# 풍산자 필수유형

확률과 통계 정답과 풀이

# I 경우의 수

## 01 순열과 조합

### 001
A, B, C, D 네 명의 학생이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$ 정답_ ⑤

### 002
조부모 2명을 1명으로 생각하면 5명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는 $(5-1)!=4!=24$

조부모끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는 $24\cdot 2=48$ 정답_ ②

### 003
한 쌍의 부부를 한 사람으로 생각하면 3명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(3-1)!=2!=2$

한 쌍의 부부에서 부부끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는 $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=16$ 정답_ ③

### 004
어른 4명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$

어른들 사이사이 4개의 자리에 아이 3명을 앉히는 방법의 수는

${}_4P_3=24$

따라서 구하는 방법의 수는 $6\cdot 24=144$ 정답_ ①

### 005
한국인 3명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(3-1)!=2!=2$

한국인들 사이사이 3개의 자리에 미국인 3명을 앉히는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는 $2\cdot 6=12$ 정답_ 12

### 006
조부모와 경주를 한 사람으로 생각하면 4명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는 $(4-1)!=3!=6$

조부모가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는 $6\cdot 2=12$ 정답_ 12

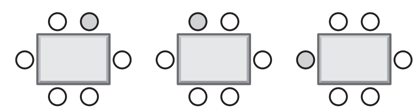
### 007
운서의 아버지 자리가 결정되면 어머니 자리는 마주 보는 자리에 고정되므로 구하는 방법의 수는 2쌍의 부부와 운서의 아버지가 원탁에 둘러앉는 방법의 수, 즉 5명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수와 같다.

따라서 구하는 방법의 수는 $(5-1)!=4!=24$ 정답_ 24

### 008
1부터 5까지의 자연수를 원형으로 나열하는 방법의 수와 같으므로 $(5-1)!=4!=24$ 정답_ ②

### 009
6명이 원형으로 둘러앉는 방법의 수는 $(6-1)!=5!$

이때, 원형으로 둘러앉는 한 가지 방법에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 3가지씩 존재한다.

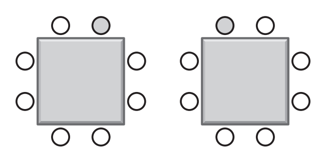


따라서 구하는 방법의 수는 $5!\cdot 3$

$\therefore a=3$ 정답_ ①

### 010
8명이 원형으로 둘러앉는 방법의 수는 $(8-1)!=7!$

이때, 원형으로 둘러앉는 한 가지 방법에 대하여 정사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.

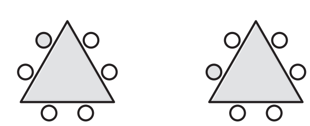


따라서 구하는 방법의 수는 $7!\cdot 2$

$\therefore a=2$ 정답_ ①

### 011
6명이 원형으로 둘러앉는 방법의 수는 $(6-1)!=5!=120$

이때, 원형으로 둘러앉는 한 가지 방법에 대하여 정삼각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 방법의 수는 $120\cdot 2=240$ 정답_ ④

### 012
사각뿔의 밑면을 칠하는 방법의 수는 5이고, 밑면에 칠한 색을 제외한 4가지 색을 옆면에 칠하는 방법의 수는 $(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는 $5\cdot 6=30$ 정답_ 30

### 013
정육면체의 윗면에 한 가지 색을 칠하면 아랫면을 칠하는 방법의 수는 5이고, 옆면을 칠하는 방법의 수는 $(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는 $5\cdot 6=30$ 정답_ ①

## 014
서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_3\Pi_5=3^5=243$ 정답_ ④

## 015
서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_4\Pi_3=4^3=64$ 정답_ ⑤

## 016
서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_4\Pi_5=4^5=1024$ 정답_ ①

## 017
2개의 답안 ○, ×에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_2\Pi_4=2^4=16$ 정답_ ④

## 018
서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_3\Pi_6=3^6=729$ 정답_ 729

## 019
서로 다른 4개의 놀이기구에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_3=4^3=64$ 정답_ ③

## 020
문자 $a, b, c$에서 중복을 허락하여 3개를 택하여 나열하는 방법의 수는 ${}_3\Pi_3=3^3=27$
이 중에서 $a$가 연속되는 경우의 수는
$aab, baa, aac, caa, aaa$
의 5이다.
따라서 수신 가능한 단어의 개수는
$27-5=22$ 정답_ 22

## 021
남학생이 각각 배정받을 수 있는 고등학교의 수는 여자 고등학교 1개를 제외한 나머지 4개이고, 여학생이 각각 배정받을 수 있는 고등학교의 수는 남자 고등학교 2개를 제외한 나머지 3개이다.
따라서 구하는 경우의 수는
${}_4\Pi_2\cdot{}_3\Pi_3=4^2\cdot3^3=432$ 정답_ 432

## 022
모스 부호를 1번 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는
${}_2\Pi_1=2^1=2$ ⇦ ●, ─의 2개
모스 부호를 2번 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는
${}_2\Pi_2=2^2$ ⇦ ●●, ●─, ─●, ──의 4개
같은 방법으로 모스 부호를 3번, 4번, 5번, 6번 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는 각각 ${}_2\Pi_3$, ${}_2\Pi_4$, ${}_2\Pi_5$, ${}_2\Pi_6$이므로 구하는 신호의 개수는
$2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6=2+4+8+16+32+64$
$=126$ 정답_ 126

## 023
손가락을 한 번 펼쳐서 만들 수 있는 신호의 개수는
${}_3\Pi_1=3^1=3$
손가락을 두 번 펼쳐서 만들 수 있는 신호의 개수는
${}_3\Pi_2=3^2=9$
같은 방법으로 손가락을 세 번, 네 번, 다섯 번 펼쳐서 만들 수 있는 신호의 개수는 각각 ${}_3\Pi_3$, ${}_3\Pi_4$, ${}_3\Pi_5$이므로 구하는 신호의 개수는
$3+3^2+3^3+3^4+3^5=3+9+27+81+243=363$ 정답_ ⑤

## 024
천의 자리 숫자가 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3개
백의 자리, 십의 자리, 일의 자리 숫자를 택하는 방법의 수는 0, 1, 2, 3의 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_4\Pi_3=4^3=64$
따라서 구하는 네 자리 자연수의 개수는
$3\cdot64=192$ 정답_ ④

## 025
네 자리의 비밀번호에서 일의 자리 숫자가 될 수 있는 것은
1, 3, 5의 3개
천의 자리, 백의 자리, 십의 자리 숫자를 택하는 방법의 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_5\Pi_3=5^3=125$
따라서 구하는 비밀번호의 개수는
$3\cdot125=375$ 정답_ 375

## 026
일의 자리 숫자가 될 수 있는 것은 0, 5의 2개
천의 자리 숫자가 될 수 있는 것은 2, 3, …, 9의 8개
백의 자리, 십의 자리 숫자를 택하는 방법의 수는 0, 1, 2, 3, …, 9의 10개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_{10}\Pi_2=10^2=100$
따라서 구하는 5의 배수의 개수는
$2\cdot8\cdot100=1600$ 정답_ 1600

## 027
4개의 숫자에서 3개를 택하는 중복순열의 수는
${}_4\Pi_3=4^3=64$

3을 제외한 나머지 3개의 숫자에서 3개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_3\Pi_3=3^3=27$
따라서 구하는 세 자리의 정수의 개수는
$64-27=37$ 정답_ 37

## 028
세 숫자를 중복을 허락하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는
${}_3\Pi_4=3^4=81$
이 중에서 1이 포함되지 않은 자연수의 개수는
${}_2\Pi_4=2^4=16$
2가 포함되지 않은 자연수의 개수는
${}_2\Pi_4=2^4=16$
1과 2가 모두 포함되지 않은 자연수의 개수는
${}_1\Pi_4=1^4=1$
따라서 1과 2가 모두 포함되어 있는 자연수의 개수는
$81-16-16+1=50$ 정답_ ⑤

## 029
한 자리의 자연수의 개수는 5
두 자리의 자연수의 개수는 $5\cdot{}_6\Pi_1=5\cdot6=30$
세 자리의 자연수의 개수는 $5\cdot{}_6\Pi_2=5\cdot6^2=180$
3000보다 작은 네 자리의 자연수의 개수는 ${}_6\Pi_3=6^3=216$
따라서 3000보다 작은 자연수의 개수는
$5+30+180+216=431$
이므로 3000은 432번째 수이다. 정답_ ⑤

## 030
$X$에서 $Y$로의 함수의 개수는 $Y$의 원소 2, 4, 6의 3개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_3\Pi_5=3^5$ 정답_ ③

## 031
$f(1)=1$이므로 $Y$의 원소 1, 2, 3의 3개에서 중복을 허락하여 3개를 택하여 $X$의 원소 2, 3, 4에 대응시키면 된다.
따라서 구하는 함수의 개수는
${}_3\Pi_3=3^3=27$ 정답_ ⑤

## 032
$X$에서 $Y$로의 함수의 개수는
${}_5\Pi_3=5^3=125$
$X$에서 $Y$로의 함수 중 $f(y)=1$인 함수의 개수는
${}_5\Pi_2=5^2=25$
따라서 구하는 함수의 개수는
$125-25=100$ 정답_ ③

## 033
6개의 문자 c, o, f, f, e, e를 한 줄로 나열하는 방법의 수는 f가 2개, e가 2개 있으므로 $\frac{6!}{2!2!}=180$ 정답_ ③

## 034
2개의 흰색 깃발을 양 끝에 놓고 그 사이에 흰색 깃발 3개, 파란색 깃발 5개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\frac{8!}{3!5!}=56$ 정답_ ①

## 035
s와 r를 제외한 3개의 문자 t, a, t를 한 줄로 나열하는 방법의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$
양 끝에 s와 r를 나열하는 방법의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 방법의 수는 $3\cdot2=6$ 정답_ 6

## 036
자음 f, t, b, l, l을 한 문자 C로 생각하면 C, o, o, a를 한 줄로 나열하는 방법의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$
자음끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $\frac{5!}{2!}=60$
따라서 구하는 방법의 수는 $12\cdot60=720$ 정답_ ⑤

## 037
7개의 문자 s, u, c, c, e, s, s를 한 줄로 나열하는 방법의 수는
$\frac{7!}{3!2!}=420$
u, e를 한 문자 V로 생각하여 6개의 문자 V, s, c, c, s, s를 한 줄로 나열하는 방법의 수는 $\frac{6!}{3!2!}=60$
u와 e가 자리를 바꾸는 방법의 수는 2이므로 u와 e가 이웃하도록 나열하는 방법의 수는 $60\cdot2=120$
따라서 구하는 방법의 수는 $420-120=300$ 정답_ ⑤

## 038
6개의 숫자 0, 1, 1, 2, 2, 3을 한 줄로 나열하는 방법의 수는
$\frac{6!}{2!2!}=180$
이때, 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 1, 1, 2, 2, 3을 한 줄로 나열하는 방법의 수와 같으므로
$\frac{5!}{2!2!}=30$
따라서 구하는 정수의 개수는 $180-30=150$ 정답_ 150

## 039

오른쪽과 같이 홀수 3, 5, 5, 5는 $\boxed{홀}$, 짝수 4, 4, 6은 $\boxed{짝}$의 위치에 놓으면 된다.

| 홀 | 짝 | 홀 | 짝 | 홀 | 짝 | 홀 |
|---|---|---|---|---|---|---|

이때, 4개의 숫자 3, 5, 5, 5를 한 줄로 나열하는 방법의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

3개의 숫자 4, 4, 6을 한 줄로 나열하는 방법의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 방법의 수는 $4\cdot3=12$ 정답_ 12

## 040

일의 자리의 숫자가 1 또는 3일 때 홀수가 된다.

(i) 일의 자리의 숫자가 1인 경우

0, 1, 3, 3, 3이 적혀 있는 카드를 한 줄로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

이때, 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$

$\therefore 20-4=16$

(ii) 일의 자리의 숫자가 3인 경우

0, 1, 1, 3, 3이 적혀 있는 카드를 한 줄로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!2!}=30$

이때, 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$

$\therefore 30-6=24$

(i), (ii)에서 구하는 홀수의 개수는 $16+24=40$ 정답_ ④

## 041

t, c, h, r의 순서가 정해져 있으므로 같은 문자 V로 생각하여 7개의 문자 V, e, a, V, V, e, V를 한 줄로 나열한 후, 첫 번째 V는 t, 두 번째 V는 c, 세 번째 V는 h, 네 번째 V는 r로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

$\frac{7!}{4!2!}=105$ 정답_ ②

## 042

n, m과 s, l의 순서가 각각 정해져 있으므로 n, m을 모두 A로, s, l을 모두 B로 생각하여 8개의 문자 e, A, B, e, A, b, B, e를 한 줄로 나열한 후, 첫 번째 A는 n, 두 번째 A는 m, 첫 번째 B는 s, 두 번째 B는 l로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는 $\frac{8!}{2!2!3!}=1680$ 정답_ ②

## 043

1, 2, 3의 순서가 정해져 있으므로 1, 2, 3을 모두 x로 생각하여 x, x, x, 4, 4, 5, 5를 한 줄로 나열한 후, 첫 번째 x는 1, 두 번째 x는 2, 세 번째 x는 3으로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

$\frac{7!}{2!2!3!}=210$ 정답_ ③

## 044

2, 4와 홀수 1, 3, 5의 순서가 각각 정해져 있으므로 2, 4를 모두 $a$, 1, 3, 5를 모두 $b$로 생각하면 구하는 경우의 수는 $b, a, b, a, b$, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!3!}=60$ 정답_ ②

## 045

A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\frac{7!}{4!3!}=35$ 정답_ ②

## 046

(i) A에서 P까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\frac{4!}{2!2!}=6$

(ii) P에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$6\cdot3=18$ 정답_ ①

## 047

(i) A에서 P까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(ii) P에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\frac{7!}{4!3!}=35$

P에서 Q를 지나 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{3!}{2!}=6\cdot3=18$

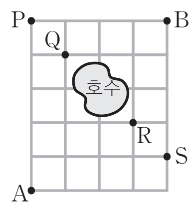
이므로 P에서 Q를 지나지 않고 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는 $35-18=17$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$4\cdot17=68$ 정답_ ①

## 048

오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법은 A → P → B, A → Q → B, A → R → B, A → S → B이다.




(i) A → P → B인 경우 : $1\cdot1=1$

(ii) A → Q → B인 경우 : $\dfrac{5!}{4!}\cdot\dfrac{4!}{3!}=5\cdot4=20$

(iii) A → R → B인 경우 : $\dfrac{5!}{3!2!}\cdot\dfrac{4!}{3!}=10\cdot4=40$

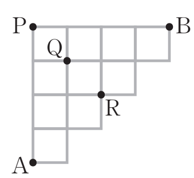
(iv) A → S → B인 경우 : $\dfrac{5!}{4!}\cdot1=5\cdot1=5$

(i)~(iv)에서 구하는 방법의 수는

$1+20+40+5=66$ 정답_③

## 049

오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법은 A → P → B, A → Q → B, A → R → B이다.




(i) A → P → B인 경우 : $1\cdot1=1$

(ii) A → Q → B인 경우 : $\dfrac{4!}{3!}\cdot\dfrac{4!}{3!}=4\cdot4=16$

(iii) A → R → B인 경우 : $\left(\dfrac{4!}{2!2!}-1\right)\left(\dfrac{4!}{2!2!}-1\right)=25$

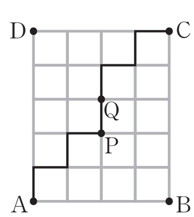
(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는

$1+16+25=42$ 정답_②

## 050

갑은 A에서 C로, 을은 C에서 A로 굵은 선을 따라 걸으므로 갑과 을은 오른쪽 그림의 $\overline{PQ}$의 중점에서 만나게 된다.

즉, 갑, 을, 병 세 사람이 모두 만나려면 병이 B에서 출발하여 $\overline{PQ}$를 거쳐 D까지 최단 거리로 가면 된다.




따라서 구하는 방법의 수는

$\dfrac{4!}{2!2!}\cdot1\cdot\dfrac{4!}{2!2!}=6\cdot1\cdot6=36$ 정답_36

## 051

꼭짓점 A에서 꼭짓점 B로 가려면 가로, 세로, 높이의 방향으로 각각 3번, 2번, 3번 이동해야 하므로 구하는 방법의 수는

$\dfrac{8!}{3!2!3!}=560$ 정답_⑤

## 052

(1) ${}_3H_0={}_{3+0-1}C_0={}_2C_0=1$

(2) ${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20$

(3) ${}_2H_3={}_{2+3-1}C_3={}_4C_3=4$

(4) ${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2=3$ 정답_(1) 1 (2) 20 (3) 4 (4) 3

## 053

(1) ${}_nH_4={}_{n+4-1}C_4={}_{n+3}C_4$이므로

$\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=15$

$n(n+1)(n+2)(n+3)=3\cdot4\cdot5\cdot6$

$\therefore n=3$

(2) ${}_5H_r={}_{5+r-1}C_r={}_{4+r}C_r={}_{4+r}C_4$이므로

$\dfrac{(4+r)(3+r)(2+r)(1+r)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=15$

$(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)=3\cdot4\cdot5\cdot6$

$\therefore r=2$ 정답_(1) $n=3$ (2) $r=2$

## 054

${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$ 정답_6

## 055

(i) 숫자 6을 0개 선택하는 경우

2, 4의 2개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 4개를 선택하면 되므로

${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

(ii) 숫자 6을 1개 선택하는 경우

2, 4의 2개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하면 되므로

${}_2H_3={}_{2+3-1}C_3={}_4C_3={}_4C_1=4$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $5+4=9$ 정답_④

## 056

3에서 10까지의 8개의 자연수 중에서 중복을 허락하여 4개의 자연수를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

${}_8H_4={}_{8+4-1}C_4={}_{11}C_4=330$ 정답_④

## 057

(1) $(a+b)^5$의 전개식의 각 항은 모두

$a^xb^y$ ($x+y=5$, $x$, $y$는 음이 아닌 정수) 꼴이다. 즉,

$a^5=aaaaa$, $a^4b=aaaab$, $a^3b^2=aaabb$, $\cdots$, $b^5=bbbbb$

따라서 구하는 항의 개수는 2개의 문자 $a$, $b$에서 5개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_5={}_{2+5-1}C_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

(2) $(a+b+c)^6$의 전개식의 각 항은 모두

$a^xb^yc^z$ ($x+y+z=6$, $x$, $y$, $z$는 음이 아닌 정수) 꼴이다. 즉,

$a^6=aaaaaa$, $a^5b=aaaaab$, $a^4bc=aaaabc$, $\cdots$,

$b^6=bbbbbb$

따라서 구하는 항의 개수는 3개의 문자 $a$, $b$, $c$에서 6개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3}H_{6}={}_{3+6-1}C_{6}={}_{8}C_{6}={}_{8}C_{2}=28$ 정답_(1) 6 (2) 28

## 058

$(x+y)^3$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 2개의 문자 $x, y$에서 3개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{2}H_{3}={}_{2+3-1}C_{3}={}_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}=4$

$(a+b+c)^5$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 3개의 문자 $a$, $b, c$에서 5개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3}H_{5}={}_{3+5-1}C_{5}={}_{7}C_{5}={}_{7}C_{2}=21$

따라서 구하는 항의 개수는

$4\cdot21=84$ 정답_⑤

## 059

2명의 후보를 A, B라고 하면 구하는 경우는 다음과 같다.

AAAAAAAAAA, AAAAAAAAAB,

AAAAAAAABB, ⋯, BBBBBBBBBB

따라서 2명의 후보 A, B에서 중복을 허락하여 10명을 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{2}H_{10}={}_{2+10-1}C_{10}={}_{11}C_{10}={}_{11}C_{1}=11$ 정답_②

## 060

구하는 방법의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 8개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{4}H_{8}={}_{4+8-1}C_{8}={}_{11}C_{8}={}_{11}C_{3}=165$ 정답_③

## 061

색연필, 볼펜, 형광펜을 1개씩 선택한 후, 색연필, 볼펜, 형광펜 중에서 중복을 허락하여 4개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3}H_{4}={}_{3+4-1}C_{4}={}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=15$ 정답_①

## 062

구하는 순서쌍의 개수는 3개의 문자 $x, y, z$에서 10개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3}H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_{2}=66$ 정답_66

## 063

구하는 순서쌍의 개수는 4개의 문자 $a$, $b$, $c$, $d$에서 $(9-4)$개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{4}H_{9-4}={}_{4}H_{5}={}_{4+5-1}C_{5}={}_{8}C_{5}={}_{8}C_{3}=56$ 정답_④

## 064

음이 아닌 정수해의 개수는 3개의 문자 $x, y, z$에서 8개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3}H_{8}={}_{3+8-1}C_{8}={}_{10}C_{8}={}_{10}C_{2}=45$

양의 정수해의 개수는 3개의 문자 $x, y, z$에서 $(8-3)$개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3}H_{8-3}={}_{3}H_{5}={}_{3+5-1}C_{5}={}_{7}C_{5}={}_{7}C_{2}=21$

따라서 $m=45, n=21$이므로

$m-n=24$ 정답_③

## 065

조건 (가)에 의해

$a+b+c=10-3d$

조건 (나)에서 $a+b+c\le5$이므로 $0\le10-3d\le5$

$\therefore \frac{5}{3}\le d\le\frac{10}{3}$

$d$는 음이 아닌 정수이므로 $d=2$ 또는 $d=3$

(i) $d=2$일 때

$a+b+c=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $a, b, c$의 순서쌍 $(a, b, c)$의 개수는

${}_{3}H_{4}={}_{3+4-1}C_{4}={}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=15$

(ii) $d=3$일 때

$a+b+c=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a, b, c$의 순서쌍 $(a, b, c)$의 개수는

${}_{3}H_{1}={}_{3+1-1}C_{1}={}_{3}C_{1}=3$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$15+3=18$ 정답_①

## 066

$x_1<x_2$이면 $f(x_1)\ge f(x_2)$이므로 $X=\{1, 2, 3, 4\}$의 원소 $x$의 값이 커지면 그에 대응하는 $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 원소 $f(x)$의 값은 작거나 같다는 것을 의미한다. 7개의 수 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7에서 중복을 허락하여 4개를 뽑아 크기가 큰 것부터 순서대로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는

${}_{7}H_{4}={}_{7+4-1}C_{4}={}_{10}C_{4}=210$ 정답_210

## 067

(i) 조건 (가)는 $X$의 서로 다른 원소에 $Y$의 서로 다른 원소가 대응하는 것이므로 함수 $f$는 일대일함수이다.

따라서 조건 (가)를 만족시키는 함수의 개수는

${}_{4}P_{3}=4\cdot3\cdot2=24$

(ii) 조건 (나)는 $X$의 원소 $x$의 값이 커지면 그에 대응하는 $Y$의 원소 $f(x)$의 값도 커짐을 의미하므로 4개의 수 4, 5, 6, 7에서 3개를 뽑아 크기가 작은 것부터 순서대로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$에 대응시키면 된다.

따라서 조건 (나)를 만족시키는 함수의 개수는 ${}_{4}C_{3}=4$

(iii) 조건 (다)는 $X$의 원소 $x$의 값이 커지면 그에 대응하는 $Y$의 원소 $f(x)$의 값은 크거나 같다는 것을 의미하므로 4개의 수 4, 5, 6, 7에서 중복을 허락하여 3개를 뽑아 크기가 작은 것부터 순서대로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$에 대응시키면 된다.
따라서 조건 (다)를 만족시키는 함수의 개수는
$_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20$
(i), (ii), (iii)에서 $a=24$, $b=4$, $c=20$이므로
$a+b+c=48$ 정답_ ⑤

## 068

조건 (나)는 $X$의 원소 $x$의 값이 커지면 그에 대응하는 $Y$의 원소 $f(x)$의 값은 크거나 같다는 것을 의미한다.
이때, 조건 (가)에서 $f(3)=7$이므로
(i) $f(4)$의 값이 될 수 있는 경우는 7 또는 8 또는 9의 3가지
(ii) $f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 경우의 수는 3개의 수 5, 6, 7에서 중복을 허락하여 2개를 뽑아 크기가 작은 것부터 순서대로 1, 2에 대응시키는 것과 같으므로
$_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$
(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는 $3\cdot6=18$ 정답_ ②

## 069

사각뿔대의 윗면과 아랫면을 칠하는 방법의 수는
$_6P_2=30$ ······ ❶
윗면과 아랫면에 칠한 색을 제외한 4가지 색을 옆면에 칠하는 방법의 수는
$(4-1)!=3!=6$ ······ ❷
따라서 구하는 방법의 수는 $30\cdot6=180$ ······ ❸
정답_ 180

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | 사각뿔대의 윗면과 아랫면을 칠하는 방법의 수 구하기 | 40% |
| ❷ | 사각뿔대의 옆면을 칠하는 방법의 수 구하기 | 40% |
| ❸ | 사각뿔대를 6가지 색으로 칠하는 방법의 수 구하기 | 20% |

## 070

일의 자리의 숫자가 0 또는 2일 때 짝수가 된다.
(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우
천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 5, 7의 5개
백의 자리, 십의 자리 숫자를 택하는 방법의 수는 0, 1, 2, 3, 5, 7의 6개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
$_6\Pi_2=6^2=36$
$\therefore 5\cdot36=180$ ······ ❶
(ii) 일의 자리의 숫자가 2인 경우
천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 5, 7의 5개
백의 자리, 십의 자리 숫자를 택하는 방법의 수는 0, 1, 2, 3, 5, 7의 6개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
$_6\Pi_2=6^2=36$
$\therefore 5\cdot36=180$ ······ ❷
(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는
$180+180=360$ ······ ❸
정답_ 360

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | 일의 자리의 숫자가 0인 경우의 수 구하기 | 40% |
| ❷ | 일의 자리의 숫자가 2인 경우의 수 구하기 | 50% |
| ❸ | 짝수의 개수 구하기 | 10% |

## 071

각 자리의 숫자의 합이 3의 배수일 때 3의 배수가 된다.
6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3에서 4개를 택하여 그 합이
6이 되는 경우는 1, 1, 2, 2
9가 되는 경우는 2, 2, 2, 3 ······ ❶
(i) 4개의 숫자 1, 1, 2, 2를 한 줄로 나열하는 방법의 수는
$\frac{4!}{2!2!}=6$ ······ ❷
(ii) 4개의 숫자 2, 2, 2, 3을 한 줄로 나열하는 방법의 수는
$\frac{4!}{3!}=4$ ······ ❸
(i), (ii)에서 구하는 3의 배수의 개수는
$6+4=10$ ······ ❹
정답_ 10

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | 각 자리의 숫자의 합이 6 또는 9가 되는 4개의 숫자 선택하기 | 30% |
| ❷ | 각 자리의 숫자의 합이 6인 수를 나열하는 방법의 수 구하기 | 30% |
| ❸ | 각 자리의 숫자의 합이 9인 수를 나열하는 방법의 수 구하기 | 30% |
| ❹ | 3의 배수의 개수 구하기 | 10% |

## 072

A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는
$\frac{9!}{6!3!}=84$ ······ ❶
A에서 $\overline{PQ}$를 지나 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는
$\frac{3!}{2!}\cdot1\cdot\frac{5!}{4!}=3\cdot1\cdot5=15$ ······ ❷
따라서 A에서 $\overline{PQ}$를 거치지 않고 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는
$84-15=69$ ······ ❸
정답_ 69

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수 구하기 | 40% |
| ❷ | A에서 $\overline{PQ}$를 지나 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수 구하기 | 40% |
| ❸ | A에서 $\overline{PQ}$를 지나지 않고 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수 구하기 | 20% |

## 073

5명의 학생들이 같은 종류의 사탕 8개를 나누어 가지는 방법의 수는 서로 다른 5개에서 중복을 허락하여 8개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

$a={}_5\mathrm{H}_8={}_{5+8-1}\mathrm{C}_8={}_{12}\mathrm{C}_8={}_{12}\mathrm{C}_4=495$ ······ ❶

5명의 학생들이 적어도 하나씩의 사탕을 모두 가질 때의 방법의 수는 먼저 5명의 학생이 사탕을 한 개씩 나누어 가진 후 서로 다른 5개에서 중복을 허락하여 3개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

$b={}_5\mathrm{H}_{8-5}={}_5\mathrm{H}_3={}_{5+3-1}\mathrm{C}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$ ······ ❷

$\therefore a+b=495+35=530$ ······ ❸

정답_ 530

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | $a$의 값 구하기 | 40% |
| ❷ | $b$의 값 구하기 | 50% |
| ❸ | $a+b$의 값 구하기 | 10% |

## 074

$x=2X,\ y=2Y,\ z=2Z$ ($X,\ Y,\ Z$는 양의 정수)로 놓으면 ······ ❶

$x+y+z=12$에서 $2X+2Y+2Z=12$

$\therefore X+Y+Z=6$

따라서 구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 방정식 $X+Y+Z=6$을 만족시키는 양의 정수 $X,\ Y,\ Z$의 순서쌍 $(X,\ Y,\ Z)$의 개수와 같다. ······ ❷

$\therefore {}_3\mathrm{H}_{6-3}={}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$ ······ ❸

정답_ 10

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | $x=2X,\ y=2Y,\ z=2Z$로 놓기 | 10% |
| ❷ | $X+Y+Z=6$의 양의 정수해가 구하는 해와 같음을 보이기 | 40% |
| ❸ | 주어진 방정식을 만족시키는 순서쌍의 개수 구하기 | 50% |

## 075

(i) 2가지 색을 사용하는 경우

5가지 색 중 2가지 색을 선택하는 방법의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2=10$

2가지 색을 사용하여 원판을 칠하는 방법의 수는 1

따라서 2가지 색을 선택하여 칠하는 방법의 수는

$10\cdot1=10$

(ii) 3가지 색을 사용하는 경우

5가지 색 중 3가지 색을 선택하는 방법의 수는 ${}_5\mathrm{C}_3=10$

3가지 색을 사용하여 원판을 칠하는 방법의 수는 3

따라서 3가지 색을 선택하여 칠하는 방법의 수는

$10\cdot3=30$

(iii) 4가지 색을 사용하는 경우

5가지 색 중 4가지 색을 선택하는 방법의 수는 ${}_5\mathrm{C}_4=5$

4가지 색을 사용하여 원판을 칠하는 방법의 수는

$(4-1)!=6$

따라서 4가지 색을 선택하여 칠하는 방법의 수는

$5\cdot6=30$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는

$10+30+30=70$

정답_ 70

## 076

3, 6, 9를 제외한 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8의 7개의 숫자에서 중복을 허락하여 만들 수 있는 999 이하의 자연수의 개수는

(i) 한 자리의 자연수 : 6

(ii) 두 자리의 자연수 : $6\cdot{}_7\Pi_1=6\cdot7=42$

(iii) 세 자리의 자연수 : $6\cdot{}_7\Pi_2=6\cdot7^2=294$

(i), (ii), (iii)에서 1부터 999까지의 자연수 중에서 3, 6, 9가 포함되지 않은 수의 개수는

$6+42+294=342$

따라서 3 또는 6 또는 9가 포함된 수의 개수는 $999-342=657$이므로 박수를 모두 657번 친다.

정답_ 657번

## 077

$X$에서 $Y$로의 함수의 개수는 ${}_3\Pi_4=3^4=81$

(i) 치역의 원소가 2개인 경우

치역이 $\{1,\ 2\}$인 함수의 개수는 치역의 원소 1, 2의 2개에서 4개를 택하는 중복순열의 수에서 치역이 $\{1\}$ 또는 $\{2\}$인 함수의 개수를 빼면 되므로 ${}_2\Pi_4-2=2^4-2=14$

치역이 $\{2,\ 3\}$ 또는 $\{1,\ 3\}$인 함수의 개수도 각각 14이므로 치역의 원소가 2개인 함수의 개수는 $14\cdot3=42$

(ii) 치역의 원소가 1개인 경우

치역이 $\{1\}$ 또는 $\{2\}$ 또는 $\{3\}$인 함수의 개수는 3

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$81-(42+3)=36$

정답_ 36

## 078

기호를 1개 사용하여 만들 수 있는 부호의 개수는

${}_2\Pi_1=2^1=2$

기호를 2개 사용하여 만들 수 있는 부호의 개수는

${}_2\Pi_2=2^2$

기호를 3개 사용하여 만들 수 있는 부호의 개수는

${}_2\Pi_3=2^3$

⋮

기호를 $n$개까지 사용할 때, 100개의 부호를 만들 수 있다고 하면

$2+2^2+2^3+\cdots+2^n\ge100$

$2+2^2+2^3+2^4+2^5=62$

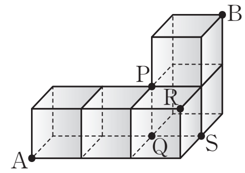
$2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6=126$

따라서 구하는 $n$의 최솟값은 6이다.

정답_ ②

## 079

오른쪽 그림과 같이 네 점 P, Q, R, S를 잡으면 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법은 $A \to Q \to B$, $A \to P \to B$, $A \to S \to B$, $A \to R \to B$이다.




(i) $A \to Q \to B$인 경우 : $\frac{3!}{2!} \cdot \frac{4!}{2!} = 3 \cdot 12 = 36$

(ii) $A \to P \to B$인 경우 : $\frac{4!}{2!} \cdot 3! = 12 \cdot 6 = 72$

(iii) $A \to S \to B$인 경우 : $\frac{4!}{3!} \cdot \frac{3!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$

(iv) $A \to R \to B$인 경우 : $\frac{4!}{3!} \cdot 1 \cdot 2! = 4 \cdot 2 = 8$

이때, (i), (ii)에서 $A \to Q \to P \to B$인 경우, (i), (iii)에서 $A \to Q \to S \to B$인 경우가 중복되며, 그 방법의 수는 각각

$\frac{3!}{2!} \cdot 1 \cdot 3! = 3 \cdot 6 = 18$, $\frac{3!}{2!} \cdot 1 \cdot \frac{3!}{2!} = 3 \cdot 3 = 9$

따라서 구하는 방법의 수는

$36 + 72 + 12 + 8 - (18 + 9) = 101$ 정답_ 101

## 080

1계단씩 오르는 것을 $a$, 2계단씩 오르는 것을 $b$라고 하자.

(i) 2계단씩 0번 오르는 경우 9개의 계단을 올라가는 방법의 수는 $a$를 9개 한 줄로 나열하는 경우의 수와 같으므로 1

(ii) 2계단씩 1번 오르는 경우 9개의 계단을 올라가는 방법의 수는 $a$를 7개, $b$를 1개 한 줄로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{8!}{7!} = 8$

(iii) 2계단씩 2번 오르는 경우 9개의 계단을 올라가는 방법의 수는 $a$를 5개, $b$를 2개 한 줄로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{7!}{5!2!} = 21$

(iv) 2계단씩 3번 오르는 경우 9개의 계단을 올라가는 방법의 수는 $a$를 3개, $b$를 3개 한 줄로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{6!}{3!3!} = 20$

(v) 2계단씩 4번 오르는 경우 9개의 계단을 올라가는 방법의 수는 $a$를 1개, $b$를 4개 한 줄로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{4!} = 5$

(i)~(v)에서 구하는 방법의 수는

$1 + 8 + 21 + 20 + 5 = 55$ 정답_ ⑤

## 081

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$인 경우의 수는 주사위의 6개의 눈의 수 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 5개를 뽑아 크기 순서대로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$m = {}_6C_5 = 6$

$a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$인 경우의 수는 주사위의 6개의 눈의 수 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 중복을 허락하여 5개를 뽑아 크기 순서대로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$n = {}_6H_5 = {}_{6+5-1}C_5 = {}_{10}C_5 = 252$

$\therefore m + n = 6 + 252 = 258$ 정답_ ⑤

## 082

20문항의 정답 중 ①, ②, ③, ④, ⑤가 각각 들어 있는 개수의 구성이 달라질 때마다 5명의 학생은 다른 점수를 받게 된다.

따라서 이 구성이 몇 종류가 존재하는지 구하면 된다.

①, ②, ③, ④, ⑤ 중에서 중복을 허락하여 20개를 뽑는 경우의 수는 ${}_5H_{20} = {}_{5+20-1}C_{20} = {}_{24}C_4$ 정답_ ②

## 083

$(a+b-c)^5$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는

${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$

$(b-c+d)^5$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는

${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$

이때, $(a+b-c)^5$과 $(b-c+d)^5$을 전개할 때 나타나는 항 중에서 $(b-c)^5$을 전개할 때 생기는 항이 중복된다.

$(b-c)^5$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는

${}_2H_5 = {}_{2+5-1}C_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$21 + 21 - 6 - 6 = 30$ 정답_ 30

## 084

주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $a, b, c$가 3 이상의 3의 거듭제곱의 수가 되어야 한다.

즉, 세 자연수 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$에 대하여 $a = 3^\alpha$, $b = 3^\beta$, $c = 3^\gamma$이 되어야 한다.

$abc = 3^{\alpha+\beta+\gamma} = 3^n$에서 $\alpha + \beta + \gamma = n$을 만족시키는 자연수 $\alpha, \beta, \gamma$의 순서쌍 $(\alpha, \beta, \gamma)$의 개수가 15이므로

${}_3H_{n-3} = {}_{3+(n-3)-1}C_{n-3} = {}_{n-1}C_{n-3} = {}_{n-1}C_2 = 15$

$\frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 1} = 15$, $n^2 - 3n - 28 = 0$

$(n+4)(n-7) = 0$ $\therefore n = 7$ ($\because$ $n$은 자연수) 정답_ ③

## 085

조건 (가)를 만족시키는 음이 아닌 정수 $x$, $y$, $z$, $w$의 순서쌍 $(x, y, z, w)$의 개수는

${}_4H_8 = {}_{4+8-1}C_8 = {}_{11}C_8 = {}_{11}C_3 = 165$

이 중에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우는

(i) $x = y = 0$일 때

$z + w = 8$에서 ${}_2H_8 = {}_{2+8-1}C_8 = {}_9C_8 = {}_9C_1 = 9$

(ii) $x=y=1$일 때

$z+w=6$에서 ${}_2H_6={}_{2+6-1}C_6={}_7C_6={}_7C_1=7$

(iii) $x=y=2$일 때

$z+w=4$에서 ${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

(iv) $x=y=3$일 때

$z+w=2$에서 ${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

(v) $x=y=4$일 때

$z+w=0$에서 ${}_2H_0=1$

(i)~(v)에서 구하는 모든 순서쌍의 개수는

$165-(9+7+5+3+1)=140$ 정답_ ③

## 086

(i) $f(1)=2$, $f(4)=6$인 경우

$f(2)$와 $f(3)$의 값이 될 수 있는 수는

2 또는 3 또는 4 또는 5 또는 6

이고, $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)$이어야 하므로 2, 3, 4, 5, 6의 5개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_5H_2={}_{5+2-1}C_2={}_6C_2=15$

또, $f(5)$와 $f(6)$의 값이 될 수 있는 수는 6 또는 7

이고, $f(4)\le f(5)\le f(6)$이어야 하므로 6, 7의 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2=3$

따라서 $f(1)=2$, $f(4)=6$인 함수 $f$의 개수는

$15\cdot3=45$

(ii) $f(1)=3$, $f(4)=4$인 경우

$f(2)$와 $f(3)$의 값이 될 수 있는 수는 3 또는 4

이고, $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)$이어야 하므로 3, 4의 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2=3$

또, $f(5)$와 $f(6)$의 값이 될 수 있는 수는

4 또는 5 또는 6 또는 7

이고, $f(4)\le f(5)\le f(6)$이어야 하므로 4, 5, 6, 7의 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=10$

따라서 $f(1)=3$, $f(4)=4$인 함수 $f$의 개수는

$3\cdot10=30$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는 $45+30=75$ 정답_ 75

# 02 이항정리

## 087

(1) $(a+b)^4={}_4C_0a^4+{}_4C_1a^3b+{}_4C_2a^2b^2+{}_4C_3ab^3+{}_4C_4b^4$

$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

(2) $(x+1)^5={}_5C_0x^5+{}_5C_1x^4+{}_5C_2x^3+{}_5C_3x^2+{}_5C_4x+{}_5C_5$

$=x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$

(3) $(x-2)^4={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3(-2)+{}_4C_2x^2(-2)^2$

$+{}_4C_3x(-2)^3+{}_4C_4(-2)^4$

$=x^4-8x^3+24x^2-32x+16$

(4) $(2a-b)^5={}_5C_0(2a)^5+{}_5C_1(2a)^4(-b)+{}_5C_2(2a)^3(-b)^2$

$+{}_5C_3(2a)^2(-b)^3+{}_5C_42a(-b)^4$

$+{}_5C_5(-b)^5$

$=32a^5-80a^4b+80a^3b^2-40a^2b^3+10ab^4-b^5$

정답_ 풀이 참조

## 088

(1) $(x+y)^6$의 전개식에서 $x^4y^2$항은 $x$를 4번, $y$를 2번 곱한 경우이므로

${}_6C_2x^4y^2$

따라서 $x^4y^2$의 계수는 ${}_6C_2=15$

(2) $(2x-y)^4$의 전개식에서 $x^2y^2$항은 $2x$를 2번, $-y$를 2번 곱한 경우이므로

${}_4C_2(2x)^2(-y)^2={}_4C_22^2(-1)^2x^2y^2$

따라서 $x^2y^2$의 계수는 ${}_4C_22^2(-1)^2=24$

(3) $(x-3)^6$의 전개식에서 $x^3$항은 $x$를 3번, $-3$을 3번 곱한 경우이므로

${}_6C_3x^3(-3)^3={}_6C_3(-3)^3x^3$

따라서 $x^3$의 계수는 ${}_6C_3(-3)^3=-540$

(4) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 $x^2$항은 $x$를 3번, $\frac{1}{x}$을 1번 곱한 경우이므로

${}_4C_1x^3\cdot\frac{1}{x}={}_4C_1x^3$

따라서 $x^2$의 계수는 ${}_4C_1=4$

정답_ (1) 15 (2) 24 (3) $-540$ (4) 4

## 089

$(x+1)^{10}$의 전개식에서 $x^2$항은 $x$를 2번, 1을 8번 곱한 경우이므로

${}_{10}C_8x^2\cdot1^8={}_{10}C_2x^2$

따라서 $x^2$의 계수는 ${}_{10}C_2=45$ 정답_ 45

## 090

$(3x-y)^6$의 전개식에서 $x^4y^2$항은 $3x$를 4번, $-y$를 2번 곱한 경우이므로

${}_6C_2(3x)^4(-y)^2={}_6C_23^4(-1)^2x^4y^2$

그러므로 $x^4y^2$의 계수는 $_6C_2 3^4(-1)^2=15\cdot81=1215$
따라서 각 자리의 숫자의 합은 $1+2+1+5=9$ 정답_ ①

## 091

$\left(2x+\frac{1}{2x}\right)^7$의 전개식에서 $x$항은 $2x$를 4번, $\frac{1}{2x}$을 3번 곱한 경우이므로

$_7C_3(2x)^4\left(\frac{1}{2x}\right)^3={}_7C_3 2^4\left(\frac{1}{2}\right)^3x^4\left(\frac{1}{x}\right)^3={}_7C_3 2x$

따라서 $x$의 계수는 $_7C_3 2=70$ 정답_ ⑤

## 092

$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^4$의 전개식에서 $x$항은 $x$를 3번, $\frac{1}{x^2}$을 1번 곱한 경우이므로

$_4C_1x^3\left(\frac{1}{x^2}\right)^1={}_4C_1x$

따라서 $x$의 계수는 $_4C_1=4$ 정답_ ④

## 093

$\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항은 $2x^2$을 2번, $-\frac{1}{x}$을 4번 곱한 경우이므로

$$\begin{aligned}{}_6C_4(2x^2)^2\left(-\frac{1}{x}\right)^4&={}_6C_4 2^2(-1)^4x^4\left(\frac{1}{x}\right)^4\\&={}_6C_2 2^2(-1)^4\\&=15\cdot4\cdot1=60\end{aligned}$$

정답_ ④

## 094

$\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^4$의 전개식에서 $\frac{1}{x^4}$항은 $x$를 2번, $\frac{1}{x^3}$을 2번 곱한 경우이므로

$_4C_2x^2\left(\frac{1}{x^3}\right)^2={}_4C_2x^2\cdot\frac{1}{x^6}={}_4C_2\frac{1}{x^4}$

따라서 $\frac{1}{x^4}$의 계수는 $_4C_2=6$ 정답_ ②

## 095

$(1+2x)^5$ …… ㉠

$(1+2x)^5(1+x)$의 전개식에서 $x^4$항은 ㉠의 $x^3$항과 $x$, ㉠의 $x^4$항과 1이 곱해질 때 나타난다.

(i) ㉠에서 $x^3$항은 1을 2번, $2x$를 3번 곱한 경우이므로

$_5C_3 1^2(2x)^3={}_5C_3 2^3x^3=80x^3$

(ii) ㉠에서 $x^4$항은 1을 1번, $2x$를 4번 곱한 경우이므로

$_5C_4 1^1(2x)^4={}_5C_4 2^4x^4=80x^4$

(i), (ii)에서 구하는 $x^4$의 계수는 $80+80=160$ 정답_ ⑤

## 096

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ …… ㉠

$\left(\frac{2}{x^2}+4\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항은 $\frac{2}{x^2}$와 ㉠의 $x^2$항, 4와 ㉠의 상수항이 곱해질 때 나타난다.

(i) ㉠에서 $x^2$항은 $x$를 4번, $\frac{1}{x}$을 2번 곱한 경우이므로

$_6C_2x^4\left(\frac{1}{x}\right)^2={}_6C_2x^2=15x^2$

(ii) ㉠에서 상수항은 $x$를 3번, $\frac{1}{x}$을 3번 곱한 경우이므로

$_6C_3x^3\left(\frac{1}{x}\right)^3={}_6C_3=20$

(i), (ii)에서 구하는 상수항은

$\frac{2}{x^2}\cdot15x^2+4\cdot20=30+80=110$ 정답_ ①

## 097

$(1+x^2)^3$의 전개식에서 $x^{2r}$항은 1을 $3-r$번, $x^2$을 $r$번 곱한 경우이므로

$_3C_r1^{3-r}(x^2)^r={}_3C_rx^{2r}$ (단, $0<r<3$)

$(1+2x)^4$의 전개식에서 $x^s$항은 1을 $4-s$번, $2x$를 $s$번 곱한 경우이므로

$_4C_s1^{4-s}(2x)^s={}_4C_s2^sx^s$ (단, $0<s<4$)

따라서 $(1+x^2)^3(1+2x)^4$의 전개식에서 $x^{2r+s}$항은

$_3C_r\cdot{}_4C_s\cdot2^s\cdot x^{2r+s}$

$2r+s=5$를 만족시키는 순서쌍 $(r, s)$는 $(1, 3)$ 또는 $(2, 1)$이므로 $x^5$의 계수는

$_3C_1\cdot{}_4C_3\cdot2^3+{}_3C_2\cdot{}_4C_1\cdot2=96+24=120$ 정답_ ①

## 098

$(x-2)^4$의 전개식에서 $x^r$항은 $x$를 $r$번, $-2$를 $4-r$번 곱한 경우이므로

$_4C_{4-r}x^r(-2)^{4-r}={}_4C_r(-2)^{4-r}x^r$ (단, $0<r<4$)

$(3x^2+2)^3$의 전개식에서 $x^{2s}$항은 $3x^2$를 $s$번, 2를 $3-s$번 곱한 경우이므로

$_3C_{3-s}(3x^2)^s2^{3-s}={}_3C_s2^{3-s}3^sx^{2s}$ (단, $0<s<3$)

따라서 $(x-2)^4(3x^2+2)^3$의 전개식에서 $x^{r+2s}$항은

$_4C_r\cdot{}_3C_s\cdot(-1)^{4-r}2^{7-r-s}3^sx^{r+2s}$

$r+2s=5$를 만족시키는 순서쌍 $(r, s)$는 $(1, 2)$ 또는 $(3, 1)$이므로 $x^5$의 계수는

$_4C_1\cdot{}_3C_2\cdot(-1)^3\cdot2^4\cdot3^2+{}_4C_3\cdot{}_3C_1\cdot(-1)^1\cdot2^3\cdot3^1$
$=-1728-288=-2016$ 정답_ ②

## 099

$(x+1)^n$의 전개식에서 $x^3$항은 $x$를 3번, 1을 $n-3$번 곱한 경우이므로

${}_{n}C_{n-3}x^3\cdot 1^{n-3}={}_{n}C_3x^3$
따라서 $x^3$의 계수는 ${}_{n}C_3$
$(x+1)$, $(x+1)^2$에서는 $x^3$항이 나올 수 없으므로 주어진 식에서 $x^3$의 계수는
${}_{3}C_3+{}_{4}C_3+{}_{5}C_3+{}_{6}C_3=1+4+10+20=35$ 정답_①

## 100

$(1-x)^n$의 전개식에서 $x^8$항은 1을 2번, $-x$를 8번 곱한 경우이므로
${}_{n}C_8\cdot 1^2\cdot(-x)^8={}_{n}C_8x^8$
따라서 $x^8$의 계수는 ${}_{n}C_8$
$(1-x)$, $(1-x)^2$, $\cdots$, $(1-x)^7$에서는 $x^8$항이 나올 수 없으므로 주어진 식에서 $x^8$의 계수는
${}_{8}C_8+{}_{9}C_8+{}_{10}C_8=1+9+45=55$ 정답_⑤

## 101

$(x+a)^6$의 전개식에서 $x^4$항은 $x$를 4번, $a$를 2번 곱한 경우이므로
${}_{6}C_2x^4a^2={}_{6}C_4a^2x^4$
따라서 $x^4$의 계수는 ${}_{6}C_2a^2=15a^2$
이때, $15a^2=60$이므로
$a^2=4$ $\therefore a=2$ $(\because a>0)$ 정답_②

## 102

$\left(x+\frac{a}{x}\right)^8$의 전개식에서 $x^6$항은 $x$를 7번, $\frac{a}{x}$를 1번 곱한 경우이므로
${}_{8}C_1x^7\left(\frac{a}{x}\right)^1={}_{8}C_1ax^6$
따라서 $x^6$의 계수는 ${}_{8}C_1a=8a$
이때, $8a=-16$이므로 $a=-2$ 정답_②

## 103

$\left(ax^2+\frac{2}{x}\right)^5$의 전개식에서 $x$항은 $ax^2$을 2번, $\frac{2}{x}$를 3번 곱한 경우이므로
${}_{5}C_3(ax^2)^2\left(\frac{2}{x}\right)^3={}_{5}C_3a^22^3x$
따라서 $x$의 계수는 ${}_{5}C_32^3a^2=80a^2$
이때, $80a^2=320$이므로
$a^2=4$ $\therefore a=2$ $(\because a>0)$ 정답_②

## 104

$\left(ax+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 상수항은 $ax$를 2번, $\frac{1}{x}$을 2번 곱한 경우이므로
${}_{4}C_2(ax)^2\left(\frac{1}{x}\right)^2={}_{4}C_2a^2=6a^2$
이때, 상수항이 54이므로 $6a^2=54$
$a^2=9$ $\therefore a=3$ $(\because a>0)$ 정답_3

## 105

$(x+a)^7$의 전개식에서 $x^3$항은 $x$를 3번, $a$를 4번 곱한 경우이므로
${}_{7}C_4x^3a^4={}_{7}C_4a^4x^3$
따라서 $x^3$의 계수는 ${}_{7}C_4a^4=35a^4$
이때, $35a^4=35$이므로 $a=1$ $(\because a>0)$
$(x+1)^7$의 전개식에서 $x^5$항은 $x$를 5번, 1을 2번 곱한 경우이므로
${}_{7}C_2x^5\cdot 1^2={}_{7}C_2x^5$
따라서 $x^5$의 계수는 ${}_{7}C_2=21$ 정답_①

## 106

$(x+a)^5$의 전개식에서 $x^3$항은 $x$를 3번, $a$를 2번 곱한 경우이므로
${}_{5}C_2x^3a^2={}_{5}C_2a^2x^3$
따라서 $x^3$의 계수는 ${}_{5}C_2a^2=10a^2$
$x^4$항은 $x$를 4번, $a$를 1번 곱한 경우이므로
${}_{5}C_1x^4a={}_{5}C_1ax^4$
따라서 $x^4$의 계수는 ${}_{5}C_1a=5a$
이때, $10a^2=5a$이므로 $2a^2-a=0$, $a(2a-1)=0$
$\therefore a=\frac{1}{2}$ $(\because a>0)$ 정답_①

## 107

$(1+x^2)^n$의 전개식에서 $x^4$항은 1을 $n-2$번, $x^2$을 2번 곱한 경우이므로
${}_{n}C_21^{n-2}\cdot(x^2)^2={}_{n}C_2x^4$
따라서 $x^4$의 계수는 ${}_{n}C_2=\frac{n(n-1)}{2}$
이때, $\frac{n(n-1)}{2}=1$이므로 $n(n-1)=2\times 1$
$\therefore n=2$ $(\because n>0)$ 정답_②

## 108

$(1+x)^n={}_{n}C_0+{}_{n}C_1x+{}_{n}C_2x^2+\cdots+{}_{n}C_nx^n$의 양변에 $x=7$을 대입하면
$8^n={}_{n}C_0+{}_{n}C_1\cdot 7+{}_{n}C_2\cdot 7^2+\cdots+{}_{n}C_n\cdot 7^n$
이때, $8^n=2^{60}$이므로 $2^{3n}=2^{60}$
따라서 $3n=60$이므로 $n=20$ 정답_③

## 109

$(1+x)^n={}_{n}C_0+{}_{n}C_1x+{}_{n}C_2x^2+\cdots+{}_{n}C_nx^n$의 양변에 $n=10$, $x=2$를 대입하면
$3^{10}={}_{10}C_0+{}_{10}C_1\cdot 2+{}_{10}C_2\cdot 2^2+{}_{10}C_3\cdot 2^3+\cdots+{}_{10}C_{10}\cdot 2^{10}$
따라서 구하는 값은 $3^{10}$ 정답_②

## 110

$(1+x)^n={}_{n}C_0+{}_{n}C_1x+{}_{n}C_2x^2+{}_{n}C_3x^3+\cdots+{}_{n}C_nx^n$의 양변에 $n=10$, $x=-1$을 대입하면

$0={}_{10}C_0-{}_{10}C_1+{}_{10}C_2-{}_{10}C_3+\cdots+{}_{10}C_{10}$
이때, ${}_{10}C_0=1$, ${}_{10}C_{10}=1$이므로
${}_{10}C_1-{}_{10}C_2+{}_{10}C_3-{}_{10}C_4+\cdots+{}_{10}C_9=2$ 정답_②

## 111

${}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n=(1+x)^n$이므로 주어진 식은 $\{(1+x)^n\}^2=(1+x)^{2n}$ …… ㉠
㉠의 전개식에서 $x^n$항은 1을 $n$번, $x$를 $n$번 곱한 경우이므로
${}_{2n}C_n 1\cdot x^n$
따라서 $x^n$의 계수는 $a_n={}_{2n}C_n$
$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4={}_2C_1+{}_4C_2+{}_6C_3+{}_8C_4$
$=2+6+20+70=98$ 정답_⑤

## 112

$11^{13}=(1+10)^{13}$
$={}_{13}C_0+{}_{13}C_1\cdot 10+{}_{13}C_2\cdot 10^2+\cdots+{}_{13}C_{13}\cdot 10^{13}$
이때, $11^{13}$을 100으로 나누었을 때의 나머지는 ${}_{13}C_0+{}_{13}C_1\cdot 10$을 100으로 나누었을 때의 나머지와 같다.
${}_{13}C_0+{}_{13}C_1\cdot 10=1+130=131=100+31$이므로 $11^{13}$을 100으로 나누었을 때의 나머지는 31이다. 정답_⑤

## 113

$21^{21}=(1+20)^{21}$
$={}_{21}C_0+{}_{21}C_1\cdot 20+{}_{21}C_2\cdot 20^2+\cdots+{}_{21}C_{21}\cdot 20^{21}$
이때, $20^2=40\cdot 10$에서 세 번째 항 이후로는 40으로 나누어떨어지므로 $21^{21}$을 40으로 나누었을 때의 나머지는 ${}_{21}C_0+{}_{21}C_1\cdot 20$을 40으로 나누었을 때의 나머지와 같다.
${}_{21}C_0+{}_{21}C_1\cdot 20=1+420=421=40\times 10+21$이므로 $21^{21}$을 40으로 나누었을 때의 나머지는 21이다. 정답_④

## 114

$(1+11)^7={}_7C_0+{}_7C_1\cdot 11+{}_7C_2\cdot 11^2+\cdots+{}_7C_7\cdot 11^7$
이때, ${}_7C_1$, ${}_7C_2$, $\cdots$, ${}_7C_6$은 7의 배수이므로
$(1+11)^7={}_7C_0+7k+{}_7C_7\cdot 11^7$
$=1+7k+11^7$
$=11^7+(7k+1)$ (단, $k$는 자연수이다.)
즉, $(1+11)^7$째 되는 날은 $11^7$째 되는 날보다 $(7k+1)$일이 더 지나야 한다.
따라서 월요일에서 $(7k+1)$일이 지난 후의 요일은 화요일이다.
정답_①

## 115

$(1+x)^{12}$의 전개식에서 $x^n$항은 1을 $(12-n)$번, $x$를 $n$번 곱한 경우이므로
${}_{12}C_n 1^{12-n}\cdot x^n={}_{12}C_nx^n$
따라서 $x^n$의 계수는 $a_n={}_{12}C_n$
$\therefore a_8+a_9={}_{12}C_8+{}_{12}C_9={}_{13}C_9={}_{13}C_4$ 정답_③

참고
${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$ $(1\le r\le n-1)$

## 116

${}_2C_0={}_3C_0$이고, ${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$이므로
${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_8$
$={}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_8$
$={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_8$
$\vdots$
$={}_{10}C_7+{}_{10}C_8={}_{11}C_8$ 정답_⑤

## 117

${}_1C_0={}_2C_0$이고, ${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$이므로
${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_8C_7$
$={}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_8C_7$
$={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_8C_7$
$\vdots$
$={}_8C_6+{}_8C_7={}_9C_7={}_9C_2$ 정답_⑤

## 118

${}_2C_2={}_3C_3$이고, ${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$이므로
${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_2$
$={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_2$
$={}_4C_3+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_2$
$\vdots$
$={}_{10}C_3+{}_{10}C_2={}_{11}C_3$ 정답_④

## 119

$2\cdot{}_kC_2=2\cdot\dfrac{k(k-1)}{2}=k^2-k$이므로 2 이상인 자연수 $k$에 대하여 $k^2=k+2\cdot{}_kC_2=\boxed{(가)\ {}_kC_1}+2\cdot{}_kC_2$로 나타낼 수 있으므로
$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$
$={}_1C_1+({}_2C_1+2\cdot{}_2C_2)+({}_3C_1+2\cdot{}_3C_2)+\cdots$
$+({}_nC_1+2\cdot\boxed{(나)\ {}_nC_2})$
$=({}_1C_1+{}_2C_1+{}_3C_1+\cdots+{}_nC_1)+2({}_2C_2+{}_3C_2+\cdots+\boxed{(나)\ {}_nC_2})$
$=({}_2C_2+{}_2C_1+{}_3C_1+\cdots+{}_nC_1)+2({}_3C_3+{}_3C_2+\cdots+{}_nC_2)$
$(\because {}_1C_1={}_2C_2={}_3C_3=1)$
$=({}_3C_2+{}_3C_1+\cdots+{}_nC_1)+2({}_4C_3+{}_4C_2+\cdots+{}_nC_2)$
$(\because {}_nC_r+{}_nC_{r+1}={}_{n+1}C_{r+1})$
$\vdots$
$={}_{n+1}C_2+2\cdot\boxed{(다)\ {}_{n+1}C_3}$
$=\dfrac{(n+1)n}{2}+2\cdot\dfrac{(n+1)n(n-1)}{3\cdot 2\cdot 1}$
$=\dfrac{n(n+1)}{6}\{3+2(n-1)\}$
$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 정답_②

## 120

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+{}_nC_3x^3+\cdots+{}_nC_nx^n$ …… ㉠

(1) ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n$ …… ㉡

(2) ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n{}_nC_n$ …… ㉢

(3) $n$이 짝수이므로 ㉡+㉢을 하면

$2^n=2({}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_n)$

$\therefore {}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$

(4) $n$이 짝수이므로 ㉡−㉢을 하면

$2^n=2({}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots+{}_nC_{n-1})$

$\therefore {}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^{n-1}$ 정답_ 풀이 참조

## 121

(1) ${}_4C_0+{}_4C_1+{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4=2^4=16$

(2) ${}_4C_0-{}_4C_1+{}_4C_2-{}_4C_3+{}_4C_4=0$

(3) ${}_8C_0+{}_8C_2+{}_8C_4+{}_8C_6+{}_8C_8=2^{8-1}=128$

(4) ${}_9C_1+{}_9C_3+{}_9C_5+{}_9C_7+{}_9C_9=2^{9-1}=256$

정답_ (1) 16 (2) 0 (3) 128 (4) 256

## 122

${}_{16}C_0+{}_{16}C_1+{}_{16}C_2+\cdots+{}_{16}C_{16}=2^{16}$ 정답_ ④

## 123

${}_{15}C_8+{}_{15}C_9+{}_{15}C_{10}+\cdots+{}_{15}C_{15}={}_{15}C_7+{}_{15}C_6+{}_{15}C_5+\cdots+{}_{15}C_0$

이므로

(주어진 식)$=2^{15-1}=2^{14}$ 정답_ ③

## 124

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

$2^n=128=2^7$ $\therefore n=7$ 정답_ 7

## 125

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-1=255$

$2^n=256=2^8$ $\therefore n=8$ 정답_ ④

## 126

${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+{}_nC_6+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$이므로

${}_nC_2+{}_nC_4+{}_nC_6+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}-1=127$

$2^{n-1}=128=2^7$

$n-1=7$ $\therefore n=8$ 정답_ ③

## 127

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$

이것을 주어진 식에 대입하면 $500<2^n-1<1000$

$\therefore 501<2^n<1001$

이때, $2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로 $n=9$ 정답_ ③

## 128

${}_{2k}C_1+{}_{2k}C_3+{}_{2k}C_5+\cdots+{}_{2k}C_{2k-1}=2^{2k-1}$이므로

$f(k)=2^{2k-1}$

$\therefore f(3)=2^{6-1}=32$ 정답_ ②

## 129

$\left(\frac{3}{x}+\frac{x}{3}\right)^8$의 전개식에서 상수항은 $\frac{3}{x}$을 4번, $\frac{x}{3}$를 4번 곱한 경우이다. …… ❶

따라서 구하는 상수항은 ${}_8C_4\left(\frac{3}{x}\right)^4\left(\frac{x}{3}\right)^4={}_8C_4=70$ …… ❷

정답_ 70

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | $\left(\frac{3}{x}+\frac{x}{3}\right)^8$의 전개식에서 상수항을 나타내는 경우 구하기 | 50% |
| ❷ | 상수항 구하기 | 50% |

## 130

$(1+2x)^6$ …… ㉠

$(a-x)(1+2x)^6$의 전개식에서 $x^4$항은 $a$와 ㉠의 $x^4$항, $-x$와 ㉠의 $x^3$항이 곱해질 때 나타난다. …… ❶

(i) ㉠에서 $x^4$항은 1을 2번, $2x$를 4번 곱한 경우이므로

${}_6C_4 1^2\cdot(2x)^4={}_6C_4 2^4x^4=240x^4$

(ii) ㉠에서 $x^3$항은 1을 3번, $2x$를 3번 곱한 경우이므로

${}_6C_3 1^3\cdot(2x)^3={}_6C_3 2^3x^3=160x^3$

(i), (ii)에 의해 $(a-x)(1+2x)^6$의 전개식에서 $x^4$항은

$a\cdot240x^4+(-x)\cdot160x^3=(240a-160)x^4$

이므로 $x^4$의 계수는 $240a-160$ …… ❷

$x^4$의 계수가 80이므로 $240a-160=80$

$\therefore a=1$ …… ❸

정답_ 1

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | $x^4$항이 나타나는 조건 알기 | 40% |
| ❷ | $x^4$의 계수를 $a$에 대한 식으로 나타내기 | 40% |
| ❸ | $a$의 값 구하기 | 20% |

## 131

$(x-a)^5$의 전개식에서 $x$항은 $x$를 1번, $-a$를 4번 곱한 경우이므로 ${}_5C_4x(-a)^4={}_5C_4a^4x$

이때, $x$의 계수는 ${}_5C_4a^4=5a^4$ …… ❶

상수항은 $-a$를 5번 곱한 경우이므로 상수항은

${}_5C_5(-a)^5=-a^5$ …… ❷

$x$의 계수와 상수항의 합이 0이므로

$5a^4+(-a^5)=0,\ a^4(5-a)=0$

$\therefore a=5\ (\because a>0)$ ······ ❸

정답_ 5

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | $x$의 계수 구하기 | 40% |
| ❷ | 상수항 구하기 | 40% |
| ❸ | $a$의 값 구하기 | 20% |

## 132

$(x+2y-z)^7=\{(x+2y)-z\}^7$의 전개식에서 $z$항은 $x+2y$를 6번, $-z$를 1번 곱한 경우이므로

${}_7C_1(x+2y)^6(-z)={}_7C_1(-1)(x+2y)^6z$ ······ ❶

$(x+2y)^6$의 전개식에서 $x^4y^2$항은 $x$를 4번, $2y$를 2번 곱한 경우이므로

${}_6C_2x^4(2y)^2={}_6C_2\,4x^4y^2$ ······ ❷

따라서 $x^4y^2z$항은 ${}_7C_1(-1)\cdot{}_6C_2\,4x^4y^2$이므로 $x^4y^2z$의 계수는

${}_7C_1(-1)\cdot{}_6C_2\,4=-7\cdot60=-420$ ······ ❸

정답_ $-420$

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | $(x+2y-z)^7$의 전개식에서 $z$항 구하기 | 40% |
| ❷ | $(x+2y)^6$의 전개식에서 $x^4y^2$항 구하기 | 30% |
| ❸ | $x^4y^2z$의 계수 구하기 | 30% |

## 133

$(ax+1)^7$의 전개식에서 $x^2$항은 $ax$를 2번, 1을 5번 곱한 경우이므로

${}_7C_5\,(ax)^2\cdot1^5={}_7C_5\,a^2x^2$ ······ ❶

이때, $x^2$의 계수는

${}_7C_5\,a^2=84,\quad 21a^2=84,\quad a^2=4$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$ ······ ❷

$(2x+1)^7$의 전개식에서 $x$항은 $2x$를 1번, 1을 6번 곱한 경우이므로

${}_7C_6\,2x\cdot1^6={}_7C_6\,2x$

따라서 $x$의 계수는

${}_7C_6 2=7\cdot2=14$ ······ ❸

정답_ 14

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | $x^2$항 구하기 | 40% |
| ❷ | $a$의 값 구하기 | 20% |
| ❸ | $x$의 계수 구하기 | 40% |

## 134

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1\,x+{}_nC_2\,x^2+\cdots+{}_nC_n\,x^n$의 양변에 $x=4$를 대입하면

$(1+4)^n={}_nC_0+{}_nC_1\cdot4+{}_nC_2\cdot4^2+{}_nC_3\cdot4^3+\cdots+{}_nC_n\cdot4^n$

$\therefore {}_nC_0+4\cdot{}_nC_1+4^2\cdot{}_nC_2+4^3\cdot{}_nC_3+\cdots+4^n\cdot{}_nC_n=5^n$ ······ ❶

$5^n=5^{50}$이므로 $\quad n=50$ ······ ❷

정답_ 50

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | ${}_nC_0+4\cdot{}_nC_1+4^2\cdot{}_nC_2+4^3\cdot{}_nC_3+\cdots+4^n\cdot{}_nC_n$을 거듭제곱으로 나타내기 | 70% |
| ❷ | $n$의 값 구하기 | 30% |

## 135

$\left(3x^2-\dfrac{1}{2x^3}\right)^n$의 전개식에서 상수항이 $3x^2$을 $n-r$번, $-\dfrac{1}{2x^3}$을 $r$번 곱할 때 나타난다고 하면

${}_nC_r(3x^2)^{n-r}\left(-\dfrac{1}{2x^3}\right)^r={}_nC_r3^{n-r}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^r\dfrac{x^{2n-2r}}{x^{3r}}$ (단, $0<r<n$)

······ ㉠

㉠이 상수항을 나타내기 위해서는 $2n-2r=3r$, 즉 $2n=5r$이어야 하므로 $n$은 5의 배수이어야 한다.

따라서 $n$의 최솟값은 5이고, 이때의 $r$의 값은 2이므로 구하는 상수항은 ${}_5C_2\cdot3^3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{135}{2}$

정답_ ⑤

## 136

$\left(x^2-\dfrac{3}{x}+2y\right)^6=\left\{\left(x^2-\dfrac{3}{x}\right)+2y\right\}^6$의 전개식에서 $y$항은 $x^2-\dfrac{3}{x}$을 5번, $2y$를 1번 곱한 경우이므로

${}_6C_1\left(x^2-\dfrac{3}{x}\right)^5 2y={}_6C_1\,2\left(x^2-\dfrac{3}{x}\right)^5 y$

$\left(x^2-\dfrac{3}{x}\right)^5$의 전개식에서 $x^7$항은 $x^2$을 4번, $-\dfrac{3}{x}$을 1번 곱한 경우이므로

${}_5C_1(x^2)^4\cdot\left(-\dfrac{3}{x}\right)={}_5C_1(-3)x^7$

따라서 $x^7y$항은 ${}_6C_1 2\cdot{}_5C_1(-3)x^7y$이므로 $x^7y$의 계수는

${}_6C_1 2\cdot{}_5C_1(-3)=12\cdot(-15)=-180$

정답_ ⑤

## 137

$1\le n\le20$인 자연수 $n$에 대하여 $(1-x^n)^n$의 전개식에서 $x^{10}$항이 1을 $n-r$번, $-x^n$을 $r$번 곱할 때 나타난다고 하면

${}_nC_r1^{n-r}\cdot(-x^n)^r={}_nC_r(-1)^rx^{nr}$ (단, $0<r<n$)

$nr=10$이어야 하므로

$n=10,\ r=1$ 또는 $n=5,\ r=2$

따라서 $x^{10}$의 계수는

${}_{10}C_1(-1)^1+{}_5C_2(-1)^2=-10+10=0$

정답_ ④

## 138

$(x+a)^n$의 전개식에서 $x^{n-1}$항은 $x$를 $n-1$번, $a$를 1번 곱한 경우이므로

$_{n}C_{1}x^{n-1}\cdot a={}_{n}C_{1}ax^{n-1}$

즉, $2(x+a)^{n}$의 전개식에서 $x^{n-1}$의 계수는

$2{}_{n}C_{1}a=2na$ …… ㉠

$(x-1)(x+a)^{n}$의 전개식에서 $x^{n-1}$의 계수는 $x$와 $(x+a)^{n}$의 $x^{n-2}$항, $-1$과 $(x+a)^{n}$의 $x^{n-1}$항이 곱해질 때 나타난다.

$(x+a)^{n}$에서 $x^{n-2}$항은 $x$를 $n-2$번, $a$를 2번 곱한 경우이므로

$_{n}C_{2}x^{n-2}a^{2}={}_{n}C_{2}a^{2}x^{n-2}$

따라서 $(x-1)(x+a)^{n}$의 전개식에서 $x^{n-1}$의 계수는

$_{n}C_{2}a^{2}+(-1)\cdot{}_{n}C_{1}a=\dfrac{n(n-1)}{2}a^{2}-na$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$2na=\dfrac{n(n-1)}{2}a^{2}-na$

$n(n-1)a^{2}=6na \qquad \therefore (n-1)a=6$

$(n-1,\ a)=(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)$

$\therefore (n,\ a)=(2,\ 6),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2),\ (7,\ 1)$

따라서 구하는 $an$의 최댓값은 $2\cdot6=12$

정답_ 12

## 139

$3^{2018}+5^{2018}=(4-1)^{2018}+(4+1)^{2018}$이므로

$(4-1)^{2018}$

$={}_{2018}C_{0}\cdot4^{2018}-{}_{2018}C_{1}\cdot4^{2017}+{}_{2018}C_{2}\cdot4^{2016}$

$\quad -\cdots-{}_{2018}C_{2017}\cdot4^{1}+{}_{2018}C_{2018}$ …… ㉠

$(4+1)^{2018}$

$={}_{2018}C_{0}\cdot4^{2018}+{}_{2018}C_{1}\cdot4^{2017}+{}_{2018}C_{2}\cdot4^{2016}$

$\quad +\cdots+{}_{2018}C_{2017}\cdot4^{1}+{}_{2018}C_{2018}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$(4-1)^{2018}+(4+1)^{2018}$

$=2({}_{2018}C_{0}\cdot4^{2018}+{}_{2018}C_{2}\cdot4^{2016}+\cdots+{}_{2018}C_{2016}\cdot4^{2}+{}_{2018}C_{2018})$

$=16\{2({}_{2018}C_{0}\cdot4^{2016}+{}_{2018}C_{2}\cdot4^{2014}+\cdots+{}_{2018}C_{2016})\}+2{}_{2018}C_{2018}$

따라서 $3^{2018}+5^{2018}$을 16으로 나눈 나머지는 $2{}_{2018}C_{2018}=2$를 16으로 나눈 나머지와 같으므로 구하는 나머지는 2이다.

정답_ ②

## 140

20개의 점 중에서 $n$개의 점을 택하는 경우의 수는

$f(n)={}_{20}C_{n}$

$f(3)+f(5)+f(7)+f(9)+\cdots+f(19)$

$={}_{20}C_{3}+{}_{20}C_{5}+{}_{20}C_{7}+{}_{20}C_{9}+\cdots+{}_{20}C_{19}$

이때, ${}_{20}C_{1}+{}_{20}C_{3}+{}_{20}C_{5}+{}_{20}C_{7}+{}_{20}C_{9}+\cdots+{}_{20}C_{19}=2^{19}$이므로

${}_{20}C_{3}+{}_{20}C_{5}+{}_{20}C_{7}+\cdots+{}_{20}C_{19}=2^{19}-{}_{20}C_{1}$

$=2^{19}-20$

정답_ ⑤

# II 확률

## 03 확률의 뜻과 덧셈정리

## 141

(1) 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 나올 수 있는 경우는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 표본공간은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

(2) $\{2,\ 4,\ 6\}$

(3) $\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{5\},\ \{6\}$

정답_ (1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (2) $\{2, 4, 6\}$ (3) $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$

## 142

표본공간을 $S$라고 하면

$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\},\ A=\{3,\ 6\},\ B=\{1,\ 3,\ 5\}$

(1) $A\cup B=\{1,\ 3,\ 5,\ 6\}$

(2) $A\cap B=\{3\}$

(3) $A^{C}=\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$

정답_ (1) $\{1, 3, 5, 6\}$ (2) $\{3\}$ (3) $\{1, 2, 4, 5\}$

## 143

$S=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\},\ A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\},\ B=\{3,\ 5,\ 7\},\ C=\{1\}$

ㄱ은 옳다.

$A^{C}=S^{C}=\varnothing$

ㄴ도 옳다.

$B\subset A$이므로 $A\cap B=B$

ㄷ도 옳다.

$B\cup C=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}=S$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

## 144

첫 번째 시행에서 1의 눈이 나오는 사건은

$A=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6)\}$

두 번째 시행에서 1의 눈이 나오는 사건은

$B=\{(1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (4,\ 1),\ (5,\ 1),\ (6,\ 1)\}$

$A\cap B=\{(1,\ 1)\}$

$A\cup B=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),$
$(2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (4,\ 1),\ (5,\ 1),\ (6,\ 1)\}$

따라서 $n(A\cup B)=11$이므로 옳지 않은 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

## 145

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 표본공간을 $S$라고 하면

$S=\{HH,\ HT,\ TH,\ TT\}$

두 번 모두 뒷면이 나오는 사건은 $A=\{TT\}$

사건 $A$와 배반인 사건의 개수는 $S$의 부분집합 중 TT를 포함하지 않은 것의 개수와 같으므로 $2^{4-1}=8$

정답_③

## 146

ㄱ. $\{1,\ 2,\ 4\}$ ㄴ. $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

ㄷ. $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ ㄹ. $\{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

따라서 서로 배반인 사건은 ㄱ과 ㄹ이다.

정답_③

## 147

한 개의 주사위를 던지는 시행에서 표본공간을 $S$라고 하면

$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $A=\{4\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5\}$

두 사건 $A$, $B$와 모두 배반인 사건의 개수는 $S$의 부분집합 중 2, 3, 4, 5를 포함하지 않은 것의 개수와 같으므로

$2^{6-4}=4$

정답_②

## 148

모든 부분집합의 개수는 $2^5=32$

(i) $a_1$을 원소로 갖는 부분집합의 개수는 $2^{5-1}=16$

(ii) $a_2$를 원소로 갖는 부분집합의 개수는 $2^{5-1}=16$

(iii) $a_1$과 $a_2$를 원소로 갖는 부분집합의 개수는 $2^{5-2}=8$

(i), (ii), (iii)에서 $a_1$ 또는 $a_2$를 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$16+16-8=24$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{24}{32}=\dfrac{3}{4}$

정답_③

## 149

1에서 100까지의 자연수 중에서 2의 배수의 개수는 50, 2의 배수이면서 3의 배수, 즉 6의 배수의 개수는 16이므로 2의 배수이지만 3의 배수가 아닌 것의 개수는 $50-16=34$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{34}{100}=\dfrac{17}{50}$

정답_①

## 150

전체 경우의 수는 $6\cdot6=36$

(i) 두 눈의 수의 차가 4인 경우는

$(1,\ 5)$, $(2,\ 6)$, $(5,\ 1)$, $(6,\ 2)$의 4가지

(ii) 두 눈의 수의 차가 5인 경우는 $(1,\ 6)$, $(6,\ 1)$의 2가지

(i), (ii)에서 두 눈의 수의 차가 4 이상인 경우의 수는 $4+2=6$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

정답_④

## 151

두 명이 길을 택하는 방법의 수는 $5\cdot5=25$

(i) 두 명이 같은 길을 택하는 경우의 수는 5

(ii) 두 명이 이웃한 길을 택하는 경우의 수는 $4\cdot2=8$

(i), (ii)에서 두 명이 길을 가는 도중에 서로의 모습을 볼 수 있는 경우의 수는 $5+8=13$이므로 구하는 확률은 $\dfrac{13}{25}$

정답_③

## 152

전체 경우의 수는 $9!$

여학생 4명을 한 명으로 생각하여 6명을 한 줄로 세우는 경우의 수는 $6!$이고, 여학생 4명이 순서를 바꾸는 경우의 수는 $4!$이므로 여학생 4명이 이웃하도록 세우는 경우의 수는 $6!\cdot4!$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{6!\cdot4!}{9!}=\dfrac{1}{21}$

정답_$\dfrac{1}{21}$

## 153

전체 경우의 수는 $6!$

시집 3권을 책꽂이에 한 줄로 꽂는 경우의 수는 $3!$이고, 시집 사이 및 양 끝에 수필집 3권을 꽂는 경우의 수는 ${}_4P_3$이므로 수필집끼리는 이웃하지 않도록 꽂는 경우의 수는 $3!\cdot{}_4P_3$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{3!\cdot{}_4P_3}{6!}=\dfrac{1}{5}$

정답_$\dfrac{1}{5}$

참고

여사건을 이용할 경우

$1-$(2권 또는 3권이 이웃할 경우)로 구해야 한다.

## 154

전체 경우의 수는 $5!$

A와 B 사이에 한 명을 앉히는 경우의 수는 ${}_3P_1$이고, A□B를 한 명으로 생각하여 3명을 나란히 앉히는 경우의 수는 $3!$, A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이므로 A와 B 사이에 한 명이 앉는 경우의 수는 ${}_3P_1\cdot3!\cdot2!$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{{}_3P_1\cdot3!\cdot2!}{5!}=\dfrac{3}{10}$

정답_③

## 155

전체 경우의 수는 ${}_5P_4$

2, 3을 양 끝에 두고 나머지 3장의 카드 중에서 2장의 카드를 그 사이에 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_2$이고, 2, 3의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이므로 2, 3이 양 끝에 나열되는 경우의 수는

${}_3P_2\cdot2!$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{{}_3P_2\cdot2!}{{}_5P_4}=\dfrac{1}{10}$

정답_④

## 156

전체 경우의 수는 ${}_5P_4$

4300보다 큰 수는 43□□ 꼴 또는 45□□ 꼴 또는 5□□□ 꼴이다.

(i) 43□□ 꼴의 개수는 ${}_3P_2$

(ii) 45□□ 꼴의 개수는 ${}_3P_2$

(iii) 5□□□ 꼴의 개수는 ${}_4P_3$

(i), (ii), (iii)에서 4300보다 큰 수의 개수는 ${}_3P_2\cdot2+{}_4P_3$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{{}_3P_2\cdot2+{}_4P_3}{{}_5P_4}=\dfrac{3}{10}$

정답_④

## 157

전체 경우의 수는 $6!$

한국과 중국의 선수가 교대로 서는 경우는 오른쪽과 같이 2가지뿐이므로 그 경우의 수는 $2\cdot3!\cdot3!$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 한 | 중 | 한 | 중 | 한 | 중 |
| 중 | 한 | 중 | 한 | 중 | 한 |

따라서 구하는 확률은 $\frac{2\cdot3!\cdot3!}{6!}=\frac{1}{10}$

정답_ ①

## 158

전체 경우의 수는 $4!$

남자 승객 2명을 A구역의 2개의 좌석에 배정하는 경우의 수는 $2!$이고, 여자 승객 2명을 B구역과 C구역의 좌석에 배정하는 경우의 수는 $2!$이므로 남자 승객 2명이 모두 A구역에 배정되는 경우의 수는 $2!\cdot2!$

따라서 $p=\frac{2!\cdot2!}{4!}=\frac{1}{6}$이므로

$120p=120\cdot\frac{1}{6}=20$

정답_ 20

## 159

전체 경우의 수는 $6!$

o, e를 양 끝에 두고 나머지 4개의 문자 m, t, h, r를 한 줄로 나열하는 경우의 수는 $4!$이고, o와 e의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이므로 양 끝에 모음이 나열되는 경우의 수는 $4!\cdot2!$

따라서 구하는 확률은 $\frac{4!\cdot2!}{6!}=\frac{1}{15}$

정답_ ②

## 160

전체 경우의 수는 $(5-1)=4!$

A, B를 한 명으로 생각하여 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(4-1)!=3!$이고, A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이므로 A, B가 서로 이웃하도록 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $3!\cdot2!$

따라서 구하는 확률은 $\frac{3!\cdot2!}{4!}=\frac{1}{2}$

정답_ ③

## 161

전체 경우의 수는 ${}_8C_2$

여학생 5명 중에서 대표 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_2$

따라서 구하는 확률은 $\frac{{}_5C_2}{{}_8C_2}=\frac{5}{14}$

정답_ $\frac{5}{14}$

## 162

전체 경우의 수는 ${}_9C_6$

흰 공 2개, 검은 공 3개, 빨간 공 4개 중에서 흰 공 1개, 검은 공 2개, 빨간 공 3개를 뽑는 경우의 수는 ${}_2C_1\cdot{}_3C_2\cdot{}_4C_3$

따라서 구하는 확률은 $\frac{{}_2C_1\cdot{}_3C_2\cdot{}_4C_3}{{}_9C_6}=\frac{2}{7}$

정답_ ②

## 163

전체 경우의 수는 ${}_6C_3$

흰 공 2개, 노란 공 2개, 파란 공 2개에서 흰 공 1개, 노란 공 1개, 파란 공 1개를 뽑는 경우의 수는 ${}_2C_1\cdot{}_2C_1\cdot{}_2C_1$

따라서 구하는 확률은 $\frac{{}_2C_1\cdot{}_2C_1\cdot{}_2C_1}{{}_6C_3}=\frac{2}{5}$

정답_ ①

## 164

전체 경우의 수는 ${}_{10}C_3$

3개의 당첨 제비, 7개의 당첨 제비가 아닌 제비 중에서 당첨 제비 2개, 당첨 제비가 아닌 제비 1개를 뽑는 경우의 수는 ${}_3C_2\cdot{}_7C_1$

따라서 구하는 확률은 $\frac{{}_3C_2\cdot{}_7C_1}{{}_{10}C_3}=\frac{7}{40}$

정답_ ②

## 165

전체 경우의 수는 ${}_5C_3$

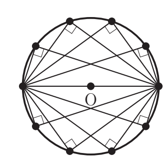
A는 선출되고 B는 선출되지 않는 경우의 수는 A, B를 제외한 3명 중에서 2명을 선출한 후 A를 포함시키는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_2$

따라서 구하는 확률은 $\frac{{}_3C_2}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$

정답_ ③

## 166

전체 경우의 수는 ${}_{10}C_3$



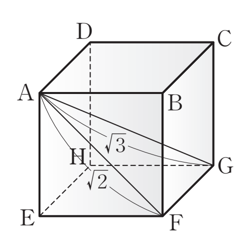

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O를 지나는 한 지름에서 만들 수 있는 직각삼각형은 8개이고, 지름은 모두 5개이므로 만들 수 있는 직각삼각형의 개수는 $8\cdot5=40$

따라서 구하는 확률은 $\frac{40}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{3}$

정답_ ③

## 167

전체 경우의 수는 ${}_8C_2$




길이가 $\sqrt{2}$인 선분의 개수는

$\frac{3\cdot8}{2}=12$이고, 길이가 $\sqrt{3}$인 선분의 개수는 $\frac{8}{2}=4$이므로 길이가 $\sqrt{2}$ 이상인 선분의 개수는 $12+4=16$

따라서 구하는 확률은 $\frac{16}{{}_8C_2}=\frac{4}{7}$

정답_ ⑤

## 168

전체 경우의 수는 ${}_{10}C_6$

두 번째로 작은 수가 3이려면 $\{1, 2\}$에서 1개, $\{4, 5, 6, \cdots, 10\}$에서 4개의 원소를 택해야 하므로 두 번째로 작은 수가 3인 경우의 수는 ${}_2C_1\cdot{}_7C_4$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{{}_2C_1 \cdot {}_7C_4}{{}_{10}C_6}=\dfrac{1}{3}$ 정답_ ③

## 169

전체 경우의 수는 ${}_{11}C_6=462$

1, 2, 3, ⋯, 11 중에서 홀수는 6개이고, 짝수는 5개이다. 공에 적혀 있는 수의 합이 홀수가 되려면 홀수를 홀수 개 뽑아야 한다.

(i) 홀수 1개, 짝수 5개를 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_1 \cdot {}_5C_5=6$

(ii) 홀수 3개, 짝수 3개를 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_3 \cdot {}_5C_3=200$

(iii) 홀수 5개, 짝수 1개를 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_5 \cdot {}_5C_1=30$

(i), (ii), (iii)에서 6개의 수의 합이 홀수가 되는 경우의 수는

$6+200+30=236$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{236}{462}=\dfrac{118}{231}$ 정답_ ④

## 170

5인승, 7인승, 9인승 3대의 차에 남은 좌석은 각각 1자리, 2자리, 3자리이고 6명을 1명, 2명, 3명으로 나누는 전체 경우의 수는

${}_6C_1 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3=60$

A와 B가 같은 차에 배정되는 경우는 7인승에 배정되는 경우와 9인승에 배정되는 경우가 있다.

(i) A와 B를 7인승에 배정하고, 나머지 4명을 1명, 3명으로 나누어 각각 5인승, 9인승 차에 배정하는 경우의 수는

${}_4C_1 \cdot {}_3C_3=4$

(ii) A와 B를 9인승에 배정하고, 나머지 4명을 1명, 2명, 1명으로 나누어 각각 5인승, 7인승, 9인승 차에 배정하는 경우의 수는

${}_4C_1 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_1C_1=12$

(i), (ii)에서 A와 B가 같은 차에 배정되는 경우의 수는

$4+12=16$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{16}{60}=\dfrac{4}{15}$이므로

$p=15, q=4$

$\therefore 10p+q=10 \cdot 15+4=154$ 정답_ 154

## 171

전체 생산량은 30000천 대이고, 아시아, 즉 한국과 일본에서의 생산량은 각각 2000천 대, 11000천 대이므로

$a=\dfrac{2000}{30000}=\dfrac{2}{30},\ b=\dfrac{2000+11000}{30000}=\dfrac{13}{30}$

$\therefore a+b=\dfrac{2}{30}+\dfrac{13}{30}=\dfrac{15}{30}=\dfrac{1}{2}$ 정답_ ⑤

## 172

주사위 한 개를 던졌을 때, 4의 약수의 눈이 나오는 경우는 1, 2, 4의 3가지이므로 4의 약수의 눈이 나올 확률은 $\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

주사위 한 개를 던졌을 때, 1의 눈이 나오는 확률은 $\dfrac{1}{6}$이고,

$\dfrac{1}{6}\times 6000=1000$이므로 주사위를 6000회 던졌을 때, 1의 눈이 나올 횟수는 대략 1000회로 예상할 수 있다.

$\therefore p=\dfrac{1}{2},\ q=1000$ 정답_ ②

## 173

전체 경우의 수는 ${}_{10}C_2$

안경을 낀 학생 수를 $x$라고 하면 10명의 학생 중에서 2명을 뽑을 때, 2명 모두 안경을 끼고 있을 확률이 $\dfrac{2}{9}$이므로

$\dfrac{{}_xC_2}{{}_{10}C_2}=\dfrac{2}{9},\ \dfrac{x(x-1)}{90}=\dfrac{2}{9},\ x(x-1)=20$

$x^2-x-20=0,\ (x+4)(x-5)=0$

$\therefore x=5\ (\because x>0)$

따라서 안경을 끼고 있는 학생은 5명으로 예상할 수 있다.

정답_ ①

## 174

전체 경우의 수는 ${}_{15}C_2$

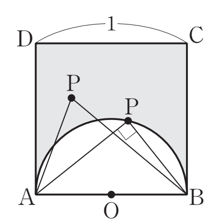
붉은 공의 개수를 $x$라고 하면 15개의 공 중에서 2개를 꺼낼 때, 2개 모두 붉은 공일 확률이 $\dfrac{1}{5}$이므로

$\dfrac{{}_xC_2}{{}_{15}C_2}=\dfrac{1}{5},\ \dfrac{x(x-1)}{210}=\dfrac{1}{5},\ x(x-1)=42$

$x^2-x-42=0,\ (x+6)(x-7)=0 \qquad \therefore x=7\ (\because x>0)$

따라서 7개의 붉은 공이 들어 있다고 볼 수 있다. 정답_ ③

## 175



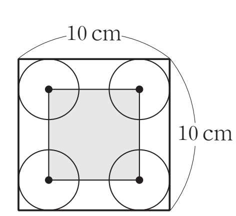

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원 O의 호 위에 점 P가 있을 때 △ABP는 직각삼각형이 되므로 반원의 바깥쪽의 색칠한 부분에 점 P가 있을 때 △ABP는 예각삼각형이 된다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\text{정사각형 ABCD의 넓이})}=\frac{1^2-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1^2}$$

$$=1-\frac{\pi}{8}$$ 정답_ ③

## 176




오른쪽 그림에서 색칠한 정사각형의 내부(경계선 포함)에 동전의 중심이 놓이면 동전이 타일 안에 완전히 놓인다.

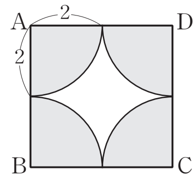
따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{한 변의 길이가 6 cm인 정사각형의 넓이})}{(\text{한 변의 길이가 10 cm인 정사각형의 넓이})}$$

$=\dfrac{6^2}{10^2}=\dfrac{9}{25}$ 정답_ ③

## 177

점 P에서 가장 가까운 꼭짓점까지의 거리가 2 이하인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.




따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\text{정사각형 ABCD의 넓이})}$$

$$=\frac{\pi\cdot 2^2}{16}=\frac{\pi}{4}$$

정답_④

## 178

$A=\{1, 2, 4\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$B$는 반드시 일어나는 사건이므로

$\mathrm{P}(B)=1$

$$\therefore \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

정답_ $\frac{3}{2}$

## 179

ㄱ은 옳다.

임의의 사건 $A$에 대하여 $0\le \mathrm{P}(A)\le 1$

ㄴ도 옳다.

$\mathrm{P}(S)=1, \mathrm{P}(\varnothing)=0$이므로 $\mathrm{P}(S)+\mathrm{P}(\varnothing)=1$

ㄷ은 옳지 않다.

$0\le \mathrm{P}(A)\le 1, 0\le \mathrm{P}(B)\le 1$이므로

$0\le \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\le 2$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 정답_③

## 180

(1) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$$

(2) $\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\mathrm{P}((A\cap B)^C)$

$$=1-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

정답_(1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{9}{10}$

## 181

$A, B$가 서로 배반사건이므로 $A\cap B=\varnothing$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

정답_④

## 182

ㄱ은 옳다.

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=0.3+0.4-0.2=0.5$

ㄴ은 옳지 않다.

$A\cap C=\varnothing$이므로

$\mathrm{P}(A\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(C)$

$=0.3+0.1=0.4$

ㄷ은 옳다.

$B\cup C=B$이므로 $\mathrm{P}(B\cup C)=\mathrm{P}(B)=0.4$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_⑤

## 183

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B)$

이므로 $\frac{7}{12}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\mathrm{P}(A\cap B)$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{7}{12}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$$

정답_④

## 184

$3\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$

$A^C, B$가 서로 배반사건이므로 $B\subset A$

따라서 $A\cap B=B$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)$

$$=\frac{2}{5}-\frac{2}{15}=\frac{4}{15}$$

정답_①

## 185

3의 배수인 사건을 $A$, 5의 배수인 사건을 $B$라고 하면

$A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

$B=\{5, 10, 15, 20\}$

$A\cap B=\{15\}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$$=\frac{6}{20}+\frac{4}{20}-\frac{1}{20}=\frac{9}{20}$$

정답_②

## 186

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합이 9 이상인 사건을 $A$, 소수인 사건을 $B$라고 하면

$A=\{(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

$B=\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (5, 6), (6, 5)\}$

$A\cap B=\{(5, 6), (6, 5)\}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$$=\frac{10}{36}+\frac{15}{36}-\frac{2}{36}=\frac{23}{36}$$

정답_③

## 187

전체 경우의 수는 $_8C_3$

모두 같은 색의 공이 나오려면 모두 흰 공 또는 모두 검은 공이 나와야 한다. 이때, 모두 흰 공이 나오는 사건을 $A$, 모두 검은 공이 나오는 사건을 $B$라고 하면

$P(A)=\frac{_5C_3}{_8C_3}=\frac{10}{56}$, $P(B)=\frac{_3C_3}{_8C_3}=\frac{1}{56}$

$A$, $B$는 서로 배반이므로 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$=\frac{10}{56}+\frac{1}{56}=\frac{11}{56}$ 정답_④

## 188

전체 경우의 수는 $_{10}C_4$

흰 공이 3개, 검은 공이 1개 나오는 사건을 $A$, 흰 공이 4개 나오는 사건을 $B$라고 하면

$P(A)=\frac{_6C_3\cdot{}_4C_1}{_{10}C_4}=\frac{80}{210}$, $P(B)=\frac{_6C_4}{_{10}C_4}=\frac{15}{210}$

$A$, $B$는 서로 배반이므로 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$=\frac{80}{210}+\frac{15}{210}=\frac{19}{42}$ 정답_②

## 189

전체 경우의 수는 $6\cdot6=36$

방정식 $ax-b=0$의 해가 1인 사건을 $A$라고 하면 $a-b=0$, 즉 $a=b$이어야 하므로

$A=\{(1,\ 1), (2,\ 2), (3,\ 3), (4,\ 4), (5,\ 5), (6,\ 6)\}$

$\therefore P(A)=\frac{6}{36}$

$ax-b=0$의 해가 2인 사건을 $B$라고 하면 $2a-b=0$, 즉 $2a=b$이어야 하므로

$B=\{(1,\ 2), (2,\ 4), (3,\ 6)\}$

$\therefore P(B)=\frac{3}{36}$

$A$, $B$는 서로 배반이므로 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$=\frac{6}{36}+\frac{3}{36}=\frac{1}{4}$ 정답_②

## 190

전체 경우의 수는 $6\cdot6=36$

주사위를 두 번 던져서 꼭짓점 A가 꼭짓점 D에 놓이려면 두 눈의 수의 합이 3 또는 7 또는 11이어야 한다.

(i) 두 눈의 수의 합이 3인 사건을 $A$라고 하면

$A=\{(1,\ 2), (2,\ 1)\}$

$\therefore P(A)=\frac{2}{36}$

(ii) 두 눈의 수의 합이 7인 사건을 $B$라고 하면

$B=\{(1,\ 6), (2,\ 5), (3,\ 4), (4,\ 3), (5,\ 2), (6,\ 1)\}$

$\therefore P(B)=\frac{6}{36}$

(iii) 두 눈의 수의 합이 11인 사건을 $C$라고 하면

$C=\{(5,\ 6), (6,\ 5)\}$

$\therefore P(C)=\frac{2}{36}$

$A$, $B$, $C$는 서로 배반이므로 구하는 확률은

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$

$=\frac{2}{36}+\frac{6}{36}+\frac{2}{36}=\frac{5}{18}$ 정답_ $\frac{5}{18}$

## 191

전체 경우의 수는 $_{10}C_3$

적어도 한 개가 불량품인 사건은 3개 모두 불량품이 아닌 사건의 여사건이다.

3개 모두 불량품이 아닐 사건을 $A$라고 하면

$P(A)=\frac{_8C_3}{_{10}C_3}=\frac{7}{15}$

따라서 구하는 확률은

$P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$ 정답_⑤

## 192

전체 경우의 수는 $8!$

적어도 한 쪽 끝에 모음이 오는 사건은 양 끝에 모두 자음이 오는 사건의 여사건이다.

양 끝에 모두 자음이 오는 경우의 수는 5개의 자음 s, d, l, t, y에서 2개를 택하여 양 끝에 놓은 후, 그 사이에 나머지 6개의 문자를 나열하는 경우의 수와 같으므로 $_5P_2\cdot6!$이다.

따라서 양 끝에 모두 자음이 오는 사건을 $A$라고 하면

$P(A)=\frac{_5P_2\cdot6!}{8!}=\frac{5}{14}$

따라서 구하는 확률은

$P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14}$ 정답_⑤

## 193

전체 경우의 수는 $6^3$

적어도 두 개의 주사위의 눈이 다른 사건은 세 개의 주사위의 눈이 모두 같은 사건의 여사건이다.

세 개의 주사위의 눈이 모두 같은 사건을 $A$라고 하면

$P(A)=\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$

따라서 구하는 확률은

$P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{1}{36}=\frac{35}{36}$ 정답_②

## 194

전체 경우의 수는 $_{6}C_{2}$

적어도 한 명이 여학생인 사건은 모두 남학생인 사건의 여사건이다.

대표 2명이 모두 남학생인 사건을 $A$라고 하면

$$P(A)=\frac{_{3}C_{2}}{_{6}C_{2}}=\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A^{C})=1-P(A)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

정답_ ⑤

## 195

전체 경우의 수는 $_{12}C_{3}$

적어도 한 개가 흰 구슬인 사건은 모두 빨간 구슬인 사건의 여사건이다.

모두 빨간 구슬인 사건을 $A$라고 하면

$$P(A)=\frac{_{7}C_{3}}{_{12}C_{3}}=\frac{7}{44}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A^{C})=1-P(A)=1-\frac{7}{44}=\frac{37}{44}$$

정답_ ⑤

## 196

전체 경우의 수는 $6\cdot6=36$

직선 $ax+by-8=0$이 점 $P(2,\ 2)$를 지난다고 하면

$2a+2b-8=0 \quad \therefore a+b=4$

$a+b=4$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 3), (2,\ 2), (3,\ 1)$의 3가지이므로 점 P를 지날 확률은

$$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

따라서 구하는 확률은 $1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$

정답_ ②

## 197

전체 경우의 수는 $6\cdot6=36$

연립방정식 $2x+ay=3,\ -4x-by=b$의 해가 존재하지 않으려면 $\frac{2}{-4}=\frac{a}{-b}\neq\frac{3}{b}$에서 $b=2a, b\neq-6$ ······㉠

㉠을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 2), (2,\ 4), (3,\ 6)$의 3가지이다.

즉, 해가 존재하지 않을 확률은 $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

따라서 구하는 확률은 $1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$

정답_ ⑤

## 198

전체 경우의 수는 $6^3$

주사위를 세 번 던져서 나온 눈의 최솟값이 1보다 큰 경우는 세 눈의 수가 모두 2, 3, 4, 5, 6에서 나오는 경우이므로 $5^3$가지이다.

이때, 최솟값이 1보다 클 확률은 $\frac{5^3}{6^3}=\frac{125}{216}$

따라서 최솟값이 1일 확률은

$$1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$$

정답_ $\frac{91}{216}$

## 199

전체 경우의 수는 $_{9}C_{2}$

$\frac{b}{a}, \frac{a}{b}$ 중 어느 하나가 정수인 $(a,\ b)$는

$(1,\ 2), (1,\ 3), (1,\ 4), (1,\ 5), (1,\ 6), (1,\ 7), (1,\ 8), (1,\ 9), (2,\ 4), (2,\ 6), (2,\ 8), (3,\ 6), (3,\ 9), (4,\ 8)$

의 14가지

$\frac{b}{a}, \frac{a}{b}$ 중 어느 하나가 정수일 확률은 $\frac{14}{_{9}C_{2}}=\frac{7}{18}$

따라서 $\frac{b}{a}, \frac{a}{b}$가 모두 정수가 아닐 확률은

$$1-\frac{7}{18}=\frac{11}{18}$$

정답_ $\frac{11}{18}$

## 200

전체 경우의 수는 $_{6}C_{3}=20$ ······ ❶

(ⅰ) ×표가 적혀 있는 제비 2개와 ○표가 적혀 있는 제비 1개가 나오는 경우의 수는

$_{3}C_{2}\cdot{_{3}C_{1}}=9$

(ⅱ) ×표가 적혀 있는 제비 3개와 ○표가 적혀 있는 제비 0개가 나오는 경우의 수는

$_{3}C_{3}\cdot{_{3}C_{0}}=1$ ······ ❷

(ⅰ), (ⅱ)에서 ×표가 있는 제비 2개 이상 나오는 경우의 수는

$9+1=10$

따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$ ······ ❸

정답_ $\frac{1}{2}$

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | 전체 경우의 수 구하기 | 20% |
| ❷ | ×표가 있는 제비가 2개 이상 나오는 경우의 수 구하기 | 60% |
| ❸ | 확률 구하기 | 20% |

## 201

전체 경우의 수는 $6\cdot6=36$ ······ ❶

이차방정식 $x^2+2ax+b=0$이 실근을 가지려면

$\frac{D}{4}=a^2-b\geq0 \quad \therefore b\leq a^2$ ······ ❷

(ⅰ) $a=1$이면 $b=1$

(ⅱ) $a=2$이면 $b=1,\ 2,\ 3,\ 4$

(ⅲ) $a\geq3$이면 $b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 이차방정식이 실근을 갖는 경우의 수는

$1+4+4\cdot6=29$ ······ ❸

따라서 구하는 확률은 $\frac{29}{36}$ ······ ❹

정답_ $\frac{29}{36}$

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | 전체 경우의 수 구하기 | 20% |
| ❷ | 이차방정식이 실근을 가질 조건 구하기 | 20% |
| ❸ | 이차방정식이 실근을 갖는 경우의 수 구하기 | 40% |
| ❹ | 확률 구하기 | 20% |

## 202

흰 공의 개수를 $x$라고 하면 ❶

전체 경우의 수는 $_{8}\mathrm{C}_{2}=28$ ❷

2개 모두 흰 공이 나오는 경우의 수는

$_{x}\mathrm{C}_{2}=\dfrac{x(x-1)}{2}$ ❸

2개 모두 흰 공이 나올 확률이 $\dfrac{5}{14}$이므로

$\dfrac{\frac{x(x-1)}{2}}{28}=\dfrac{5}{14}$, $\dfrac{x(x-1)}{56}=\dfrac{5}{14}$

$x^2-x-20=0$, $(x+4)(x-5)=0$ $\quad\therefore x=5\ (\because x>0)$

❹

따라서 구하는 흰 공의 개수는 5이다. ❺

정답_ 5

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | 흰 공의 개수를 미지수 $x$로 놓기 | 10% |
| ❷ | 전체 경우의 수 구하기 | 20% |
| ❸ | 2개 모두 흰 공을 뽑는 경우의 수를 $x$에 대한 식으로 나타내기 | 20% |
| ❹ | $x$의 값 구하기 | 40% |
| ❺ | 흰 공의 개수 구하기 | 10% |

## 203

전체경우의 수는 $8!$ ❶

홀수 번째 자리는 1, 3, 5, 7번째 자리의 4개이고, 모음은 i, a, e의 3개이다.

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{7}\ \boxed{8}$

위의 그림과 같이 4개의 홀수 번째 자리 중에서 3개의 자리에 모음을 나열하는 경우의 수는 $_{4}\mathrm{P}_{3}$이고, 나머지 5개의 자리에 자음을 나열하는 경우의 수는 $5!$이므로 모음이 모두 홀수 번째 자리에 오는 경우의 수는 $_{4}\mathrm{P}_{3}\cdot 5!$ ❷

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{_{4}\mathrm{P}_{3}\cdot 5!}{8!}=\dfrac{1}{14}$ ❸

정답_ $\dfrac{1}{14}$

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | 전체 경우의 수 구하기 | 20% |
| ❷ | 모음이 모두 홀수 번째 자리에 오는 경우의 수 구하기 | 60% |
| ❸ | 확률 구하기 | 20% |

## 204

$6x^2-5ax+a^2=0$에서 $(2x-a)(3x-a)=0$

$\therefore x=\dfrac{a}{2}$ 또는 $x=\dfrac{a}{3}$

따라서 주어진 이차방정식이 정수해를 가지려면 $a$가 2의 배수이거나 3의 배수이어야 한다. ❶

집합 $A$의 원소 중 2의 배수는 25개, 3의 배수는 16개, 6의 배수는 8개이므로 $a$가 2의 배수일 사건을 $A$, 3의 배수일 사건을 $B$라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{25}{50}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{16}{50}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{8}{50}$ ❷

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{25}{50}+\dfrac{16}{50}-\dfrac{8}{50}=\dfrac{33}{50}$ ❸

정답_ $\dfrac{33}{50}$

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | 이차방정식이 정수해를 가질 $a$의 조건 구하기 | 30% |
| ❷ | $a$가 2의 배수일 사건, 3의 배수일 사건, 6의 배수일 사건의 확률 구하기 | 40% |
| ❸ | 확률 구하기 | 30% |

## 205

전체 경우의 수는 $_{10}\mathrm{C}_{2}$

적어도 한 개가 당첨 제비인 사건은 모두 당첨 제비가 아닌 사건의 여사건이다.

모두 당첨 제비가 아닌 사건을 $A$라고 하면 10개의 제비 중 당첨 제비가 아닌 것은 $(10-k)$개이므로 모두 당첨 제비가 아닐 확률은

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{_{10-k}\mathrm{C}_{2}}{_{10}\mathrm{C}_{2}}$ ❶

적어도 한 개가 당첨 제비일 확률이 $\dfrac{8}{15}$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\dfrac{_{10-k}\mathrm{C}_{2}}{_{10}\mathrm{C}_{2}}=\dfrac{8}{15}$

$\dfrac{_{10-k}\mathrm{C}_{2}}{_{10}\mathrm{C}_{2}}=\dfrac{7}{15}$, $\dfrac{(10-k)(9-k)}{90}=\dfrac{7}{15}$

$k^2-19k+48=0$, $(k-3)(k-16)=0$

$\therefore k=3\ (\because 0\le k\le 10)$ ❷

정답_ 3

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | 모두 당첨 제비가 아닌 사건의 확률을 $k$에 대한 식으로 나타내기 | 40% |
| ❷ | $k$의 값 구하기 | 60% |

## 206

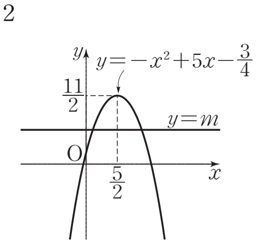
$y=-x^2+5x-\dfrac{3}{4}=-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{11}{2}$

이므로 오른쪽 그림과 같이 포물선

$y=-x^2+5x-\dfrac{3}{4}$과 직선 $y=m$이

만나려면 $m\le\dfrac{11}{2}$이어야 한다.

$\therefore m=1, 2, 3, 4, 5$

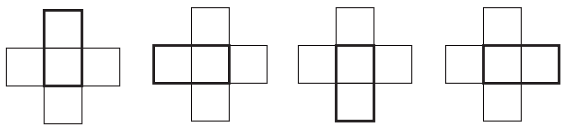


따라서 구하는 확률은 $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ 정답_ ④

## 207

두더지 인형이 두 번 나오는 경우의 수는 $5\cdot5=25$

이때, 두더지가 나오는 두 정사각형이 서로 이웃하는 경우는 다음과 같다.



그런데 순서가 바뀌어도 되므로 경우의 수는 $4\cdot2=8$

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{25}$ 정답_ ⑤

## 208

A, B, C, D가 꺼내어 놓은 책을 각각 $a, b, c, d$라고 하면

D가 $a$를 선택했을 때 나올 수 있는 모든 경우는 3!가지이고,

A, B, C가 자신의 책을 선택하지 못하는 경우를 순서쌍 (A, B, C)로 나타내면 $(b, c, d)$, $(c, d, b)$, $(d, c, b)$의 3가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{3!}=\frac{1}{2}$

즉, $p=2$, $q=1$이므로 $10(p+q)=10(2+1)=30$ 정답_ ①

## 209

$2^m$의 일의 자리의 숫자는 2, 4, 8, 6이 반복되고, $3^n$의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1이 반복된다.

따라서 $2^m+3^n$의 일의 자리의 숫자를 표로 나타내면 다음과 같다.

| + | 2 | 4 | 8 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 7 | 1 | 9 |
| 9 | 1 | 3 | 7 | 5 |
| 7 | 9 | 1 | 5 | 3 |
| 1 | 3 | 5 | 9 | 7 |

이때, $2^m+3^n$의 일의 자리의 숫자가 3의 배수인 경우의 수는 6이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$ 정답_ $\frac{3}{8}$

## 210

10장의 카드 중 $a$, $b$를 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_{10}P_2=10\cdot9=90$

5$\boxed{a}\boxed{b}$가 6의 배수가 되기 위해서는 2의 배수이면서 3의 배수가 되어야 한다.

이때, 2의 배수이려면 일의 자리 숫자가 2의 배수이어야 하므로

$b=0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$

이고 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

(i) $b=0$일 때

$5+a+0=5+a$가 3의 배수이어야 하므로

$a=1,\ 4,\ 7$

(ii) $b=2$일 때

$5+a+2=7+a$가 3의 배수이어야 하므로

$a=5,\ 8$

(iii) $b=4$일 때

$5+a+4=9+a$가 3의 배수이어야 하므로

$a=0,\ 3,\ 6,\ 9$

(iv) $b=6$일 때

$5+a+6=11+a$가 3의 배수이어야 하므로

$a=1,\ 4,\ 7$

(v) $b=8$일 때

$5+a+8=13+a$가 3의 배수이어야 하므로

$a=2,\ 5$

(i)~(v)에서 5$\boxed{a}\boxed{b}$가 6의 배수가 되는 경우의 수는

$3+2+4+3+2=14$

따라서 구하는 확률은 $\frac{14}{90}=\frac{7}{45}$ 정답_ ①

## 211

5명이 5개의 좌석에 앉는 모든 경우의 수는 $5!=120$

처음부터 자동차 B에 탔던 2명이 모두 처음 좌석이 아닌 다른 좌석에 앉게 되는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) 자동차 B에 탔던 2명끼리 자리를 바꾸어 앉고, 나머지 3개의 좌석에 자동차 A에서 온 3명이 자리에 앉는 경우의 수는

$3!=6$

(ii) 자동차 B에 탔던 2명 중 1명은 다른 1명의 자리에 앉고, 나머지 1명은 비었던 3개의 좌석 중 한 곳에 앉고, 나머지 3개의 좌석에 자동차 A에서 온 3명이 자리에 앉는 경우의 수는

$2\cdot3\cdot3!=36$

(iii) 자동차 B에 탔던 2명이 자신들이 앉지 않았던 3개의 좌석 중 2곳에 앉고, 나머지 3개의 좌석에 자동차 A에서 온 사람이 앉는 경우의 수는 ${}_3P_2\cdot3!=36$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $6+36+36=78$

따라서 구하는 확률은 $\frac{78}{120}=\frac{13}{20}$

즉, $p=20$, $q=13$이므로 $p+q=20+13=33$ 정답_ ③

## 212

전체 경우의 수는 ${}_{10}C_3=120$

(i) 직선 $l$ 위의 6개의 점 중에서 고른 두 점과 직선 $m$ 위의 4개의 점 중에서 한 점을 골라 만드는 삼각형의 개수는

${}_6C_2\cdot{}_4C_1=60$

(ii) 직선 $m$ 위의 4개의 점 중에서 고른 두 점과 직선 $l$ 위의 6개의 점 중에서 한 점을 골라 만드는 삼각형의 개수는

${}_4C_2\cdot{}_6C_1=36$

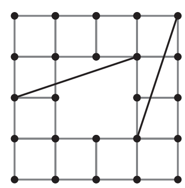
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 삼각형의 개수는 $60+36=96$

따라서 구하는 확률은 $\frac{96}{120}=\frac{4}{5}$ 정답_ ⑤

## 213

24개의 점 중에서 2개를 택하는 모든 경우의 수는

${}_{24}C_2=276$



선분의 길이가 $\sqrt{10}$인 경우는 오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 3, 세로의 길이가 1인 직사각형의 대각선 또는 가로의 길이가 1, 세로의 길이가 3인 직사각형의 대각선인 경우이다. 가로의 길이가 3, 세로의 길이가 1인 직사각형의 대각선은 16개, 가로의 길이가 1, 세로의 길이가 3인 직사각형의 대각선은 16개가 있으므로 선분의 길이가 $\sqrt{10}$인 경우의 수는

$16\cdot2=32$

따라서 구하는 확률은 $\frac{32}{276}=\frac{8}{69}$ 정답_ ④

## 214

A가 $2^3$, $2^{10}$이 적혀 있는 카드를 뽑았고 B가 $2^m$, $2^n$이 적혀 있는 카드를 뽑았다고 하면

$2^3\cdot2^{10}=2^{13}$, $2^m\cdot2^n=2^{m+n}$

A가 지려면 $m+n>13$이어야 한다.

B가 남은 8개의 카드에 적혀 있는 수의 지수 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 중에서 두 수를 뽑는 모든 경우의 수는 ${}_8C_2=28$

B가 $m+n>13$인 두 수를 뽑는 경우를 순서쌍 $(m,\ n)$으로 나타내면

$(9,\ 5)$, $(9,\ 6)$, $(9,\ 7)$, $(9,\ 8)$, $(8,\ 6)$, $(8,\ 7)$

의 6가지이므로 A가 질 확률은

$\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$

따라서 A가 이기거나 비길 확률은

$1-\frac{3}{14}=\frac{11}{14}$ 정답_ ④

## 215

오른쪽 신발 6짝에서 2짝, 왼쪽 신발 6짝에서 2짝을 집는 모든 경우의 수는 ${}_6C_2\cdot{}_6C_2$

짝이 맞는 신발이 하나도 없는 경우의 수는 오른쪽 신발 6짝에서 2짝을 집은 후 이것과 짝이 맞지 않는 왼쪽 신발 4짝에서 2짝을 집는 경우의 수와 같으므로 ${}_6C_2\cdot{}_4C_2$

즉, 짝이 맞는 신발이 하나도 없을 확률은

$\frac{{}_6C_2\cdot{}_4C_2}{{}_6C_2\cdot{}_6C_2}=\frac{2}{5}$

따라서 구하는 확률은 $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$ 정답_ ④

## 216

전체 경우의 수는 ${}_6\Pi_5=6^5$

$(a-b)(b-c)(c-d)(d-e)=0$인 사건의 여사건은

$(a-b)(b-c)(c-d)(d-e)\neq0$, 즉

$a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq d$, $d\neq e$ ⋯⋯ ㉠

를 동시에 만족시키는 사건이다.

이때, ㉠을 만족시키는 경우의 수를 구하면

$a$의 경우의 수는 6, $b$의 경우의 수는 5, $c$의 경우의 수는 5, $d$의 경우의 수는 5, $e$의 경우의 수는 5이므로 $6\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5$이다.

따라서 $(a-b)(b-c)(c-d)(d-e)=0$일 확률은

$1-\frac{6\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5}{6^5}=\frac{671}{1296}$ 정답_ $\frac{671}{1296}$

## 04 조건부확률

### 217

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}$ 정답_ ③

### 218

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{12}$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{12}}=\dfrac{4}{7}$ 정답_ ④

### 219

두 사건 $A, B$가 서로 배반사건이므로 $A\cap B=\varnothing, B\subset A^C$

$\therefore B\cap A^C=B$

$\therefore \mathrm{P}(B|A^C)=\dfrac{\mathrm{P}(B\cap A^C)}{\mathrm{P}(A^C)}=\dfrac{\mathrm{P}(B)}{1-\mathrm{P}(A)}$

$=\dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{8}}=\dfrac{2}{7}$ 정답_ ②

### 220

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{13}{15}$

$\therefore \mathrm{P}(B^C|A^C)=\dfrac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(A^C)}$

$=\dfrac{\mathrm{P}((A\cup B)^C)}{\mathrm{P}(A^C)}$

$=\dfrac{1-\mathrm{P}(A\cup B)}{1-\mathrm{P}(A)}$

$=\dfrac{1-\frac{13}{15}}{1-\frac{2}{3}}$

$=\dfrac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{5}$ 정답_ ①

### 221

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{1}{3}$이므로

$\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)$

$=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ 정답_ ④

### 222

여학생이 뽑히는 사건을 $A$, 혈액형이 O형인 사건을 $B$라고 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}}=\dfrac{2}{5}$ 정답_ ④

### 223

첫 번째 나온 수가 두 번째 나온 수보다 큰 경우는

$(2,\ 1), \underline{(3,\ 1)}, (3,\ 2), (4,\ 1), \underline{(4,\ 2)}, (4,\ 3), \underline{(5,\ 1)}, (5,\ 2), \underline{(5,\ 3)}, (5,\ 4), (6,\ 1), \underline{(6,\ 2)}, (6,\ 3), \underline{(6,\ 4)}, (6,\ 5)$

의 15가지이다.

이 중에서 두 눈의 수의 합이 짝수인 경우는 두 수가 모두 홀수이거나 짝수인 밑줄 친 6가지이므로 구하는 확률은 $\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$

정답_ ④

### 224

임의로 택한 한 명이 여학생인 사건을 $A$, 2학년인 사건을 $B$라고 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

$=\dfrac{(\text{2학년 여학생 수})}{(\text{전체 여학생 수})}$

$=\dfrac{70}{60+70}=\dfrac{7}{13}$ 정답_ ②

### 225

임의로 뽑은 한 명이 남학생인 사건을 $A$, 동생이 있는 사건을 $B$라고 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

$=\dfrac{(\text{동생이 있는 남학생 수})}{(\text{전체 남학생 수})}$

$=\dfrac{x}{x+15}=\dfrac{1}{4}$

$4x=x+15, 3x=15 \qquad \therefore x=5$ 정답_ ①

### 226

임의로 뽑은 한 명의 모자가 노란색인 사건을 $A$, 여자인 사건을 $B$라고 하면

모자가 노란색이었을 때, 그 사람이 여자일 확률은

$p_1=\mathrm{P}(B|A)$

$=\dfrac{(\text{모자가 노란색인 사람 중 여자의 수})}{(\text{모자가 노란색인 사람의 수})}$

$=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$

여자였을 때, 그 여자의 모자가 노란색일 확률은

$p_2=\mathrm{P}(A|B)$

$=\dfrac{(\text{여자 중 모자가 노란색인 사람의 수})}{(\text{여자의 수})}$

$=\dfrac{6}{24}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ p_1-p_2=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}$ 정답_ ①

## 227

주어진 대화를 이용하여 가, 나형을 선택한 남, 여학생 수를 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위 : 명)

| 구분 | 남학생 | 여학생 | 합계 |
|---|---|---|---|
| 가형 | 12 | 9 | 21 |
| 나형 | 6 | 7 | 13 |
| 합계 | 18 | 16 | 34 |

따라서 A형을 선택한 학생들 중에서 뽑은 한 명이 여학생일 확률은 $\dfrac{9}{21}=\dfrac{3}{7}$ 정답_ ③

## 228

| 구분 | 남학생 | 여학생 | 합계 |
|---|---|---|---|
| 찬성 | $0.8\cdot0.7=0.56$ | $0.8\cdot0.3=0.24$ | 0.8 |
| 반대 | $0.6-0.56=0.04$ | $0.4-0.24=0.16$ | 0.2 |
| 합계 | 0.6 | 0.4 | 1 |

여학생인 사건을 $A$, 생활복 도입에 찬성한 학생인 사건을 $B$라고 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{0.24}{0.4}=\dfrac{3}{5}$ 정답_ ⑤

## 229

주어진 표에서 $a$가 적혀 있는 카드의 수는

$4+6+3+2=15$

이 중에서 문자가 2개 적혀 있는 카드의 수는 $a$와 $b$ 또는 $a$와 $c$ 또는 $b$와 $c$가 적혀 있는 카드의 수의 합이므로 $3+6+0=9$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$ 정답_ ③

## 230

학생 중에서 모자를 쓴 남학생이 나올 확률과 학생 중에서 모자를 쓴 여학생이 나올 확률을 각각 $p_1, p_2$라고 하자.

(i) 학생 중에서 모자를 쓴 남학생이 나올 확률은

$p_1=\dfrac{15}{60+40}=\dfrac{15}{100}$

(ii) 학생 중에서 모자를 쓴 여학생이 나올 확률은

$p_2=\dfrac{10}{60+40}=\dfrac{10}{100}$

구하는 확률은 (i) 또는 (ii)인 경우 중에서 (ii)인 경우의 비율을 의미하므로

$\dfrac{p_2}{p_1+p_2}=\dfrac{\frac{10}{100}}{\frac{15}{100}+\frac{10}{100}}=\dfrac{2}{5}$ 정답_ ③

## 231

A, B 두 상자 중 선택하여 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼낼 확률을 각각 $p_1, p_2$라고 하자.

각 상자를 선택할 확률은 $\dfrac{1}{2}$이므로

(i) 상자 A를 택하고, 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼낼 확률은

$p_1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\dfrac{4}{15}$

(ii) 상자 B를 택하고, 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼낼 확률은

$p_2=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{3}{10}$

구하는 확률은 (i) 또는 (ii)인 경우 중에서 (i)인 경우의 비율을 의미하므로

$\dfrac{p_1}{p_1+p_2}=\dfrac{\frac{4}{15}}{\frac{4}{15}+\frac{3}{10}}=\dfrac{8}{17}$ 정답_ ①

## 232

A, B 공장에서 생산한 제품이 불량품일 확률을 각각 $p_1, p_2$라고 하자.

(i) A 공장에서 생산한 제품이 불량품일 확률은

$p_1=\dfrac{60}{100}\cdot\dfrac{1}{100}=\dfrac{6}{1000}$

(ii) B 공장에서 생산한 제품이 불량품일 확률은

$p_2=\dfrac{40}{100}\cdot\dfrac{2}{100}=\dfrac{8}{1000}$

구하는 확률은 (i) 또는 (ii)인 경우 중에서 (ii)인 경우의 비율을 의미하므로

$\dfrac{p_2}{p_1+p_2}=\dfrac{\frac{8}{1000}}{\frac{6}{1000}+\frac{8}{1000}}=\dfrac{4}{7}$ 정답_ ④

## 233

암에 걸리지 않은 사람의 비율은 $100-10=90(\%)$이다. 암에 걸린 사람과 암에 걸리지 않은 사람 중에서 암으로 진단받을 확률을 각각 $p_1, p_2$라고 하자.

(i) 임의로 택한 한 사람이 암에 걸린 사람이고, 이 사람이 암에 걸렸다고 진단받을 확률은

$p_1=\dfrac{10}{100}\cdot\dfrac{80}{100}=\dfrac{8}{100}$

(ii) 임의로 택한 한 사람이 암에 걸리지 않은 사람이고, 이 사람이 암에 걸렸다고 진단받을 확률은

$p_2=\frac{90}{100}\cdot\frac{5}{100}=\frac{45}{1000}$

구하는 확률은 (i) 또는 (ii)인 경우 중에서 (i)인 경우의 비율을 의미하므로

$$\frac{p_1}{p_1+p_2}=\frac{\frac{8}{100}}{\frac{8}{100}+\frac{45}{1000}}=\frac{16}{25}$$

정답_②

## 234

주머니 A에서 흰 공을 꺼낼 때와 검은 공을 꺼낼 때, 주머니 B에서 흰 공을 꺼낼 확률을 각각 $p_1$, $p_2$라고 하자.

(i) 주머니 A에서 흰 공을 꺼내고, 주머니 B에서도 흰 공을 꺼낼 확률은 $p_1=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{6}=\frac{4}{15}$

(ii) 주머니 A에서 검은 공을 꺼내고, 주머니 B에서 흰 공을 꺼낼 확률은 $p_2=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{10}$

구하는 확률은 (i) 또는 (ii)인 경우 중에서 (i)인 경우의 비율을 의미하므로

$$\frac{p_1}{p_1+p_2}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{4}{15}+\frac{3}{10}}=\frac{8}{17}$$

정답_①

## 235

A, B, C 세 집에서 모자를 잃어버릴 확률을 각각 $p_1$, $p_2$, $p_3$이라고 하자.

(i) A에서 잃어버렸을 확률은 $p_1=\frac{1}{5}$

(ii) A에서 잃어버리지 않고, B에서 잃어버렸을 확률은

$p_2=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$

(iii) A에서 잃어버리지 않고, B에서도 잃어버리지 않고, C에서 잃어버렸을 확률은

$p_3=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{16}{125}$

구하는 확률은 (i) 또는 (ii) 또는 (iii)인 경우 중에서 (iii)인 경우의 비율을 의미하므로

$$\frac{p_3}{p_1+p_2+p_3}=\frac{\frac{16}{125}}{\frac{1}{5}+\frac{4}{25}+\frac{16}{125}}=\frac{16}{61}$$

정답_④

## 236

첫 번째에 흰 공을 꺼내는 사건을 $A$, 두 번째에 흰 공을 꺼내는 사건을 $B$라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{9}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{5}{18}$

정답_③

## 237

첫 번째에 흰색 탁구공이 나오는 사건을 $A$, 두 번째에 노란색 탁구공이 나오는 사건을 $B$라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{12}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{8}{11}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{12}\cdot\frac{8}{11}=\frac{8}{33}$

정답_④

## 238

을이 당첨 제비를 뽑는 경우는 다음의 두 가지로 분류할 수 있다.

(i) 갑이 당첨 제비를 뽑고, 을이 당첨 제비를 뽑을 확률은

$\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}=\frac{1}{66}$

(ii) 갑이 당첨 제비가 아닌 것을 뽑고, 을이 당첨 제비를 뽑을 확률은

$\frac{10}{12}\cdot\frac{2}{11}=\frac{10}{66}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{1}{66}+\frac{10}{66}=\frac{11}{66}=\frac{1}{6}$

정답_⑤

## 239

주머니 B에서 검은 공을 꺼내는 경우는 다음의 두 가지로 분류할 수 있다.

(i) 주머니 A에서 흰 공을 꺼내고, 주머니 B에서 검은 공을 꺼낼 확률은 $\frac{3}{5}\cdot\frac{3+2}{8+2}=\frac{3}{10}$

(ii) 주머니 A에서 검은 공을 꺼내고, 주머니 B에서 검은 공을 꺼낼 확률은 $\frac{2}{5}\cdot\frac{5+1}{8+1}=\frac{4}{15}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{3}{10}+\frac{4}{15}=\frac{17}{30}$

정답_⑤

## 240

임의로 택한 한 사람이 감기에 걸렸다고 진단받는 경우는 다음의 두 가지로 분류할 수 있다.

(i) 임의로 택한 한 사람이 감기에 걸린 사람이고, 이 사람이 감기에 걸렸다고 진단받을 확률은

$\frac{400}{1000}\cdot\frac{98}{100}=\frac{392}{1000}$

(ii) 임의로 택한 한 사람이 감기에 걸리지 않은 사람이고, 이 사람이 감기에 걸렸다고 진단받을 확률은

$\frac{600}{1000}\cdot\left(1-\frac{92}{100}\right)=\frac{48}{1000}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{392}{1000}+\frac{48}{1000}=\frac{440}{1000}=\frac{44}{100}=44\ (\%)$

정답_④

## 241

비가 온 날을 ○, 오지 않은 날을 ×라고 하면 월요일에 비가 왔을 때 같은 주 목요일에도 비가 오는 경우는 다음의 네 가지로 분류할 수 있다.

| | 화요일 | 수요일 | 목요일 | 확률 |
|---|---|---|---|---|
| (i) | ○ | ○ | ○ | $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ |
| (ii) | ○ | × | ○ | $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$ |
| (iii) | × | ○ | ○ | $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$ |
| (iv) | × | × | ○ | $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ |

따라서 구하는 확률은

$\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9}=\frac{29}{72}$ 정답_ $\frac{29}{72}$

## 242

회사가 내년에 판매 목표액을 달성하는 경우는 다음의 세 가지로 분류할 수 있다.

(i) 내년 여름의 평균 기온이 예년보다 높고, 판매 목표액을 달성할 확률은 $0.4\cdot0.8=0.32$

(ii) 내년 여름의 평균 기온이 예년과 비슷하고, 판매 목표액을 달성할 확률은 $0.5\cdot0.6=0.3$

(iii) 내년 여름의 평균 기온이 예년보다 낮고, 판매 목표액을 달성할 확률은 $0.1\cdot0.3=0.03$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은 $0.32+0.3+0.03=0.65$

정답_ ③

## 243

(단위 : 명)

| | $L$ | $L^C$ | 합계 |
|---|---|---|---|
| $S$ | 42 | 28 | 70 |
| $S^C$ | 18 | 12 | 30 |
| 합계 | 60 | 40 | 100 |

위의 표에서

$\mathrm{P}(S)=\frac{70}{100}, \mathrm{P}(S^C)=\frac{30}{100}, \mathrm{P}(L)=\frac{60}{100}, \mathrm{P}(L^C)=\frac{40}{100}$

ㄱ. $\mathrm{P}(S\cap L)=\frac{42}{100}$

$\mathrm{P}(S)\mathrm{P}(L)=\frac{70}{100}\cdot\frac{60}{100}=\frac{42}{100}$

$\therefore \mathrm{P}(S\cap L)=\mathrm{P}(S)\mathrm{P}(L)$ (독립)

ㄴ. $\mathrm{P}(S\cap L^C)=\frac{28}{100}$

$\mathrm{P}(S)\mathrm{P}(L^C)=\frac{70}{100}\cdot\frac{40}{100}=\frac{28}{100}$

$\therefore \mathrm{P}(S\cap L^C)=\mathrm{P}(S)\mathrm{P}(L^C)$ (독립)

ㄷ. $\mathrm{P}(S^C\cap L^C)=\frac{12}{100}$

$\mathrm{P}(S^C)\mathrm{P}(L^C)=\frac{30}{100}\cdot\frac{40}{100}=\frac{12}{100}$

$\therefore \mathrm{P}(S^C\cap L^C)=\mathrm{P}(S^C)\mathrm{P}(L^C)$ (독립)

따라서 두 사건이 서로 독립인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

## 244

$A=\{1, 2, 3\}$이라 하면 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

보기의 사건을 $B$라고 할 때, $A, B$가 서로 독립이려면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)$가 성립해야 한다.

위의 식을 만족하는 것을 찾으면 ② $B=\{3, 4\}$이다. 정답_ ②

## 245

표본공간을 $S$라고 하면

$S=\{1, 2, 3, \cdots, 9, 10\}$

이므로

$A=\{1, 2, 5, 10\}, B=\{2, 4, 6, 8, 10\}, C=\{2, 3, 5, 7\}$

$A\cap B=\{2, 10\}, B\cap C=\{2\}, A\cap C=\{2, 5\}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}, \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{4}{10}\cdot\frac{5}{10}=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ (독립)

ㄴ. $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{10}, \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{10}=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(B\cap C)\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$ (종속)

ㄷ. $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}, \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}=\frac{4}{25}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap C)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$ (종속)

따라서 두 사건이 서로 독립인 것은 ㄱ이다. 정답_ ①

## 246

여학생일 사건을 $A$, 스마트폰이 있을 사건을 $B$라고 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{150}{350}=\frac{3}{7}, \mathrm{P}(B)=\frac{280}{350}=\frac{4}{5}, \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{c}{350}$

$A, B$가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{c}{350}=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{5}, \frac{c}{350}=\frac{12}{35}$ $\therefore c=120$ 정답_ ④

## 247

(단위 : 명)

| | 남성 | 여성 | 합계 |
|---|---|---|---|
| 기혼 | 6 | 36 | 42 |
| 미혼 | 20 | $x$ | $20+x$ |
| 합계 | 26 | $36+x$ | $62+x$ |

위의 표에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{26}{62+x}, \mathrm{P}(B)=\frac{20+x}{62+x}, \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{20}{62+x}$

$A, B$가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{20}{62+x}=\frac{26}{62+x}\cdot\frac{20+x}{62+x}, 20(62+x)=26(20+x)$

$6x=720$ $\therefore x=120$ 정답_ ⑤

## 248

ㄱ은 옳다.

$A\subset B$이면 $A\cap B=A$이므로

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$$

ㄴ도 옳다.

$A, B$가 서로 배반이면 $A\cap B=\varnothing$이므로

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(\varnothing)}{P(A)}=0$$

ㄷ은 옳지 않다.

$A, B$가 서로 독립이면 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

이때, $P(A)>0, P(B)>0$이므로 $P(A\cap B)>0$이다.

즉, $A, B$는 서로 배반이 아니다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 정답_②

## 249

ㄱ은 옳지 않다.

$A, B$가 서로 독립이면 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$이므로

$P(A|B)=P(A), P(B|A)=P(B)$

이때, $P(A)$와 $P(B)$가 같지 않을 수 있다.

ㄴ은 옳다.

$A, B$가 서로 배반이면 $A\cap B=\varnothing$이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

이때, $P(A\cup B)\le 1$이므로 $P(A)+P(B)\le 1$

ㄷ도 옳지 않다.

(반례) $A=S$, $B=S$일 때, $P(A\cup B)=1$이지만 $B$는 $A$의 여사건이 아니다.

ㄹ도 옳지 않다.

$A, B$가 서로 독립이면

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$P(A)\ne 0, P(B)\ne 0$이므로 $P(A\cap B)\ne 0$

$\therefore A\cap B\ne\varnothing$

즉, $A, B$는 서로 배반이 아니다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다. 정답_②

## 250

$A, B$가 서로 독립이면 $A^C$과 $B$, $A$와 $B^C$, $A^C$과 $B^C$도 모두 서로 독립이다.

ㄱ은 옳다.

$A^C, B^C$이 서로 독립이므로 $P(A^C|B^C)=P(A^C)$

$A, B^C$이 서로 독립이므로 $P(A|B^C)=P(A)$

이때, $P(A^C)=1-P(A)$이므로

$P(A^C|B^C)=1-P(A|B^C)$

ㄴ은 옳지 않다.

$A, B^C$이 서로 독립이므로 $P(A|B^C)=P(A)$

$A, B$가 서로 독립이므로 $P(A|B)=P(A)$

이때, $P(A)\ne\frac{1}{2}$이면 $P(A)\ne 1-P(A)$이므로

$P(A|B^C)\ne 1-P(A|B)$

ㄷ도 옳다.

$\{1-P(A)\}\{1-P(B)\}=P(A^C)P(B^C)$

$1-P(A\cup B)=P((A\cup B)^C)=P(A^C\cap B^C)$

이때, $A^C, B^C$이 서로 독립이므로

$P(A^C)P(B^C)=P(A^C\cap B^C)$

$\therefore \{1-P(A)\}\{1-P(B)\}=1-P(A\cup B)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_③

## 251

$A, B$가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$\frac{1}{12}=\frac{1}{3}P(B)\qquad \therefore P(B)=\frac{1}{4}$ 정답_②

## 252

$A, B$가 서로 독립이면 $A^C$과 $B$도 서로 독립이므로

$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B)=\{1-P(A)\}P(B)$

$=\{1-P(A)\}\cdot 0.5=0.2$

$1-P(A)=0.4\qquad \therefore P(A)=0.6$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$=0.6+0.5-0.6\cdot 0.5=0.8$ 정답_④

## 253

$A, B$가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{6}P(B)$

$\therefore P(A\cap B^C)+P(A^C\cap B)$

$=\{P(A)-P(A\cap B)\}+\{P(B)-P(A\cap B)\}$

$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$

$=\frac{1}{6}+P(B)-2\cdot\frac{1}{6}P(B)=\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}P(B)=\frac{1}{6}\qquad \therefore P(B)=\frac{1}{4}$ 정답_②

## 254

$A, B$가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{5}$ ……㉠

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=\frac{7}{10}$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $P(A)+P(B)-\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$

$\therefore P(A)+P(B)=\frac{9}{10}$ ……㉢

㉠, ㉢에서 $P(A)=x, P(B)=y$로 놓으면

$x+y=\frac{9}{10}, xy=\frac{1}{5}$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x\left(\frac{9}{10}-x\right)=\frac{1}{5}, x^2-\frac{9}{10}x+\frac{1}{5}=0$

$10x^2-9x+2=0$, $(2x-1)(5x-2)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{2}{5}$

따라서 $x=\frac{1}{2}, y=\frac{2}{5}$ 또는 $x=\frac{2}{5}, y=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(A)>\mathrm{P}(B)$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}, \mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$ 정답_③

## 255

$A, B$가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)$

$\frac{3}{4}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{12}$ $\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{9}$

두 사건 $A, B^C$도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$

$=\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{2}{9}$ 정답_②

## 256

두 명 중 한 명만 명중시키는 경우는 다음의 두 가지로 분류할 수 있다.

(ⅰ) 찬우는 명중시키고, 영수는 명중시키지 못할 확률은

$\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{15}$

(ⅱ) 찬우는 명중시키지 못하고, 영수는 명중시킬 확률은

$\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{15}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\frac{4}{15}+\frac{3}{15}=\frac{7}{15}$ 정답_④

## 257

모두 같은 색을 맞히는 경우는 다음의 세 가지로 분류할 수 있다.

(ⅰ) 두 번 모두 흰색을 맞힐 확률은 $\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{9}{36}$

(ⅱ) 두 번 모두 빨간색을 맞힐 확률은 $\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{4}{36}$

(ⅲ) 두 번 모두 파란색을 맞힐 확률은 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$\frac{9}{36}+\frac{4}{36}+\frac{1}{36}=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$ 정답_④

## 258

동전의 앞면이 한 번 나오는 경우는 다음의 두 가지로 분류할 수 있다.

(ⅰ) 주사위를 던져서 6의 눈이 나오고 동전을 2개 던져서 앞면이 한 번 나올 확률은 $\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{12}$

(ⅱ) 주사위를 던져서 6이 아닌 눈이 나오고 동전을 1개 던져서 앞면이 한 번 나올 확률은 $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\frac{1}{12}+\frac{5}{12}=\frac{1}{2}$ 정답_④

## 259

A반이 우승하는 경우는 다음의 세 가지로 분류할 수 있다.

(ⅰ) A반이 1세트에서 이기고, 2세트에서 이길 확률은

$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

(ⅱ) A반이 1세트에서 이기고, 2세트에서 지고, 3세트에서 이길 확률은 $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$

(ⅲ) A반이 1세트에서 지고, 2세트에서 이기고, 3세트에서 이길 확률은 $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{9}+\frac{4}{27}+\frac{4}{27}=\frac{20}{27}$ 정답_③

## 260

이긴 게임을 ○, 진 게임을 ×로 나타낼 때, 다섯 번째 게임에서 철수가 우승하기 위해서는 ×○×○○이어야 하므로 구하는 확률은

$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{243}$

따라서 $p=243$, $q=8$이므로

$p+q=243+8=251$ 정답_①

## 261

안타를 치는 경우를 ○, 치지 못하는 경우를 ×로 나타낼 때, 2회 이상 안타를 치는 경우는 다음의 네 가지로 분류할 수 있다.

| | A 투수 | B 투수 | 확률 |
|---|---|---|---|
| (ⅰ) | ○ ○ | × | $0.2\cdot0.2\cdot0.75=0.03$ |
| (ⅱ) | ○ × | ○ | $0.2\cdot0.8\cdot0.25=0.04$ |
| (ⅲ) | × ○ | ○ | $0.8\cdot0.2\cdot0.25=0.04$ |
| (ⅳ) | ○ ○ | ○ | $0.2\cdot0.2\cdot0.25=0.01$ |

따라서 구하는 확률은

$0.03+0.04+0.04+0.01=0.12$ 정답_②

## 262

정사면체 모양의 상자를 한 번 던졌을 때, 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{3}{4}$, 2의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 정사면체 모양의 상자를 던져서 3번째에 두 영역을 모두 색칠하는 경우는 다음의 두 가지로 분류할 수 있다.

(ⅰ) (1, 1, 2)의 눈이 나올 확률은

$\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$

(ii) (2, 2, 1)의 눈이 나올 확률은

$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{9}{64}+\frac{3}{64}=\frac{12}{64}=\frac{3}{16}$

따라서 $p=16$, $q=3$이므로

$p+q=16+3=19$ 정답_ ⑤

## 263

첫 번째와 두 번째 나온 수의 합이 4이고, 세 번째 나온 수가 짝수인 경우는 다음의 세 가지로 분류할 수 있다.

(i) 1, 3, 짝수의 순서로 나올 확률은

$\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{6}{216}$

(ii) 2, 2, 짝수의 순서로 나올 확률은

$\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{8}{216}$

(iii) 3, 1, 짝수의 순서로 나올 확률은

$\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{6}{216}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{216}+\frac{8}{216}+\frac{6}{216}=\frac{5}{54}$ 정답_ ①

## 264

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 짝수의 눈이 나올 확률은

$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

따라서 한 개의 주사위를 5번 던질 때, 짝수의 눈이 3번 나올 확률은

${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$ 정답_ ③

## 265

공을 한 번 꺼낼 때, 흰 공이 나올 확률은 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

따라서 10번 꺼낼 때, 흰 공이 $r(0<r<10)$번 나올 확률은

$P(r)={}_{10}C_r\left(\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{2}{3}\right)^{10-r}$

$\therefore \frac{P(2)}{P(9)}=\frac{{}_{10}C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^8}{{}_{10}C_9\left(\frac{1}{3}\right)^9\left(\frac{2}{3}\right)^1}=576$ 정답_ ④

## 266

각 사람이 어느 층에 내리는가는 같은 정도로 기대되므로 1층에서 5층 중 한 층에서 내릴 확률은 $\frac{1}{5}$이다.

한 명이 3층에서 내릴 확률이 $\frac{1}{5}$이므로 5명 중 3명이 3층에서 내릴 확률은

${}_5C_3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{32}{625}$ 정답_ ④

## 267

적어도 2명이 치유되는 사건은 0명 또는 1명이 치유되는 사건의 여사건이다. 한 명을 치료할 때 치유될 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 5명을 치료할 때 0명 또는 1명이 치유될 확률은

${}_5C_0\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{32}+\frac{5}{32}=\frac{3}{16}$

따라서 적어도 2명이 치유될 확률은

$1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$ 정답_ ④

## 268

4문제 중 3문제 또는 4문제를 맞혀야 합격하고, 한 문제를 맞힐 확률은 $\frac{2}{3}$이므로 구하는 확률은

${}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1+{}_4C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{32}{81}+\frac{16}{81}=\frac{16}{27}$ 정답_ ③

## 269

구하는 확률은 1의 눈이 나오고 앞면이 1개 또는 2의 눈이 나오고 앞면이 2개 또는 … 6의 눈이 나오고 앞면이 6개일 확률이다.

주사위 1개를 던져서 $k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$의 눈이 나올 확률은

$\frac{1}{6}$이고, 동전 6개를 던져서 앞면이 $k$개 나올 확률은

${}_6C_1\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+{}_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\frac{1}{2}+{}_6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^6({}_6C_1+{}_6C_2+\cdots+{}_6C_6)$

따라서 구하는 확률은

$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6({}_6C_1+{}_6C_2+\cdots+{}_6C_6)$

$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\{({}_6C_0+{}_6C_1+{}_6C_2+\cdots+{}_6C_6)-{}_6C_0\}$

$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6(2^6-1)$

$=\frac{63}{384}=\frac{21}{128}$ 정답_ ①

## 270

앞면이 나오는 동전의 개수가 1인 경우는 다음의 두 가지로 분류할 수 있다.

(i) 주사위의 6의 약수의 눈이 나온 후, 동전을 3개 동시에 던져서 앞면이 나오는 동전의 개수가 1일 확률은

$\frac{4}{6}\cdot{}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

(ii) 주사위의 6의 약수가 아닌 눈이 나온 후, 동전을 2개 동시에 던져서 앞면이 나오는 동전의 개수가 1일 확률은

$\frac{2}{6}\cdot{}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{6}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$ 정답_ ③

## 271

화살을 과녁에 2번 명중시키는 경우는 다음의 두 가지로 분류할 수 있다.

(i) 흰 공을 꺼내고, 화살을 3번 쏘아 2번 명중시킬 확률은

$$\frac{3}{4}\cdot{}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{1}{6}$$

(ii) 검은 공을 꺼내고, 화살을 4번 쏘아 2번 명중시킬 확률은

$$\frac{1}{4}\cdot{}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{27}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{1}{6}+\frac{2}{27}=\frac{13}{54}$ 정답_ ③

## 272

두 주사위의 눈의 수의 합이 4 이하인 경우는

$(1,\ 1), (1,\ 2), (1,\ 3), (2,\ 1), (2,\ 2), (3,\ 1)$

의 6가지이다.

따라서 두 주사위의 눈의 수의 합이 4 이하일 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$이고,

5 이상일 확률은 $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$이다.

두 개의 주사위를 던져서 6회째에 점 P가 다시 점 A로 돌아오므로 두 주사위의 눈의 수의 합이 4 이하인 횟수를 $x$, 5 이상인 횟수를 $y$라고 하면

$x+y=6,\ 2x-y=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=2, y=4$

따라서 구하는 확률은

$${}_6C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{5}{12}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5$$

$\therefore k=\frac{1}{2}$ 정답_ ①

## 273

동전을 8회 던져서 앞면이 나오는 횟수를 $x$라고 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $(8-x)$이다. 이때, 얻은 점수의 합계가 140점이므로

$20x+10(8-x)=140,\ 10x=60 \qquad \therefore x=6$

따라서 구하는 확률은 동전을 8회 던져서 앞면이 6회 나올 확률이므로

$${}_8C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{64}$$ 정답_ ④

## 274

오른쪽으로 1만큼 움직인 횟수를 $a$, 왼쪽으로 1만큼 움직인 횟수를 $b$라고 하면

$a+b=10,\ a-b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=6, b=4$

점 P가 점 A의 위치에 있을 확률은

$${}_{10}C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{105}{512}$$

따라서 $p=512, q=105$이므로

$p+q=512+105=617$ 정답_ 617

## 275

동전을 5번 던졌을 때, 점 P가 도달할 수 있는 점은

$(5,\ 0), (4,\ 1), (3,\ 2), (2,\ 3), (1,\ 4), (0,\ 5)$

이다.

이 중에서 원점으로부터의 거리가 4 이하인 점은 $(3,\ 2), (2,\ 3)$이다.

(i) 점 P가 $(3,\ 2)$에 위치할 확률은

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

(ii) 점 P가 $(2,\ 3)$에 위치할 확률은

$${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{5}{16}+\frac{5}{16}=\frac{5}{8}$ 정답_ ③

## 276

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=0.2$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=0.2\mathrm{P}(B)$ …… ㉠

…… ❶

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$0.8=0.4+\mathrm{P}(B)-0.2\mathrm{P}(B)$

$0.8\mathrm{P}(B)=0.4 \qquad \therefore \mathrm{P}(B)=0.5$

$\mathrm{P}(B)=0.5$를 ㉠에 대입하면

$\mathrm{P}(A\cap B)=0.2\cdot0.5=0.1$ …… ❷

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.1}{0.4}=0.25$ …… ❸

정답_ 0.25

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | $\mathrm{P}(A\cap B)$를 $\mathrm{P}(B)$에 대한 식으로 나타내기 | 20% |
| ❷ | $\mathrm{P}(A\cap B)$ 구하기 | 50% |
| ❸ | $\mathrm{P}(B|A)$ 구하기 | 30% |

## 277

을만 당첨 제비를 뽑으려면 갑은 당첨 제비가 아닌 것을 뽑고, 을은 당첨 제비를 뽑아야 한다. 갑이 당첨 제비가 아닌 것을 뽑는 사건을 $A$, 을이 당첨 제비를 뽑는 사건을 $B$라고 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)$이다.

이때, $\mathrm{P}(A)=\frac{12-n}{12}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n}{11}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{12-n}{12}\cdot\frac{n}{11}$ …… ❶

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{33}$이므로 $\frac{12-n}{12}\cdot\frac{n}{11}=\frac{5}{33}$에서

$n^2-12n+20=0,\ (n-2)(n-10)=0$

$\therefore n=2$ 또는 $n=10$

따라서 모든 $n$의 값의 합은 $2+10=12$ ❷

정답_ 12

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | 을만 당첨 제비를 뽑을 확률을 $n$에 대한 식으로 나타내기 | 50% |
| ❷ | $n$의 값의 합 구하기 | 50% |

## 278

두 수의 합이 짝수인 경우는 다음의 두 가지로 분류할 수 있다.

(i) 두 주머니 A, B에서 모두 홀수가 적혀 있는 카드를 꺼낼 확률은

$\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$ ❶

(ii) 두 주머니 A, B에서 모두 짝수가 적혀 있는 카드를 꺼낼 확률은

$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$ ❷

구하는 확률은 (i) 또는 (ii)인 경우 중에서 (i)인 경우의 비율을 의미하므로

$$\frac{\frac{9}{25}}{\frac{9}{25}+\frac{4}{25}}=\frac{9}{13}$$ ❸

정답_ $\frac{9}{13}$

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | 두 주머니 A, B에서 모두 홀수가 적혀 있는 카드를 꺼낼 확률 구하기 | 40% |
| ❷ | 두 주머니 A, B에서 모두 짝수가 적혀 있는 카드를 꺼낼 확률 구하기 | 40% |
| ❸ | 확률 구하기 | 20% |

## 279

두 사건 $A, B$가 서로 배반이면 $P(A\cap B)=0$이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서

$0.8=0.5+P(B)$

$\therefore \alpha=P(B)=0.3$ ❶

두 사건 $A, B$가 서로 독립이면 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$에서

$0.8=0.5+P(B)-0.5P(B),\ 0.5P(B)=0.3$

$\therefore P(B)=0.6$

이때, $P(B^C)=1-0.6=0.4$ ❷

두 사건 $A, B^C$도 서로 독립이므로

$\beta=P(A\cup B^C)=P(A)+P(B^C)-P(A\cap B^C)$

$=P(A)+P(B^C)-P(A)P(B^C)$

$=0.5+0.4-0.5\cdot 0.4=0.7$ ❸

$\therefore \alpha\beta=0.3\cdot 0.7=0.21$ ❹

정답_ 0.21

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | $\alpha$의 값 구하기 | 30% |
| ❷ | $P(B^C)$ 구하기 | 30% |
| ❸ | $\beta$의 값 구하기 | 30% |
| ❹ | $\alpha\beta$의 값 구하기 | 10% |

## 280

앞면이 나오는 횟수와 뒷면이 나오는 횟수의 곱이 6이 나오는 경우는 다음의 두 가지로 분류할 수 있다.

(i) 동전의 앞면이 2번, 뒷면이 3번 나올 확률은

${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$ ❶

(i) 동전의 앞면이 3번, 뒷면이 2번 나올 확률은

${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$ ❷

(i), (ii)에서 앞면이 나오는 횟수와 뒷면이 나오는 횟수의 곱이 6일 확률은

$\frac{5}{16}+\frac{5}{16}=\frac{5}{8}$ ❸

따라서 $p=8, q=5$이므로

$p+q=8+5=13$ ❹

정답_ 13

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | 동전의 앞면이 2번, 뒷면이 3번 나올 확률 구하기 | 30% |
| ❷ | 동전의 앞면이 3번, 뒷면이 2번 나올 확률 구하기 | 30% |
| ❸ | 확률 구하기 | 20% |
| ❹ | $p+q$의 값 구하기 | 20% |

## 281

매 경기에서 A팀이 이길 확률을 $p$라고 하면 2번의 경기에서 A팀이 모두 이길 확률이 $\frac{1}{16}$이므로

$p\cdot p=\frac{1}{16},\ p^2=\frac{1}{16}$ $\therefore p=\frac{1}{4}$ ($\because p>0$) ❶

즉, 매 경기에서 A팀이 이길 확률이 $\frac{1}{4}$이므로 4번의 경기에서 3번 이상 이길 확률은

${}_4C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^1+{}_4C_4\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{12}{256}+\frac{1}{256}$

$=\frac{13}{256}$ ❷

정답_ $\frac{13}{256}$

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | 매 경기에서 A팀이 이길 확률 구하기 | 30% |
| ❷ | A팀이 4번의 경기에서 3번 이상 이길 확률 구하기 | 70% |

## 282

학생들 중에서 한 명을 임의로 뽑을 때, 영화 A를 관람한 사람인 사건을 $A$, 영화 B를 관람한 사람인 사건을 $B$, 여학생일 사건을 $C$라고 하면

(ⅰ) 300명의 학생이 두 영화 A, B 중 적어도 한 편의 영화를 관람하였고, 영화 A를 관람한 학생이 150명, 영화 B를 관람한 학생이 180명이므로 두 영화 A, B를 모두 관람한 학생의 수는

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=150+180-300=30$$

(ⅱ) 100명의 여학생이 두 영화 A, B 중 적어도 한 편의 영화를 관람하였고, 영화 A를 관람한 여학생이 45명, 영화 B를 관람한 여학생이 72명이므로 두 영화 A, B를 모두 관람한 여학생의 수는

$$n(A\cap B\cap C)=n(A\cap C)+n(B\cap C)-n((A\cup B)\cap C)=45+72-100=17$$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{30}{300}$, $\mathrm{P}(A\cap B\cap C)=\frac{17}{300}$

이므로

$$\mathrm{P}(C|A\cap B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B\cap C)}{\mathrm{P}(A\cap B)}=\frac{\frac{17}{300}}{\frac{30}{300}}=\frac{17}{30}$$

정답_ ④

## 283

뺑소니 차량이 자가용일 때와 영업용일 때, 목격자가 자가용이라고 증언할 확률을 각각 $p_1, p_2$라고 하자.

(ⅰ) 뺑소니 차량이 자가용이고, 목격자가 자가용이라고 증언할 확률은 $p_1=\frac{80}{100}\cdot\frac{90}{100}=\frac{72}{100}$

(ⅱ) 뺑소니 차량이 영업용이고, 목격자가 자가용이라고 증언할 확률은 $p_2=\frac{20}{100}\cdot\frac{10}{100}=\frac{2}{100}$

목격자가 본 뺑소니 차량이 실제로 자가용일 확률은 (ⅰ) 또는 (ⅱ)인 경우 중에서 (ⅰ)인 경우의 비율을 의미하므로

$$\frac{p_1}{p_1+p_2}=\frac{\frac{72}{100}}{\frac{72}{100}+\frac{2}{100}}=\frac{36}{37}$$

따라서 $p=37, q=36$이므로

$p+q=37+36=73$

정답_ ③

## 284

두 사건 $A, B$가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{4\mathrm{P}(A)}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$a-\frac{1}{4}=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{4\mathrm{P}(A)}-\frac{1}{4}$$

이때, $\mathrm{P}(A)>0$이므로

$$a=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{4\mathrm{P}(A)}\geq 2\sqrt{\mathrm{P}(A)\cdot\frac{1}{4\mathrm{P}(A)}}=1$$

$\left(\text{단, 등호는 } \mathrm{P}(A)=\frac{1}{4\mathrm{P}(A)} \text{ 일 때 성립}\right)$

따라서 실수 $a$의 최솟값은 1이다.

정답_ ⑤

## 285

갑은 $A, B$가 서로 독립이라고 생각했으므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.7 \quad \cdots\cdots ㉠$$

을은 $A, B$가 서로 배반이라고 생각했으므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=0.9 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면 $0.9-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.7$

$$\therefore \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.2 \quad \cdots\cdots ㉢$$

$$\{\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)\}^2=\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\}^2-4\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.9^2-4\cdot0.2\ (\because ㉡, ㉢)=0.81-0.8=0.01$$

$\therefore |\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)|=0.1$

정답_ ①

## 286

(ⅰ) 꺼낸 4개의 공 중 1이 적혀 있는 공이 1개만 나올 확률은

$\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_4}=\frac{2}{5}$

꺼낸 4개의 공 중 1이 적혀 있는 공이 1개 나오는 경우

1, 2, 3, 4를 일렬로 나열할 때, 1, 2, 3, 4의 순서대로 나열할 확률은 $\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$

이때, 주어진 조건을 만족시키는 확률은

$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{24}=\frac{1}{60}$

(ⅱ) 꺼낸 4개의 공 중 1이 적혀 있는 공이 2개 나오는 경우

1이 적혀 있는 공이 2개 나올 확률은

$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

$1, 1, c, d\ (1<c<d)$를 일렬로 나열할 때, $1, 1, c, d$의 순서대로 나열할 확률은 $\frac{1}{\frac{4!}{2!}}=\frac{1}{12}$

이때, 주어진 조건을 만족시키는 확률은

$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{12}=\frac{3}{60}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\frac{1}{60}+\frac{3}{60}=\frac{1}{15}$

정답_ $\frac{1}{15}$

## 287

$(n+1)$회의 시행 후에 말이 점 A에 있는 경우는 $n$회의 시행 후의 결과에 따라 다음의 세 가지로 분류할 수 있다.

(i) $n$회 시행 후에 점 A에 있고, 6의 눈이 나와 A $\longrightarrow$ A가 될 확률은 $p_n \cdot \frac{1}{6}$

(ii) $n$회 시행 후에 점 B에 있고, 2의 눈이 나와 B $\longrightarrow$ A가 될 확률은 $q_n \cdot \frac{1}{6}$

(iii) $n$회 시행 후에 점 C에 있고, 1, 3, 4, 5의 눈이 나와 C $\longrightarrow$ A가 될 확률은 $r_n \cdot \frac{4}{6}$

(i), (ii), (iii)에서 $(n+1)$회의 시행 후에 말이 점 A에 있을 확률 $p_{n+1}$은

$p_{n+1}=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}q_n+\frac{2}{3}r_n$

따라서 $a=\frac{1}{6}, b=\frac{1}{6}, c=\frac{2}{3}$이므로

$abc=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{54}$

정답_⑤

## 288

B팀이 5 : 4로 이기려면 B팀은 5명 모두 성공하고, A팀은 5명 중 4명은 성공, 1명은 실패해야 하므로 구하는 확률은

$${}_5C_5(0.8)^5\cdot{}_5C_4(0.8)^4(0.2)^1=(0.8)^5\cdot5(0.8)^4(0.2)$$
$$=(0.8)^5\cdot(0.8)^4=0.8^9$$

정답_④

## 289

$P(A)$는 첫 번째 던진 동전이 앞면이 나올 확률이므로

$P(A)=\frac{1}{2}$

$P(B)$는 동전을 10번 던졌을 때 앞면이 $k$번 나올 확률이므로

$k=0$일 때, $P(B)={}_{10}C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$1\le k\le 9$일 때, $P(B)={}_{10}C_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}={}_{10}C_k\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$k=10$일 때, $P(B)={}_{10}C_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$\therefore P(B)={}_{10}C_k\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$P(A\cap B)$는 첫 번째 던진 동전이 앞면이 나오고, 나머지 9번 중 앞면이 $(k-1)$번 나올 확률이므로

$$P(A\cap B)=\frac{1}{2}\cdot{}_9C_{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{9-(k-1)}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot{}_9C_{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^9$$

두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이면 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이므로

$\frac{1}{2}\cdot{}_9C_{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{1}{2}\cdot{}_{10}C_k\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$\therefore 2\,{}_9C_{k-1}={}_{10}C_k$

한편, ${}_{10}C_k=\frac{10}{k}\,{}_9C_{k-1}$이므로

$2\,{}_9C_{k-1}=\frac{10}{k}\,{}_9C_{k-1}$, $2=\frac{10}{k}$

$\therefore k=5$

정답_5

## 290

(i) 지수가 번호 $n$인 다리를 건널 확률은 동전 6개를 던져서 앞면이 $n$개 나올 확률이므로

$n=0$일 때, ${}_6C_0\left(\frac{1}{2}\right)^6$

$1\le n\le 5$일 때, ${}_6C_n\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{6-n}={}_6C_n\left(\frac{1}{2}\right)^6$

$n=6$일 때, ${}_6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6$

(ii) 상우가 번호 $n(1\le n\le 6)$인 다리를 건널 확률은 주사위 한 개를 던져서 $n$의 눈이 나올 확률이므로 $\frac{1}{6}$

따라서 두 사람이 같은 다리를 건너게 될 확률은

$${}_6C_1\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{1}{6}+{}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{1}{6}+\cdots+{}_6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{1}{6}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{1}{6}({}_6C_1+{}_6C_2+\cdots+{}_6C_6)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{1}{6}\{({}_6C_0+{}_6C_1+{}_6C_2+\cdots+{}_6C_6)-{}_6C_0\}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{1}{6}\cdot(2^6-1)$$
$$=\frac{21}{128}$$

정답_②

## 291

5의 눈이 나온 주사위가 1개 나오는 경우는 다음의 세 가지로 분류할 수 있다.

(i) 앞면이 나온 동전이 1개이고, 이때 5의 눈이 나온 주사위가 1개일 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{16}$$

(ii) 앞면이 나온 동전이 2개이고, 이때 5의 눈이 나온 주사위가 1개일 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot{}_2C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{18}=\frac{5}{48}$$

(iii) 앞면이 나온 동전이 3개이고, 이때 5의 눈이 나온 주사위가 1개일 확률은

$${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot{}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{1}{8}\cdot\frac{25}{72}=\frac{25}{576}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{16}+\frac{5}{48}+\frac{25}{576}=\frac{121}{576}$

정답_⑤

# III 통계

## 05 확률분포

### 292

주어진 도수분포표에서 확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은

70, 80, 90, 100이고, 그 확률은 각각

$P(X=70)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

$P(X=80)=\frac{3}{10}$

$P(X=90)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

$P(X=100)=\frac{1}{10}$

따라서 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 70 | 80 | 90 | 100 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | 1 |

정답_ 풀이 참조

### 293

(1) 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+a+\frac{1}{4}=1 \quad \therefore a=\frac{1}{6}$

(2) $P(X=2 \text{ 또는 } X=3)=P(X=2)+P(X=3)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$

(3) $P(1\le X\le 3)$

$=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3}{4}$

다른 풀이

(3) $P(1\le X\le 3)=1-P(X=4)$

$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

정답_ (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{5}{12}$ (3) $\frac{3}{4}$

### 294

확률의 총합은 1이므로

$a+2a+4a=1, 7a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{7}$

$\therefore P(X\ge 0)=P(X=0)+P(X=1)$

$=2a+4a=6a$

$=6\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$

정답_ ⑤

### 295

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{a}{2}+a^2=1, 2a^2+3a-2=0$

$(a+2)(2a-1)=0 \quad \therefore a=\frac{1}{2}\ (\because a>0)$

$\therefore P(X\le 0)=P(X=-1)+P(X=0)$

$=a+\frac{a}{2}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

정답_ ④

### 296

확률의 총합은 1이므로

$a+2a+3a+4a=1, 10a=1$

$\therefore a=\frac{1}{10}$

즉, $P(X=x)=\frac{1}{10}(x-1)$이므로

$P(X>3)=P(X=4)+P(X=5)$

$=\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{10}$

정답_ ③

### 297

$X^2-3X+2=0$에서 $(X-1)(X-2)=0$

$\therefore X=1$ 또는 $X=2$

$\therefore P(X^2-3X+2=0)=P(X=1 \text{ 또는 } X=2)$

$=P(X=1)+P(X=2)$

$=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}=\frac{1}{5}$

정답_ $\frac{1}{5}$

### 298

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{3}+a+\frac{1}{2}=1 \quad \therefore a=\frac{1}{6}$

$X^2+X-2<0$에서

$(X+2)(X-1)<0 \quad \therefore -2<X<1$

$\therefore P(X^2+X-2<0)=P(-2<X<1)$

$=P(X=-1)$

$=\frac{1}{3}$

$\therefore \frac{1}{a}P(X^2+X-2<0)=6\cdot\frac{1}{3}=2$

정답_ ⑤

### 299

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4

동시에 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수를 $a, b$라고 하면

$(a, b)$에 대하여

(i) $X=1$인 경우는

$(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)$의 4가지

(ii) $X=2$인 경우는

$(1, 3), (2, 4), (3, 5)$의 3가지

(iii) $X=3$인 경우는

$(1, 4), (2, 5)$의 2가지

(iv) $X=4$인 경우는

(1, 5)의 1가지

따라서

$P(X=1)=\frac{4}{{}_5C_2}=\frac{4}{10}$

$P(X=2)=\frac{3}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$

$P(X=3)=\frac{2}{{}_5C_2}=\frac{2}{10}$

$P(X=4)=\frac{1}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$

이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{4}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | 1 |

$\therefore P(2\le X\le 3)=P(X=2)+P(X=3)$

$=\frac{3}{10}+\frac{2}{10}=\frac{1}{2}$

정답_②

## 300

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이고, 그 확률은 각각

$P(X=2)=\frac{{}_7C_2\cdot{}_3C_3}{{}_{10}C_5}=\frac{1}{12}$

$P(X=3)=\frac{{}_7C_3\cdot{}_3C_2}{{}_{10}C_5}=\frac{5}{12}$

$P(X=4)=\frac{{}_7C_4\cdot{}_3C_1}{{}_{10}C_5}=\frac{5}{12}$

$P(X=5)=\frac{{}_7C_5\cdot{}_3C_0}{{}_{10}C_5}=\frac{1}{12}$

따라서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | 1 |

위의 표에서

$P(X=4)+P(X=5)=\frac{5}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$

이므로

$P(X\ge 4)=\frac{1}{2}\qquad \therefore a=4$

정답_④

## 301

(1) $E(X)=2\cdot\frac{1}{3}+5\cdot\frac{1}{3}+8\cdot\frac{1}{3}=\frac{15}{3}=5$

(2) $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=2^2\cdot\frac{1}{3}+5^2\cdot\frac{1}{3}+8^2\cdot\frac{1}{3}-5^2$

$=31-25=6$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{6}$

정답_(1) 5 (2) 6 (3) $\sqrt{6}$

## 302

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+a=1\qquad \therefore a=\frac{7}{12}$

$\therefore E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{4}+7\cdot\frac{7}{12}=5$

정답_⑤

## 303

확률의 총합은 1이므로

$p+\frac{1}{4}+q+\frac{1}{12}=1$

$\therefore p+q=\frac{2}{3}\qquad \cdots\cdots$ ㉠

$E(X)=0\cdot p+1\cdot\frac{1}{4}+2q+3\cdot\frac{1}{12}=2q+\frac{1}{2}$

$E(X^2)=0^2\cdot p+1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot q+3^2\cdot\frac{1}{12}=4q+1$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=4q+1-\left(2q+\frac{1}{2}\right)^2$

$=-4q^2+2q+\frac{3}{4}$

$V(X)=1$이므로

$-4q^2+2q+\frac{3}{4}=1$

$16q^2-8q+1=0,\ (4q-1)^2=0\qquad \therefore q=\frac{1}{4}$

$q=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면 $p=\frac{5}{12}$

$\therefore 3p+q=3\cdot\frac{5}{12}+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

정답_④

## 304

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{8}+b=1$

$\therefore a+b=\frac{5}{8}\qquad \cdots\cdots$ ㉠

$E(X)=5$이므로

$1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot a+4\cdot\frac{1}{8}+8\cdot b=5,\ 2a+8b+\frac{3}{4}=5$

$\therefore 8a+32b=17\qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{8},\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\left(1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{8}+4^2\cdot\frac{1}{8}+8^2\cdot\frac{1}{2}\right)-5^2$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+2+32-25$

$=9+\frac{3}{4}=9.75$

정답_①

## 305

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{-a+2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{a+2}{10}+\frac{2a+2}{10}=1$$

$$\frac{2a+8}{10}=1 \qquad \therefore a=1$$

따라서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{4}{10}$ | 1 |

$$\mathrm{E}(X)=(-1)\cdot\frac{1}{10}+0\cdot\frac{2}{10}+1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{4}{10}=1$$

$$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\cdot\frac{1}{10}+0^2\cdot\frac{2}{10}+1^2\cdot\frac{3}{10}+2^2\cdot\frac{4}{10}=2$$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=2-1^2=1$$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=1$ 정답_ ①

## 306

복권 한 장에서 받을 수 있는 상금을 $X$원이라고 할 때, 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 3000 | 5000 | 10000 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{65}{100}$ | $\frac{20}{100}$ | $\frac{10}{100}$ | $\frac{5}{100}$ | 1 |

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{65}{100}+3000\cdot\frac{20}{100}+5000\cdot\frac{10}{100}+10000\cdot\frac{5}{100}$$

$$=600+500+500=1600$$

따라서 확률변수 $X$의 기댓값은 1600원이다. 정답_ ⑤

## 307

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

$\therefore \mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{2}{6}+2\cdot\frac{2}{6}+3\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{2}$ 정답_ ③

## 308

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고 주어진 게임의 결과를 표로 나타내면 다음과 같다.

| 500원 | 500원 | 100원 | 받는 금액(원) |
|---|---|---|---|
| H | H | H | 1100 |
| H | H | T | 1000 |
| H | T | H | 600 |
| H | T | T | 500 |
| T | H | H | 600 |
| T | H | T | 500 |
| T | T | H | 100 |
| T | T | T | 0 |

게임에서 받을 수 있는 금액을 $X$원이라 하고 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 100 | 500 | 600 | 1000 | 1100 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 1 |

따라서 확률변수 $X$의 기댓값은

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{8}+100\cdot\frac{1}{8}+500\cdot\frac{2}{8}+600\cdot\frac{2}{8}$$

$$+1000\cdot\frac{1}{8}+1100\cdot\frac{1}{8}$$

$=550$(원) 정답_ ②

## 309

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)={}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

$$\mathrm{P}(X=1)={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

$$\mathrm{P}(X=2)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$$

$$\mathrm{P}(X=3)={}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

따라서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 1 |

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}=3$$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 정답_ ④

## 310

시합을 예정대로 진행했을 때, 각 팀이 우승할 확률은 다음과 같다.

| 1회전 | 2회전 | 3회전 | 우승팀 | 확률 |
|---|---|---|---|---|
| B | A | A | A | $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ |
| B | A | B | B | $1-\left(\frac{3}{4}\right)^2$ |
| B | B | | | |

(i) A팀이 우승할 확률은 $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$, 준우승할 확률은 $1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$이므로 A팀의 상금의 기댓값은

$$P\cdot\frac{9}{16}+\frac{P}{2}\cdot\frac{7}{16}=\frac{25}{32}P(\text{원})$$

(ii) B팀이 우승할 확률은 $\frac{7}{16}$, 준우승할 확률은 $\frac{9}{16}$이므로 B팀의 상금의 기댓값은

$$P\cdot\frac{7}{16}+\frac{P}{2}\cdot\frac{9}{16}=\frac{23}{32}P(\text{원})$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 A, B 두 팀의 상금의 기댓값의 비는

$\frac{25}{32}P : \frac{23}{32}P=25 : 23$ 정답_⑤

## 311

$\mathrm{E}(X)=5$, $\mathrm{V}(X)=2$, $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{2}$이므로

$\mathrm{E}(-3X+1)=-3\mathrm{E}(X)+1$

$=(-3)\cdot5+1=-14$

$\sigma(-3X+1)=3\sigma(X)=3\sqrt{2}$ 정답_⑤

## 312

$\mathrm{E}(X)=10$, $\sigma(X)=2$이므로

$\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b=10a+b=0$ ······㉠

$\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)=a^2\cdot2^2=1$

$a^2=\frac{1}{4}$ $\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because a>0$)

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $b=-5$

$\therefore a+b=\frac{1}{2}+(-5)=-\frac{9}{2}$ 정답_④

## 313

$\mathrm{E}(X)=(-2)\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}=0$

$\mathrm{E}(X^2)=(-2)^2\cdot\frac{1}{4}+0^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{4}=2$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=2$

$\sigma(X)=\sqrt{2}$

(1) $\mathrm{E}(-5X+4)=-5\mathrm{E}(X)+4$

$=(-5)\cdot0+4=4$

(2) $\mathrm{V}(4X-3)=4^2\mathrm{V}(X)=16\cdot2=32$

(3) $\sigma(3X+2)=3\sigma(X)=3\sqrt{2}$ 정답_(1) 4 (2) 32 (3) $3\sqrt{2}$

## 314

$\mathrm{E}(6X)=13$이므로 $6\mathrm{E}(X)=13$

$\therefore \mathrm{E}(X)=\frac{13}{6}$

이때,

$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot a+3\cdot b=\frac{13}{6}$

이므로 $2a+3b=\frac{13}{6}-\frac{1}{6}=2$ 정답_⑤

## 315

$\mathrm{E}(Y)=30$, $\mathrm{E}(Y^2)=1000$에서

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2=1000-30^2=100$

$Y=\frac{1}{2}X+5$에서 $X=2Y-10$이므로

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(2Y-10)=2\mathrm{E}(Y)-10=2\cdot30-10=50$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(2Y-10)=2^2\mathrm{V}(Y)=4\cdot100=400$

$\therefore \frac{\mathrm{V}(X)}{\mathrm{E}(X)}=\frac{400}{50}=8$ 정답_④

## 316

확률의 총합은 1이므로

$\frac{{}_4\mathrm{C}_1}{k}+\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{k}+\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{k}+\frac{{}_4\mathrm{C}_4}{k}=1$

$\frac{4}{k}+\frac{6}{k}+\frac{4}{k}+\frac{1}{k}=1$

$\frac{15}{k}=1$ $\therefore k=15$

$\mathrm{E}(X)=2\cdot\frac{4}{15}+4\cdot\frac{6}{15}+8\cdot\frac{4}{15}+16\cdot\frac{1}{15}$

$=\frac{80}{15}=\frac{16}{3}$

$\therefore \mathrm{E}(3X+1)=3\mathrm{E}(X)+1=3\cdot\frac{16}{3}+1=17$ 정답_⑤

## 317

확률의 총합은 1이므로

$\frac{2}{a}+\frac{3}{a}+\frac{3}{a}+\frac{2}{a}=1$, $\frac{10}{a}=1$ $\therefore a=10$

$\mathrm{E}(X)=0\cdot\frac{2}{10}+1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{2}{10}=\frac{3}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\frac{2}{10}+1^2\cdot\frac{3}{10}+2^2\cdot\frac{3}{10}+3^2\cdot\frac{2}{10}=\frac{33}{10}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{33}{10}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{21}{20}$

$\therefore \mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(10X+5)=10^2\mathrm{V}(X)$

$=100\cdot\frac{21}{20}=105$ 정답_②

## 318

확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{2}{20}$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{4}{20}$ | $\frac{5}{20}$ | $\frac{6}{20}$ | 1 |

$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{2}{20}+2\cdot\frac{3}{20}+3\cdot\frac{4}{20}+4\cdot\frac{5}{20}+5\cdot\frac{6}{20}$

$=\frac{70}{20}=\frac{7}{2}$

$\therefore \mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X+8)=2\mathrm{E}(X)+8$

$=2\cdot\frac{7}{2}+8=15$ 정답_⑤

## 319

$\mathrm{E}(X)=(-3)\cdot\frac{1}{10}+(-1)\cdot\frac{2}{10}+1\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{4}{10}=1$

$\mathrm{E}(X^2)=(-3)^2\cdot\frac{1}{10}+(-1)^2\cdot\frac{2}{10}+1^2\cdot\frac{3}{10}+3^2\cdot\frac{4}{10}=5$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=5-1^2=4$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{4}=2$

확률변수 $Y$의 평균과 표준편차가 각각 25, 10이므로

$E(Y)=E(aX+b)=aE(X)+b$

$=a+b=25$

$\sigma(Y)=\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

$=2|a|=10$

$\therefore |a|=5, a+b=25$

이때, $a>0$이므로 $a=5, b=20$

$\therefore b-a=15$ 정답_ ②

## 320

주머니 안의 모든 구슬의 개수는

$1+2+3+\cdots+10=55$

이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | $\cdots$ | 10 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{55}$ | $\frac{2}{55}$ | $\frac{3}{55}$ | $\cdots$ | $\frac{10}{55}$ | 1 |

$E(X)=1\cdot\frac{1}{55}+2\cdot\frac{2}{55}+3\cdot\frac{3}{55}+\cdots+10\cdot\frac{10}{55}$

$=\frac{385}{55}=7$

$\therefore E(5X+2)=5E(X)+2=5\cdot7+2=37$ 정답_ ④

## 321

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_2C_0\cdot{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$

$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{6}{10}$

$P(X=2)=\frac{{}_2C_2\cdot{}_3C_0}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$

따라서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | 1 |

$E(X)=0\cdot\frac{3}{10}+1\cdot\frac{6}{10}+2\cdot\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$

$E(X^2)=0^2\cdot\frac{3}{10}+1^2\cdot\frac{6}{10}+2^2\cdot\frac{1}{10}=1$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

$\therefore V(5X+1)=5^2V(X)=25\cdot\frac{9}{25}=9$ 정답_ ⑤

## 322

(i) 연속하는 100개의 자연수에서 임의로 뽑은 두 수의 차의 최솟값은 1, 최댓값은 99이므로 $X$가 취할 수 있는 값은

1, 2, 3, $\cdots$, 99

(ii) 연속하는 100개의 홀수에서 임의로 뽑은 두 수의 차는 2의 배수이고, 최솟값은 2, 최댓값은 198이므로 $Y$가 취할 수 있는 값은

2, 4, 6, $\cdots$, 198

(iii) 연속하는 100개의 짝수에서 임의로 뽑은 두 수의 차는 2의 배수이고, 최솟값은 2, 최댓값은 198이므로 $Z$가 취할 수 있는 값은

2, 4, 6, $\cdots$, 198

따라서 $Y=Z=2X$이므로 $V(Y)=V(Z)=4V(X)$

$\therefore V(X)<V(Y)=V(Z)$ 정답_ ⑤

## 323

$T=a\left(\frac{X-m}{n}\right)+b=\frac{aX}{n}-\frac{am}{n}+b$이므로

$E(T)=E\left(\frac{aX}{n}-\frac{am}{n}+b\right)$

$=\frac{aE(X)}{n}-\frac{am}{n}+b$

$=\frac{am}{n}-\frac{am}{n}+b$

$=b=100$

$\sigma(T)=\sigma\left(\frac{aX}{n}-\frac{am}{n}+b\right)$

$=\frac{|a|\sigma(X)}{n}$

$=\frac{|a|n}{n}$

$=|a|=20$

이때, $a>0$이므로 $a=20$

$\therefore a+b=20+100=120$ 정답_ ⑤

## 324

주사위를 10번 던졌으므로 $n=10$

5의 약수는 1, 5이므로 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 5의 약수의 눈이 나올 확률은

$p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 정답_ $n=10$, $p=\frac{1}{3}$

## 325

$5P(X=2)=2P(X=4)$에서

$5\,{}_8C_2p^2(1-p)^6=2\,{}_8C_4p^4(1-p)^4$

$0<p<1$이므로

$p^2=(1-p)^2, 1-2p=0$

$\therefore p=\frac{1}{2}$

$\therefore P(X=6)={}_8C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{64}$ 정답_ ③

## 326

$\mathrm{P}(X=2)=5\mathrm{P}(X=1)$에서

${}_{n}\mathrm{C}_{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=5\cdot{}_{n}\mathrm{C}_{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=5n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n},\ \frac{n(n-1)}{2}=5n$

$n^2-11n=0 \quad \therefore n(n-11)=0$

이때, $n$은 자연수이므로 $\quad n=11$

정답_①

## 327

한 개의 주사위를 한 번 던져서 3의 배수의 눈이 나올 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(6,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\therefore \frac{\mathrm{P}(X=3)}{\mathrm{P}(X=2)}=\frac{{}_{6}\mathrm{C}_{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}}{{}_{6}\mathrm{C}_{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{4}}=\frac{2}{3}$

정답_②

## 328

(1) $\mathrm{E}(X)=300\cdot\frac{1}{4}=75$

(2) $\mathrm{V}(X)=300\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{225}{4}$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{15}{2}$

정답_(1) 75 (2) $\frac{225}{4}$ (3) $\frac{15}{2}$

## 329

$\mathrm{E}(X)=200p=40$이므로 $\quad p=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=200\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=32$

정답_①

## 330

확률변수 $X$의 평균과 표준편차가 모두 $\frac{19}{20}$이므로

$\mathrm{E}(X)=np=\frac{19}{20}$ ……㉠

$\sigma(X)=\sqrt{npq}=\frac{19}{20}$ (단, $q=1-p$)

$\therefore npq=\left(\frac{19}{20}\right)^2$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{19}{20}q=\left(\frac{19}{20}\right)^2 \quad \therefore q=\frac{19}{20}$

$1-p=\frac{19}{20}$이므로 $\quad p=\frac{1}{20}$

$p=\frac{1}{20}$을 ㉠에 대입하면 $\quad n=19$

정답_②

## 331

$\mathrm{V}(X)=10p(1-p)=-10(p^2-p)$

$\quad=-10\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$

이므로 $\mathrm{V}(X)$는 $p=\frac{1}{2}$일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 구하는 $X$의 평균은

$\mathrm{E}(X)=10\cdot\frac{1}{2}=5$

정답_④

## 332

확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=np=1$ ……㉠

$\mathrm{V}(X)=npq=\frac{9}{10}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\quad q=\frac{9}{10}$

$\therefore p=1-q=\frac{1}{10}$

$p=\frac{1}{10}$을 ㉠에 대입하면 $\quad n=10$

$\therefore \mathrm{P}(X<2)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$\quad={}_{10}\mathrm{C}_{0}\left(\frac{9}{10}\right)^{10}+{}_{10}\mathrm{C}_{1}\left(\frac{1}{10}\right)^{1}\left(\frac{9}{10}\right)^{9}$

$\quad=\frac{19}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{9}$

정답_①

## 333

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(90,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

(1) $\mathrm{E}(X)=90\cdot\frac{1}{3}=30$

(2) $\mathrm{V}(X)=90\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=20$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

정답_(1) 30 (2) 20 (3) $2\sqrt{5}$

## 334

확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}\left(200,\ \frac{1}{10}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=200\cdot\frac{1}{10}=20$

$\sigma(X)=\sqrt{200\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

정답_③

## 335

확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}\left(9,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=9\cdot\frac{1}{3}=3,$

$\mathrm{V}(X)=9\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=2$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$2=\mathrm{E}(X^2)-3^2$

$\therefore \mathrm{E}(X^2)=11$

정답_③

## 336

한 개의 제품이 불량품일 확률은 $\frac{1}{4}$이고, 한 개의 포장하는 상자가 불량품일 확률은 $\frac{1}{5}$이므로 2개의 제품과 포장하는 상자가 모두 합격품일 확률은

$\left(1-\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{9}{20}$

따라서 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(800,\ \frac{9}{20}\right)$를 따르므로

$\mathrm{V}(X)=800\cdot\frac{9}{20}\cdot\frac{11}{20}=198$ 정답_ ②

## 337

확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}\left(6,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$\mathrm{V}(X)=6\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

$\therefore \mathrm{V}(-3X+2)=(-3)^2\mathrm{V}(X)=9\cdot\frac{4}{3}=12$ 정답_ ⑤

## 338

확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=n\cdot\frac{1}{6}=\frac{n}{6}$

$\mathrm{E}(3X+2)=3\mathrm{E}(X)+2=3\cdot\frac{n}{6}+2$

$=\frac{n}{2}+2=10$

이므로 $\frac{n}{2}=8$ $\therefore n=16$ 정답_ ③

## 339

확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}\left(18,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=18\cdot\frac{1}{3}=6$

$\sigma(X)=\sqrt{18\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}=\sqrt{4}=2$

$\therefore \mathrm{E}\left(\frac{X-\sigma(X)}{\sigma(X)}\right)+\sigma\left(\frac{X-\mathrm{E}(X)}{\mathrm{E}(X)}\right)$

$=\mathrm{E}\left(\frac{X-2}{2}\right)+\sigma\left(\frac{X-6}{6}\right)$

$=\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}X-1\right)+\sigma\left(\frac{1}{6}X-1\right)$

$=\frac{1}{2}\mathrm{E}(X)-1+\frac{1}{6}\sigma(X)$

$=\frac{1}{2}\cdot6-1+\frac{1}{6}\cdot2=\frac{7}{3}$ 정답_ ①

## 340

확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=10\cdot\frac{1}{2}=5$

$\therefore \mathrm{E}(2X+1)=2\mathrm{E}(X)+1=2\cdot5+1=11$

따라서 구하는 상금의 기댓값은 11원이다. 정답_ ③

## 341

확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(40,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=40\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{15}{2}$

$\therefore \mathrm{V}(2X-1)=2^2\mathrm{V}(X)=4\cdot\frac{15}{2}=30$ 정답_ ②

## 342

K군을 지지할 확률은 $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$이므로 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(48,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{48\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}=\sqrt{9}=3$

$\therefore \sigma(3X-1)=3\sigma(X)=3\cdot3=9$ 정답_ ①

## 343

동전 한 개를 1000번 던졌을 때 앞면이 대략 $k$번 나온다고 생각하면 큰 수의 법칙에 의해 시행 횟수가 충분히 클 때 통계적 확률은 수학적 확률에 가까워지므로

$\frac{k}{1000}=\frac{1}{2}$에서 $k=500$

따라서 앞면은 대략 500번 정도 나올 수 있다. 정답_ 500번

## 344

시행 횟수 $n$을 크게 할수록, 사건 $A$가 일어나는 횟수에 대한 상대도수인 (가) 통계적 확률이 사건 $A$가 일어나는 (나) 수학적 확률에 가까워짐을 뜻한다. 큰수의 법칙에 의해 자연현상이나 사회현상에 대하여 (나) 수학적 확률을 알 수 없는 경우에는 (가) 통계적 확률을 대신 사용할 수 있다. 정답_ ⑤

## 345

$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{10}-\frac{1}{6}\right|<0.1\right)$

$=\mathrm{P}\left(-0.1<\frac{X}{10}-\frac{1}{6}<0.1\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{1}{6}-0.1<\frac{X}{10}<\frac{1}{6}+0.1\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{4}{60}<\frac{X}{10}<\frac{16}{60}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{2}{3}<X<\frac{8}{3}\right)$

$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=0.323+0.291=0.614$ 정답_ ④

## 346

확률의 총합은 1이므로

$\frac{2}{a}+\frac{6}{a}+\frac{12}{a}=1,\ \frac{20}{a}=1$ $\therefore a=20$ ❶

$X^2-4X+3<0$에서 $(X-1)(X-3)<0$

$\therefore 1<X<3$

$\therefore \mathrm{P}(X^2-4X+3<0)=\mathrm{P}(1<X<3)=\mathrm{P}(X=2)$

$=\dfrac{6}{20}=\dfrac{3}{10}$ ❷

정답_ $\dfrac{3}{10}$

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | $a$의 값 구하기 | 50% |
| ❷ | $\mathrm{P}(X^2-4X+3<0)$ 구하기 | 50% |

## 347

$\mathrm{P}(X\geq3)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$

$=\dfrac{2+a}{6}+\dfrac{1}{6}$

$=\dfrac{3+a}{6}=\dfrac{2}{3}$

에서 $3(3+a)=12,\ 3+a=4$

$\therefore a=1$ ❶

$\mathrm{E}(X)=1\cdot\dfrac{1}{6}+2\cdot\dfrac{1}{6}+3\cdot\dfrac{3}{6}+4\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{8}{3}$ ❷

$\therefore \mathrm{E}(6X+5)=6\mathrm{E}(X)+5$

$=6\cdot\dfrac{8}{3}+5=21$ ❸

정답_ 21

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | $a$의 값 구하기 | 40% |
| ❷ | $\mathrm{E}(X)$의 값 구하기 | 40% |
| ❸ | $\mathrm{E}(6X+5)$의 값 구하기 | 20% |

## 348

확률의 총합은 1이므로

$a+3a+7a+13a=1,\ 24a=1$

$\therefore a=\dfrac{1}{24}$ ❶

따라서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{3}{24}$ | $\frac{7}{24}$ | $\frac{13}{24}$ | 1 |

❷

$\mathrm{E}(X)=0\cdot\dfrac{1}{24}+1\cdot\dfrac{3}{24}+2\cdot\dfrac{7}{24}+3\cdot\dfrac{13}{24}$

$=\dfrac{56}{24}=\dfrac{7}{3}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\cdot\dfrac{1}{24}+1^2\cdot\dfrac{3}{24}+2^2\cdot\dfrac{7}{24}+3^2\cdot\dfrac{13}{24}$

$=\dfrac{148}{24}=\dfrac{37}{6}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\dfrac{37}{6}-\left(\dfrac{7}{3}\right)^2=\dfrac{13}{18}$

따라서 $p=18,\ q=13$이므로

$p+q=18+13=31$ ❸

정답_ 31

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | $a$의 값 구하기 | 30% |
| ❷ | 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내기 | 20% |
| ❸ | $p+q$의 값 구하기 | 50% |

## 349

뒤집은 3개의 동전의 종류에 따라 다음의 네 가지 경우로 분류할 수 있다.

(i) 뒤집은 동전이 앞면 3개일 때

뒤집은 후 앞면은 1개이고, 그 확률은

$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{4}{35}$

(ii) 뒤집은 동전이 앞면 2개, 뒷면 1개일 때

뒤집은 후 앞면은 3개이고, 그 확률은

$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{18}{35}$

(iii) 뒤집은 동전이 앞면 1개, 뒷면 2개일 때

뒤집은 후 앞면은 5개이고, 그 확률은

$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{12}{35}$

(iv) 뒤집은 동전이 뒷면 3개일 때

뒤집은 후 앞면은 7개이고, 그 확률은

$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{35}$ ❶

따라서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{4}{35}$ | $\frac{18}{35}$ | $\frac{12}{35}$ | $\frac{1}{35}$ | 1 |

❷

$\mathrm{E}(X)=1\cdot\dfrac{4}{35}+3\cdot\dfrac{18}{35}+5\cdot\dfrac{12}{35}+7\cdot\dfrac{1}{35}$

$=\dfrac{125}{35}=\dfrac{25}{7}$

따라서 $m=7,\ n=25$이므로

$m+n=7+25=32$ ❸

정답_ 32

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | 경우에 따른 확률 구하기 | 30% |
| ❷ | 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내기 | 20% |
| ❸ | $m+n$의 값 구하기 | 50% |

## 350

확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20,\ \dfrac{1}{6}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=20\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}=\dfrac{25}{9}$ ❶

확률변수 $Y$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(Y)=n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{4}$ ……… ❷

$\mathrm{V}(Y)>\mathrm{V}(X)$에서 $\frac{n}{4}>\frac{25}{9}$ $\quad\therefore n>\frac{100}{9}=11.11\cdots$

따라서 구하는 $n$의 최솟값은 12이다. ……… ❸

정답_ 12

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | $\mathrm{V}(X)$의 값 구하기 | 30% |
| ❷ | $\mathrm{V}(Y)$를 $n$에 대한 식으로 나타내기 | 30% |
| ❸ | $n$의 최솟값 구하기 | 40% |

## 351

확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=np$

$\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

$\mathrm{E}(2X+1)=2\mathrm{E}(X)+1=2np+1=129$

$\therefore np=64$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

……… ❶

$\sigma(2X+1)=2\sigma(X)=2\sqrt{np(1-p)}=8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\sqrt{64(1-p)}=4,\ 1-p=\frac{1}{4}$

$\therefore p=\frac{3}{4}$ ……… ❷

$p=\frac{3}{4}$을 ㉠에 대입하면 $\quad n=\frac{256}{3}$ ……… ❸

정답_ $\frac{256}{3}$

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | $np$의 값 구하기 | 40% |
| ❷ | $p$의 값 구하기 | 40% |
| ❸ | $n$의 값 구하기 | 20% |

## 352

ㄱ은 옳다.

$G(3)=\mathrm{P}(X>3)=1-\mathrm{P}(0\le X\le 3)$
$\quad=1-F(3)$

ㄴ은 옳지 않다.

$\mathrm{P}(3\le X\le 8)=\mathrm{P}(0\le X\le 8)-\mathrm{P}(0\le X\le 2)$
$\quad=F(8)-F(2)$

ㄷ도 옳다.

$\mathrm{P}(3\le X\le 8)=\mathrm{P}(0\le X\le 8)-\mathrm{P}(0\le X\le 2)$
$\quad=\{1-\mathrm{P}(X>8)\}-\{1-\mathrm{P}(X>2)\}$
$\quad=\{1-G(8)\}-\{1-G(2)\}$
$\quad=G(2)-G(8)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ④

## 353

앞면이 나오는 횟수를 $a$, 뒷면이 나오는 횟수를 $b$라고 하면 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(0,\ 5),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (5,\ 0)$

이때, $X=|a-b|$이므로 $X$가 가질 수 있는 값은 1, 3, 5이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=1)={}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2$
$\quad=\frac{5}{16}+\frac{5}{16}=\frac{5}{8}$

$\mathrm{P}(X=3)={}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1$
$\quad=\frac{5}{32}+\frac{5}{32}=\frac{5}{16}$

$\mathrm{P}(X=5)={}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5$
$\quad=\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{1}{16}$

따라서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 3 | 5 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{5}{8}$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | 1 |

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{5}{8}+3\cdot\frac{5}{16}+5\cdot\frac{1}{16}=\frac{15}{8}$

정답_ ④

## 354

5, 6, 7, 8, 9 중에서 서로 다른 2개의 숫자를 택하여 순서대로 입력하는 모든 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_2=5\cdot 4=20$

따라서 한 번의 시도에서 비밀번호를 맞힐 확률은 $\frac{1}{20}$이다.

처음 입력할 때부터 로그인될 때까지 걸리는 시간을 $X$초라고 하면

$\mathrm{P}(X=10)=$(첫 번째 시도에서 로그인될 확률)
$\quad=\frac{1}{20}$

$\mathrm{P}(X=20)=$(두 번째 시도에서 로그인될 확률)
$\quad=\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{19}$
$\quad=\frac{1}{20}$

$\mathrm{P}(X=30)=$(세 번째 시도에서 로그인될 확률)
$\quad=\frac{19}{20}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{1}{18}$
$\quad=\frac{1}{20}$

$\vdots$

$\mathrm{P}(X=200)=$(20번째 시도에서 로그인될 확률)
$\quad=\frac{19}{20}\cdot\frac{18}{19}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$
$\quad=\frac{1}{20}$

따라서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 10 | 20 | 30 | $\cdots$ | 190 | 200 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{20}$ | $\cdots$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{20}$ | 1 |

$$\mathrm{E}(X)=10\cdot\frac{1}{20}+20\cdot\frac{1}{20}+30\cdot\frac{1}{20}+\cdots+200\cdot\frac{1}{20}$$
$$=\frac{1}{2}(1+2+3+\cdots+20)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 210=105$$

즉, 구하는 시간의 기댓값은 105초$=$1분 45초이다. 정답_③

## 355

7개의 관광 코스와 내야 하는 요금의 합은

P → A → B → C → D → E → Q: 70000원

P → A → B → D → E → Q: 56000원

P → A → B → E → Q: 42000원

P → A → C → B → D → E → Q: 70000원

P → A → C → B → E → Q: 56000원

P → A → C → D → B → E → Q: 70000원

P → A → C → D → E → Q: 56000원

따라서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 42000 | 56000 | 70000 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | 1 |

$$\mathrm{E}(X)=42000\cdot\frac{1}{7}+56000\cdot\frac{3}{7}+70000\cdot\frac{3}{7}=60000$$
$$\therefore \mathrm{E}\left(\frac{X}{1000}\right)=\frac{1}{1000}\mathrm{E}(X)$$
$$=\frac{60000}{1000}=60$$

따라서 확률변수 $\frac{X}{1000}$의 기댓값은 60원이다. 정답_③

## 356

짝수가 나오는 횟수를 $a$, 홀수가 나오는 횟수를 $b$라고 하면 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(0,\ 6), (1,\ 5), (2,\ 4), (3,\ 3), (4,\ 2), (5,\ 1), (6,\ 0)$

이때, $X=(a-b)^2$이므로 $X$가 가질 수 있는 값은

$0,\ 4,\ 16,\ 36$

이고 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)={}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=20\left(\frac{1}{2}\right)^6$$
$$\mathrm{P}(X=4)={}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=15\left(\frac{1}{2}\right)^6+15\left(\frac{1}{2}\right)^6$$
$$=30\left(\frac{1}{2}\right)^6$$
$$\mathrm{P}(X=16)={}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_6\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1$$
$$=6\left(\frac{1}{2}\right)^6+6\left(\frac{1}{2}\right)^6$$
$$=12\left(\frac{1}{2}\right)^6$$
$$\mathrm{P}(X=36)={}_6\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_6\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{2}\right)^6$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^6+\left(\frac{1}{2}\right)^6$$
$$=2\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

따라서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

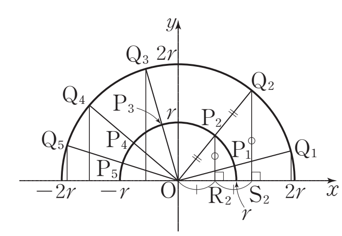
| $X$ | 0 | 4 | 16 | 36 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $20\left(\frac{1}{2}\right)^6$ | $30\left(\frac{1}{2}\right)^6$ | $12\left(\frac{1}{2}\right)^6$ | $2\left(\frac{1}{2}\right)^6$ | 1 |

$$\mathrm{E}(X)=0\cdot 20\left(\frac{1}{2}\right)^6+4\cdot 30\left(\frac{1}{2}\right)^6+16\cdot 12\left(\frac{1}{2}\right)^6+36\cdot 2\left(\frac{1}{2}\right)^6$$
$$=\frac{1}{2^6}(120+192+72)$$
$$=\frac{384}{64}=6$$

$\therefore \mathrm{E}(6X+1)=6\mathrm{E}(X)+1=6\cdot 6+1=37$ 정답_④

## 357

$i=1, 2, 3, 4, 5$일 때, 두 점 $\mathrm{P}_i$, $\mathrm{Q}_i$에서 $x$축에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{R}_i$, $\mathrm{S}_i$라 하고, 점 $\mathrm{P}_i$의 $x$좌표를 $a_i$, 점 $\mathrm{Q}_i$의 $x$좌표를 $b_i$라고 하면 $\triangle \mathrm{OP}_i\mathrm{R}_i \backsim \triangle \mathrm{OQ}_i\mathrm{S}_i$이므로




$b_i=2a_i$

따라서 $a_i$의 평균을 $m_a$, 표준편차를 $\sigma_a$, $b_i$의 평균을 $m_b$, 표준편차를 $\sigma_b$라고 하면

(ⅰ) $m_a=10$에서

$m_b=2m_a=2\cdot 10=20$

(ⅱ) $\sigma_a=\frac{5}{2}$에서

$\sigma_b=|2|\sigma_a=2\cdot\frac{5}{2}=5$

$\therefore m_b\sigma_b=20\cdot 5=100$ 정답_①

## 358

정사각형 9개 중에서 3개를 색칠하는 모든 경우의 수는

${}_9\mathrm{C}_3=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}=84$

유형 1의 경우의 수는 $3\cdot 2=6$

유형 2의 경우의 수는 $4\cdot 4=16$

유형 3의 경우의 수는 $84-6-16=62$

따라서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{6}{84}$ | $\frac{16}{84}$ | $\frac{62}{84}$ | 1 |

$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{6}{84}+2\cdot\frac{16}{84}+3\cdot\frac{62}{84}=\frac{8}{3}$

$\therefore \mathrm{E}(42X)=42\mathrm{E}(X)=42\cdot\frac{8}{3}=112$ 정답_ ②

## 359

$a, b$가 나오는 전체 경우의 수는 $6^2=36$

$1\le a\le 6, 1\le b\le 6$이므로 $a^2+b^2\le 10$을 만족시키는 순서쌍 $(a, b)$는

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)$

의 6가지이므로 사건 $E$가 일어날 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

따라서 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(36, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=36\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=5$ 정답_ ④

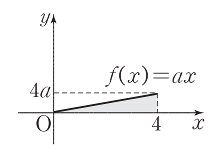
# 06 정규분포

## 360

전구의 수명, 전구의 무게는 어떤 범위의 모든 실수의 값을 갖지만 전구의 개수는 그렇지 않다. 따라서 $X, Y$는 연속확률변수이고 $Z$는 이산확률변수이다. 정답_ ②

## 361

$0\le x\le 4$에서 $f(x)=ax$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



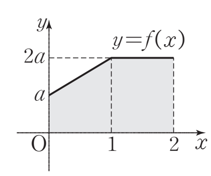

$f(x)=ax$의 그래프와 $x$축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4a=1, 8a=1$

$\therefore a=\frac{1}{8}$ 정답_ $\frac{1}{8}$

## 362

구간을 나누어 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



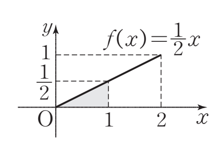

$y=f(x)$와 $x$축 및 두 직선 $x=0, x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\cdot(a+2a)\cdot 1+1\cdot 2a=1$

$\frac{3}{2}a+2a=1, \frac{7}{2}a=1 \qquad \therefore a=\frac{2}{7}$ 정답_ ②

## 363

$0\le x\le 2$에서 $f(x)=\frac{1}{2}x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




$\mathrm{P}(0\le X\le 1)$은 $f(x)=\frac{1}{2}x$의 그래프와 $x$축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로 구하는 확률은

$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 정답_ $\frac{1}{4}$

## 364

(1) $f(x)=\frac{a}{4}x\ (0\le x\le 4)$이므로

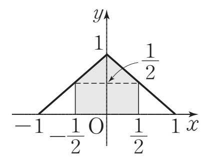
$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot a=1, 2a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

(2) $f(x)=\frac{1}{8}x\ (0\le x\le 4)$이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot 1=\frac{1}{16}$ 정답_ (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{16}$

## 365

$y=f(x)$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로




$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot a=1 \qquad \therefore a=1$

$\therefore \mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}\le X\le 0\right)+\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)$

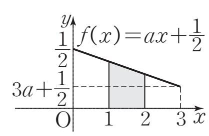
$=2\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\right\}$

$=\frac{3}{4}$

정답_ ⑤

## 366

$0\le x\le 3$에서 $f(x)=ax+\frac{1}{2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




(1) $0\le x\le 3$에서 $f(x)=ax+\frac{1}{2}$의 그래프와 $x$축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+3a+\frac{1}{2}\right)\cdot 3=1,\ 3a=-\frac{1}{3}$

$\therefore a=-\frac{1}{9}$

(2) $f(x)=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{2}$이므로

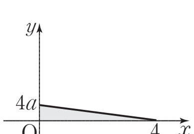
$\mathrm{P}(1\le X\le 2)=\frac{1}{2}\cdot\{f(1)+f(2)\}\cdot 1$

$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{18}+\frac{5}{18}\right)\cdot 1=\frac{1}{3}$

정답_ (1) $-\frac{1}{9}$ (2) $\frac{1}{3}$

## 367

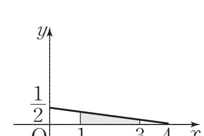
$0\le x\le 4$에서 $f(x)=a(4-x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




(1) $0\le x\le 4$에서 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 $y$축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4a=1,\ 8a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{8}$

(2) $f(x)=\frac{1}{8}(4-x)$이므로




$\mathrm{P}(1\le X\le 3)$

$=\frac{1}{2}\cdot\{f(1)+f(3)\}\cdot 2$

$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\right)\cdot 2=\frac{1}{2}$

정답_ (1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{2}$

## 368

확률밀도함수의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot b=1 \qquad \therefore b=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(0\le X\le a)=\frac{3}{8}$이므로

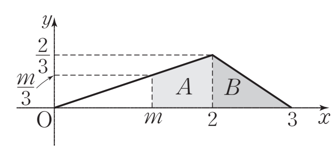
$\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

$\therefore a=3$

$\therefore a+4b=3+1=4$

정답_ ④

## 369




$\mathrm{P}(m\le X\le 2)$는 $A$ 부분의 넓이이므로

$\mathrm{P}(m\le X\le 2)=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}+\frac{2}{3}\right)(2-m)=\frac{2}{3}-\frac{m^2}{6}$

$\mathrm{P}(2\le X\le 3)$은 $B$ 부분의 넓이이므로

$\mathrm{P}(2\le X\le 3)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(m\le X\le 2)=\mathrm{P}(2\le X\le 3)$에서

$\frac{2}{3}-\frac{m^2}{6}=\frac{1}{3},\ m^2=2$

$\therefore m=\sqrt{2}\ (\because m>0)$

정답_ ④

## 370

① $-1\le x\le 1$에서 $f(x)\ge 0$이고 $f(x)$의 그래프와 $x$축 및 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right)=1$이므로 확률밀도함수의 그래프이다.

② $-1<x<1$에서 $f(x)<0$이므로 확률밀도함수의 그래프가 아니다.

③ $-1\le x\le 1$에서 $f(x)\ge 0$이지만 $f(x)$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\pi\cdot 1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}\ne 1$이므로 확률밀도함수의 그래프가 아니다.

④ $-1\le x\le 1$에서 $f(x)>0$이지만 $f(x)$의 그래프와 $x$축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $2\cdot 1=2$이므로 확률밀도함수의 그래프가 아니다.

⑤ $-1\le x<0$에서 $f(x)<0$이므로 확률밀도함수의 그래프가 아니다.

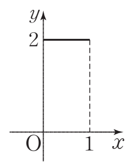
따라서 확률밀도함수의 그래프가 될 수 있는 것은 ①이다.

정답_ ①

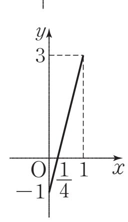
## 371

$X$의 확률밀도함수가 되려면 $0\le x\le 1$에서 $f(x)\ge 0$이고 $f(x)$의 그래프와 $x$축 및 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이 되어야 한다.

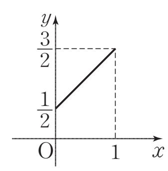
ㄱ. $0\le x\le 1$에서 $f(x)>0$이지만 $1\cdot 2=2$이므로 $X$의 확률밀도함수가 아니다.



ㄴ. $0\le x<\frac{1}{4}$에서 $f(x)<0$이므로 $X$의 확률밀도함수가 아니다.



ㄷ. $0\le x\le 1$에서 $f(x)>0$이고 $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\cdot 1=1$이므로 $X$의 확률밀도함수이다.



따라서 확률밀도함수가 될 수 있는 것은 ㄷ이다.

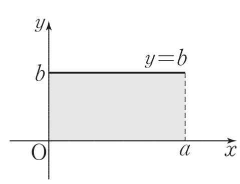
정답_ ③

## 372

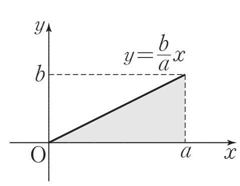
$y=f(x)$가 확률밀도함수이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉, $\frac{1}{2}ab=1$에서 $ab=2$

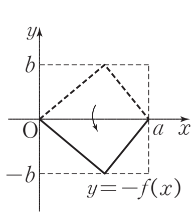
ㄱ. $y=b$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 부분의 넓이는 $ab=2$이므로 확률밀도함수가 아니다.



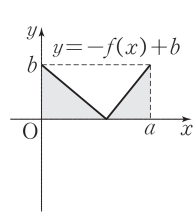
ㄴ. $y=\frac{b}{a}x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}ab=1$이며 $0\le x\le a$에서 $y\ge 0$이므로 확률밀도함수이다.



ㄷ. $y=-f(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 것이므로 [그림1]과 같다.
$y=-f(x)+b$의 그래프는 $y=-f(x)$의 그래프를 $y$축의 방향으로 $b$만큼 평행이동한 것이므로 [그림2]와 같다.




[그림1]




[그림2]

[그림2]에서 색칠한 부분의 넓이는 $ab-\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ab=1$이고, $0\le x\le a$에서 $y\ge 0$이므로 $y=-f(x)+b$는 확률밀도함수이다.

따라서 확률밀도함수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

## 373

평균이 클수록 대칭축이 오른쪽에 있으므로 평균이 가장 큰 것은 $B$이고, 표준편차가 클수록 높이는 낮아지고 폭이 넓어지므로 표준편차가 가장 큰 것은 $C$이다.

정답_ ④

## 374

평균이 작을수록 대칭축은 왼쪽에 위치하고, 표준편차가 작을수록 곡선의 높이는 높아지면서 폭은 좁아진다. 따라서 구하는 그래프는 ⑤이다.

정답_ ⑤

## 375

ㄱ은 옳지 않다.
A, B 두 고등학교는 평균은 같은데 표준편차가 B 고등학교보다 A 고등학교가 더 크다. 따라서 성적이 우수한 학생은 B 고등학교보다 A 고등학교에 더 많이 있다.

ㄴ도 옳지 않다.
A, B 두 고등학교의 평균이 같으므로 두 학교의 성적은 평균적으로 같다.

ㄷ은 옳다.
B 고등학교가 C 고등학교보다 표준편차가 작으므로 B 고등학교 학생들이 C 고등학교 학생들에 비하여 성적이 더 고르다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

정답_ ③

## 376

(i) $m>0$에서 $2m>m$이므로 $\mathrm{N}(2m,\ 1^2)$과 $\mathrm{N}(2m,\ 2^2)$의 정규분포곡선의 대칭축이 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$의 정규분포곡선보다 더 오른쪽에 있다.
따라서 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$의 정규분포곡선은 A이다.

(ii) $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$과 $\mathrm{N}(2m,\ 2^2)$의 표준편차가 4로 같으므로 두 정규분포곡선은 같은 모양이다.
따라서 $\mathrm{N}(2m,\ 2^2)$의 정규분포곡선은 C이다.

(iii) $\mathrm{N}(2m,\ 1^2)$의 표준편차가 $\mathrm{N}(2m,\ 2^2)$의 표준편차보다 작으므로 $\mathrm{N}(2m,\ 1^2)$의 정규분포곡선이 $\mathrm{N}(2m,\ 2^2)$보다 더 높으면서 폭은 좁다.
따라서 $\mathrm{N}(2m,\ 1^2)$의 정규분포곡선은 B이다.

(i), (ii), (iii)에서 정규분포곡선은 차례대로 B, C, A이다.

정답_ ④

## 377

ㄱ은 옳다.

평균은 대칭축의 $x$좌표이므로 $\mathrm{E}(X)=m_2, \mathrm{E}(Y)=m_1$

이때, $m_2>m_1$이므로 $\mathrm{E}(X)>\mathrm{E}(Y)$

ㄴ도 옳다.

$y=f(x)$의 그래프보다 $y=g(x)$의 그래프가 높이는 낮고 폭은 넓으므로 $Y$의 표준편차가 $X$의 표준편차보다 크다.

$\therefore \sigma(X)<\sigma(Y)$

ㄷ은 옳지 않다.

$f(m_2)>g(m_1)$이므로 $f(\mathrm{E}(X))>g(\mathrm{E}(Y))$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 정답_ ②

## 378

ㄱ은 옳다.

모든 실수 $x$에서 정의된 정규분포곡선과 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로

$\mathrm{P}(-\infty\le X\le\infty)=1$

ㄴ도 옳다.

정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(X\le m)=\mathrm{P}(X\ge m)=0.5$

ㄷ도 옳다.

연속확률변수 $X$가 어떤 특정한 값을 가질 확률은 0이므로 임의의 실수 $a$에 대하여

$\mathrm{P}(X=a)=0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

## 379

ㄱ은 옳다.

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)\\&=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)\\&=2\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)\\&=2\cdot 0.3413\\&=0.6826\end{aligned}$$

ㄴ도 옳다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge m+2\sigma)&=\mathrm{P}(X\ge m)-\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

ㄷ도 옳다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le m-3\sigma)&=\mathrm{P}(X\le m)-\mathrm{P}(m-3\sigma\le X\le m)\\&=\mathrm{P}(X\le m)-\mathrm{P}(m\le X\le m+3\sigma)\\&=0.5-0.4987\\&=0.0013\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

## 380

확률변수 $X$가 정규분포 $\mathrm{N}(6,\ 2^2)$을 따르므로

$m=6, \sigma=2$

ㄱ은 옳다.

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(4\le X\le 8)\\&=\mathrm{P}(6-2\le X\le 6+2)\\&=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)\\&=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)\\&=2\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)\\&=2\cdot 0.3413\\&=0.6826\end{aligned}$$

ㄴ도 옳다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 12)=\mathrm{P}(X\ge 6+6)&=\mathrm{P}(X\ge m+3\sigma)\\&=\mathrm{P}(X\ge m)-\mathrm{P}(m\le X\le m+3\sigma)\\&=0.5-0.4987\\&=0.0013\end{aligned}$$

ㄷ도 옳다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 10)=\mathrm{P}(X\le 6+4)&=\mathrm{P}(X\le m+2\sigma)\\&=\mathrm{P}(X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)\\&=0.5+0.4772\\&=0.9772\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

## 381

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 조건 (가)에 의해

$$m=\frac{64+56}{2}=60$$

조건 (나)에서

$\sigma^2=3616-m^2=3616-60^2=16$

$\therefore \sigma=4\ (\because \sigma>0)$

따라서 확률변수 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(60, 4^2)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\le 68)&=\mathrm{P}(X\le 60+2\cdot 4)\\&=\mathrm{P}(X\le m+2\sigma)\\&=0.5+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)\\&=0.5+0.4772\\&=0.9772\end{aligned}$$

정답_ ④

## 382

(1) $\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 1)$

$$\begin{aligned}&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.1915+0.3413\\&=0.5328\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{P}(Z\ge 2)=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=0.5-0.4772$
$=0.0228$
(3) $\mathrm{P}(Z\le -1)=\mathrm{P}(Z\ge 1)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=0.5-0.3413$
$=0.1587$
(4) $\mathrm{P}(1.5\le Z\le 2)=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$
$=0.4772-0.4332$
$=0.044$

정답_ (1) 0.5328 (2) 0.0228 (3) 0.1587 (4) 0.044

## 383

$Z=\dfrac{X-70}{10}$ 으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(60\le X\le 90)=\mathrm{P}\left(\dfrac{60-70}{10}\le Z\le \dfrac{90-70}{10}\right)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=0.3413+0.4772$
$=0.8185$

정답_ 0.8185

## 384

$Z=\dfrac{X-50}{2}$ 으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\le 53)=\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{53-50}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\le 1.5)$
$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$
$=0.5+0.4332$
$=0.9332$

$\mathrm{P}(47\le X\le 49)=\mathrm{P}\left(\dfrac{47-50}{2}\le Z\le \dfrac{49-50}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le -0.5)$
$=\mathrm{P}(0.5\le Z\le 1.5)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$
$=0.4332-0.1915$
$=0.2417$

$\therefore \mathrm{P}(X\le 53)+\mathrm{P}(47\le X\le 49)=0.9332+0.2417$
$=1.1749$

정답_ ⑤

## 385

$Z=\dfrac{X-12}{3}$ 로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(6\le X\le 15)=\mathrm{P}\left(\dfrac{6-12}{3}\le Z\le \dfrac{15-12}{3}\right)$
$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 1)$
$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=0.4772+0.3413=0.8185$

$\therefore 10000\mathrm{P}(6\le X\le 15)=10000\cdot 0.8185$
$=8185$

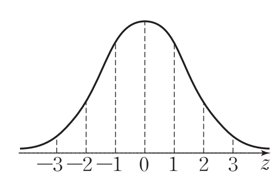
정답_ ③

## 386

두 확률변수 $X, Y$는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2), \mathrm{N}(1,\ 2^2)$을 따르므로

$a=\mathrm{P}(-1<X<1)=\mathrm{P}(-1<Z<1)$
$b=\mathrm{P}(1<Y<5)$
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{1-1}{2}<Z<\dfrac{5-1}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(0<Z<2)$
$c=\mathrm{P}(-5<Y<-1)$
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{-5-1}{2}<Z<\dfrac{-1-1}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(-3<Z<-1)$

이때, 표준정규분포곡선이 오른쪽 그림과 같으므로 각각의 넓이를 비교하면 $c<b<a$




정답_ ⑤

## 387

이차방정식 $2x^2+(K-1)x+2=0$이 실근을 가지려면
$D=(K-1)^2-16\ge 0, K^2-2K-15\ge 0$
$(K+3)(K-5)\ge 0 \qquad \therefore K\le -3$ 또는 $K\ge 5$

이때, $Z=\dfrac{K-1}{2}$로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(K\le -3$ 또는 $K\ge 5)=1-\mathrm{P}(-3\le K\le 5)$
$=1-\mathrm{P}\left(\dfrac{-3-1}{2}\le Z\le \dfrac{5-1}{2}\right)$
$=1-\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)$
$=1-2\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=1-2\cdot 0.477$
$=0.046$

정답_ ③

## 388

(1) $\mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.1915$이므로 $k=0.5$

(2) $\mathrm{P}(Z\ge k)=0.9332$이므로 $k<0$

$\mathrm{P}(k\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)=0.9332$

$\mathrm{P}(k\le Z\le 0)+0.5=0.9332$

$\therefore \mathrm{P}(k\le Z\le 0)=0.4332$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 0)=0.4332$

$\therefore k=-1.5$

(3) $\mathrm{P}(Z\le k)=0.8413$이므로 $k>0$

$\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.8413$

$0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.8413$

$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.3413$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로 $k=1$

정답_ (1) 0.5 (2) −1.5 (3) 1

## 389

$Z=\dfrac{X-8}{5}$로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge a)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{a-8}{5}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-8}{5}\right)\\&=0.1151\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{a-8}{5}\right)=0.5-0.1151=0.3849$

이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.2)=0.3849$이므로

$\dfrac{a-8}{5}=1.2$ $\quad\therefore a=14$

정답_ ④

## 390

$Z=\dfrac{X-5}{1.2}$로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(5-1.2k\le X\le 5+1.2k)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{5-1.2k-5}{1.2}\le Z\le \frac{5+1.2k-5}{1.2}\right)\\&=\mathrm{P}(-k\le Z\le k)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le k)\\&=0.4972\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.2486$

이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.67)=0.2486$이므로

$k=0.67$

정답_ ①

## 391

$Z=\dfrac{X-m}{8}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 90)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{90-m}{8}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{90-m}{8}\right)\\&=0.1587\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{90-m}{8}\right)=0.5-0.1587=0.3413$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|Z|\le 1)&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.6826\end{aligned}$$

따라서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\dfrac{90-m}{8}=1$ $\quad\therefore m=82$

정답_ ④

## 392

세차 시간을 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 2^2)$을 따른다. 이때, $Z=\dfrac{X-30}{2}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 33)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{33-30}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

정답_ ②

## 393

과자 한 개의 무게를 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(16, 0.3^2)$을 따른다. 이때, $Z=\dfrac{X-16}{0.3}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 15.25)&=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{15.25-16}{0.3}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -2.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)\\&=0.5-0.49\\&=0.01\end{aligned}$$

정답_ ①

## 394

2학년 남학생의 키를 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(167,\ 7^2)$을 따른다. 이때, $Z=\dfrac{X-167}{7}$로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(160\le X\le 174)&=\mathrm{P}\left(\frac{160-167}{7}\le Z\le \frac{174-167}{7}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=2\cdot 0.34\\&=0.68\end{aligned}$$

정답_ ⑤

## 395

과자 한 봉지의 무게를 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 정규분포 $N(160,\ 3^2)$을 따른다. 이때, $Z=\frac{X-160}{3}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

과자 한 봉지의 무게가 152.5 g 이하이면 불량품으로 판정하므로 임의로 택한 과자 한 봉지가 불량품일 확률은

$$\begin{aligned}P(X\le 152.5)&=P\left(Z\le\frac{152.5-160}{3}\right)\\&=P(Z\le -2.5)\\&=0.5-P(0\le Z\le 2.5)\\&=0.5-0.4938=0.0062\end{aligned}$$

따라서 $p=0.0062$이므로

$10000p=10000\cdot 0.0062=62$ 정답_ 62

## 396

자동차의 속력을 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 정규분포 $N(104,\ 8^2)$을 따른다. 이때, $Z=\frac{X-104}{8}$로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

속력이 120 km/h를 초과하면 과속으로 단속되므로 자동차 한 대가 과속으로 단속될 확률은

$$\begin{aligned}P(X>120)&=P\left(Z>\frac{120-104}{8}\right)=P(Z>2)\\&=0.5-P(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.48\\&=0.02=\frac{1}{50}\end{aligned}$$

A와 B의 속력은 서로 영향을 주지 않으므로, 즉 독립이므로 자동차 A, B가 모두 과속으로 단속될 확률은

$\frac{1}{50}\cdot\frac{1}{50}=\frac{1}{2500}$ 정답_ ①

## 397

수학 점수를 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 정규분포 $N(62,\ 8^2)$을 따른다. 이때, $Z=\frac{X-62}{8}$로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(54\le X\le 74)&=P\left(\frac{54-62}{8}\le Z\le\frac{74-62}{8}\right)\\&=P(-1\le Z\le 1.5)\\&=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.341+0.433=0.774\end{aligned}$$

따라서 수학 점수가 54점 이상 74점 이하인 학생 수는

$500\cdot 0.774=387$(명) 정답_ ②

## 398

신입생의 키를 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 정규분포 $N(170,\ 4^2)$을 따른다. 이때, $Z=\frac{X-170}{4}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(X\ge 178)&=P\left(Z\ge\frac{178-170}{4}\right)=P(Z\ge 2)\\&=0.5-P(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.48=0.02\end{aligned}$$

따라서 키가 178 cm 이상인 학생 수는 $300\cdot 0.02=6$(명)이므로 키가 178 cm인 학생은 6번째로 크다고 할 수 있다. 정답_ ①

## 399

수험생의 시험 점수를 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 정규분포 $N(50,\ 20^2)$을 따른다.

상위 4 % 이내에 속하기 위한 최소 점수를 $a$라고 하면

$P(X\ge a)=0.04$

이때, $Z=\frac{X-50}{20}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(X\ge a)&=P\left(Z\ge\frac{a-50}{20}\right)\\&=0.5-P\left(0\le Z\le\frac{a-50}{20}\right)\\&=0.04\end{aligned}$$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a-50}{20}\right)=0.5-0.04=0.46$

$P(0\le Z\le 1.75)=0.46$이므로

$\frac{a-50}{20}=1.75 \quad \therefore a=85$(점)

따라서 상위 4 % 이내에 속하기 위한 최소 점수는 85점이다.

정답_ ①

## 400

응시자들의 점수를 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 정규분포 $N(250,\ 40^2)$을 따른다.

합격하기 위한 최소 점수를 $a$라고 하면

$P(X\ge a)=\frac{1340}{20000}=0.067$

이때, $Z=\frac{X-250}{40}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(X\ge a)&=P\left(Z\ge\frac{a-250}{40}\right)\\&=0.5-P\left(0\le Z\le\frac{a-250}{40}\right)\\&=0.067\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{a-250}{40}\right)=0.5-0.067=0.433$

$\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)=0.433$이므로

$\dfrac{a-250}{40}=1.5$

$\therefore a=310$(점)

따라서 입학시험에 합격하기 위한 최소 점수는 310점이다.

정답_ ③

## 401

돼지의 무게를 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(110,\ 10^2)$을 따른다.

우량 돼지 선발 대회에 보낼 돼지의 최소 무게를 $a$라고 하면

$\mathrm{P}(X \ge a)=\dfrac{3}{200}=0.015$

이때, $Z=\dfrac{X-110}{10}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X \ge a)&=\mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{a-110}{10}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{a-110}{10}\right)\\&=0.015\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{a-110}{10}\right)=0.5-0.015=0.485$

$\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.17)=0.485$이므로

$\dfrac{a-110}{10}=2.17$

$\therefore a=131.7(\mathrm{kg})$

따라서 우량 돼지 선발 대회에 보낼 돼지의 최소 무게는 131.7 kg이다.

정답_ ④

## 402

제품 A의 무게를 확률변수 $X$, 제품 B의 무게를 확률변수 $Y$라고 하면 $X$, $Y$는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 1^2)$, 정규분포 $\mathrm{N}(2m,\ 2^2)$을 따른다.

이때, $Z=\dfrac{X-m}{1}=X-m$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고, $Z=\dfrac{Y-2m}{2}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X \ge k)=\mathrm{P}(Y \le k)$이므로

$\mathrm{P}(Z \ge k-m)=\mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{k-2m}{2}\right)$

따라서 $\dfrac{k-m}{1}+\dfrac{k-2m}{2}=0$이므로 $3k=4m$

$\therefore \dfrac{k}{m}=\dfrac{4}{3}$

정답_ ⑤

## 403

정치 점수를 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-60}{10}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 이때, 정치 점수가 70점 이상인 학생이 $p$ %이므로

$\mathrm{P}(X \ge 70)=\mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{70-60}{10}\right)=\mathrm{P}(Z \ge 1)=\dfrac{p}{100}$

경제 점수를 확률변수 $Y$라고 하면 $Y$는 정규분포 $\mathrm{N}(52,\ 8^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{Y-52}{8}$로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때, 경제 점수가 상위 $p$ % 이내에 들기 위한 최소 점수를 $k$라고 하면

$\mathrm{P}(Y \ge k)=\mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{k-52}{8}\right)=\dfrac{p}{100}$

$\mathrm{P}(Z \ge 1)=\mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{k-52}{8}\right)$에서 $1=\dfrac{k-52}{8}$

$\therefore k=60$(점)

따라서 경제를 선택한 학생이 상위 $p$ % 이내에 들기 위한 최소 점수는 60점이다.

정답_ ④

## 404

확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \dfrac{1}{5}\right)$을 따르므로

$m=100\cdot\dfrac{1}{5}=20,\ \sigma^2=100\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{5}=16$

따라서 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}($ (가) $\boxed{20}$, (나) $\boxed{16}$ $)$을 따른다.

정답_ (가): 20, (나): 16

## 405

주어진 식의 값은 확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \dfrac{9}{10}\right)$를 따를 때, $\mathrm{P}(X \ge 96)$을 구하는 것과 같다.

$\mathrm{E}(X)=100\cdot\dfrac{9}{10}=90$

$\mathrm{V}(X)=100\cdot\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{1}{10}=9$

이때, $np=100\cdot\dfrac{9}{10}=90 \ge 5$, $nq=100\cdot\dfrac{1}{10}=10 \ge 5$이므로

$X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(90,\ 3^2)$을 따른다.

한편, $Z=\dfrac{X-90}{3}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X \ge 96)&=\mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{96-90}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(Z \ge 2)\\&=0.5-\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

정답_ ①

## 406

확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=n\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$

$\mathrm{V}(X)=n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{4}$

이때, $n$이 충분히 큰 자연수이므로 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{n}{2},\ \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

한편, $Z=\dfrac{X-\frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(\left|X-\frac{n}{2}\right|\le\frac{21}{2}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-\frac{21}{2}\le X-\frac{n}{2}\le\frac{21}{2}\right)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{-\frac{21}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}\le Z\le\frac{\frac{21}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-\frac{21}{\sqrt{n}}\le Z\le\frac{21}{\sqrt{n}}\right)\\&=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{21}{\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

$\mathrm{P}\left(\left|X-\frac{n}{2}\right|\le\frac{21}{2}\right)\ge0.954$에서

$2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{21}{\sqrt{n}}\right)\ge0.954$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{21}{\sqrt{n}}\right)\ge0.477$

$\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.477$이므로

$\frac{21}{\sqrt{n}}\ge2,\ \sqrt{n}\le\frac{21}{2}$

$\therefore\ n\le\frac{441}{4}=110.25$

따라서 구하는 자연수 $n$의 최댓값은 110이다. 정답_ 110

## 407

확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(720,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=720\cdot\frac{1}{6}=120$

$\mathrm{V}(X)=720\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=100$

이때, $np=720\cdot\frac{1}{6}=120\ge5,\ nq=720\cdot\frac{5}{6}=600\ge5$이므로

$X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따른다.

한편, $Z=\frac{X-120}{10}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge135)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{135-120}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge1.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

정답_ 0.0668

## 408

앞면이 나올 횟수를 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(900,\frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=900\cdot\frac{1}{2}=450$

$\mathrm{V}(X)=900\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=225$

이때, $np=900\cdot\frac{1}{2}=450\ge5,\ nq=900\cdot\frac{1}{2}=450\ge5$이므로

$X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(450,\ 15^2)$을 따른다.

한편, $Z=\frac{X-450}{15}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(435\le X\le480)&=\mathrm{P}\left(\frac{435-450}{15}\le Z\le\frac{480-450}{15}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=0.3413+0.4772\\&=0.8185\end{aligned}$$

정답_ ③

## 409

합격자 192명 중에서 등록한 학생 수를 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(192,\ \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=192\cdot\frac{3}{4}=144$

$\mathrm{V}(X)=192\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=36$

이때, $np=192\cdot\frac{3}{4}=144\ge5,\ nq=192\cdot\frac{1}{4}=48\ge5$이므로

$X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(144,\ 6^2)$을 따른다.

한편, $Z=\frac{X-144}{6}$로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge132)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{132-144}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge-2)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le0)+\mathrm{P}(Z\ge0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le2)+\mathrm{P}(Z\ge0)\\&=0.4772+0.5\\&=0.9772\end{aligned}$$

정답_ ⑤

## 410

예약 고객 400명 중에서 승선한 고객 수를 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400, \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=400\cdot\frac{4}{5}=320$

$\mathrm{V}(X)=400\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=64$

이때,

$np=400\cdot\frac{4}{5}=320\ge5,\ nq=400\cdot\frac{1}{5}=80\ge5$

이므로 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(320,\ 8^2)$을 따른다.

한편, $Z=\frac{X-320}{8}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le340)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{340-320}{8}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le2.5)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)\\&=0.5+0.4938=0.9938\end{aligned}$$

정답_ ①

## 411

예매를 취소하는 사람 수를 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.1)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\cdot0.1=10$

$\mathrm{V}(X)=100\cdot0.1\cdot0.9=9$

이때, $np=100\cdot0.1=10\ge5,\ nq=100\cdot0.9=90\ge5$이므로 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(10, 3^2)$을 따른다.

한편, $Z=\frac{X-10}{3}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge16)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{16-10}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge2)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

정답_ ①

## 412

1600번의 게임 중에서 10점을 얻은 횟수를 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1600, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=1600\cdot\frac{1}{5}=320$

$\mathrm{V}(X)=1600\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=256=16^2$

이때, $np=1600\cdot\frac{1}{5}=320\ge5,\ nq=1600\cdot\frac{4}{5}=1280\ge5$이므로 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(320,\ 16^2)$을 따른다.

10점을 얻은 횟수가 $X$이므로 2점을 잃은 횟수는 $1600-X$이고, 이때의 점수는

$10X+(-2)\cdot(1600-X)=12X-3200$

한편, 얻은 점수가 832점 이상이 되어야 하므로

$12X-3200\ge832$

$\therefore X\ge336$

이때, $Z=\frac{X-320}{16}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge336)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{336-320}{16}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.5-0.34=0.16\end{aligned}$$

정답_ ③

## 413

100개의 과자 중에서 중량 미달인 과자의 개수를 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.1)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\cdot0.1=10$

$\mathrm{V}(X)=100\cdot0.1\cdot0.9=9$

이때,

$np=100\cdot0.1=10\ge5,\ nq=100\cdot0.9=90\ge5$

이므로 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 3^2)$을 따른다.

한편, $Z=\frac{X-10}{3}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge a)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-10}{3}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-10}{3}\right)\\&=0.0228\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-10}{3}\right)=0.5-0.0228=0.4772$

$\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\frac{a-10}{3}=2\qquad\therefore a=16$

정답_ ③

## 414

400명의 응시자 중에서 합격하는 학생 수를 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}(400,\ 0.8)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=400\cdot0.8=320$

$\mathrm{V}(X)=400\cdot0.8\cdot0.2=64$

이때, $np=400\cdot0.8=320\ge5,\ nq=400\cdot0.2=80\ge5$이므로 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(320,\ 8^2)$을 따른다.

한편, $Z=\dfrac{X-320}{8}$ 으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X\ge k)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{k-320}{8}\right)$$
$$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-320}{8}\right)$$
$$=0.07$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{k-320}{8}\right)=0.5-0.07=0.43$

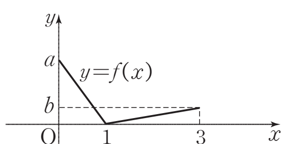
$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.43$이므로

$\dfrac{k-320}{8}=1.5 \qquad \therefore k=332$

정답_ ②

## 415

확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.




············ ❶

확률의 총합은 1이므로

$\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot a+\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot b=1$

$\therefore a+2b=2$ ······㉠

············ ❷

한편, $\mathrm{P}(1\le X\le 3)=\dfrac{a}{4}$이므로 $\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot b=\dfrac{a}{4}$

$\therefore a=4b$ ······㉡

············ ❸

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{4}{3}, b=\dfrac{1}{3}$

$\therefore a+b=\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$ ············ ❹

정답_ $\dfrac{5}{3}$

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프 그리기 | 20% |
| ❷ | 확률의 총합이 1임을 이용하여 $a$, $b$에 대한 식 세우기 | 30% |
| ❸ | $\mathrm{P}(1\le X\le 3)=\frac{a}{4}$임을 이용하여 $a$, $b$에 대한 식 세우기 | 30% |
| ❹ | $a+b$의 값 구하기 | 20% |

## 416

$\dfrac{1}{5}X$의 분산이 1, 즉 $\mathrm{V}\left(\dfrac{1}{5}X\right)=1$이므로

$\mathrm{V}\left(\dfrac{1}{5}X\right)=\dfrac{1}{5^2}\mathrm{V}(X)=1, \mathrm{V}(X)=25$

$\therefore \sigma^2=25$ ············ ❶

한편, 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고,

$\mathrm{P}(X\le 80)=\mathrm{P}(X\ge 120)$이므로

$m=\dfrac{80+120}{2}=100$ ············ ❷

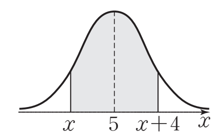
$\therefore m+\sigma^2=100+25=125$ ············ ❸

정답_ 125

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | $\sigma^2$의 값 구하기 | 40% |
| ❷ | $m$의 값 구하기 | 40% |
| ❸ | $m+\sigma^2$의 값 구하기 | 20% |

## 417

확률변수 $X$가 정규분포 $\mathrm{N}(5,\ 2^2)$을 따르므로 $X$의 정규분포곡선은 직선 $x=5$에 대하여 대칭이고, $x=5$일 때 최댓값을 갖는다.




따라서 $x$와 $x+4$의 평균이 5일 때 $f(x)$가 최댓값을 가지므로

$\dfrac{x+(x+4)}{2}=5, \dfrac{2x+4}{2}=5, x+2=5$

$\therefore x=3$ ············ ❶

이때, $Z=\dfrac{X-5}{2}$로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 최댓값은

$$f(3)=\mathrm{P}(3\le X\le 7)=\mathrm{P}\left(\frac{3-5}{2}\le Z\le \frac{7-5}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)$$
$$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=2\cdot 0.34=0.68$$ ············ ❷

정답_ 0.68

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | $f(x)$가 최대가 되는 $x$의 값 구하기 | 50% |
| ❷ | $f(x)$의 최댓값 구하기 | 50% |

## 418

신입 사원의 평가 점수를 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(83,\ 5^2)$을 따른다.

해외 연수의 기회를 얻기 위한 최소 점수를 $a$라고 하면

$\mathrm{P}(X\ge a)=\dfrac{36}{300}=0.12$ ············ ❶

이때, $Z=\dfrac{X-83}{5}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X\ge a)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{a-83}{5}\right)$$
$$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-83}{5}\right)$$
$$=0.12$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{a-83}{5}\right)=0.5-0.12=0.38$

$P(0 \le Z \le 1.2)=0.38$이므로

$\frac{a-83}{5}=1.2 \qquad \therefore a=89$(점)

따라서 해외 연수의 기회를 얻기 위한 최소 점수는 89점이다. ❷

정답_ 89점

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | 해외 연수의 기회를 얻기 위한 최소 점수 $a$에 대하여 $P(X \ge a)$ 구하기 | 30% |
| ❷ | 최소 점수 구하기 | 70% |

## 419

확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르고, $X$의 표준편차가 10이므로

$\sigma(X)=\sqrt{n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}=10,\ \frac{5}{36}n=100$

$\therefore n=720$ ❶

$\therefore E(X)=n\cdot\frac{1}{6}=720\cdot\frac{1}{6}=120$

이때,

$np=720\cdot\frac{1}{6}=120\ge5,\ nq=720\cdot\frac{5}{6}=600\ge5$

이므로 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(120,\ 10^2)$을 따른다. ❷

한편, $Z=\frac{X-120}{10}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(110\le X\le140)&=P\left(\frac{110-120}{10}\le Z\le\frac{140-120}{10}\right)\\&=P(-1\le Z\le2)\\&=P(0\le Z\le1)+P(0\le Z\le2)\\&=0.3413+0.4772\\&=0.8185\end{aligned}$$ ❸

정답_ 0.8185

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | $n$의 값 구하기 | 30% |
| ❷ | $X$는 근사적으로 정규분포 $N(120,\ 10^2)$을 따름을 보이기 | 20% |
| ❸ | 확률 구하기 | 50% |

## 420

명중시킨 화살 수를 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 이항분포 $B(100,\ 0.8)$을 따르므로

$E(X)=100\cdot0.8=80$

$V(X)=100\cdot0.8\cdot0.2=16=4^2$

이때, $np=100\cdot0.8=80\ge5$, $nq=100\cdot0.2=20\ge5$이므로 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(80,\ 4^2)$을 따른다. ❶

한편, $Z=\frac{X-80}{4}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(X\ge n)&=P\left(Z\ge\frac{n-80}{4}\right)\\&=0.5-P\left(0\le Z\le\frac{n-80}{4}\right)\\&=0.02\end{aligned}$$

$P\left(0\le Z\le\frac{n-80}{4}\right)=0.5-0.02=0.48$ ❷

이때, $P(0\le Z\le2)=0.48$이므로

$\frac{n-80}{4}=2 \qquad \therefore n=88$ ❸

정답_ 88

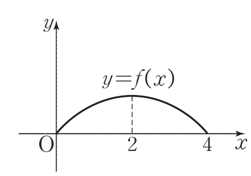
| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | $X$가 근사적으로 정규분포 $N(80,\ 4^2)$을 따름을 보이기 | 40% |
| ❷ | $P\left(0\le Z\le\frac{n-80}{4}\right)$ 구하기 | 30% |
| ❸ | $n$의 값 구하기 | 30% |

## 421

ㄱ은 옳다.

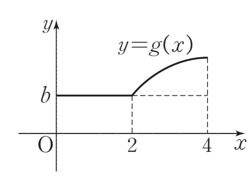
포물선 $f(x)=ax(x-4)$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$P(2\le X\le4)=P(0\le X\le2)=\frac{1}{2}$




ㄴ도 옳다.

곡선 $y=f(x-2)+b$는 곡선 $y=f(x)$를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 $b$만큼 평행이동한 것이므로 곡선 $y=g(x)$는 오른쪽 그림과 같다.




$$\begin{aligned}\therefore P(0\le Y\le4)&=4b+P(0\le X\le2)\\&=4b+\frac{1}{2}=1\end{aligned}$$

$\therefore b=\frac{1}{8}$

ㄷ은 옳지 않다.

$\therefore P(1\le Y\le4)=1-P(0\le Y\le1)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ②

## 422

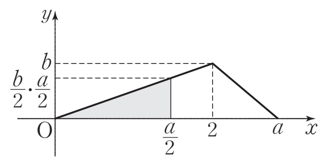
확률밀도함수의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로 $\frac{1}{2}ab=1$에서 $ab=2$ ……㉠

주어진 조건에서 $P\left(0\le X\le\frac{a}{2}\right)=\frac{b}{2}$ ……㉡

$\mathrm{P}(0 \le X \le 2) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot b = b$

이때, $\frac{b}{2} < b$이므로 $\frac{a}{2} < 2$

오른쪽 그림에서




$\mathrm{P}\left(0 \le X \le \frac{a}{2}\right)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{b}{2} \cdot \frac{a}{2}\right)$

$= \frac{a^2 b}{16}$ ……㉢

㉡, ㉢에서 $\frac{a^2 b}{16} = \frac{b}{2}$, $a^2 = 8$

$\therefore a = 2\sqrt{2}$ ($\because a > 0$)

$a = 2\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면 $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore a^2 + 4b^2 = 8 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 10$

정답_ ①

## 423

확률밀도함수 $f(x)$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot a = 1 \qquad \therefore a = \frac{1}{20}$

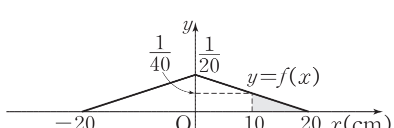
즉, 확률밀도함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{400}x + \frac{1}{20} & (-20 \le x \le 0) \\ -\frac{1}{400}x + \frac{1}{20} & (0 \le x \le 20) \end{cases}$$

파이프의 실제 길이가 510 cm 이상이라는 말은 오차 $X$가 10 cm 이상이라는 말과 같다.

따라서 파이프의 실제 길이가 510 cm 이상일 확률은 아래 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}(X \ge 10) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{8}$




따라서 생산한 1600개의 파이프 중 실제 길이가 510 cm 이상인 파이프의 개수는 $1600 \cdot \frac{1}{8} = 200$

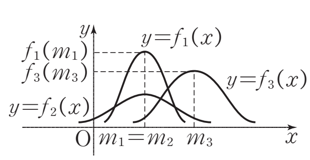
정답_ 200

## 424

ㄱ은 옳다.

표준편차가 클수록 그래프가 낮아지면서 폭이 넓어지므로

$\sigma_1 < \sigma_3 < \sigma_2$




ㄴ은 옳지 않다.

정규분포곡선 $y = f_i(x)$는 직선 $x = m_i$에 대하여 대칭이므로

$m_1 = m_2 < m_3$

ㄷ도 옳다.

$f_1(m_1)$은 $x = m_1$에서 $y = f_1(x)$의 함숫값이고 $f_3(m_3)$은 $x = m_3$에서 $y = f_3(x)$의 함숫값이므로

$f_3(m_3) < f_1(m_1)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ③

## 425

포도 한 송이의 무게를 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(500,\ 50^2)$을 따르므로 $Z = \frac{X - 500}{50}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(i) 포도 한 송이 가격이 1000원일 확률은

$\mathrm{P}(X < 500) = \mathrm{P}\left(Z < \frac{500 - 500}{50}\right)$

$= \mathrm{P}(Z < 0)$

$= 0.5$

(ii) 포도 한 송이 가격이 1100원일 확률은

$\mathrm{P}(500 \le X < 550) = \mathrm{P}\left(\frac{500 - 500}{50} \le Z < \frac{550 - 500}{50}\right)$

$= \mathrm{P}(0 \le Z < 1)$

$= 0.34$

(iii) 포도 한 송이 가격이 1200원일 확률은

$\mathrm{P}(X \ge 550) = \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{550 - 500}{50}\right)$

$= \mathrm{P}(Z \ge 1)$

$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$

$= 0.5 - 0.34$

$= 0.16$

(i), (ii), (iii)에서 포도 한 송이의 가격의 기댓값은

$1000 \cdot 0.5 + 1100 \cdot 0.34 + 1200 \cdot 0.16 = 1066$(원)

정답_ 1066원

## 426

신입 사원의 키를 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 10^2)$을 따르므로 $Z = \frac{X - m}{10}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때, 키가 177 cm 이상인 사원이 242명이므로

$\mathrm{P}(X \ge 177) = \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{177 - m}{10}\right)$

$= 0.5 - \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{177 - m}{10}\right)$

$= \frac{242}{1000} = 0.242$

$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{177 - m}{10}\right) = 0.5 - 0.242 = 0.258$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 0.7)=0.258$이므로

$\dfrac{177-m}{10}=0.7 \qquad \therefore m=170$

즉, $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(170,\ 10^2)$을 따르므로 임의로 택한 사원의 키가 180 cm 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 180)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{180-170}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

정답_ ①

## 427

제품 한 개의 무게를 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-30}{5}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 임의로 택한 제품이 불량품일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 40)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{40-30}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.48\\&=0.02\end{aligned}$$

임의로 택한 2500개의 제품 중에서 불량품의 개수를 확률변수 $Y$라고 하면 $Y$는 이항분포 $\mathrm{B}(2500,\ 0.02)$를 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=2500\cdot 0.02=50$

$\mathrm{V}(Y)=2500\cdot 0.02\cdot 0.98=49=7^2$

이때,

$np=2500\cdot 0.02=50\ge 5,\ nq=2500\cdot 0.98=2450\ge 5$

이므로 $Y$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 7^2)$을 따른다.

한편, $Z=\dfrac{Y-50}{7}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\ge 57)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{57-50}{7}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.34\\&=0.16\end{aligned}$$

정답_ ③

## 428

100개의 동전 중 앞면이 나온 동전의 개수를 확률변수 $X$라고 하면 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\cdot\dfrac{1}{2}=50$

$\mathrm{V}(X)=100\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=25$

이때,

$np=100\cdot\dfrac{1}{2}=50\ge 5,\ nq=100\cdot\dfrac{1}{2}=50\ge 5$

이므로 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따른다.

한편, $Z=\dfrac{X-50}{5}$으로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 55)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{55-50}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.34=0.16\end{aligned}$$

즉, 100원짜리 동전 100개를 모두 가질 확률은 0.16이고, 2000원을 낼 확률은 $1-0.16=0.84$이므로 구하는 기댓값은

$$\begin{aligned}10000\cdot 0.16-2000\cdot 0.84&=1600-1680\\&=-80(\text{원})\end{aligned}$$

정답_ ①

## 07 통계적 추정

### 429

ㄱ, ㄷ은 표본조사가 적합하고, ㄴ은 전수조사가 적합하다.

정답_ ③

### 430

(1) 복원추출하는 경우는 4개의 공 중에서 중복을 허락하여 2개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우와 같으므로

$(1,\ 1), (1,\ 2), (1,\ 3), (1,\ 4),$
$(2,\ 1), (2,\ 2), (2,\ 3), (2,\ 4),$
$(3,\ 1), (3,\ 2), (3,\ 3), (3,\ 4),$
$(4,\ 1), (4,\ 2), (4,\ 3), (4,\ 4)$

따라서 그 가짓수는 $4^2=16$

(2) 1개씩 2번 비복원추출하는 경우는 4개의 공 중에서 서로 다른 2개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우와 같으므로

$(1,\ 2), (1,\ 3), (1,\ 4), (2,\ 1), (2,\ 3), (2,\ 4),$
$(3,\ 1), (3,\ 2), (3,\ 4), (4,\ 1), (4,\ 2), (4,\ 3)$

따라서 그 가짓수는 ${}_4P_2=4\cdot3=12$

(3) 동시에 2개를 꺼내는 경우는 4개의 공 중에서 서로 다른 2개를 뽑는 경우와 같으므로

$(1,\ 2), (1,\ 3), (1,\ 4), (2,\ 3), (2,\ 4), (3,\ 4)$

따라서 그 가짓수는 ${}_4C_2=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$

정답_ 풀이 참조

### 431

$$m=\frac{1+2+3+\cdots+10}{10}=\frac{55}{10}=\frac{11}{2}$$

$$\overline{X}=\frac{2+4+6}{3}=\frac{12}{3}=4$$

정답_ $m=\frac{11}{2}$, $\overline{X}=4$

### 432

모집단 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에서 크기가 2인 표본을 복원추출하는 모든 경우의 수는 $5^2=25$

이때, $\overline{X}=2$인 경우는 $(1,\ 3), (2,\ 2), (3,\ 1)$의 3가지이므로

$$P(\overline{X}=2)=\frac{3}{25}$$

정답_ $\frac{3}{25}$

### 433

모집단 $\{1,\ 5,\ 9\}$에서 크기가 2인 표본을 복원추출하는 모든 경우의 수는 $3^2=9$

(i) $\overline{X}=3$인 경우는

$(1,\ 5), (5,\ 1)$의 2가지이므로

$a=P(\overline{X}=3)=\dfrac{2}{9}$

(ii) $\overline{X}=7$인 경우는

$(5,\ 9), (9,\ 5)$의 2가지이므로

$b=P(\overline{X}=7)=\dfrac{2}{9}$

(iii) $\overline{X}=9$인 경우는

$(9,\ 9)$의 1가지이므로

$c=P(\overline{X}=9)=\dfrac{1}{9}$

정답_ $a=\frac{2}{9}$, $b=\frac{2}{9}$, $c=\frac{1}{9}$

### 434

모평균이 $m=30$, 모분산이 $\sigma^2=5^2=25$, 표본의 크기가 $n=4$이므로

(1) $E(\overline{X})=m=30$

(2) $V(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}=\dfrac{25}{4}$

(3) $\sigma(\overline{X})=\sqrt{V(\overline{X})}=\sqrt{\dfrac{25}{4}}=\dfrac{5}{2}$

정답_ (1) 30 (2) $\frac{25}{4}$ (3) $\frac{5}{2}$

### 435

모평균이 10이므로 $E(\overline{X})=10$

모표준편차가 $\sigma$, 표본의 크기가 36, 표본평균 $\overline{X}$의 표준편차가 $\dfrac{5}{3}$이므로

$\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{36}}=\dfrac{5}{3}$ $\quad\therefore \sigma=10$

$\therefore \sigma E(\overline{X})=10\cdot10=100$

정답_ ③

### 436

모표준편차가 14, 표본의 크기가 $n$이므로 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$\sigma(\overline{X})=\dfrac{14}{\sqrt{n}}=2$이므로 $\sqrt{n}=7$

$\therefore n=49$

정답_ ⑤

### 437

모평균이 10, 모분산이 8, 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$E(\overline{X})=10$, $V(\overline{X})=\dfrac{8}{4}=2$

이때, 크기가 4인 표본을 $X_1, X_2, X_3, X_4$라고 하면

$\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}$, $Y=X_1+X_2+X_3+X_4$

이므로 $Y=4\overline{X}$

$$\begin{aligned}\therefore E(Y)+V(Y)&=E(4\overline{X})+V(4\overline{X})\\&=4E(\overline{X})+4^2V(\overline{X})\\&=4\cdot10+4^2\cdot2\\&=40+32=72\end{aligned}$$

정답_ ④

### 438

모평균을 $m$, 모분산을 $\sigma^2$이라고 하면

$$m=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$$

$\sigma^2=0^2\cdot\frac{1}{2}+1^2\cdot\frac{3}{10}+2^2\cdot\frac{1}{5}-\left(\frac{7}{10}\right)^2=\frac{61}{100}$

(1) $E(\overline{X})=m=\frac{7}{10}$

(2) $V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\frac{61}{100}}{4}=\frac{61}{400}$

(3) $\sigma(\overline{X})=\sqrt{V(\overline{X})}=\sqrt{\frac{61}{400}}=\frac{\sqrt{61}}{20}$

정답_(1) $\frac{7}{10}$ (2) $\frac{61}{400}$ (3) $\frac{\sqrt{61}}{20}$

## 439

$E(\overline{X})=\frac{8+9+11+12+15}{5}=11$이므로 $m=11$

$V(\overline{X})=\frac{8^2+9^2+11^2+12^2+15^2}{5}-11^2$

$=\frac{635}{5}-11^2=127-121=6$

표본의 크기가 24이므로

$V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{24}=6, \sigma^2=144$ $\quad\therefore \sigma=12\ (\because \sigma>0)$

$\therefore m+\sigma=11+12=23$

정답_③

## 440

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+a+\frac{1}{8}=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

주어진 표에서

$E(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{8}=\frac{5}{2}$

$V(X)=1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{8}+3^2\cdot\frac{1}{2}+4^2\cdot\frac{1}{8}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=1$

이때, 표본의 크기가 9이므로

$V(\overline{X})=\frac{V(X)}{9}=\frac{1}{9}$

$\therefore \sigma(\overline{X})=\sqrt{V(\overline{X})}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$

정답_④

## 441

주어진 표에서

$E(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{4}=2$

$V(X)=1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{2}+3^2\cdot\frac{1}{4}-2^2=\frac{1}{2}$

표본의 크기가 $n$이고 표본평균 $\overline{X}$의 분산이 $\frac{1}{10}$이므로

$V(\overline{X})=\frac{V(X)}{n}=\frac{\frac{1}{2}}{n}=\frac{1}{10}$

$\therefore n=5$

정답_④

## 442

주어진 표에서

$E(\overline{X})=1\cdot0.3+2\cdot0.2+4\cdot0.2+5\cdot0.3=3$

$V(\overline{X})=1^2\cdot0.3+2^2\cdot0.2+4^2\cdot0.2+5^2\cdot0.3-3^2$

$=11.8-9=2.8$

이때, 표본의 크기가 25이므로 $V(\overline{X})=\frac{V(X)}{25}$에서

$2.8=\frac{V(X)}{25}$ $\quad\therefore V(X)=2.8\cdot25=70$

정답_③

## 443

모평균을 $m$, 모분산을 $\sigma^2$이라고 하면

$m=\frac{1+2+3+\cdots+9}{9}=5$

$\sigma^2=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2}{9}-5^2=\frac{95}{3}-25=\frac{20}{3}$

이때, 표본의 크기가 4이므로

$V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{4}=\frac{\frac{20}{3}}{4}=\frac{5}{3}$

정답_②

## 444

모평균을 $m$, 모분산을 $\sigma^2$이라고 하면

$m=\frac{1+3+5+7+9}{5}=5$

$\sigma^2=\frac{1^2+3^2+5^2+7^2+9^2}{5}-5^2$

$=33-25=8$

이때, 표본의 크기가 2이므로

$V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{2}=\frac{8}{2}=4$

$\therefore \sigma(\overline{X})=\sqrt{V(\overline{X})}=\sqrt{4}=2$

정답_④

## 445

모집단의 확률변수를 $X$라고 하면

$E(X)=\frac{n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+6)}{7}$

$=n+3$

$E(\overline{X})=E(X)=6$이므로

$n+3=6$ $\quad\therefore n=3$

즉, 7개의 공에 각각 하나씩 적혀 있는 수는 3, 4, 5, $\cdots$, 9이므로

$V(X)=\frac{3^2+4^2+5^2+\cdots+9^2}{7}-6^2$

$=40-36=4$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{4}=2$

이때, 표본의 크기가 2이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

정답_②

## 446

모평균이 $m=20$, 모분산이 $\sigma^2=25$, 표본의 크기가 $n=25$이므로

ㄱ은 옳지 않다.

$\mathrm{E}(\overline{X})=m=20$

ㄴ은 옳다.

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{25}{25}=1$$

ㄷ도 옳지 않다.

$\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 1^2)$을 따른다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

정답_ ②

## 447

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(32,\ 6^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(32,\ \frac{6^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(32,\ 2^2)$을 따른다.

이때, $Z=\frac{\overline{X}-32}{2}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

(1) $\mathrm{P}(\overline{X}\le 28)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{28-32}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\le -2)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 2)$
$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=0.5-0.4772$
$=0.0228$

(2) $\mathrm{P}(29\le\overline{X}\le 37)=\mathrm{P}\left(\frac{29-32}{2}\le Z\le\frac{37-32}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 2.5)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$
$=0.4332+0.4938$
$=0.927$

(3) $\mathrm{P}(\overline{X}\ge 30)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{30-32}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\ge -1)$
$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=0.5+0.4332$
$=0.9332$

정답_ (1) 0.0228 (2) 0.927 (3) 0.9332

## 448

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 5^2)$을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(30,\ \frac{5^2}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(30,\ 0.5^2)$을 따른다.

이때, $Z=\frac{\overline{X}-30}{0.5}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(29.5\le\overline{X}\le 31)=\mathrm{P}\left(\frac{29.5-30}{0.5}\le Z\le\frac{31-30}{0.5}\right)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=0.34+0.48=0.82$

정답_ ②

## 449

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(15,\ 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(15,\ \frac{4^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(15,\ 1^2)$을 따른다.

이때, $Z=\frac{\overline{X}-15}{1}=\overline{X}-15$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 17)=\mathrm{P}(Z\ge 17-15)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 2)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=0.5-0.4772=0.0228$

정답_ ①

## 450

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(9.27,\ 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 64이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(9.27,\ \frac{4^2}{64}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(9.27,\ 0.5^2)$을 따른다.

이때, $Z=\frac{\overline{X}-9.27}{0.5}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge c)=0.985$에서

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge c)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{c-9.27}{0.5}\right)=0.985$이므로 $\frac{c-9.27}{0.5}<0$, 즉

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{c-9.27}{0.5}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{c-9.27}{0.5}\le Z\le 0\right)+\mathrm{P}(Z\ge 0)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{c-9.27}{0.5}\le Z\le 0\right)+0.5$
$=0.985$

$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{c-9.27}{0.5}\le Z\le 0\right)=0.485$

$\mathrm{P}(-2.17\le Z\le 0)=0.485$이므로

$\frac{c-9.27}{0.5}=-2.17$, $c-9.27=-1.085$ $\quad\therefore c=8.185$

정답_ ③

## 451

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(120,\ \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(120,\ 2^2)$을 따른다.

이때, $Z=\frac{\overline{X}-120}{2}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(|\overline{X}-120|\le a)=0.99$에서

$\mathrm{P}(|\overline{X}-120|\le a)$

$=\mathrm{P}(-a\le \overline{X}-120\le a)$

$=\mathrm{P}(-a+120\le \overline{X}\le a+120)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{-a+120-120}{2}\le Z\le \dfrac{a+120-120}{2}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{-a}{2}\le Z\le \dfrac{a}{2}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{a}{2}\right)=0.99$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{a}{2}\right)=0.495$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2.58)=0.495$이므로

$\dfrac{a}{2}=2.58$

$\therefore a=5.16$ 정답_ ②

## 452

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 36이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{12^2}{36}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따른다.

이때, $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{2}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 4)=0.975$에서

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 4)=\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{4-m}{2}\right)=0.975$이므로 $\dfrac{4-m}{2}<0$, 즉

$\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{4-m}{2}\right)=\mathrm{P}\left(\dfrac{4-m}{2}\le Z\le 0\right)+\mathrm{P}(Z\ge 0)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{4-m}{2}\le Z\le 0\right)+0.5$

$=0.975$

$\therefore \mathrm{P}\left(\dfrac{4-m}{2}\le Z\le 0\right)=0.475$

$\mathrm{P}(-1.96\le Z\le 0)=0.475$이므로

$\dfrac{4-m}{2}=-1.96,$

$4-m=-3.92$

$\therefore m=7.92$ 정답_ ⑤

## 453

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ \sigma^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(120,\ \dfrac{\sigma^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(120,\ \left(\dfrac{\sigma}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

이때, $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{2}}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 130)=\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{130-120}{\frac{\sigma}{2}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{20}{\sigma}\right)$

$=0.0228$

이므로 $\dfrac{20}{\sigma}>0$, 즉

$\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{20}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{20}{\sigma}\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{20}{\sigma}\right)$

$=0.0228$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{20}{\sigma}\right)=0.5-0.0228=0.4772$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\dfrac{20}{\sigma}=2 \qquad \therefore \sigma=10$ 정답_ 10

## 454

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(1400,\ 100^2)$을 따르고 표본의 크기가 $n$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(1400,\ \dfrac{100^2}{n}\right)$을 따른다.

이때, $Z=\dfrac{\overline{X}-1400}{\frac{100}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}\left(\overline{X}\ge 1350+\dfrac{164}{\sqrt{n}}\right)\ge 0.9$에서

$\mathrm{P}\left(\overline{X}\ge 1350+\dfrac{164}{\sqrt{n}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{1350+\frac{164}{\sqrt{n}}-1400}{\frac{100}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge -\dfrac{\sqrt{n}}{2}+1.64\right)\ge 0.9$

이므로 $-\dfrac{\sqrt{n}}{2}+1.64<0$, 즉

$\mathrm{P}\left(Z\ge -\dfrac{\sqrt{n}}{2}+1.64\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\dfrac{\sqrt{n}}{2}+1.64\le Z\le 0\right)+\mathrm{P}(Z\ge 0)$

$=\mathrm{P}\left(-\dfrac{\sqrt{n}}{2}+1.64\le Z\le 0\right)+0.5\ge 0.9$

$\therefore \mathrm{P}\left(-\dfrac{\sqrt{n}}{2}+1.64\le Z\le 0\right)\ge 0.4$

$\mathrm{P}(-1.28\le Z\le 0)=0.4$이므로

$-\dfrac{\sqrt{n}}{2}+1.64\le -1.28,\ \dfrac{\sqrt{n}}{2}-1.64\ge 1.28$

$\sqrt{n}\ge 5.84 \qquad \therefore n\ge 34.1056$

따라서 구하는 자연수 $n$의 최솟값은 35이다. 정답_ 35

## 455

$\bar{x}=60, \sigma=3, n=36$이므로

(1) $60-1.96\cdot\frac{3}{\sqrt{36}} \le m \le 60+1.96\cdot\frac{3}{\sqrt{36}}$

$\therefore 59.02 \le m \le 60.98$

(2) $2\cdot 1.96\cdot\frac{3}{\sqrt{36}}=1.96$

정답_ (1) $59.02 \le m \le 60.98$ (2) 1.96

## 456

$\bar{x}=60, \sigma=20, n=100$이므로

(1) $60-2.58\cdot\frac{20}{\sqrt{100}} \le m \le 60+2.58\cdot\frac{20}{\sqrt{100}}$

$\therefore 54.84 \le m \le 65.16$

(2) $2\cdot 2.58\cdot\frac{20}{\sqrt{100}}=10.32$

정답_ (1) $54.84 \le m \le 65.16$ (2) 10.32

## 457

$P(0 \le Z \le 1.96)=0.475$이므로

$P(|Z| \le 1.96)=0.95$

표본평균이 168, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 400이므로 모평균 $m$을 신뢰도 95 %로 추정하면

$168-1.96\cdot\frac{5}{\sqrt{400}} \le m \le 168+1.96\cdot\frac{5}{\sqrt{400}}$

$\therefore 167.51 \le m \le 168.49$ 정답_ ⑤

## 458

$P(0 \le Z \le 2.58)=0.495$이므로

$P(|Z| \le 2.58)=0.99$

표본평균이 42, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 100이므로 모평균 $m$을 신뢰도 99 %로 추정하면

$42-2.58\cdot\frac{5}{\sqrt{100}} \le m \le 42+2.58\cdot\frac{5}{\sqrt{100}}$

$\therefore 40.71 \le m \le 43.29$ 정답_ ②

## 459

표본평균은 $\frac{1}{9}(10+11+11+8+9+9+11+10+11)=10$

모표준편차가 3, 표본의 크기가 9이므로 모평균 $m$을 신뢰도 95 %로 추정하면

$10-1.96\cdot\frac{3}{\sqrt{9}} \le m \le 10+1.96\cdot\frac{3}{\sqrt{9}}$

$\therefore 8.04 \le m \le 11.96$ 정답_ ①

## 460

$P(0 \le Z \le 1.96)=0.475$이므로

$P(|Z| \le 1.96)=0.95$

표본평균이 245 mm, 표본표준편차가 20 mm, 표본의 크기가 100이므로 모평균 $m$을 신뢰도 95 %로 추정하면

$245-1.96\cdot\frac{20}{\sqrt{100}} \le m \le 245+1.96\cdot\frac{20}{\sqrt{100}}$

$\therefore 241.08 \le m \le 248.92$

위의 범위 안에 속하는 정수는 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248로 7개이다. 정답_ 7

참고

일반적으로 모평균에 대한 신뢰구간을 구할 때 모표준편차 $\sigma$를 모르는 경우가 많은 데 표본의 크기 $n$이 충분히 클 때($n \ge 30$) 표본표준편차 $S$의 값 $s$는 모표준편차 $\sigma$와 큰 차이가 없다. 따라서 $\sigma$ 대신 $s$를 대입하여 신뢰구간을 구할 수 있다.

## 461

모표준편차가 100이므로

(i) 크기가 100인 표본을 임의추출하여 신뢰도 95 %로 모평균을 추정한 신뢰구간의 길이는

$2\cdot 2\cdot\frac{100}{\sqrt{100}}=40$

(ii) 크기가 $n$인 표본을 임의추출하여 신뢰도 99 %로 모평균을 추정한 신뢰구간의 길이는

$2\cdot 3\cdot\frac{100}{\sqrt{n}}=\frac{600}{\sqrt{n}}$

(i), (ii)에서 두 신뢰구간의 길이가 같아야 하므로

$40=\frac{600}{\sqrt{n}}, \sqrt{n}=15$

$\therefore n=225$ 정답_ ②

## 462

모표준편차가 5 kg이고, 신뢰도가 95 %인 모평균의 신뢰구간의 길이가 1 kg 이하이어야 하므로 표본의 크기를 $n$이라고 하면

$2\cdot 1.96\cdot\frac{5}{\sqrt{n}} \le 1, \sqrt{n} \ge 19.6 \quad \therefore n \ge 384.16$

따라서 조사하여야 할 표본의 크기의 최솟값은 385이다.

정답_ ④

## 463

모표준편차가 5 g이고, 신뢰도가 99 %인 모평균의 신뢰구간의 길이가 3 g 이상이어야 하므로 표본의 크기를 $n$이라고 하면

$2\cdot 2.58\cdot\frac{5}{\sqrt{n}} \ge 3, \sqrt{n} \le 8.6 \quad \therefore n \le 73.96$

따라서 $n$의 최댓값은 73이다. 정답_ 73

## 464

연간 주행거리를 확률변수 $X$, 모표준편차를 $\sigma$라고 하자. 표본의 크기가 16이므로 모평균 $m$을 신뢰도 95 %로 추정하면

$\bar{x}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le\bar{x}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$

$\therefore c=1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{16}}=0.49\sigma$

이때, $Z=\frac{\overline{X}-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(\overline{X}\le m+c)=\mathrm{P}(\overline{X}-m\le c)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-m}{\sigma}\le\frac{c}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{0.49\sigma}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le 0.49)$

$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.49)$

$=0.5+0.1879=0.6879$

정답_ ③

## 465

ㄱ은 옳지 않다.

$\mathrm{V}(\overline{X_A})=\frac{9}{4}$, $\mathrm{V}(\overline{X_B})=\frac{9}{9}=1$이므로

$\mathrm{V}(\overline{X_A})>\mathrm{V}(\overline{X_B})$

ㄴ은 옳다.

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 3^2)$을 따르므로 두 표본평균 $\overline{X_A}$, $\overline{X_B}$는 각각 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)$, $\mathrm{N}(m,\ 1^2)$을 따른다.

이때, $Z=\frac{\overline{X_A}-m}{\frac{3}{2}}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X_A}\le m+3)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{m+3-m}{\frac{3}{2}}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le 2)$

또한, $Z\le\frac{\overline{X_B}-m}{1}=\overline{X_B}-m$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X_B}\le m+3)=\mathrm{P}(Z\le m+3-m)$

$=\mathrm{P}(Z\le 3)$

$\therefore \mathrm{P}(\overline{X_A}\le m+3)<\mathrm{P}(\overline{X_B}\le m+3)$

ㄷ도 옳다.

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=0.99\ (k>0)$라고 하면

$b-a=2\cdot k\cdot\frac{3}{\sqrt{4}}=3k$

$d-c=2\cdot k\cdot\frac{3}{\sqrt{9}}=2k$

$\therefore d-c<b-a$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ④

## 466

신뢰구간을 추정할 때에는 신뢰도가 $\boxed{\text{높을}}$수록, 신뢰구간의 길이는 $\boxed{\text{짧을}}$수록 더 의미가 있다. 그러나 표본의 크기가 고정되어 있을 때 신뢰도를 높이면 신뢰구간의 길이가 길어지고, 신뢰구간의 길이를 짧게 하면 신뢰도가 낮아진다.

따라서 신뢰도를 고정시키고 신뢰구간의 길이를 $\boxed{\text{짧게}}$하려면 표본의 크기를 크게 하여야 한다.

정답_ ③

## 467

모표준편차가 3이므로 신뢰도가 $\mathrm{P}(|Z|\le k)$ ($k$는 상수)이고, 표본의 크기가 $n$이면 신뢰구간의 길이 $l$은

$l=2k\frac{3}{\sqrt{n}}$

이때, $l$은 $k$에 정비례하고 $\sqrt{n}$에 반비례하므로 신뢰도를 낮추면서 표본의 크기를 크게 하면 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

따라서 옳은 것은 ①이다.

정답_ ①

## 468

모표준편차가 1이므로 신뢰도가 $\mathrm{P}(|Z|\le k)$ ($k$는 상수)이고, 표본의 크기가 $n$이면 신뢰구간의 길이는 $2k\frac{1}{\sqrt{n}}$

이때, 신뢰구간의 길이를 2로 하려면 표본의 크기가 5이어야 하므로

$2k\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=2 \qquad \therefore k=\sqrt{5}$

따라서 신뢰구간의 길이가 1이 되려면

$2\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=1$, $\sqrt{n}=2\sqrt{5} \qquad \therefore n=20$

정답_ ①

## 469

모표준편차가 $\sigma$, 신뢰도가 $\mathrm{P}(|Z|\le k)$ ($k$는 상수), 표본의 크기가 $n$이면 신뢰구간의 길이 $l$은 $l=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로 신뢰구간의 길이는 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값에 정비례한다.

① $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{4}{\sqrt{36}}=\frac{2}{3}$

② $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{9}{\sqrt{36}}=\frac{3}{2}$

③ $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{9}{\sqrt{81}}=1$

④ $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{12}{\sqrt{81}}=\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{12}{\sqrt{100}}=\frac{6}{5}$

따라서 신뢰구간의 길이가 가장 긴 것은 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값이 가장 큰 ②이다.

정답_ ②

## 470

모평균이 30, 모분산이 16, 표본의 크기가 4이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=30,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{16}{4}=4$ ······ ❶

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$이므로

$4=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-30^2 \quad \therefore \mathrm{E}(\overline{X}^2)=904$ ······ ❷

정답_ 904

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | $\mathrm{E}(\overline{X}),\ \mathrm{V}(\overline{X})$의 값 구하기 | 50% |
| ❷ | $\mathrm{E}(\overline{X}^2)$의 값 구하기 | 50% |

## 471

(1) 표본평균 $\overline{X}$가 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따르므로

$m=30$ ······ ❶

$\frac{5^2}{n}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$이므로 $\quad n=100$ ······ ❷

(2) $Z=\frac{\overline{X}-30}{\frac{1}{2}}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(29.5\le\overline{X}\le31)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{29.5-30}{\frac{1}{2}}\le Z\le\frac{31-30}{\frac{1}{2}}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le2)$ ······ ❸

$=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)$

$=0.34+0.48=0.82$ ······ ❹

정답_ (1) $m=30,\ n=100$ (2) 0.82

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | $m$의 값 구하기 | 20% |
| ❷ | $n$의 값 구하기 | 20% |
| ❸ | $\mathrm{P}(29.5\le\overline{X}\le31)$을 표준정규분포를 따르는 확률로 나타내기 | 30% |
| ❹ | $\mathrm{P}(29.5\le\overline{X}\le31)$ 구하기 | 30% |

## 472

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ \sigma^2)$을 따르고 표본의 크기가 $n$이므로

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(0,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다. ······ ❶

이때, $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$f(\sigma)=\mathrm{P}\left(\overline{X}\le\frac{\sigma^2}{n}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{\frac{\sigma^2}{n}-0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ ······ ❷

$f(1)=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\le0.67$에서

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\le0.17$

$\mathrm{P}(0\le Z\le0.44)=0.17$이므로

$\frac{1}{\sqrt{n}}\le0.44,\ \sqrt{n}\ge\frac{25}{11} \quad \therefore n\ge\frac{625}{121}=5.16\times\times\times$

따라서 자연수 $n$의 최솟값은 6이다. ······ ❸

정답_ 6

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | 표본평균 $\overline{X}$의 분포 구하기 | 20% |
| ❷ | $f(\sigma)$를 표준정규분포를 따르는 확률의 식으로 나타내기 | 30% |
| ❸ | $n$의 최솟값 구하기 | 50% |

## 473

표본평균의 값을 $\overline{x}$, 표본의 크기를 $n$이라고 하면 주어진 조건에서 $\mathrm{P}(|Z|\le2)=0.95$이므로 모평균 $m$을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간은

$\overline{x}-2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\therefore |m-\overline{x}|\le2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ······ ❶

모평균과 표본평균의 차가 모표준편차의 $\frac{1}{5}$ 이하이어야 하므로

$2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{5}\sigma,\ \sqrt{n}\ge10 \quad \therefore n\ge100$

따라서 필요한 표본의 크기의 최솟값은 100이다. ······ ❷

정답_ 100

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | 모평균과 표본평균의 차에 대한 부등식 세우기 | 40% |
| ❷ | $n$의 최솟값 구하기 | 60% |

## 474

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(1400,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(1400,\ 1^2)$을 따른다. ······ ❶

이때, $Z=\frac{\overline{X}-m}{1}=\overline{X}-m$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(|\overline{X}-1400|\le a)$

$=\mathrm{P}(1400-a\le\overline{X}\le1400+a)$

$=\mathrm{P}(1400-a-1400\le Z\le1400+a-1400)$

$=\mathrm{P}(-a\le Z\le a)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le a)$ ······ ❷

$\mathrm{P}(|\overline{X}-1400|\le a)=0.8664$이므로

$\mathrm{P}(0\le Z\le a)=0.4332$

$\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)=0.4332$이므로 $\quad a=1.5$ ······ ❸

정답_ 1.5

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | 표본평균 $\overline{X}$의 분포 구하기 | 20% |
| ❷ | $\mathrm{P}(\lvert\overline{X}-1400\rvert\le a)$를 표준정규분포를 따르는 확률의 식으로 나타내기 | 40% |
| ❸ | $a$의 값 구하기 | 40% |

# 475

표본평균은 $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{30}}{30}=\dfrac{150}{30}=5$

표본표준편차는

$\sqrt{\dfrac{{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_{30}}^2}{30}-5^2}=\sqrt{\dfrac{1200}{30}-25}=\sqrt{15}$ ❶

표본평균이 5, 표본표준편차가 $\sqrt{15}$, 표본의 크기가 30이므로 모평균 $m$을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간은

$5-1.96\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{30}}\le m\le 5+1.96\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{30}}$

$5-1.96\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\le m\le 5+1.96\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$5-1.96\cdot\dfrac{1}{1.4}\le m\le 5+1.96\cdot\dfrac{1}{1.4}$

$\therefore 3.6\le m\le 6.4$ ❷

정답_ $3.6\le m\le 6.4$

| 단계 | 채점 기준 | 비율 |
|---|---|---|
| ❶ | 표본평균, 표본표준편차 구하기 | 40% |
| ❷ | 신뢰구간 구하기 | 60% |

# 476

모평균이 2, 모분산이 1, 표본의 크기가 $n$이므로 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$\mathrm{E}(\overline{X})=2,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{1}{n}$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$\dfrac{1}{n}=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-2^2$

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X}^2)=\dfrac{1}{n}+4$

$f(n)=\mathrm{E}(\overline{X}^2-4\overline{X}+4)$

$=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-4\mathrm{E}(\overline{X})+4$

$=\dfrac{1}{n}+4-4\cdot2+4=\dfrac{1}{n}$

따라서 $y=f(n)$의 그래프의 개형으로 가장 적당한 것은 ④이다.

정답_ ④

다른 풀이

$f(n)=\mathrm{E}(\overline{X}^2-4\overline{X}+4)$

$=\mathrm{E}((\overline{X}-2)^2)$ ← (편차)$^2$의 평균

$=\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{1}{n}$

따라서 $y=f(n)$의 그래프의 개형으로 가장 적당한 것은 ④이다.

# 477

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(75,\ 5^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(75,\ \dfrac{5^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(75,\ 1^2)$을 따른다.

이때, $Z=\dfrac{\overline{X}-75}{1}=\overline{X}-75$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\lvert Z\rvert>c)=1-\mathrm{P}(-c\le Z\le c)$

$=1-2\mathrm{P}(0\le Z\le c)$

$=0.06$

에서 $2\mathrm{P}(0\le Z\le c)=0.94$

$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le c)=0.47$ ……㉠

ㄱ은 옳다.

$\mathrm{P}(Z>a)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le a)=0.05$에서

$\mathrm{P}(0\le Z\le a)=0.45$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $c>a$

ㄴ도 옳다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\le c+75)=\mathrm{P}(Z\le c)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le c)$

$=0.5+0.47$

$=0.97$

ㄷ도 옳다.

$\mathrm{P}(\overline{X}>b)=\mathrm{P}(Z>b-75)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le b-75)$

$=0.01$

에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le b-75)=0.49$ ……㉢

㉠, ㉢에서 $c<b-75$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

# 478

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 6^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(60,\ \dfrac{6^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(60,\ 2^2)$을 따른다.

이때, $Z=\dfrac{\overline{X}-60}{2}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

임의추출한 9명이 탑승하였을 때, 경고음이 울리려면 9명의 몸무게의 합이 549 kg 이상이어야 하므로 $9\overline{X}\ge549$, 즉 $\overline{X}\ge61$이어야 한다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge61)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{61-60}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge0.5)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)$

$=0.5-0.1915$

$=0.3085$

정답_ ③

## 479

정규분포 $N(30,\ 4^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(30,\ \frac{4^2}{4}\right)$, 즉 $N(30,\ 2^2)$을 따른다.

이때, $Z=\frac{\overline{X}-m}{2}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$P(\overline{X}\le 33)=P\left(Z\le \frac{33-30}{2}\right)=P(Z\le 1.5)$$

또, 정규분포 $N(75,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $N\left(75,\ \left(\frac{\sigma}{3}\right)^2\right)$을 따른다.

이때, $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{3}}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$P(\overline{Y}\le 69)=P\left(Z\le \frac{69-75}{\frac{\sigma}{3}}\right)=P\left(Z\le -\frac{18}{\sigma}\right)$$

$P(\overline{X}\le 33)+P(\overline{Y}\le 69)=1$에서

$P(Z\le 1.5)+P\left(Z\le -\frac{18}{\sigma}\right)=1$

$P(Z\le 1.5)+P(Z\le -1.5)=1$이므로

$(\because P(Z\le -1.5)=P(Z\ge 1.5))$

$-\frac{18}{\sigma}=-1.5 \qquad \therefore \sigma=12$

즉, 정규분포 $N(75,\ 12^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $N(75,\ 4^2)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(\overline{Y}\ge 83)&=P\left(Z\le \frac{83-75}{4}\right)\\&=P(Z\le 2)\\&=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)\\&=0.5+0.4772\\&=0.9772\end{aligned}$$

정답_ ⑤

## 480

모집단이 정규분포 $N(50,\ 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(50,\ \frac{4^2}{4}\right)$, 즉 $N(50,\ 2^2)$을 따른다.

이때, $Z=\frac{\overline{X}-50}{2}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

달걀이 최상품으로 분류되기 위한 최소 무게를 $a$라고 하면

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\ge a)&=P\left(Z\ge \frac{a-50}{2}\right)\\&=0.5-P\left(0\le Z\le \frac{a-50}{2}\right)\\&=0.1\end{aligned}$$

$\therefore P\left(0\le Z\le \frac{a-50}{2}\right)=0.4$

$P(0\le Z\le 1.28)=0.4$이므로

$\frac{a-50}{2}=1.28 \qquad \therefore a=52.56(\text{g})$

따라서 구하는 달걀의 평균 무게는 52.56 g 이상이다. 정답_ ②

## 481

모집단의 확률변수 $X$가 정규분포 $N(20,\ 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-20}{3}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(20\le X\le 32)&=P\left(\frac{20-20}{3}\le Z\le \frac{32-20}{3}\right)\\&=P(0\le Z\le 4)\end{aligned}$$

표본의 크기가 $n$인 표본평균 $\overline{X}_n$는 정규분포 $N\left(20,\ \frac{3^2}{n}\right)$을 따르므로 $Z=\frac{\overline{X}_n-20}{\frac{3}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(20\le \overline{X}_n\le 23)&=P\left(\frac{20-20}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\le Z\le \frac{23-20}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right)\\&=P(0\le Z\le \sqrt{n})\end{aligned}$$

$P(20\le \overline{X}_n\le 23)=P(20\le X\le 32)$에서

$P(0\le Z\le \sqrt{n})=P(0\le Z\le 4)$

$\sqrt{n}=4 \qquad \therefore n=16$

정답_ 16

## 482

모집단이 정규분포 $N(m,\ 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 $n$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \left(\frac{4}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

이때, $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{4}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}f(m)&=P\left(\overline{X}\le 5.16\cdot\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\\&=P\left(Z\le \frac{5.16\cdot\frac{2}{\sqrt{n}}-m}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right)\\&=P\left(Z\le 2.58-\frac{m\sqrt{n}}{4}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(0)&=P(Z\le 2.58)\\&=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 2.58)\\&=0.5+0.495\\&=0.995\end{aligned}$$

$f(1)=P\left(Z\le 2.58-\dfrac{\sqrt{n}}{4}\right)$

$f(0)+f(1)\le 1.332$에서

$0.995+P\left(Z\le 2.58-\dfrac{\sqrt{n}}{4}\right)\le 1.332$

$\therefore P\left(Z\le 2.58-\dfrac{\sqrt{n}}{4}\right)\le 0.337$

$P\left(Z\le 2.58-\dfrac{\sqrt{n}}{4}\right)$

$=P(Z\le 0)-P\left(2.58-\dfrac{\sqrt{n}}{4}\le Z\le 0\right)$

$=0.5-P\left(0\le Z\le \dfrac{\sqrt{n}}{4}-2.58\right)$

$\le 0.337$

$\therefore P\left(0\le Z\le \dfrac{\sqrt{n}}{4}-2.58\right)\ge 0.163$

$P(0\le Z\le 0.42)=0.163$이므로

$\dfrac{\sqrt{n}}{4}-2.58\ge 0.42$, $\sqrt{n}\ge 12$

$\therefore n\ge 144$

따라서 자연수 $n$의 최솟값은 144이다. 정답_ ③

## 483

$P(-k\le Z\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$ ($k$는 양의 실수), 표본 A의 크기를 $n_1$, 표본 B의 크기를 $n_2$로 놓고 모평균을 추정하면

A: $240-k\dfrac{12}{\sqrt{n_1}}\le m\le 240+k\dfrac{12}{\sqrt{n_1}}$

B: $230-k\dfrac{10}{\sqrt{n_2}}\le m\le 230+k\dfrac{10}{\sqrt{n_2}}$

ㄱ은 옳다.

표본 A보다 표본 B의 표준편차가 더 작으므로 표본 A보다 표본 B의 분포가 더 고르다.

ㄴ도 옳다.

표본 A에서 $237\le m\le 243$이므로

$k\dfrac{12}{\sqrt{n_1}}=3$

표본 B에서 $228\le m\le 232$이므로

$k\dfrac{10}{\sqrt{n_2}}=2$

즉, $k\dfrac{4}{\sqrt{n_1}}=1$, $k\dfrac{5}{\sqrt{n_2}}=1$이므로

$n_1=16k^2$, $n_2=25k^2$

$\therefore n_1<n_2$

ㄷ도 옳다.

신뢰도를 $\alpha$보다 크게 하면 $k$의 값도 커지므로 신뢰구간의 길이

$2k\dfrac{12}{\sqrt{n_1}}$, $2k\dfrac{10}{\sqrt{n_2}}$도 길어진다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

## 484

표본의 크기 $n$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이 $l$은

$l=2\cdot 2\cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{4\sigma}{\sqrt{n}}\qquad \therefore \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{l}{4}$

ㄱ은 옳지 않다.

표본의 크기 $9n$에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이는

$2\cdot 2\cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{9n}}=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{l}{4}=\dfrac{1}{3}l$

ㄴ은 옳다.

표본의 크기 $4n$에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간의 길이는

$2\cdot 3\cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{4n}}=3\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=3\cdot\dfrac{l}{4}=\dfrac{3}{4}l$

ㄷ도 옳다.

신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이가 $\dfrac{1}{2}l$일 때, 표본의 크기를 $N$이라고 하면 신뢰구간의 길이는 $2\cdot 2\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}=\dfrac{4\sigma}{\sqrt{N}}$이므로

$\dfrac{4\sigma}{\sqrt{N}}=\dfrac{1}{2}l$, $\dfrac{4\sigma}{\sqrt{N}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4\sigma}{\sqrt{n}}$

$\sqrt{N}=2\sqrt{n}\qquad \therefore N=4n$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

# 신발을 벗은 우주비행사

1961년 4월 12일, 우주비행사 유리 가가린은 세계 최초의 우주비행사로 역사에 기록되었다. 당시 가가린은 19명의 지원자들과 경합을 벌인 끝에 세계 최초로 우주를 비행할 수 있는 자격을 얻었다. 그렇다면 그가 선발될 수 있었던 요인은 무엇이었을까?

우주비행사가 최종 결정되기 1주일 전, 20명의 지원자가 우주선에 직접 타볼 수 있는 기회를 얻게 되었다. 모든 지원자들은 그냥 신발을 신은 채로 우주선에 올랐지만 가가린은 신발을 벗고 양말만 신은 채 우주선에 오른 것이었다.

설계사는 27세의 이 청년이 자신이 심혈을 기울여 만든 우주선을 아끼는 행동으로부터 큰 호감을 갖게 되었고 그에게 인류 최초로 우주를 비행하는 신성한 사명을 부여했다. 가가린의 작은 행동에서 그가 다른 사람이 애써 만든 성과물을 아끼고 보호할 줄 아는 자질을 지녔다는 것을 알아차렸기 때문이다.

이와 상반된 예도 있다. 베이징의 한 외국기업에서 직원을 채용할 때의 일이다. 임금이 높은 만큼 자격요건이 까다로웠지만 몇 차례의 관문을 거쳐 고학력의 젊은이들 몇 명이 최종 면접까지 남았다. 마지막 관문은 회장 면접이었다. 그런데 면접시험에서 회장은 지원자들에게 대뜸 이렇게 말했다.

"급한 일이 있으니 10분 후에 다시 오겠습니다."

회장이 자리를 비우자 호기심이 발동한 지원자들은 너나없이 회장의 책상 위에 놓여 있는 서류들을 뒤적여 보았다.

정확히 10분 후에 돌아온 회장은 뜻밖에도 이렇게 말했다.

"면접은 이미 끝났습니다. 아쉽게도 합격자가 아무도 없습니다."

당황한 지원자들이 "면접이 아직 시작되지도 않았잖습니까?" 라고 말하자 회장이 대답했다.

"내가 자리를 뜬 동안 면접이 실시되었습니다. 우리 회사에서는 회장의 서류를 마음대로 들춰보는 사람을 직원으로 채용할 수 없습니다."

사람의 됨됨이는 작은 부분에서 그대로 나타난다. 가가린이 신발을 벗은 행동에서 타인의 성과물을 존중하는 그의 인격을, 함부로 남의 서류를 들춰본 젊은이들에게서는 기본적인 예의가 부족하다는 것을 엿볼 수 있는 것이다.

물보라가 바다를 떠나서는 결코 존재할 수 없는 것처럼 작은 부분으로 성공의 기회를 잡거나 잃는 것은 우연인 것 같지만 실은 필연적인 것이다.