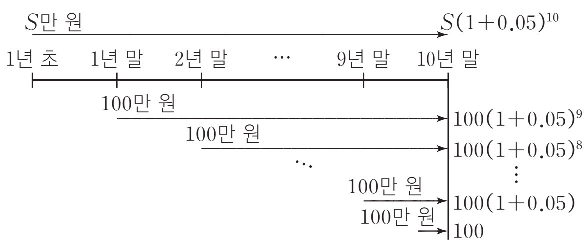
㉠=㉡이어야 하므로 $\dfrac{25}{2}a=1.1\times10^6$

$\therefore a=1.1\times10^6\times\dfrac{2}{25}=88000$(원)

따라서 매달 88000원씩 상환해야 한다. 정답_ ③

623

올해 초에 한꺼번에 받는 금액을 S만 원이라고 하면 S만 원의 10년 후의 원리합계와 매년 말에 100만 원씩 10년 동안 받는 금액의 원리합계가 같아야 한다.



S만 원의 10년 후의 원리합계는

$S\times1.05^{10}=1.6S$(만 원) ······ ㉠

매년 말에 100만 원씩 10년 동안 받는 금액의 원리합계는

$100+100\times1.05+100\times1.05^2+\cdots+100\times1.05^9$

$=\dfrac{100(1.05^{10}-1)}{1.05-1}=\dfrac{100(1.6-1)}{0.05}$

$=1200$(만 원) ······ ㉡

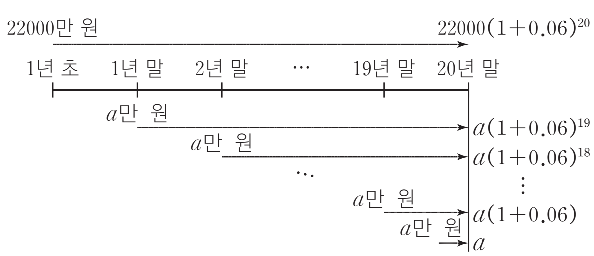
㉠=㉡이어야 하므로

$1.6S=1200$

$\therefore S=750$(만 원) 정답_ ②

624

김부장이 매년 말에 받을 금액을 a만 원이라고 하면 2억 2천만 원의 20년 후의 원리합계와 매년 말에 a만 원씩 20년간 받는 금액의 원리합계가 같아야 한다.



2억 2천만 원의 20년 후의 원리합계는

$22000\times1.06^{20}=22000\times3.2$(만 원) ······ ㉠

매년 말에 a만 원씩 20년간 받는 금액의 원리합계는

$a+a\times1.06+a\times1.06^2+\cdots+a\times1.06^{19}$

$=\dfrac{a(1.06^{20}-1)}{1.06-1}=\dfrac{a(3.2-1)}{0.06}$

$=\dfrac{2.2}{0.06}a$(만 원) ······ ㉡

㉠=㉡이어야 하므로 $\dfrac{2.2}{0.06}a=22000\times3.2$

$\therefore a=22000\times3.2\times\dfrac{0.06}{2.2}=1920$(만 원) 정답_ ②

625

적립액은 매년 5 %의 비율로 증가한다.

2014년 초 적립액은 200만 원

2015년 초 적립액은 $200(1+0.05)$(만 원)

2016년 초 적립액은 $200(1+0.05)^2$(만 원)

⋮

적립액에 대하여 매년 5 %의 이자를 받는다.

2014년 초 적립액은 20년 동안 이자를 받으므로 원리합계는

$200\times(1+0.05)^{20}=200\times1.05^{20}$(만 원)

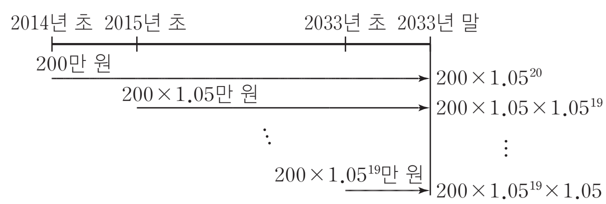
2015년 초 적립액은 19년 동안 이자를 받으므로 원리합계는

$200(1+0.05)\times(1+0.05)^{19}=200\times1.05^{20}$(만 원)

2016년 초 적립액은 18년 동안 이자를 받으므로 원리합계는

$200(1+0.05)^2\times(1+0.05)^{18}=200\times1.05^{20}$(만 원)

⋮



적립액이 증가한 만큼 이자를 받는 기간이 줄어들므로 매년 초 적립액은 결국 모두 200×1.05^{20}(만 원)이 된다.

따라서 2033년 말까지 적립되는 금액의 원리합계는

$200\times1.05^{20}\times20=4000\times2.65=10600$(만 원) 정답_ ②

626

적립액은 매년 6 %의 비율로 증가한다.

2018년 초 적립액은 100억 원

2019년 초 적립액은 $100(1+0.06)$(억 원)

2020년 초 적립액은 $100(1+0.06)^2$(억 원)

⋮

적립액에 대하여 매년 6 %의 이자를 받는다.

2018년 초 적립액은 10년간 이자를 받으므로 원리합계는

$100\times(1+0.06)^{10}=100\times1.06^{10}$(억 원)

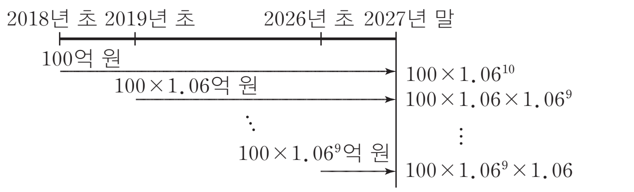
2019년 초 적립액은 9년간 이자를 받으므로 원리합계는

$100(1+0.06)\times(1+0.06)^{9}=100\times1.06^{10}$(억 원)

2020년 초 적립액은 8년간 이자를 받으므로 원리합계는

$100(1+0.06)^{2}\times(1+0.06)^{8}=100\times1.06^{10}$(억 원)

⋮



적립액이 증가한 만큼 이자를 받는 기간이 줄어드므로 매년 초 적립액은 모두 100×1.06^{10}(억 원)이 된다.

따라서 2027년 말까지 적립되는 금액의 원리합계는

$100\times1.06^{10}\times10=100\times1.8\times10=1800$(억 원) 정답_ ②

627

$S_n=n^2+2n$에서

$a_{10}=S_{10}-S_9$

$=(10^2+20)-(9^2+18)=21$ 정답_ 21

628

$S_n=3^n+3,\ S_{n-1}=3^{n-1}+3$이므로

$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^n+3)-(3^{n-1}+3)$

$=2\cdot3^{n-1}\ (n\ge2)$

$a_1=S_1$

$=3^1+3=6$

$a_2=2\cdot3^{2-1}=6$

$a_4=2\cdot3^{4-1}=54$

$\therefore \dfrac{a_2+a_4}{a_1}=\dfrac{6+54}{6}=10$ 정답_ ①

629

$S_n=2n^2-3n+k-3$에서

(i) $n\ge2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2n^2-3n+k-3)-\{2(n-1)^2-3(n-1)+k-3\}$

$=4n-5$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2-3+k-3=k-4$ …… ㉡

이때, 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등차수열을 이루려면 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 ㉡이 같아야 하므로

$-1=k-4 \quad \therefore k=3$ 정답_ ③

다른 풀이

수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등차수열을 이루려면 S_n의 상수항 $k-3$이 0이어야 하므로 $k=3$

참고

수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등차수열을 이루려면 $S_n=An^2+Bn+C$의 상수항이 0이어야 하는 이유는 등차수열의 합의 공식을 떠올리면 이해할 수 있다.

$S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=An^2+Bn$

630

$S_n=2^{n-1}+k$에서

(i) $n\ge2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n-1}+k)-(2^{n-2}+k)$

$=\dfrac{1}{4}\cdot2^n(2-1)=\dfrac{1}{4}\cdot2^n$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2^0+k=1+k$ …… ㉡

이때, 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 ㉡이 같아야 하므로

$\dfrac{1}{4}\cdot2=1+k \quad \therefore k=-\dfrac{1}{2}$ 정답_ ③

631

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 $a_n=a+(n-1)d$

제3항과 제8항은 절댓값이 같고 부호가 반대이므로

$a_3=-a_8,\ a+2d=-(a+7d)$

$\therefore 2a+9d=0$ …… ㉠

제5항이 -2이므로 $a_5=-2$

$\therefore a+4d=-2$ …… ㉡

…… ❶

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-18,\ d=4$ …… ❷

$\therefore a_n=-18+(n-1)\cdot4=4n-22$

246을 제n항이라고 하면 $4n-22=246$

$\therefore n=67$ …… ❸

정답_ 67

단계	채점 기준	비율
❶	첫째항 a, 공차 d에 대한 연립방정식 세우기	50%
❷	a, d의 값 구하기	20%
❸	246이 제 몇 항인지 구하기	30%

632

$f(x)=ax^2+x+1$을 일차식 $x+1$, $x-2$, $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 각각

$r_1=f(-1)=a,\ r_2=f(2)=4a+3,\ r_3=f(3)=9a+4$ …… ❶

r_2가 r_1과 r_3의 등차중항이므로 $2r_2=r_1+r_3$

$2(4a+3)=a+(9a+4)$ $\quad\therefore a=1$ ❷

정답_ 1

단계	채점 기준	비율
❶	r_1, r_2, r_3을 a에 대한 식으로 나타내기	50%
❷	a의 값 구하기	50%

633

첫째항을 a, 공차를 d라고 하면 $\quad a_n=a+(n-1)d$

$a_3=26$에서 $\quad a+2d=26$ …… ㉠

$a_9=8$에서 $\quad a+8d=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=32$, $d=-3$ ❶

$\therefore a_n=32+(n-1)\cdot(-3)=-3n+35$ ❷

$a_n<0$에서 $\quad -3n+35<0 \qquad \therefore n>11.66\cdots$

따라서 제12항부터는 음수이므로 첫째항부터 제11항까지의 합이 최대이다.

$\therefore n=11$ ❸

정답_ 11

단계	채점 기준	비율
❶	첫째항과 공차 구하기	40%
❷	a_n 구하기	20%
❸	n의 값 구하기	40%

634

첫째항이 50, 공차가 -3이므로

$a_n=50+(n-1)\cdot(-3)=-3n+53$

$a_n<0$에서 $\quad -3n+53<0 \qquad \therefore n>17.66\cdots$

따라서 제18항부터는 음수이다. ❶

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면 구하는 값은

$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{30}|$

$=a_1+a_2+\cdots+a_{17}-a_{18}-a_{19}-\cdots-a_{30}$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_{17})-(a_{18}+a_{19}+\cdots+a_{30})$

$=S_{17}-(S_{30}-S_{17})=2S_{17}-S_{30}$

$=2\cdot\dfrac{17\{2\cdot50+16\cdot(-3)\}}{2}-\dfrac{30\{2\cdot50+29\cdot(-3)\}}{2}$

$=689$ ❷

정답_ 689

단계	채점 기준	비율
❶	처음으로 음수가 되는 항 구하기	40%
❷	각 항의 절댓값의 합 구하기	60%

635

이차방정식 $x^2-mx+n=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=n$ ❶

α, 2, β는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$4=\alpha+\beta \qquad \therefore m=4$ ❷

α, 3, β는 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$9=\alpha\beta \qquad \therefore n=9$ ❸

$\therefore m+n=\mathbf{13}$ ❹

정답_ 13

단계	채점 기준	비율
❶	$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기	30%
❷	m의 값 구하기	30%
❸	n의 값 구하기	30%
❹	$m+n$의 값 구하기	10%

636

(가)에서 $f(0)=-3$이므로 $\quad c=-3$ ❶

(나)에서 $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$, $-\dfrac{1}{3}$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{3} \qquad \therefore 6a=3b-ab$ …… ㉠

(다)에서 a, -3, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$9=ab$ …… ㉡

❷

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad 6a=3b-9$

$\therefore b=2a+3$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $\quad 9=a(2a+3)$

$2a^2+3a-9=0$, $(a+3)(2a-3)=0$

$\therefore a=\dfrac{3}{2}$ $\quad(\because a>0)$

$a=\dfrac{3}{2}$을 ㉢에 대입하면 $\quad b=6$ ❸

따라서 $f(x)=\dfrac{3}{2}x^2+6x-3$이므로

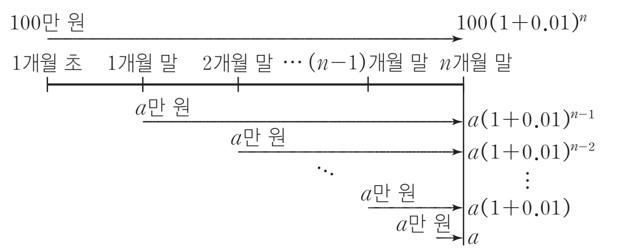
$f(2)=6+12-3=15$ ❹

정답_ 15

단계	채점 기준	비율
❶	c의 값 구하기	10%
❷	a, b에 대한 연립방정식 세우기	40%
❸	a, b의 값 구하기	40%
❹	$f(2)$의 값 구하기	10%

637

200만 원 중 100만 원은 일시불로 지불하였으므로 나머지 100만 원만 생각하면 된다.



100만 원의 n개월 후의 원리합계는

100×1.01^n(만 원) …… ㉠

❶

매월 말에 a만 원씩 갚아야 한다고 하면 n개월 말까지 갚아야 할 금액의 원리합계는

$a+a\times1.01+a\times1.01^2+\cdots+a\times1.01^{n-1}$

$=\dfrac{a(1.01^n-1)}{1.01-1}=100a(1.01^n-1)$(만 원) …… ㉡

❷

㉠=㉡이어야 하므로 $100a(1.01^n-1)=100\times1.01^n$

$\therefore a=\dfrac{1.01^n}{1.01^n-1}$(만 원) ❸

정답_ $\dfrac{1.01^n}{1.01^n-1}$만 원

단계	채점 기준	비율
❶	100만 원의 n개월 후의 원리합계 구하기	40%
❷	매월 말 a만 원씩 n개월 말까지 갚아야 할 금액의 원리합계 구하기	40%
❸	매월 말 갚아야 할 금액을 n에 대한 식으로 나타내기	20%

638

ㄱ은 옳지 않다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 d이므로

$a_2-a_1=a_4-a_3=d$

$\therefore T_4=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)=-d-d=-2d$

ㄴ은 옳다.

$a_3-a_2=a_5-a_4=d$이므로

$T_5=a_1+(-a_2+a_3)+(-a_4+a_5)=a_1+2d=a_3$

ㄷ도 옳다.

ㄱ과 같은 방법으로 생각하면

$T_2=-d,\ T_4=-2d,\ T_6=-3d,\ \cdots$

이므로 수열 $\{T_{2n}\}$은 공차가 $-d$인 등차수열이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

639

접선 l과 선분 AB가 이루는 예각의 크기가 18°이고, $l\perp\overline{\mathrm{OA}}$이므로 $\angle\mathrm{OAB}=\angle\mathrm{OBA}=90^\circ-18^\circ=72^\circ$

$\therefore \angle\mathrm{AOB}=180^\circ-(72^\circ+72^\circ)=36^\circ$

삼각형 OAC에서 $\angle\mathrm{OAC}=\alpha$, $\angle\mathrm{OCA}=\beta$라고 하면 가장 긴 변이 선분 OA이므로 가장 큰 내각의 크기는 β이다.

이때, $\angle\mathrm{AOC}=36^\circ$이므로 $\alpha+\beta+36^\circ=180^\circ$

$\therefore \alpha+\beta=144^\circ$ …… ㉠

삼각형 OAC의 세 내각의 크기가 등차수열을 이루므로

(i) 36°, α, β가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때

$2\alpha=\beta+36^\circ$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=60^\circ$, $\beta=84^\circ$

(ii) α, 36°, β가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때

$\alpha+\beta=72^\circ$가 되므로 ㉠에 모순이다.

(i), (ii)에 의해 가장 큰 내각의 크기는 $\beta=84^\circ$ 정답_ ⑤

640

$S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)\cdot(-4)\}}{2}=-2n^2+(a+2)n$

$S_n<800$에서 $-2n^2+(a+2)n<800$

$\therefore 2n^2-(a+2)n+800>0$ …… ㉠

모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립하려면

$2n^2-(a+2)n+800=0$의 판별식을 D라고 할 때,

$D=(a+2)^2-6400<0$이어야 하므로

$-80<a+2<80$ $\therefore -82<a<78$

따라서 자연수 a의 최댓값은 77이다. 정답_ 77

641

(가)에서 처음 4개 항의 합은 26이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4=26$ …… ㉠

(나)에서 마지막 4개 항의 합은 134이므로

$a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=134$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=160$

이때, 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로

$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=a_4+a_{n-3}$

즉, $4(a_1+a_n)=160$이므로 $a_1+a_n=40$

(다)에서 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=260$이므로

$\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=260,\ \dfrac{40n}{2}=260$

$\therefore n=13$ 정답_ 13

642

(가)에서 $e=\sqrt{cd}$, 즉 $e^2=cd$이므로 e는 c와 d의 등비중항이다.

$\therefore c,\ e,\ d$ 또는 $d,\ e,\ c$ …… ㉠

(나)에서 $\dfrac{a}{e}=\dfrac{c}{d}$이므로 ㉠에 의해

$a,\ c,\ e,\ d$ 또는 $d,\ e,\ c,\ a$ …… ㉡

(다)에서 $a<b$이므로 ㉠, ㉡에 의해

$a,\ c,\ e,\ d,\ b$ 또는 $d,\ e,\ c,\ a,\ b$

따라서 b는 제5항이다. 정답_ ⑤

643

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$A=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$B=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots+a_{2n}$

$\quad =ar^n+ar^{n+1}+ar^{n+2}+\cdots+ar^{2n-1}=\dfrac{ar^n(r^n-1)}{r-1}$

$C=a_{2n+1}+a_{2n+2}+a_{2n+3}+\cdots+a_{3n}$

$\quad =ar^{2n}+ar^{2n+1}+ar^{2n+2}+\cdots+ar^{3n-1}=\dfrac{ar^{2n}(r^n-1)}{r-1}$

이므로 A, B, C는 공비가 $\boxed{(가)\ r^n}$인 등비수열을 이룬다.

등비중항의 성질에 의해 $\boxed{(나)\ B^2}=AC$

$A=p,\ B=q-p,\ C=S_{3n}-q$를 $B^2=AC$에 대입하면

$(q-p)^2=p(S_{3n}-q),\ q^2-2pq+p^2=pS_{3n}-pq$

$pS_{3n}=p^2-pq+q^2 \qquad \therefore S_{3n}=\boxed{(다)\ \dfrac{p^2-pq+q^2}{p}}$ 정답_ ③

644

$a,\ n,\ x$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $n^2=ax$

$\therefore \dfrac{a}{n}=\boxed{(가)\ \dfrac{n}{x}}$

한편, $n\neq0,\ a\neq0$이므로

$1\leq n<\dfrac{n}{a}=\dfrac{1}{\boxed{(가)\ \dfrac{n}{x}}}=\dfrac{x}{n}=\dfrac{n+a}{n}=1+\boxed{(나)\ \dfrac{a}{n}}<2$

$\therefore 1\leq n<2$

이때, n은 정수이므로 $n=1$

$n=1$을 $\dfrac{a}{n}=\boxed{(가)\ \dfrac{n}{x}}$에 대입하면

$\dfrac{a}{1}=\dfrac{1}{x} \qquad \therefore ax=1$ …… ㉠

$x=n+a=1+a$에서 $a=x-1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $(x-1)x=1 \qquad \therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

이때, $x>0$이므로 $x=\boxed{(다)\ \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$ 정답_ ④

645

$n\geq2$일 때, $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$, $a_n=S_n-S_{n-1}$이므로

$S_{n+1}-S_{n-1}=a_{n+1}+a_n$

$(S_{n+1}-S_{n-1})^2=4a_na_{n+1}+9$에서

$(a_{n+1}+a_n)^2=4a_na_{n+1}+9,\ (a_{n+1})^2-2a_na_{n+1}+(a_n)^2=9$

$\therefore (a_{n+1}-a_n)^2=9$

$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots$이므로 $a_{n+1}-a_n=3$

한편, $a_2-a_1=5-2=3$이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}-a_n=3$이 성립한다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이므로

$a_{10}=2+9\cdot3=29$ 정답_ ⑤

09 여러 가지 수열의 합

646

$\sum_{k=1}^{10} a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$

ㄱ. $\sum_{k=1}^{5} a_k+\sum_{k=6}^{10} a_k=(a_1+a_2+\cdots+a_5)+(a_6+a_7+\cdots+a_{10})$

ㄴ. $\sum_{k=1}^{5} (a_k+a_{k+5})$

$\quad =(a_1+a_6)+(a_2+a_7)+\cdots+(a_5+a_{10})$

$\quad =a_1+a_2+\cdots+a_{10}$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{5} (a_{2k-1}+a_{2k})$

$\quad =(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_9+a_{10})$

$\quad =a_1+a_2+\cdots+a_{10}$

따라서 $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값과 같은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

647

ㄱ은 옳다.

$\sum_{i=1}^{3} i^2=1^2+2^2+3^2=\sum_{j=1}^{3} j^2$

ㄴ은 옳지 않다.

$\sum_{i=1}^{3} ij=j+2j+3j=6j$

$\sum_{j=1}^{3} ij=i+2i+3i=6i$

$\therefore \sum_{i=1}^{3} ij\neq\sum_{j=1}^{3} ij$

ㄷ도 옳다.

$\sum_{i=0}^{3} i^3=0^3+1^3+2^3+3^3=1^3+2^3+3^3=\sum_{i=1}^{3} i^3$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_ ③

648

(1) $\sum_{k=1}^{5} (5a_k+b_k)=5\sum_{k=1}^{5} a_k+\sum_{k=1}^{5} b_k=5\cdot4+14=34$

(2) $\sum_{k=1}^{5} (a_k-3b_k)=\sum_{k=1}^{5} a_k-3\sum_{k=1}^{5} b_k=4-3\cdot14=-38$

정답_ (1) 34 (2) −38

649

$\sum_{k=1}^{10} (2a_k-p)^2=\sum_{k=1}^{10} (4a_k^2-4pa_k+p^2)$

$\qquad =4\sum_{k=1}^{10} a_k^2-4p\sum_{k=1}^{10} a_k+\sum_{k=1}^{10} p^2$

$\qquad =4\cdot20-4p\cdot10+10p^2=50$

$10p^2-40p+30=0,\ p^2-4p+3=0$

$(p-1)(p-3)=0 \qquad \therefore p=1$ 또는 $p=3$

따라서 구하는 모든 실수 p의 값의 합은

$1+3=4$

정답_ ④

650

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k{}^2+b_k{}^2)=\sum_{k=1}^{10}\{(a_k+b_k)^2-2a_kb_k\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)^2-2\sum_{k=1}^{10}a_kb_k$$
$$=50-2\cdot 10=30$$

정답_ ③

651

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k-1)(k+2)=\sum_{k=1}^{10}(k^2+k-2)$
$$=\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}2$$
$$=\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+\frac{10\cdot 11}{2}-2\cdot 10$$
$$=385+55-20=420$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k+2)(k-2)=\sum_{k=1}^{10}(k^2-4)$
$$=\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}4=\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}-4\cdot 10$$
$$=385-40=345$$

정답_ (1) 420 (2) 345

652

$$\sum_{k=1}^{9}\frac{k^3}{k+1}+\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{9}\frac{k^3+1}{k+1}=\sum_{k=1}^{9}\frac{(k+1)(k^2-k+1)}{k+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{9}(k^2-k+1)=\sum_{k=1}^{9}k^2-\sum_{k=1}^{9}k+\sum_{k=1}^{9}1$$
$$=\frac{9\cdot 10\cdot 19}{6}-\frac{9\cdot 10}{2}+1\cdot 9$$
$$=285-45+9=249$$

정답_ ⑤

653

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^2+n}$$
$$=\sum_{n=1}^{10}\frac{\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{10}\frac{n(n+1)}{4}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{10}n^2+\sum_{n=1}^{10}n\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+\frac{10\cdot 11}{2}\right)=110$$

정답_ ②

654

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2-2)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+3)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(k^2-2)-\left\{\sum_{k=1}^{n}(k^2+3)-(n^2+3)\right\}$$
$$=\left\{\sum_{k=1}^{n}(k^2-2)-\sum_{k=1}^{n}(k^2+3)\right\}+(n^2+3)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\{(k^2-2)-(k^2+3)\}+(n^2+3)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(-5)+(n^2+3)=53$$

$-5n+(n^2+3)=53$, $n^2-5n-50=0$

$(n+5)(n-10)=0 \qquad \therefore n=-5$ 또는 $n=10$

이때, n은 자연수이므로 $n=10$

정답_ ③

655

$$f(x)=\sum_{k=1}^{10}(x-k)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(x^2-2kx+k^2)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}x^2-2x\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}k^2$$
$$=10x^2-2x\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}$$
$$=10x^2-110x+385$$
$$=10\left(x-\frac{11}{2}\right)^2-10\cdot\left(\frac{11}{2}\right)^2+385$$

이 이차함수는 $x=\dfrac{11}{2}$에서 최솟값을 가지므로

$a=\dfrac{11}{2}$

정답_ ③

656

(1) 주어진 수열의 제k항을 a_k라고 하면

$a_k=k(k+1)=k^2+k$

따라서 구하는 합은 첫째항부터 제15항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{15}a_k=\sum_{k=1}^{15}(k^2+k)$$
$$=\sum_{k=1}^{15}k^2+\sum_{k=1}^{15}k$$
$$=\frac{15\cdot 16\cdot 31}{6}+\frac{15\cdot 16}{2}$$
$$=1240+120=1360$$

(2) 주어진 수열의 제k항을 a_k라고 하면

$a_k=k(2k+1)=2k^2+k$

따라서 구하는 합은 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2k^2+k)=2\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k$$
$$=2\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+\frac{10\cdot 11}{2}$$
$$=770+55=825$$

정답_ (1) 1360 (2) 825

657

주어진 수열의 제k항을 a_k라고 하면

$$a_k=2+4+6+\cdots+2k=2(1+2+3+\cdots+k)$$
$$=2\cdot\frac{k(k+1)}{2}=k^2+k$$

따라서 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)\{(2n+1)+3\}}{6}$$
$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

정답_ ②

658

$9=10-1$, $99=100-1=10^2-1$, $999=1000-1=10^3-1$, $\cdots$이므로 주어진 수열의 제k항을 a_k라고 하면

$$a_k=10^k-1$$

따라서 첫째항부터 제9항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{9}a_k=\sum_{k=1}^{9}(10^k-1)=\sum_{k=1}^{9}10^k-\sum_{k=1}^{9}1$$
$$=\frac{10(10^9-1)}{10-1}-9=\frac{1}{9}(10^{10}-91)$$

정답_ ③

659

주어진 수열의 제k항을 a_k라고 하면

$$a_k=1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=\frac{1\cdot(2^k-1)}{2-1}=2^k-1$$

따라서 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{10}2^k-\sum_{k=1}^{10}1$$
$$=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}-10=2036$$

정답_ ③

660

수열 $1\cdot n, 2\cdot(n-1), 3\cdot(n-2), \cdots, (n-1)\cdot 2, n\cdot 1$의 제$k$항을 a_k라고 하면

$$a_k=k\{n-(k-1)\}=-k^2+(n+1)k$$

주어진 식은 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+1)k\}=-\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)\{-(2n+1)+3(n+1)\}}{6}$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

정답_ ⑤

661

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n=2^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{5}2^{(2k-1)-1}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{5}4^k$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{4(4^5-1)}{4-1}$$
$$=\frac{1}{3}(2^{10}-1)=341$$

정답_ ①

662

다항식 $(x+2)^n$을 $x-1$로 나눈 나머지는 $(x+2)^n$에 $x=1$을 대입한 값과 같으므로 $a_n=3^n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{5}a_n=\sum_{n=1}^{5}3^n=\frac{3(3^5-1)}{3-1}=363$$

정답_ ④

663

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2-n$으로 놓으면

(i) $n\geq 2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-n-\{(n-1)^2-(n-1)\}$$
$$=2n-2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $n=1$일 때

$$a_1=S_1=1-1=0$$

이때, $a_1=0$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-2\ (n\geq 1)$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}ka_{4k+1}=\sum_{k=1}^{10}k\{2(4k+1)-2\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}8k^2=8\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}$$
$$=3080$$

정답_ ④

664

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=2^n-1$로 놓으면

(i) $n\geq 2$일 때

$$a_n=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)$$
$$=(2-1)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $n=1$일 때

$$a_1=S_1=2^1-1=1$$

이때, $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2^{n-1}\ (n\geq 1)$

$a_n=2^{n-1}$에서 $a_{2k+1}=2^{(2k+1)-1}=4^k$이므로

$$\sum_{k=1}^{5}a_{2k+1}=\sum_{k=1}^{5}4^k=\frac{4(4^5-1)}{4-1}$$
$$=\frac{4\cdot 1023}{3}=1364$$

정답_ ③

665

3^{n-1}의 모든 양의 약수의 합이 a_n이므로

$$a_n=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}=\frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^n-1)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{4} a_n=\sum_{n=1}^{4}\left\{\frac{1}{2}(3^n-1)\right\}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{4}3^n-\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3(3^4-1)}{3-1}-2$$

$$=60-2=58$$

정답_ 58

666

$$\sum_{k=1}^{5}\left\{\sum_{l=1}^{5}(k+l)\right\}=\sum_{k=1}^{5}\left(\sum_{l=1}^{5}k+\sum_{l=1}^{5}l\right)=\sum_{k=1}^{5}\left(5k+\frac{5\cdot6}{2}\right)$$

$$=5\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}15=5\cdot\frac{5\cdot6}{2}+15\cdot5$$

$$=75+75=150$$

정답_ ③

667

$$\sum_{i=1}^{6}a_i=\sum_{i=1}^{6}(2^i-10)=\frac{2(2^6-1)}{2-1}-60=66$$

$$\sum_{j=1}^{6}b_j=\sum_{j=1}^{6}(2j-6)=2\cdot\frac{6\cdot7}{2}-36=6$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{6}\left(\sum_{j=1}^{6}a_ib_j\right)=\sum_{i=1}^{6}\left(a_i\sum_{j=1}^{6}b_j\right)=\sum_{i=1}^{6}(a_i\cdot6)$$

$$=6\sum_{i=1}^{6}a_i=6\cdot66=396$$

정답_ ⑤

668

$$\sum_{i=1}^{6}\left\{\sum_{j=1}^{i}\left(\sum_{k=1}^{j}6\right)\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{6}\left(\sum_{j=1}^{i}6j\right)=\sum_{i=1}^{6}\left\{6\cdot\frac{i(i+1)}{2}\right\}$$

$$=3\sum_{i=1}^{6}(i^2+i)=3\left(\sum_{i=1}^{6}i^2+\sum_{i=1}^{6}i\right)$$

$$=3\left(\frac{6\cdot7\cdot13}{6}+\frac{6\cdot7}{2}\right)=336$$

정답_ ③

669

$$\sum_{k=1}^{n}2^{k-n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{2^n}=\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}2^k$$

$$=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$\therefore p=\sum_{n=1}^{5}\left(\sum_{k=1}^{n}2^{k-n}\right)=\sum_{n=1}^{5}2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2\left\{\sum_{n=1}^{5}1-\sum_{n=1}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$=2\cdot5-2\cdot\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=10-2+\frac{1}{16}=8+\frac{1}{16}$$

따라서 p의 정수 부분은 8이다.

정답_ ④

670

$$\sum_{k=1}^{7}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}=\frac{7}{18}$$

정답_ ⑤

671

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$$

$\dfrac{2n}{n+1}=\dfrac{15}{8}$이므로

$$\frac{n}{n+1}=\frac{15}{16}\qquad\therefore n=15$$

정답_ ③

672

주어진 수열의 제k항을 a_k라고 하면

$$a_k=\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$$

따라서 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{28}-\frac{1}{31}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{31}\right)=\frac{10}{31}$$

정답_ ②

673

분모가 세 토막인 문제는 가운데 토막을 앞으로 끄집어내어 부분 분수로 변형한다.

수열 $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}$, $\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}$, $\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}$, $\cdots$, $\dfrac{1}{8\cdot9\cdot10}$의 제$k$항을 a_k라고 하면

$$a_k=\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{k(k+2)}$$

$$=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

주어진 식은 첫째항부터 제8항까지의 합이므로

$$S=\sum_{k=1}^{8} a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8\cdot9}-\frac{1}{9\cdot10}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{90}\right)=\frac{11}{45}$$

$\therefore 45S=45\cdot\frac{11}{45}=11$ 정답_ ④

674

$a_k=\log_2\frac{k+1}{k}=\log_2(k+1)-\log_2 k$이므로

$$\sum_{k=1}^{15} a_k=\sum_{k=1}^{15}\{\log_2(k+1)-\log_2 k\}$$

$$=(\log_2 2-\log_2 1)+(\log_2 3-\log_2 2)+(\log_2 4-\log_2 3)+\cdots+(\log_2 16-\log_2 15)$$

$$=\log_2 16-\log_2 1=4$$

정답_ ②

675

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha_n+\beta_n=1,\ \alpha_n\beta_n=n(n+1)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{50}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{50}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\sum_{n=1}^{50}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\sum_{n=1}^{50}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{50}-\frac{1}{51}\right)$$

$$=1-\frac{1}{51}=\frac{50}{51}$$

정답_ ④

676

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=2n^2+n$으로 놓으면

(i) $n\ge2$일 때

$a_n=2n^2+n-\{2(n-1)^2+(n-1)\}$

$=4n-1$ ⋯⋯ ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2\cdot1^2+1=3$

이때, $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4n-1\ (n\ge1)$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(4k-1)(4k+3)}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k+3}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{39}-\frac{1}{43}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{43}\right)=\frac{10}{129}$$

따라서 $p=129,\ q=10$이므로 $p+q=139$ 정답_ ①

677

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$이므로

$$\frac{1}{f(k)}=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$

$$=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{99}\frac{1}{f(k)}=\sum_{k=1}^{99}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$$

$$=\sqrt{100}-1=9$$

정답_ ⑤

678

$$\sum_{k=1}^{80}\frac{2}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{80}\frac{2(\sqrt{k-1}-\sqrt{k+1})}{(\sqrt{k-1}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k-1}-\sqrt{k+1})}$$

$$=-\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k-1}-\sqrt{k+1})$$

$$=-\{(\sqrt{0}-\sqrt{2})+(\sqrt{1}-\sqrt{3})+(\sqrt{2}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{78}-\sqrt{80})+(\sqrt{79}-\sqrt{81})\}$$

$$=-(\sqrt{0}+\sqrt{1}-\sqrt{80}-\sqrt{81})$$

$$=-(0+1-4\sqrt{5}-9)=8+4\sqrt{5}$$

정답_ ①

679

수열 $\{a_n\}$은 첫째항과 공차가 모두 2인 등차수열이므로

$a_n=2+(n-1)\cdot2=2n$

$$\therefore \sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$$

$$=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k}}$$

$$=\sum_{k=1}^{15}\frac{\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k}}{(\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k})(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})}$$

$$=\sum_{k=1}^{15}\frac{\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k}}{2}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{15}(\sqrt{2k}-\sqrt{2k+2})$$

$$=-\frac{1}{2}\{(\sqrt{2}-\sqrt{4})+(\sqrt{4}-\sqrt{6})+\cdots+(\sqrt{30}-\sqrt{32})\}$$

$$=-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-\sqrt{32})=-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-4\sqrt{2})=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

정답_ ①

680

주어진 식을 S로 놓고 양변에 $\frac{1}{2}$을 곱하여 빼면

$$\begin{array}{rl} S= & \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{10}{2^{10}} \\ -\big)\ \frac{1}{2}S= & \qquad\ \frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{9}{2^{10}}+\frac{10}{2^{11}} \\ \hline \frac{1}{2}S= & \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}-\frac{10}{2^{11}} \end{array}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{10}{2^{11}}$$

$$=1-\frac{1}{1024}-\frac{5}{1024}=\frac{509}{512}$$

$\therefore S=\frac{509}{256}$

정답_ ②

681

주어진 식을 S로 놓고 양변에 2를 곱하여 빼면

$$\begin{array}{rl} S= & 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot2^2+\cdots+7\cdot2^6 \\ -\big)\ 2S= & \qquad\ 1\cdot2+2\cdot2^2+\cdots+6\cdot3^6+7\cdot2^7 \\ \hline -S= & 1+2+2^2+2^3+\cdots+2^6-7\cdot2^7 \end{array}$$

$$=\frac{1\cdot(2^7-1)}{2-1}-7\cdot2^7=-769$$

$\therefore S=769$

정답_ ③

682

주어진 식의 양변에 $x=2$를 대입한 후 양변에 2를 곱하여 빼면

$$\begin{array}{rl} f(2)= & 1+3\cdot2+5\cdot2^2+\cdots+21\cdot2^{10} \\ -\big)\ 2f(2)= & \qquad\ 1\cdot2+3\cdot2^2+\cdots+19\cdot2^{10}+21\cdot2^{11} \\ \hline -f(2)= & 1+2\cdot2+2\cdot2^2+\cdots+2\cdot2^{10}-21\cdot2^{11} \end{array}$$

$$=1+2(2+2^2+\cdots+2^{10})-21\cdot2^{11}$$

$$=1+2\cdot\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}-21\cdot2^{11}$$

$$=1+2\cdot2^{11}-4-21\cdot2^{11}$$

$$=-19\cdot2^{11}-3$$

$\therefore f(2)=19\cdot2^{11}+3$

정답_ ④

683

$$\sum_{k=1}^{n}f(k+1)=f(2)+f(3)+\cdots+f(n)+f(n+1)$$

$$\sum_{k=2}^{n+1}f(k-2)=f(0)+f(1)+\cdots+f(n-2)+f(n-1)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}f(k+1)-\sum_{k=2}^{n+1}f(k-2)$$

$$=f(n)+f(n+1)-f(0)-f(1)$$

$$=(n^2+n)+\{(n+1)^2+(n+1)\}-0-2$$

$$=2n^2+4n \quad \cdots\cdots ❶$$

$2n^2+4n=720$에서 $\quad n^2+2n-360=0$

$(n+20)(n-18)=0 \qquad \therefore n=-20$ 또는 $n=18$

이때, n은 자연수이므로 $\quad n=18$ ······ ❷

정답_ 18

단계	채점 기준	비율
❶	$\sum_{k=1}^{n}f(k+1)-\sum_{k=2}^{n+1}f(k-2)$를 n에 대한 식으로 나타내기	60%
❷	n의 값 구하기	40%

684

$1\le n<4$일 때, $\quad 1\le\sqrt{n}<2 \qquad \therefore [\sqrt{n}]=1$

$4\le n<9$일 때, $\quad 2\le\sqrt{n}<3 \qquad \therefore [\sqrt{n}]=2$

$9\le n<16$일 때, $\quad 3\le\sqrt{n}<4 \qquad \therefore [\sqrt{n}]=3$

$\vdots$

$36\le n<49$일 때, $\quad 6\le\sqrt{n}<7 \qquad \therefore [\sqrt{n}]=6$

$n=49,\ 50$일 때, $\quad 7\le\sqrt{n}<8 \qquad \therefore [\sqrt{n}]=7$ ······ ❶

$$\therefore \sum_{n=1}^{50}[\sqrt{n}]=(1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots+6\cdot13)+7\cdot2$$

$$=\sum_{k=1}^{6}k(2k+1)+7\cdot2=2\sum_{k=1}^{6}k^2+\sum_{k=1}^{6}k+14$$

$$=2\cdot\frac{6\cdot7\cdot13}{6}+\frac{6\cdot7}{2}+14=217 \quad \cdots\cdots ❷$$

정답_ 217

단계	채점 기준	비율
❶	n의 값에 따른 $[\sqrt{n}]$의 값 구하기	50%
❷	$\sum_{n=1}^{50}[\sqrt{n}]$의 값 구하기	50%

685

주어진 수열의 제k항을 a_k라고 하면

$$a_k=\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}=\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}$$

$$=\frac{2}{k(k+1)}=2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \quad \cdots\cdots ❶$$

따라서 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=2\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11} \quad \cdots\cdots ❷$$

$p=11,\ q=20$이므로 $\quad p+q=31$ ······ ❸

정답_ 31

단계	채점 기준	비율
❶	일반항 구하기	40%
❷	첫째항부터 제10항까지의 합 구하기	50%
❸	$p+q$의 값 구하기	10%

686

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$$a_n=\frac{3n^2+2n}{n}=3n+2 \cdots\cdots ❶$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n=\sum_{n=1}^{10}(3n+2)=3\sum_{n=1}^{10} n+\sum_{n=1}^{10} 2$$

$$=3\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+20=165+20=185 \cdots\cdots ❷$$

정답_ 185

단계	채점 기준	비율
❶	a_n 구하기	40%
❷	$\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값 구하기	60%

687

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열이므로

$$a_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1 \cdots\cdots ❶$$

$$\therefore a_{n+1}=2(n+1)-1=2n+1,$$

$$a_{n+2}=2(n+2)-1=2n+3 \cdots\cdots ❷$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}$$

$$=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{21}-\frac{1}{23}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{23}\right)=\frac{10}{69} \cdots\cdots ❸$$

정답_ $\frac{10}{69}$

단계	채점 기준	비율
❶	a_n 구하기	20%
❷	a_{n+1}, a_{n+2} 구하기	30%
❸	$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}$ 의 값 구하기	50%

688

주어진 식을 S로 놓고 양변에 3을 곱하여 빼면

$$S=1\cdot 1+3\cdot 3+5\cdot 3^2+7\cdot 3^3+\cdots+19\cdot 3^9$$

$$-)\ 3S=\quad 1\cdot 3+3\cdot 3^2+5\cdot 3^3+\cdots+17\cdot 3^9+19\cdot 3^{10}$$

$$-2S=1+2\cdot 3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+\cdots+2\cdot 3^9-19\cdot 3^{10}$$

$$=1+2(3+3^2+3^3+\cdots+3^9)-19\cdot 3^{10}$$

$$=1+2\cdot\frac{3(3^9-1)}{3-1}-19\cdot 3^{10}$$

$$=1+3^{10}-3-19\cdot 3^{10}=-18\cdot 3^{10}-2 \cdots\cdots ❶$$

$$\therefore S=9\cdot 3^{10}+1=3^{12}+1 \cdots\cdots ❷$$

정답_ $3^{12}+1$

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 식을 S로 놓고 $S-3S$를 계산하기	80%
❷	S의 값 구하기	20%

689

다항식 $f(x)$를 $x+1$, $x-2$로 나눈 나머지가 각각 2, 5이므로

$f(-1)=2$, $f(2)=5$

다항식 $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$$f(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면

$f(-1)=-a+b=2$, $f(2)=2a+b=5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$

$\therefore R(x)=x+3$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} R(k)=\sum_{k=1}^{10}(k+3)=\sum_{k=1}^{10} k+\sum_{k=1}^{10} 3$$

$$=\frac{10\cdot 11}{2}+3\cdot 10=85$$

정답_ ②

690

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면 $a_n=3+(n-1)d$

$\therefore a_{n+1}=3+nd$, $a_{n+2}=3+(n+1)d$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha_n+\beta_n=a_n-a_{n+1}$, $\alpha_n\beta_n=a_{n+2}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}(\alpha_n+1)(\beta_n+1)=\sum_{n=1}^{10}(\alpha_n\beta_n+\alpha_n+\beta_n+1)$$

$$=\sum_{n=1}^{10}(a_n-a_{n+1}+a_{n+2}+1)$$

이때,

$a_n-a_{n+1}+a_{n+2}$

$=\{3+(n-1)d\}-(3+nd)+\{3+(n+1)d\}$

$=3+nd$

이므로

$$\sum_{n=1}^{10}(\alpha_n+1)(\beta_n+1)=\sum_{n=1}^{10}(3+nd+1)=\sum_{n=1}^{10} 4+d\sum_{n=1}^{10} n$$

$$=40+\frac{10\cdot 11}{2}d=40+55d$$

따라서 $40+55d=150$이므로 $d=2$

$\therefore a_5=3+4\cdot 2=11$

정답_ ④

691

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 $2a_2=a_1+a_3$

즉, $\frac{4}{3}k=(k-4)+(2k-1)$이므로

$4k=9k-15 \qquad \therefore k=3$

따라서 $a_1=-1$, $a_2=2$, $a_3=5$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -1, 공차가 3인 등차수열이다.

$\therefore a_n=-1+(n-1)\cdot 3=3n-4$

$\therefore \sum_{n=1}^{5} a_n=\sum_{n=1}^{5}(3n-4)=3\sum_{n=1}^{5} n-\sum_{n=1}^{5} 4$

$=3\cdot\frac{5\cdot 6}{2}-20=45-20=25$ 정답_ ⑤

692

다음에서 알 수 있는 것처럼 a가 자연수일 때, $a-10\cdot\left[\frac{a}{10}\right]$는 a의 일의 자리 숫자를 나타낸다. 예를 들면

• $a=123$일 때

$a-10\cdot\left[\frac{a}{10}\right]=123-10[12.3]=123-120=3$

• $a=345$일 때

$a-10\cdot\left[\frac{a}{10}\right]=345-10[34.5]=345-340=5$

x가 자연수일 때, $f(x)=3^x-10\cdot\left[\frac{3^x}{10}\right]$은 3^x의 일의 자리 숫자를 나타내므로 $f(2k)$는 $3^{2k}=9^k$의 일의 자리 숫자를 나타낸다.

9^1의 일의 자리 숫자는 9

$9\times 9=81$이므로 9^2의 일의 자리 숫자는 1

$1\times 9=9$이므로 9^3의 일의 자리 숫자는 9

$9\times 9=81$이므로 9^4의 일의 자리 숫자는 1

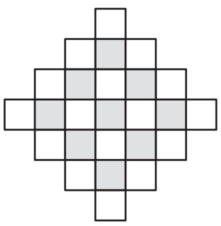
⋮

따라서 9^k의 일의 자리 숫자는 9, 1이 반복되므로

$\sum_{k=1}^{100} f(2k)=(9+1)\times 50=500$ 정답_ ③

693

오른쪽 그림과 같이 위에서 내려다 보며 추가되는 정육면체의 개수를 관찰하면 좀더 쉽게 생각할 수 있다. n층 탑을 쌓을 때, 맨 위층에서부터 각 층에 필요한 정육면체의 개수를 a_n이라고 하면



$a_1=1$

$a_2=1+4$

$a_3=1+4+8$

$a_4=1+4+8+12$

⋮

$a_n=1+4+8+12+\cdots+4(n-1)$

$=1+\sum_{k=1}^{n-1} 4k=1+4\cdot\frac{(n-1)n}{2}=2n^2-2n+1$

따라서 10층 탑을 쌓는 데 필요한 정육면체의 개수는

$\sum_{n=1}^{10} a_n=\sum_{n=1}^{10}(2n^2-2n+1)=2\sum_{n=1}^{10} n^2-2\sum_{n=1}^{10} n+\sum_{n=1}^{10} 1$

$=2\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}-2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+10$

$=670$ 정답_ ②

10 수학적 귀납법

694

$n=1$일 때, $a_2=2a_1+1=2\cdot 1+1=3$

$n=2$일 때, $a_3=2a_2+1=2\cdot 3+1=7$ 정답_ ④

695

$n=1$일 때, $a_3=2a_1-a_2=2\cdot 2-3=1$

$n=2$일 때, $a_4=2a_2-a_3=2\cdot 3-1=5$

$n=3$일 때, $a_5=2a_3-a_4=2\cdot 1-5=-3$ 정답_ ②

696

$n=1$일 때, $a_2=\frac{1+1}{1+a_1}+1=\frac{1+1}{1+1}+1=2$

$n=2$일 때, $a_3=\frac{2+1}{1+a_2}+1=\frac{2+1}{1+2}+1=2$

$n=3$일 때, $a_4=\frac{3+1}{1+a_3}+1=\frac{3+1}{1+2}+1=\frac{7}{3}$ 정답_ ②

697

$a_{n+1}=a_n+3$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 3인 등차수열이다.

이때, 첫째항이 2이므로

$a_n=2+(n-1)\cdot 3=3n-1$

$\therefore a_{10}=3\cdot 10-1=29$ 정답_ ⑤

698

$a_n=a_{n+1}-6$에서 $a_{n+1}=a_n+6$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 6인 등차수열이다.

이때, 첫째항이 3이므로

$a_n=3+(n-1)\cdot 6=6n-3$

$a_k=111$에서 $6k-3=111$ $\therefore k=19$ 정답_ ②

699

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_n=a+(n-1)d$

$a_2=-1$에서 $a+d=-1$ …… ㉠

$a_3=2$에서 $a+2d=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4, d=3$

$\therefore a_n=-4+(n-1)\cdot 3=3n-7$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{10}(3k-7)=3\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-7\cdot 10=165-70=95$ 정답_ ①

700

$a_n=2a_{n+1}$에서 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

이때, 첫째항이 8이므로

$a_n=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$

$\therefore a_{10}=\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$ 정답_ ③

701

$a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때, $a_1=1$, $\frac{a_2}{a_1}=2$에서 첫째항이 1, 공비가 2이므로

$a_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$

$\therefore a_6=2^{6-1}=2^5=32$ 정답_ ②

702

$a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때, $a_1=1$, $\frac{a_2}{a_1}=\frac{10}{1}=10$에서 첫째항이 1, 공비가 10이므로

$a_n=1\cdot 10^{n-1}=10^{n-1}$

$a_k=100^{100}=10^{200}$에서 $10^{k-1}=10^{200}$

$k-1=200$ $\therefore k=201$ 정답_ ⑤

703

$a_{n+1}-a_n=2n-1$이므로 양변에 n 대신 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
&a_2-a_1=2\cdot1-1\\
&a_3-a_2=2\cdot2-1\\
&a_4-a_3=2\cdot3-1\\
&\quad\vdots\\
+)\ &a_n-a_{n-1}=2(n-1)-1\\
\hline
&a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)
\end{aligned}$$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$

$a_1=2$이므로

$$\begin{aligned}a_n&=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)=2+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)\\&=n^2-2n+3\end{aligned}$$

$\therefore a_{10}=10^2-2\cdot10+3=83$ 정답_ ③

704

$a_n-a_{n-1}=3^{n-1}(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$이므로 양변에 n 대신 $n+1$을 대입하면 $a_{n+1}-a_n=3^n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

따라서 양변에 n 대신 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
&a_2-a_1=3^1\\
&a_3-a_2=3^2\\
&a_4-a_3=3^3\\
&\quad\vdots\\
+)\ &a_n-a_{n-1}=3^{n-1}\\
\hline
&a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}3^k
\end{aligned}$$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k$

$a_1=1$이므로

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k=1+\frac{3\cdot(3^{n-1}-1)}{3-1}=\frac{3^n-1}{2}$

$a_k=364$에서 $\frac{3^k-1}{2}=364$ $\therefore k=6$ 정답_ ②

705

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$이므로 양변에 n 대신 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
&a_2-a_1=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\\
&a_3-a_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\
&a_4-a_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\\
&\quad\vdots\\
+)\ &a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\\
\hline
&a_n-a_1=1-\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$\therefore a_n=a_1+\left(1-\frac{1}{n}\right)$

$a_1=1$이므로 $a_n=2-\frac{1}{n}$

따라서 $a_{10}=2-\frac{1}{10}=\frac{19}{10}$이므로 $p=10$, $q=19$

$\therefore p+q=29$ 정답_ ③

706

$a_{n+1}-a_n=f(n)$이므로 양변에 n 대신 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
&a_2-a_1=f(1)\\
&a_3-a_2=f(2)\\
&a_4-a_3=f(3)\\
&\quad\vdots\\
+)\ &a_n-a_{n-1}=f(n-1)\\
\hline
&a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}f(k)
\end{aligned}$$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

$a_1=1$이므로

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

$\therefore a_{20}=1+\sum_{k=1}^{19} f(k)=1+19(19+1)=381$ 정답_ ④

707

$a_n=\frac{n-1}{n+1}a_{n-1}$의 양변에 n 대신 2, 3, 4, ⋯, $n-1$, n을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2=\frac{1}{3}a_1$$
$$a_3=\frac{2}{4}a_2$$
$$a_4=\frac{3}{5}a_3$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1}=\frac{n-2}{n}a_{n-2}$$
$$\times)\ a_n=\frac{n-1}{n+1}a_{n-1}$$

$$a_n=\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\cdots\times\frac{n-2}{n}\times\frac{n-1}{n+1}\times a_1$$
$$=\frac{1\cdot2}{n(n+1)}\times a_1=\frac{1}{n(n+1)}$$

$\therefore a_{10}=\frac{1}{10\cdot11}=\frac{1}{110}$ 정답_ ①

708

$a_{n+1}=2^n a_n$의 양변에 n 대신 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2=2^1a_1$$
$$a_3=2^2a_2$$
$$a_4=2^3a_3$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_n=2^{n-1}a_{n-1}$$

$$a_n=2^1\times2^2\times2^3\times\cdots\times2^{n-1}\times a_1$$
$$=2^{1+2+3+\cdots+(n-1)}\times1$$
$$=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$\therefore a_4=2^{\frac{3\cdot4}{2}}=2^6=64$ 정답_ ②

709

$\sqrt{n}\,a_{n+1}=\sqrt{n+1}\,a_n$에서 $a_{n+1}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}a_n$

양변에 n 대신 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}}a_1$$
$$a_3=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a_2$$
$$a_4=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}a_3$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}a_{n-1}$$

$$a_n=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}\times\cdots\times\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}\times a_1=2\sqrt{n}$$

$\therefore a_{100}=2\sqrt{100}=20$ 정답_ ③

다른 풀이

$\sqrt{n}\,a_{n+1}=\sqrt{n+1}\,a_n$에서 $\frac{a_{n+1}}{\sqrt{n+1}}=\frac{a_n}{\sqrt{n}}$ ⋯⋯ ㉠

$\frac{a_n}{\sqrt{n}}=b_n$으로 놓으면 ㉠에서 $b_{n+1}=b_n$

$\therefore b_n=b_{n-1}=\cdots=b_3=b_2=b_1$

이때, $b_1=\frac{a_1}{\sqrt{1}}=2$이므로 $b_n=2$

$\therefore a_n=b_n\sqrt{n}=2\sqrt{n}$

$\therefore a_{100}=2\sqrt{100}=20$

710

$a_{n+1}=3a_n+2$를 $a_{n+1}-k=3(a_n-k)$ 꼴로 변형하자.

$a_{n+1}-k=3(a_n-k)$를 전개하면 $a_{n+1}=3a_n-2k$

$a_{n+1}=3a_n+2$와 비교하면 $k=-1$

$\therefore a_{n+1}+1=3(a_n+1)$ ⋯⋯ ㉠

$a_n+1=b_n$으로 놓으면 ㉠에서 $b_{n+1}=3b_n$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다.

이때, $b_1=a_1+1=2+1=3$이므로 $b_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$

따라서 $a_n=b_n-1=3^n-1$이므로 $a_{20}=3^{20}-1$ 정답_ ①

711

$a_{n+1}=2a_n-1$을 $a_{n+1}-k=2(a_n-k)$ 꼴로 변형하자.

$a_{n+1}-k=2(a_n-k)$를 전개하면 $a_{n+1}=2a_n-k$

$a_{n+1}=2a_n-1$과 비교하면 $k=1$

$\therefore a_{n+1}-1=2(a_n-1)$ ⋯⋯ ㉠

$a_n-1=b_n$으로 놓으면 ㉠에서 $b_{n+1}=2b_n$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

이때, $b_1=a_1-1=2-1=1$이므로 $b_n=1\cdot2^{n-1}=2^{n-1}$

$\therefore a_n=b_n+1=2^{n-1}+1$

$a_{n+1}-a_n=(2^n+1)-(2^{n-1}+1)=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$이므로

$2^{n-1}\ge100$ ⋯⋯ ㉡

$2^6=64$, $2^7=128$이므로 ㉡을 만족시키는 최소의 자연수 n의 값은 8이다. 정답_ ②

712

$a_{n+2}+4a_n=5a_{n+1}$에서 $\quad a_{n+2}-5a_{n+1}+4a_n=0$

$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n)$ ······ ㉠

$a_{n+1}-a_n=b_n$으로 놓으면 ㉠에서 $\quad b_{n+1}=4b_n$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 공비가 4인 등비수열이다.

이때, $b_1=a_2-a_1=2-1=1$이므로

$b_n=1\cdot 4^{n-1}=4^{n-1}$

$a_{n+1}-a_n=b_n$에서 $a_{n+1}-a_n=4^{n-1}$이므로 양변에 n 대신 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2-a_1=4^0 \\ & a_3-a_2=4^1 \\ & a_4-a_3=4^2 \\ & \vdots \\ +) & a_n-a_{n-1}=4^{n-2} \\ \hline & a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}4^{k-1} \end{array}$$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4^{k-1}$

$a_1=1$이므로

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}4^{k-1}=1+\dfrac{1\cdot(4^{n-1}-1)}{4-1}=\dfrac{4^{n-1}+2}{3}$

$\therefore 3a_{10}=4^9+2=2^{18}+2$ 정답_ ④

713

$2a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n=0$에서 $\quad 2(a_{n+2}-a_{n+1})=a_{n+1}-a_n$

$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$ ······ ㉠

$a_{n+1}-a_n=b_n$으로 놓으면 ㉠에서 $\quad b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이다.

이때, $b_1=a_2-a_1=2a_1-a_1=a_1$이므로 $\quad b_n=a_1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_{n+1}-a_n=b_n$에서 $a_{n+1}-a_n=a_1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로 양변에 n 대신 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2-a_1=a_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ & a_3-a_2=a_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1 \\ & a_4-a_3=a_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ & \vdots \\ +) & a_n-a_{n-1}=a_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\ \hline & a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}a_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \end{array}$$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}a_1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}=a_1+\dfrac{a_1\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$

$=a_1+2a_1\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=3a_1-a_1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$

$a_8=191$에서 $\quad 3a_1-a_1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^6=191$

$3a_1-\dfrac{1}{64}a_1=191 \qquad \therefore a_1=64$ 정답_ ⑤

714

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}$의 양변에 역수를 취하면

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2a_n+1}{a_n} \qquad \therefore \dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+2$ ······ ㉠

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$으로 놓으면 ㉠에서 $\quad b_{n+1}=b_n+2$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 공차가 2인 등차수열이다.

이때, $b_1=\dfrac{1}{a_1}=-\dfrac{1}{2}$이므로 $\quad b_n=-\dfrac{1}{2}+(n-1)\cdot 2=\dfrac{4n-5}{2}$

$\therefore a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{2}{4n-5}$

$\therefore a_{20}=\dfrac{2}{4\cdot 20-5}=\dfrac{2}{75}$ 정답_ ③

715

$a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{a_n+3}$의 양변에 역수를 취하면

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+3}{3a_n} \qquad \therefore \dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{3}$ ······ ㉠

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$으로 놓으면 ㉠에서 $\quad b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{3}$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 공차가 $\dfrac{1}{3}$인 등차수열이다.

이때, $b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{3}$이므로 $\quad b_n=\dfrac{1}{3}+(n-1)\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{n}{3}$

$\therefore a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{3}{n}$

$a_k=\dfrac{1}{3}$에서 $\quad \dfrac{3}{k}=\dfrac{1}{3} \qquad \therefore k=9$ 정답_ ②

716

$a_na_{n+1}=a_n-a_{n+1}$의 양변을 a_na_{n+1}로 나누면

$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=1$ ······ ㉠

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$으로 놓으면 ㉠에서 $\quad b_{n+1}-b_n=1$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 공차가 1인 등차수열이다.

이때, $b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$이므로 $\quad b_n=1+(n-1)\cdot 1=n$

$\therefore a_n=\dfrac{1}{n}$

$\therefore a_{10}=\dfrac{1}{10}$ 정답_ ③

717

$a_{n+1}a_n-2a_{n+2}a_n+a_{n+1}a_{n+2}=0$의 양변을 $a_na_{n+1}a_{n+2}$로 나누면

$\frac{1}{a_{n+2}}-\frac{2}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_n}=0 \qquad \therefore \frac{2}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+2}}$ ······ ㉠

$\frac{1}{a_n}=b_n$으로 놓으면 ㉠에서 $2b_{n+1}=b_n+b_{n+2}$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 등차수열이다.

이때, $b_1=\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$, $b_2-b_1=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$이므로

수열 $\{b_n\}$의 첫째항은 $\frac{1}{2}$, 공차는 $\frac{1}{2}$이다.

$\therefore b_n=\frac{1}{2}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{2} \qquad \therefore \frac{1}{a_n}=\frac{n}{2}$

$\therefore \sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{20}\frac{k}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}k=\frac{1}{2}\cdot\frac{20\cdot21}{2}=105$

정답_ ⑤

718

$a_{n+1}=3a_n+3^{n+1}$의 양변을 3^{n+1}으로 나누면

$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+1$ ······ ㉠

$\frac{a_n}{3^n}=b_n$으로 놓으면 ㉠에서 $b_{n+1}=b_n+1$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 공차가 1인 등차수열이다.

이때, $b_1=\frac{a_1}{3^1}=\frac{1}{3}$이므로 $b_n=1+(n-1)\cdot\frac{1}{3}=\frac{n}{3}+\frac{2}{3}$

$\therefore a_n=3^nb_n=3^n\left(\frac{n}{3}+\frac{2}{3}\right)$

$\therefore a_4=3^4\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)=162$

정답_ ④

719

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$이므로 $2S_n=a_{n+1}-1$에서

$2S_n=S_{n+1}-S_n-1$, $S_{n+1}=3S_n+1$

$\therefore S_{n+1}+\frac{1}{2}=3\left(S_n+\frac{1}{2}\right)$

따라서 수열 $\left\{S_n+\frac{1}{2}\right\}$은 공비가 3인 등비수열이다.

이때, $S_1+\frac{1}{2}=a_1+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$이므로

$S_n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot3^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot3^n \qquad \therefore S_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$

$\therefore S_{10}=\frac{1}{2}(3^{10}-1)$

정답_ ③

720

n년 후의 연봉을 a_n만 원이라고 하자. 이때, 올해 연봉은 5000만 원이고, 매년 전해의 연봉의 1.2배보다 400만 원씩 덜 받으므로

(i) 1년 후의 연봉은 $a_1=5000\times1.2-400=5600$

(ii) $(n+1)$년 후의 연봉은 $a_{n+1}=1.2a_n-400$

$\therefore a_{n+1}-2000=1.2(a_n-2000)$ ······ ㉠

㉠에서 수열 $\{a_n-2000\}$은 공비가 1.2인 등비수열이다.

이때, $a_1-2000=5600-2000=3600$이므로

$a_n-2000=3600\times1.2^{n-1}$

$\therefore a_n=3600\times1.2^{n-1}+2000$

$\therefore a_{10}=3600\times1.2^9+2000=3600\times5.25+2000$
$=20900$(만 원)

따라서 10년 후 K군의 연봉은 2억 900만 원이다.

정답_ ③

721

n시간 후의 미생물의 수를 a_n마리라고 하자. 이때, 처음에 6마리가 있었고, 1시간마다 2마리는 죽고 나머지는 각각 3마리로 분열하므로

(i) 1시간 후의 미생물의 수는 $a_1=3(6-2)=12$

(ii) $(n+1)$시간 후의 미생물의 수는 $a_{n+1}=3(a_n-2)$

$\therefore a_{n+1}-3=3(a_n-3)$ ······ ㉠

㉠에서 수열 $\{a_n-3\}$은 공비가 3인 등비수열이다.

이때, $a_1-3=12-3=9$이므로 $a_n-3=9\cdot3^{n-1}=3^{n+1}$

$\therefore a_n=3^{n+1}+3$

$a_n>1000$에서 $3^{n+1}+3>1000 \qquad \therefore 3^{n+1}>997$

이때, $3^6=729$, $3^7=2187$이므로 $n+1\ge7 \qquad \therefore n\ge6$

따라서 처음으로 1000마리가 넘게 관찰되는 것은 6시간 후이다.

정답_ ②

722

명제 $p(n)$이 모든 홀수에 대하여 성립함을 증명하려면 일단 $p(1)$이 참임을 보여야 한다.

$p(1)$이 참일 때, ㄷ을 보이면 $p(1)$, $p(3)$, $p(5)$, $p(7)$, …이 참이다.

따라서 보기에서 반드시 보여야 할 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ②

참고

$p(1)$이 참일 때, ㄹ을 보이면 $p(1)$, $p(3)$, $p(7)$, $p(15)$, …가 참이다.

723

(i) $p(1)$이 참이므로 (나)에 의해

$p(1+3)$, $p(1+3\cdot2)$, …, $p(1+3l)$이 참이다.

(단, l은 자연수이다.)

(ii) $p(2)$가 참이므로 (나)에 의해

$p(2+3)$, $p(2+3\cdot2)$, …, $p(2+3m)$이 참이다.

(단, m은 자연수이다.)

(i), (ii)에 의해 $p(1+3l)$ 꼴과 $p(2+3m)$ 꼴인 명제는 반드시 참이다.

$11=2+3\cdot3$, $20=2+3\cdot6$, $31=1+3\cdot10$

이므로 $p(11)$, $p(20)$, $p(31)$은 반드시 참이지만 $p(15)$는 반드시 참이라고 할 수 없다.

따라서 보기에서 반드시 참인 명제는 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 정답_ ⑤

724

$p(k)$와 $p(k+1)$이 참일 때, $p(k+2)$가 참이므로 다음과 같이 연쇄 반응이 일어난다.

$p(3)$, $p(4)$ → $p(5)$

$p(4)$, $p(5)$ → $p(6)$

$p(5)$, $p(6)$ → $p(7)$

⋮

따라서 명제 $p(n)$이 3 이상의 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하기 위해서는 $p(3)$, $p(4)$가 참임을 반드시 보여야 한다.

정답_ ④

725

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{1}{1\cdot3}=\frac{1}{3}$, (우변)$=\frac{1}{2\cdot1+1}=\frac{1}{3}$이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

위의 식의 양변에 $\boxed{(가)\ \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$을 더하면

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\boxed{(가)\ \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\boxed{(나)\ \frac{k+1}{2k+3}}$$

즉, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의해 임의의 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

∴ (가) : $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+3}$

따라서 $f(k)=\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, $g(k)=\frac{k+1}{2k+3}$이므로

$f(1)=\frac{1}{15}$, $g(1)=\frac{2}{5}$ ∴ $\frac{g(1)}{f(1)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{15}}=6$ 정답_ ②

726

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=(2\times1-1)\times2^0=1$,

(우변)$=(2\times1-3)\times2^1+3=1$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}(2k-1)2^{k-1}=(2m-3)2^m+3$$

$n=m+1$일 때, $(*)$이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1}(2k-1)2^{k-1}=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)2^{k-1}+\{2(m+1)-1\}2^m$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)2^{k-1}+(\boxed{(가)\ 2m+1})\times2^m$$

$$=(2m-3)2^m+3+(\boxed{(가)\ 2m+1})\times2^m$$

$$=\{(2m-3)+(2m+1)\}2^m+3$$

$$=(\boxed{(나)\ 2m-1})\times2^{m+1}+3$$

즉, $n=m+1$일 때에도 $(*)$이 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

∴ (가) : $2m+1$, (나) : $2m-1$

따라서 $f(m)=2m+1$, $g(m)=2m-1$이므로

$f(4)\times g(2)=9\cdot3=27$ 정답_ ⑤

727

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=\left(\sum_{k=1}^{1}a_k\right)^2=(1+1)^2=\boxed{(가)\ 4}$,

(우변)$=\sum_{k=1}^{1}(a_k)^3-2\sum_{k=1}^{1}a_k=(1+1)^3-2\cdot2=\boxed{(가)\ 4}$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m\ (m\geq1)$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\right)^2=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3-2\sum_{k=1}^{m}a_k$이므로

$$\left(\sum_{k=1}^{m+1}a_k\right)^2$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}\right)^2$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\right)^2+2\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\right)a_{m+1}+(a_{m+1})^2$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3-2\sum_{k=1}^{m}a_k+2\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\right)a_{m+1}+(a_{m+1})^2$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3+2(a_{m+1}-1)\sum_{k=1}^{m}a_k+(a_{m+1})^2$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3+2(m+2-1)\sum_{k=1}^{m}a_k+(a_{m+1})^2$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3+(\boxed{(나)\ 2m+2})\sum_{k=1}^{m}a_k+(a_{m+1})^2$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3+(2m+2)\sum_{k=1}^{m}(k+1)+(m+2)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3+(m+1)\{m(m+1)+2m\}+(m^2+4m+4)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3+m^3+5m^2+7m+4$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3+(m+2)^3-(m^2+5m+4)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3+(a_{m+1})^3-(m^2+5m+4)\ (\because a_n=n+1)$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}(a_k)^3-2\sum_{k=1}^{m+1}a_k$$

즉, $n=m+1$일 때에도 $(*)$이 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의해 모든 자연수 n에 대하여 (＊)이 성립한다.

$\therefore$ (가) : 4, (나) : $2m+2$

따라서 $p=4$, $f(m)=2m+2$이므로

$f(p)=f(4)=2\cdot4+2=10$ 정답_ ①

728

$1^4+2^4+3^4+\cdots+k^4+(k+1)^4$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)(3k^2+9k+5)}{30}$ …… ㉠

㉠의 양변의 k 대신 $k-1$을 대입하면

$1^4+2^4+3^4+\cdots+k^4$

$=\dfrac{k(k+1)\{2(k-1)+3\}\{3(k-1)^2+9(k-1)+5\}}{30}$

$=\dfrac{k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)}{30}$ …… ㉡

이때, ㉠은 $n=k+1$일 때 주어진 등식이 성립하는 식이므로 ㉡은 $n=k$일 때 주어진 등식이 성립하는 식이다.

따라서 (가)에 알맞은 식은

$\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

$\therefore a=3,\ b=3,\ c=-1$

$\therefore a+b-c=3+3-(-1)=7$ 정답_ 7

729

(i) $n=\boxed{(가)\ 2}$일 때, (좌변)$=(1+h)^2=1+2h+h^2$, (우변)$=1+2h$

이때, $h^2>0$이므로 $(1+h)^{\boxed{(가)\ 2}}>\boxed{(나)\ 1+2h}$

즉, 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k(k\ge\boxed{(가)\ 2})$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k>1+kh$

위의 식의 양변에 $\boxed{(다)\ 1+h}$를 곱하면

$(1+h)^{k+1}>(1+kh)(\boxed{(다)\ 1+h})$

우변을 전개하여 정리하면

$1+(k+1)h+kh^2>1+(k+1)h$

$\therefore (1+h)^{k+1}>1+(k+1)h$

즉, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의해 $n\ge2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

$\therefore$ (가) : 2, (나) : $1+2h$, (다) : $1+h$

따라서 $p=2$, $f(h)=1+2h$, $g(h)=1+h$이므로

$f(p)\times g(p)=f(2)\times g(2)=5\cdot3=15$ 정답_ ④

730

(i) $n=2$일 때, (좌변)$=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{5}{4}$, (우변)$=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k(k\ge2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{k^2}<2-\dfrac{1}{k}$

위의 식의 양변에 $\boxed{(가)\ \dfrac{1}{(k+1)^2}}$을 더하면

$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{k^2}+\boxed{(가)\ \dfrac{1}{(k+1)^2}}$

$<2-\dfrac{1}{k}+\boxed{(가)\ \dfrac{1}{(k+1)^2}}$

$\left(2-\dfrac{1}{k+1}\right)-\left\{2-\dfrac{1}{k}+\boxed{(가)\ \dfrac{1}{(k+1)^2}}\right\}$

$=-\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{(k+1)^2}$

$=\dfrac{-k(k+1)+(k+1)^2-k}{k(k+1)^2}$

$=\boxed{(나)\ \dfrac{1}{k(k+1)^2}}>0$에서

$2-\dfrac{1}{k}+\boxed{(가)\ \dfrac{1}{(k+1)^2}}<2-\dfrac{1}{k+1}$

$\therefore \dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{(k+1)^2}<2-\dfrac{1}{k+1}$

즉, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의해 $n\ge2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다. 정답_ ④

731

(i) $n=2$일 때, $2^3-2=6$이므로 3의 배수이다.

(ii) $n=k(k\ge2)$일 때, k^3-k가 3의 배수라고 가정하면

$(k+1)^3-(k+1)=(k^3+3k^2+3k+1)-(k+1)$

$=k^3+3k^2+2k$

$=k^3-k+3k^2+3k$

$=\boxed{(가)\ k^3-k}+3(\boxed{(나)\ k^2+k})$

이때, $\boxed{(가)\ k^3-k}$, $3(\boxed{(나)\ k^2+k})$는 모두 3의 배수이므로

$(k+1)^3-(k+1)$도 3의 배수이다.

즉, $n=k+1$일 때에도 n^3-n은 3의 배수이다.

따라서 (i), (ii)에 의해 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 n^3-n은 3의 배수이다.

$\therefore$ (가) : k^3-k, (나) : k^2+k

따라서 $f(k)=k^3-k$, $g(k)=k^2+k$이므로

$f(2)\times g(1)=6\cdot2=12$ 정답_ ②

732

(i) $n=1$일 때

$a_4=2a_3+a_2=2(2a_2+a_1)+a_2=5a_2+2a_1$

$=5\cdot2+2\cdot1=\boxed{(가)\ 12}$

이므로 12의 배수이다.

(ⅱ) $n=k$일 때, a_{4k}가 12의 배수라고 가정하면

$$a_{4(k+1)}=2a_{4k+3}+a_{4k+2}=2(2a_{4k+2}+a_{4k+1})+a_{4k+2}$$
$$=5a_{4k+2}+2a_{4k+1}=5(2a_{4k+1}+a_{4k})+2a_{4k+1}$$
$$=\boxed{(나)\ 12}a_{4k+1}+\boxed{(다)\ 5}a_{4k}$$

이때, $12a_{4k+1}$과 $5a_{4k}$가 모두 12의 배수이므로 $a_{4(k+1)}$도 12의 배수이다.

즉, $n=k+1$일 때에도 a_{4n}은 12의 배수이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 모든 자연수 n에 대하여 a_{4n}은 12의 배수이다.

∴ (가) : 12, (나) : 12, (다) : 5

따라서 (가), (나), (다)에 알맞은 수들의 합은

$12+12+5=29$ 정답_ ④

733

$a_1=2$이고 $a_1=2\geq 2$이므로 $a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}\cdot 2=1$

$a_2=1<2$이므로 $a_3=\sqrt{2a_2}=\sqrt{2}$

$a_3=\sqrt{2}<2$이므로 $a_4=\sqrt{2a_3}=\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}=2=a_1$ ❶

따라서 수열 $\{a_n\}$은 2, 1, $\sqrt{2}$가 순서대로 반복된다. ❷

$2018=3\cdot 672+2$이므로 $a_{2018}=a_2=1$ ❸

정답_ 1

단계	채점 기준	비율
❶	a_2, a_3, a_4의 값 구하기	30%
❷	수열 $\{a_n\}$의 규칙 찾기	30%
❸	a_{2018}의 값 구하기	40%

734

$a_{n+1}-a_n=f(n)$이므로 양변에 n 대신 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2-a_1=f(1)$$
$$a_3-a_2=f(2)$$
$$a_4-a_3=f(3)$$
$$\vdots$$
$$+)\ a_n-a_{n-1}=f(n-1)$$
$$a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$

$a_1=1$이므로 $a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$ ⋯⋯ ㉠

❶

㉠의 양변에 n 대신 $n+1$을 대입하면

$$a_{n+1}=1+\sum_{k=1}^{n}f(k)$$
$$=1+(n^2-1)=n^2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$ ❷

$\therefore a_{100}=a_{99+1}=99^2$ ❸

정답_ 99^2

단계	채점 기준	비율
❶	a_n을 $f(k)$에 대한 식으로 나타내기	50%
❷	a_{n+1}을 n에 대한 식으로 나타내기	40%
❸	a_{100}의 값 구하기	10%

735

$a_{n+1}=\left\langle\frac{10}{2n-1}\right\rangle\times a_n$의 양변에 n 대신 1, 2, 3, ⋯, 99를 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2=\left\langle\frac{10}{1}\right\rangle a_1$$
$$a_3=\left\langle\frac{10}{3}\right\rangle a_2$$
$$a_4=\left\langle\frac{10}{5}\right\rangle a_3$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_{100}=\left\langle\frac{10}{197}\right\rangle a_{99}$$
$$a_{100}=\left\langle\frac{10}{1}\right\rangle\times\left\langle\frac{10}{3}\right\rangle\times\left\langle\frac{10}{5}\right\rangle\times\cdots\times\left\langle\frac{10}{197}\right\rangle\times a_1$$ ❶

$\left\langle\frac{10}{1}\right\rangle=10$, $\left\langle\frac{10}{3}\right\rangle=4$

$\left\langle\frac{10}{5}\right\rangle=2$, $\left\langle\frac{10}{7}\right\rangle=2$, $\left\langle\frac{10}{9}\right\rangle=2$

$\left\langle\frac{10}{11}\right\rangle=1$, $\left\langle\frac{10}{13}\right\rangle=1$, ⋯, $\left\langle\frac{10}{197}\right\rangle=1$ ❷

$$\therefore a_{100}=\left\langle\frac{10}{1}\right\rangle\times\left\langle\frac{10}{3}\right\rangle\times\left\langle\frac{10}{5}\right\rangle\times\cdots\times\left\langle\frac{10}{197}\right\rangle\times a_1$$
$$=10\times4\times2\times2\times2\times1\times\cdots\times1\times\frac{1}{2}$$
$$=160$$ ❸

정답_ 160

단계	채점 기준	비율
❶	a_{100}과 a_1 사이의 관계식 구하기	40%
❷	$n=1,\ 2,\ \cdots,\ 99$일 때 $\left\langle\frac{10}{2n-1}\right\rangle$의 값 구하기	40%
❸	a_{100}의 값 구하기	20%

736

(1) $a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$에서

$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$ ⋯⋯ ㉠

$a_{n+1}-a_n=b_n$으로 놓으면 ㉠에서 $b_{n+1}=3b_n$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다.

이때, $b_1=a_2-a_1=2-1=1$이므로 $b_n=1\cdot3^{n-1}=3^{n-1}$

$a_{n+1}-a_n=b_n$에서 $a_{n+1}-a_n=3^{n-1}$이므로 양변에 n 대신 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$a_2-a_1=3^0$

$a_3-a_2=3$

$a_4-a_3=3^2$

$\vdots$

$+\underline{)\ a_n-a_{n-1}=3^{n-2}}$

$a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}=1+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}$

$=1+\dfrac{1\cdot(3^{n-1}-1)}{3-1}=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$ ······ ❶

(2) $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+1}$의 양변에 역수를 취하면

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3a_n+1}{a_n}$ $\quad\therefore \dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+3$ ······ ㉠

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$으로 놓으면 ㉠에서 $b_{n+1}=b_n+3$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 공차가 3인 등차수열이다.

이때, $b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{2}$이므로 $b_n=\dfrac{1}{2}+(n-1)\cdot 3=\dfrac{6n-5}{2}$

$\therefore a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{2}{6n-5}$ ······ ❷

정답_ (1) $a_n=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$ (2) $a_n=\dfrac{2}{6n-5}$

단계	채점 기준	비율
❶	$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$인 수열 a_n의 일반항 구하기	50%
❷	$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+1}$인 수열 a_n의 일반항 구하기	50%

737

$3a_na_{n+1}=a_n-a_{n+1}$의 양변을 a_na_{n+1}로 나누면

$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=3$ ······ ㉠

······ ❶

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$으로 놓으면 ㉠에서 $b_{n+1}-b_n=3$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 공차가 3인 등차수열이다.

이때, $b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$이므로 $b_n=1+(n-1)\cdot 3=3n-2$

$\therefore a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{3n-2}$ ······ ❷

$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\cdots+a_ka_{k+1}$

$=\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

$=\dfrac{1}{3}\Big\{\Big(1-\dfrac{1}{4}\Big)+\Big(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}\Big)+\Big(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}\Big)+\cdots$

$+\Big(\dfrac{1}{3k-2}-\dfrac{1}{3k+1}\Big)\Big\}$

$=\dfrac{1}{3}\Big(1-\dfrac{1}{3k+1}\Big)=\dfrac{k}{3k+1}$ ······ ❸

$\dfrac{k}{3k+1}>\dfrac{33}{100}$에서 $k>33$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 34이다. ······ ❹

정답_ 34

단계	채점 기준	비율
❶	$\dfrac{1}{a_{n+1}}$과 $\dfrac{1}{a_n}$ 사이의 관계식 구하기	20%
❷	a_n 구하기	30%
❸	$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_ka_{k+1}$을 k에 대한 식으로 나타내기	30%
❹	k의 최솟값 구하기	20%

738

n번째 1분 동안 흘러간 거리를 a_n m라고 하면

(i) 처음 1분 동안 흘러간 거리는 $a_1=150$ ······ ❶

(ii) $(n+1)$번째 1분 동안 흘러간 거리는

$a_{n+1}=0.8a_n+20$ ······ ❷

$\therefore a_{n+1}-100=0.8(a_n-100)$ ······ ㉠

㉠에서 수열 $\{a_n-100\}$은 공비가 0.8인 등비수열이다.

이때, $a_1-100=150-100=50$이므로 $a_n-100=50\cdot 0.8^{n-1}$

$\therefore a_n=50\cdot 0.8^{n-1}+100$ ······ ❸

따라서 10분 동안 용암이 흘러간 총거리는

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\sum_{k=1}^{10}(50\cdot 0.8^{k-1}+100)$

$=\dfrac{50(1-0.8^{10})}{1-0.8}+100\times 10$

$=\dfrac{50(1-0.1)}{1-0.8}+1000$

$=225+1000$

$=1225$ (m) ······ ❹

정답_ 1225 m

단계	채점 기준	비율
❶	n번째 1분 동안 흘러간 거리를 a_nm라고 할 때, a_n의 값 구하기	10%
❷	a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식 구하기	30%
❸	a_n 구하기	30%
❹	10분 동안 용암이 흘러간 총거리 구하기	30%

739

$a_{n+1}-a_n=2^n$이므로 양변에 n 대신 1, 2, 3, ···, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$a_2-a_1=2^1$

$a_3-a_2=2^2$

$a_4-a_3=2^3$

$\vdots$

$\times\underline{)\ a_n-a_{n-1}=2^{n-1}}$

$a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}2^k$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k$

$a_1=1$이므로 $a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-1$

P_{10}은 0에서 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\sum_{k=1}^{10}a_k$만큼 움직인 점의 위치이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2^k-1)=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}-10=2036$

이때, $2036=10\cdot203+6$이므로 구하는 수는 6이다.

정답_ ④

740

$2S_n=(n+1)a_n$ ⋯⋯ ㉠

$2S_{n+1}=(n+2)a_{n+1}$ ⋯⋯ ㉡

㉡−㉠을 하면

$2(S_{n+1}-S_n)=(n+2)a_{n+1}-(n+1)a_n$

$2a_{n+1}=(n+2)a_{n+1}-(n+1)a_n$

$na_{n+1}=(n+1)a_n \quad \therefore a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$

양변에 n 대신 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2=\frac{2}{1}a_1$$
$$a_3=\frac{3}{2}a_2$$
$$a_4=\frac{4}{3}a_3$$
$$\vdots$$
$$\times\big)\ a_n=\frac{n}{n-1}a_{n-1}$$
$$a_n=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}\times a_1=3n$$

$\therefore a_{12}=3\cdot12=36$

정답_ ③

741

제품 P_n을 한 개 만드는 데 걸리는 시간을 a_n이라고 하면 $a_1=1$

이때, 제품 P_{2n}을 한 개 만드는 데 걸리는 시간은 제품 P_n을 두 개 만드는 데 걸리는 시간과 연결하는 데 걸리는 시간 $2n$의 합이므로 $a_{2n}=2a_n+2n$

위의 식의 양변에 n 대신 1, 2, 4, 8을 대입하면

$a_2=2a_1+2\cdot1=2\cdot1+2=4$

$a_4=2a_2+2\cdot2=2\cdot4+4=12$

$a_8=2a_4+2\cdot4=2\cdot12+8=32$

$a_{16}=2a_8+2\cdot8=2\cdot32+16=80$

따라서 제품 P_{16}을 한 개 만드는 데 걸리는 시간은 80이다.

정답_ ③

742

$a_n+a_{n+1}=n^2+5$이므로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$\begin{aligned}S_{20}&=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{19}+a_{20}\\&=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{19}+a_{20})\\&=(1^2+5)+(3^2+5)+\cdots+(19^2+5)\\&=\sum_{k=1}^{10}\{(2k-1)^2+5\}\\&=\sum_{k=1}^{10}(4k^2-4k+6)\\&=4\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-4\cdot\frac{10\cdot11}{2}+6\cdot10\\&=1540-220+60=1380\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{19}&=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots+a_{18}+a_{19}\\&=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{18}+a_{19})\\&=a_1+(2^2+5)+(4^2+5)+\cdots+(18^2+5)\\&=4+\sum_{k=1}^{9}\{(2k)^2+5\}\\&=4+\sum_{k=1}^{9}(4k^2+5)\\&=4+4\cdot\frac{9\cdot10\cdot19}{6}+5\cdot9\\&=4+1140+45=1189\end{aligned}$$

$\therefore a_{20}=S_{20}-S_{19}=1380-1189=191$

정답_ ①

743

ㄱ은 옳지 않다.

6은 짝수이므로 $a_{2n}=a_n+2$에서 $a_6=a_3+2$

3은 홀수이므로 $a_{2n+1}=a_n-2$에서

$a_3=a_1-2=2-2=0 \quad \therefore a_6=0+2=2$

ㄴ은 옳다.

2^k (k는 자연수)은 짝수이고 2^{k-r} ($r<k$, r는 자연수)도 짝수이므로

$$\begin{aligned}a_n&=a_{2^k}=a_{2^{k-1}}+2=a_{2^{k-2}}+2+2=\cdots=a_{2^0}+2k\\&=a_1+2k=2+2k\end{aligned}$$

ㄷ도 옳다.

$a_{2n}=a_n+2,\ a_{2n+1}=a_n-2$이므로

$a_{2n}-a_{2n+1}=4$

$a_{2^k}-a_{2^k+1}=4,\ a_{2^k+1}=a_{2^k}-4$

따라서 $n=2^k+1$일 때, ㄴ을 이용하면

$a_n=a_{2^k+1}=a_{2^k}-4=(2k+2)-4=2k-2$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ④