풍산자 필수유형

수학 Ⅱ 정답과 풀이

Ⅰ 함수의 극한과 연속

01 함수의 극한

001

(1) $\lim_{x \to -2}(2x+5)=2\cdot(-2)+5=1$

(2) $\lim_{x \to 3}(x^2-3x+2)=3^2-3\cdot3+2=2$

(3) $\lim_{x \to 2}\frac{9}{x+1}=\frac{9}{2+1}=3$

(4) $\lim_{x \to 1}\sqrt{3x+1}=\sqrt{3\cdot1+1}=2$

정답_(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 2

002

①은 옳다.

$$\lim_{x \to 4}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{4-1}{\sqrt{4}-1}=3$$

②는 옳지 않다.

$$\lim_{x \to -1}\frac{x^{10}+x-2}{x-1}=\frac{1+(-1)-2}{-1-1}=1$$

③은 옳다.

$$\lim_{x \to 0}\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

④도 옳다.

$$\lim_{x \to 1}(x^2+1)(x-3)=(1+1)(1-3)=-4$$

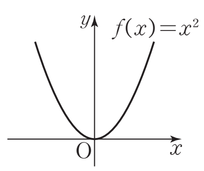
⑤도 옳다.

$$\lim_{x \to 2}\left(x+\frac{1}{x}\right)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

정답_②

003

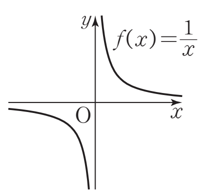
함수 $f(x)=x^2$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



(1) $\lim_{x \to \infty}x^2=\infty$

(2) $\lim_{x \to -\infty}x^2=\infty$

함수 $f(x)=\frac{1}{x}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



(3) $\lim_{x \to \infty}\frac{1}{x}=0$

(4) $\lim_{x \to -\infty}\frac{1}{x}=0$

정답_(1) ∞ (2) ∞ (3) 0 (4) 0

004

$\lim_{x \to -1}(x^2+ax+b)=4$에서

$1-a+b=4 \qquad \therefore a-b=-3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x \to 2}(x^2+ax+b)=1$에서

$4+2a+b=1 \qquad \therefore 2a+b=-3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=1$

$\therefore ab=-2\cdot1=-2$

정답_①

005

$\frac{0}{0}$ 꼴의 유리식의 극한은 분자, 분모를 인수분해한 후 약분하면 된다.

(1) $\lim_{x \to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x \to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x \to 1}(x+1)=2$

(2) $\lim_{x \to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x-2}=\lim_{x \to 2}\frac{(x-2)(2x+1)}{x-2}$

$=\lim_{x \to 2}(2x+1)=5$

$\frac{0}{0}$ 꼴의 무리식의 극한은 근호가 있는 쪽을 유리화한 후 약분하면 된다.

(3) $\lim_{x \to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x \to 9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$

$=\lim_{x \to 9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$

$=\lim_{x \to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{6}$

(4) $\lim_{x \to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x \to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}$

$=\lim_{x \to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$

$=\lim_{x \to 3}(\sqrt{x+1}+2)=4$

정답_(1) 2 (2) 5 (3) $\frac{1}{6}$ (4) 4

006

$$\lim_{x \to 2}\frac{x^4-16}{x-2}=\lim_{x \to 2}\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2}$$

$$=\lim_{x \to 2}(x+2)(x^2+4)=32$$

정답_⑤

007

$$\lim_{x \to -3}\frac{x+3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}}=\lim_{x \to -3}\frac{x+3}{\frac{3+x}{3x}}=\lim_{x \to -3}3x=-9$$

정답_①

008

$$\lim_{x \to 2}\frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}=\lim_{x \to 2}\frac{(x^2-3)-1}{(x-2)(\sqrt{x^2-3}+1)}$$

$$=\lim_{x \to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2-3}+1)}$$

$$=\lim_{x \to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1}=2$$

정답_⑤

009

$$\lim_{x\to-2}\frac{(2x+4)f(x)}{\sqrt{x+11}-3}=\lim_{x\to-2}\frac{(2x+4)f(x)(\sqrt{x+11}+3)}{(x+11)-9}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{2(x+2)f(x)(\sqrt{x+11}+3)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}2f(x)(\sqrt{x+11}+3)$$
$$=2\cdot\frac{1}{4}\cdot(\sqrt{9}+3)=3$$

정답_ ③

010

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\{(1-x)-(1+x)\}(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{\{(4+x)-(4-x)\}(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(-\frac{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right)=-2$$

정답_ ②

011

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2)$$
$$=3a^2=3$$

즉, $a^2=1$ $\quad\therefore a=1$ ($\because a>0$)

$$\therefore \lim_{x\to a}\frac{x^3-ax^2+a^2x-a^3}{x-a}=\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x^2+1)=2$$

정답_ ②

012

$$\lim_{x\to1}\frac{6(x^4-1)}{(x^2-1)f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{6(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2-1)f(x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{6(x^2+1)}{f(x)}$$
$$=\frac{6(1+1)}{f(1)}$$
$$=\frac{12}{f(1)}=3$$

$\therefore f(1)=4$

정답_ ②

013

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 유리식의 극한은 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 나누면 된다.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2+2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{0-0}{1+0+0}=0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-3+\frac{2}{x}}{1+\frac{5}{x}}=\infty$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+2}{2x^2-4x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{4+0+0}{2-0+0}=2$

정답_ (1) 0 (2) ∞ (3) 2

다른 풀이

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 유리식의 극한값을 구하려면 최고차항의 계수만 관찰하면 된다. 특히, (분모의 차수)=(분자의 차수)이면 극한값은 $\frac{(\text{분자의 최고차항의 계수})}{(\text{분모의 최고차항의 계수})}$이다.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+2}{2x^2-4x+3}=\frac{4}{2}=2$

014

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 무리식의 극한은 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 나누면 된다.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$
$$=\frac{3}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{3}{2}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-1}}{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{2-\frac{3}{x}}$
$$=\frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}{2-0}=1$$

정답_ (1) $\frac{3}{2}$ (2) 1

015

주어진 식의 분자, 분모를 $\sqrt{x^2}=x$로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+3x}{\sqrt{9x^2+1}-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+3}{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}-1}$$
$$=\frac{1+3}{3-1}=2$$

정답_ ⑤

016

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x+1}{3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}}=\frac{2}{3}$

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{2x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{4}{x^2}}=0$

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\infty$

따라서 수렴하는 것은 ㄱ, ㄴ이다. 정답_ ④

017

주어진 극한이 0이 아닌 값에 수렴하므로 $a=0$

이때, 극한값은 $\frac{(\text{분자의 최고차항의 계수})}{(\text{분모의 최고차항의 계수})}$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{bx^2+2x+5}{2x^2-3x+4}=\frac{b}{2}=6$에서 $b=12$

$\therefore a+b=0+12=12$ 정답_ ②

018

주어진 식의 분자, 분모를 $\sqrt{x^2}=x$로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax-10}{\sqrt{x^2-2x-3}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a-\frac{10}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}+1}$$

$$=\frac{a}{1+1}=2$$

$\therefore a=4$ 정답_ ②

019

주어진 식의 분자, 분모를 x로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-5f(x)+1}{2f(x)-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5\cdot\frac{f(x)}{x}+\frac{1}{x}}{2\cdot\frac{f(x)}{x}-\frac{3}{x}}$$

$$=\frac{-5a}{2a}=-\frac{5}{2}$$ 정답_ ①

020

$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)}{x}+2\right\}=0$에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=-2$

주어진 식의 분자, 분모를 x^2으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+xf(x)-5}{2x^2-x+f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\frac{f(x)}{x}-\frac{5}{x^2}}{2-\frac{1}{x}+\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{8+(-2)-0}{2-0+(-2)\cdot 0}=3$$ 정답_ ④

021

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ (a는 상수)라 하고, 주어진 식의 분자, 분모를 $\sqrt{x^2}=x$로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sqrt{x-f(x)}}{x+\sqrt{x^2+2f(x)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}}}{1+\sqrt{1+\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{2}{x}}}$$

$$=\frac{2+\sqrt{0-a\cdot 0}}{1+\sqrt{1+a\cdot 0}}=1$$ 정답_ ③

022

(1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+0}+1}=1$$

(2) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x})(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x})}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}}$$

$$=\frac{6}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=3$$ 정답_ (1) 1 (2) 3

023

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax})}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1-\frac{a}{x}}}$$

$$=\frac{2a}{1+1}=4$$

$\therefore a=4$ 정답_ ⑤

024

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+2}+x)$

$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-3t+2}-t)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2-3t+2}-t)(\sqrt{t^2-3t+2}+t)}{\sqrt{t^2-3t+2}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-3t+2}{\sqrt{t^2-3t+2}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-3+\frac{2}{t}}{\sqrt{1-\frac{3}{t}+\frac{2}{t^2}}+1}$$

$$=\frac{-3}{1+1}=-\frac{3}{2}$$ 정답_ ①

025

$\infty\times0$ 꼴의 극한은 통분하여 $\frac{0}{0}$ 꼴로 생각하면 된다.

(1) $\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}\right)=\lim_{x\to3}\left\{\frac{1}{x-3}\cdot\frac{-(x-3)}{4(x+1)}\right\}$

$=\lim_{x\to3}\frac{-1}{4(x+1)}$

$=-\frac{1}{16}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{-x}{\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$

$=-\frac{1}{2}$

정답_(1) $-\frac{1}{16}$ (2) $-\frac{1}{2}$

026

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{x^2+5}{x+1}-3\right)$

$=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x^2-3x+2}{x+1}\right)$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x-1}\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{x+1}\right\}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x-2}{x+1}=-\frac{1}{2}$

정답_①

027

$\lim_{x\to0}\frac{4}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x+4}}-\frac{1}{2}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{4}{x}\cdot\frac{2-\sqrt{x+4}}{2\sqrt{x+4}}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{4}{x}\cdot\frac{(2-\sqrt{x+4})(2+\sqrt{x+4})}{2\sqrt{x+4}(2+\sqrt{x+4})}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{4}{x}\cdot\frac{-x}{2\sqrt{x+4}(2+\sqrt{x+4})}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-2}{\sqrt{x+4}(2+\sqrt{x+4})}$

$=\frac{-2}{\sqrt{4}(2+\sqrt{4})}$

$=-\frac{1}{4}$

정답_④

028

$\lim_{x\to-1}\frac{x^3-x^2+x+p}{x^3+1}=q$에서 $x\to-1$일 때 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to-1}(x^3-x^2+x+p)=0$에서 $-1-1+(-1)+p=0$

$\therefore p=3$

$\lim_{x\to-1}\frac{x^3-x^2+x+3}{x^3+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-2x+3)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-2x+3}{x^2-x+1}$

$=\frac{6}{3}=2=q$

$\therefore p+q=3+2=5$

정답_③

029

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x+a}-\sqrt{x+3}}{x^2-1}=b$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to1}(\sqrt{3x+a}-\sqrt{x+3})=0$에서 $\sqrt{3+a}-\sqrt{4}=0$

$\therefore a=1$

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{(x^2-1)(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})}$

$=\lim_{x\to1}\frac{2}{(x+1)(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})}$

$=\frac{1}{4}=b$

$\therefore ab=1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

정답_④

030

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=3$이고, $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$에서 $1+a+b=0$

$\therefore b=-(a+1)$ ……㉠

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-(a+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x+a+1)=2+a=3$

$\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-2$

따라서 $f(x)=x^2+x-2$이므로

$f(2)=4+2-2=4$

정답_⑤

031

$\lim_{x\to2}\left(\frac{a}{2-x}-\frac{b}{4-x^2}\right)=\lim_{x\to2}\frac{a(2+x)-b}{4-x^2}=1$ ……㉠

㉠에서 $x \to 2$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x\to2}\{a(2+x)-b\}=0$에서 $4a-b=0$

$\therefore b=4a$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{a(2+x)-4a}{4-x^2}=\lim_{x\to2}\frac{-a(2-x)}{(2+x)(2-x)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{-a}{2+x}=\frac{-a}{4}=1$$

$\therefore a=-4$

㉡에서 $b=-16$

$\therefore ab=-4\cdot(-16)=64$

정답_ ⑤

032

$\lim_{x\to9}\frac{x-a}{\sqrt{x}-3}=b$에서 $x \to 9$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x\to9}(x-a)=0$에서 $9-a=0$

$\therefore a=9$

$$\lim_{x\to9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to9}\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to9}\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9}$$

$$=\lim_{x\to9}(\sqrt{x}+3)$$

$$=6=b$$

$\therefore a+b=9+6=15$

정답_ 15

033

$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-2}=\frac{1}{8}$에서 $x \to 2$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x\to2}(\sqrt{x+a}-b)=0$에서 $\sqrt{2+a}-b=0$

$\therefore b=\sqrt{2+a}$ ...... ㉠

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a+2})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+2})}{(x-2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+2})}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+2})}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a+2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{a+2}}=\frac{1}{8}$$

$\therefore a=14$

$a=14$를 ㉠에 대입하면 $b=4$

$\therefore a+b=14+4=18$

정답_ ④

034

$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+(a+1)x+a}{x^2-b}=3$에서 $x \to -1$일 때 (분자) $\to 0$이므로 (분모) $\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x\to-1}(x^2-b)=0$에서 $1-b=0$ $\therefore b=1$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+(a+1)x+a}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+a)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x+a}{x-1}=\frac{-1+a}{-2}=3$$

$\therefore a=-5$

$\therefore a+b=-5+1=-4$

정답_ ②

035

(i) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-x}=10$이므로 $f(x)$는 이차항의 계수가 10인 이차함수이어야 한다.

(ii) $\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=40$에서 $x \to 3$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$\therefore f(3)=0$

따라서 $f(x)=10(x-3)(x+a)$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{10(x-3)(x+a)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}10(x+a)=10(3+a)=40$$

$\therefore a=1$

따라서 $f(x)=10(x-3)(x+1)$이므로

$f(1)=-40$

정답_ ①

036

(i) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{f(x)}=3$이므로 $f(x)$는 이차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 이차함수이어야 한다.

(ii) $\lim_{x\to2}\frac{2x^2-7x+6}{f(x)}=\frac{1}{2}$에서 $x \to 2$일 때 (분자) $\to 0$이므로 (분모) $\to 0$이어야 한다.

$\therefore f(2)=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}(x-2)(x+a)$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^2-7x+6}{f(x)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(2x-3)}{\frac{1}{3}(x-2)(x+a)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{3(2x-3)}{x+a}=\frac{3}{2+a}=\frac{1}{2}$$

$\therefore a=4$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}(x-2)(x+4)$이므로

$f(5)=9$

정답_ ②

037

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x^3}{x^2}=2$이므로 $f(x)-3x^3$은 이차항의 계수가 2인 이차함수이어야 한다.
따라서 $f(x)-3x^3=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수), 즉
$f(x)=3x^3+2x^2+ax+b$ ······ ㉠
로 놓을 수 있다.
조건 (나)의 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$에서 $x \to 0$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.
그러므로 ㉠에서 $f(0)=b=0$
조건 (나)에서

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{3x^3+2x^2+ax}{x}=\lim_{x\to0}(3x^2+2x+a)=a=2$$

따라서 $f(x)=3x^3+x^2+2x$이므로 $f(1)=6$ 정답_ 6

038

$(x-2)f(x)=ax^2+bx+c$의 양변에 $x=2$를 대입하면
$4a+2b+c=0$ ······ ㉠
$x\neq2$일 때, $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x-2}$이고 $\lim_{x\to\infty}f(x)=3$이므로
$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x-2}=3$ ······ ㉡
㉡에서 ax^2+bx+c는 일차항의 계수가 3인 일차식이어야 한다.
$\therefore a=0,\ b=3$
$a=0, b=3$을 ㉠에 대입하면 $c=-6$
$\therefore a+b-c=0+3-(-6)=9$ 정답_ ③

039

$f(x)$는 다항함수이고
(i) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-1$에서 $x \to 1$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.
$\therefore f(1)=0$
(ii) $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=3$에서 $x \to 2$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.
$\therefore f(2)=0$
따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식)로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)Q(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-2)Q(x)=-Q(1)=-1$$

$\therefore Q(1)=1$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)Q(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x-1)Q(x)=Q(2)=3$$

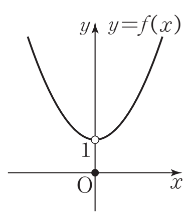
$\therefore Q(2)=3$
$Q(1)=1, Q(2)=3$을 만족시키는 다항식 $Q(x)$ 중 차수가 가장 낮은 것은 일차식이므로 $Q(x)=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면
$a+b=1, 2a+b=3$
두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=-1$
따라서 $g(x)=(x-1)(x-2)(2x-1)$이므로
$g(3)=2\cdot1\cdot5=10$ 정답_ ⑤

040

$x \to a-$는 x가 a의 왼쪽에서 a에 한없이 가까워짐을 의미하고, $x \to a+$는 x가 a의 오른쪽에서 a에 한없이 가까워짐을 의미한다.
(1) $\lim_{x\to-2-}f(x)=2$ (2) $\lim_{x\to-2+}f(x)=3$
(3) $\lim_{x\to2-}f(x)=-1$ (4) $\lim_{x\to2+}f(x)=-1$
(5) $x=-2$에서 좌극한과 우극한이 다르므로 $\lim_{x\to-2}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.
(6) $x=2$에서 좌극한과 우극한이 모두 -1이므로
$\lim_{x\to2}f(x)=-1$
정답_ (1) 2 (2) 3 (3) -1 (4) -1 (5) 존재하지 않는다. (6) -1

041

함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



(1) $\lim_{x\to0-}f(x)=1$
(2) $\lim_{x\to0+}f(x)=1$
(3) $x=0$에서 좌극한과 우극한이 모두 1이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=1$ 정답_ (1) 1 (2) 1 (3) 1

보충 설명
$f(0)=0$이지만 $x=0$에서의 극한은 $x=0$일 때의 함숫값과 같지 않을 수 있다. $x=0$의 근처가 중요하다. 좌극한은 왼쪽에서 접근할 때, 우극한은 오른쪽에서 접근할 때 가까워지는 값이다.

042

$\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=0+(-3)=-3$ 정답_ ③

043

$\lim_{x\to1+}f(x)=1$
$1-x=t$로 놓으면 $x \to 1+$일 때 $t \to 0-$이므로
$\lim_{x\to1+}f(1-x)=\lim_{t\to0-}f(t)=2$

$$\therefore \lim_{x\to1+}f(x)f(1-x)=\lim_{x\to1+}f(x)\lim_{x\to1+}f(1-x)=\lim_{x\to1+}f(x)\lim_{t\to0-}f(t)=1\cdot2=2$$

정답_ ⑤

044

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (x^2-4x+a) = -3+a = -2$

$\therefore a=1$

$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (-x+b) = -1+b = 2$

$\therefore b=3$

$\therefore a-b=1-3=-2$ 정답_ ②

045

ㄱ은 옳다.

$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2+} f(x) = 3$이므로 $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

ㄴ은 옳지 않다.

$\lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{x \to 3+} f(x) = 0$이므로 $\lim_{x \to 3} f(x) = 0$

ㄷ도 옳지 않다.

$\lim_{x \to 7-} f(x) = 4$, $\lim_{x \to 7+} f(x) = 2$이므로 $\lim_{x \to 7} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 정답_ ①

046

ㄱ은 옳다.

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) = 2$이므로 $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

ㄴ은 옳지 않다.

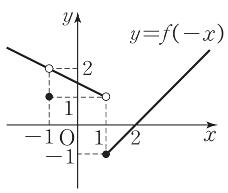
$\lim_{x \to -1-} f(x) = -1$

ㄷ도 옳지 않다.

$\lim_{x \to 1-} f(-x) = 1$,

$\lim_{x \to 1+} f(-x) = -1$이므로

$\lim_{x \to 1} f(-x)$의 값은 존재하지 않는다.



따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 정답_ ①

047

$\lim_{x \to 3+} f(x) = \lim_{x \to 3+} (x^2-x+a) = 9-3+a = a+6$

$\lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{x \to 3-} (ax-a) = 3a-a = 2a$

$\lim_{x \to 3} f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x \to 3+} f(x) = \lim_{x \to 3-} f(x)$이어야 하므로 $a+6=2a$ $\therefore a=6$ 정답_ ④

048

먼저 가우스 기호를 처리한 후 극한값을 구한다.

① $-1<x<0$일 때 $[x]=-1$이므로

$$\lim_{x \to 0-} \frac{x}{[x]} = \lim_{x \to 0-} \frac{x}{-1} = 0$$

② $0<x<1$일 때, $[x]=0$이므로

$$\lim_{x \to 0+} \frac{[x]}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{0}{x} = 0$$

③ $-1<x<0$일 때, $-2<x-1<-1$이므로 $[x-1]=-2$

$$\therefore \lim_{x \to 0-} \frac{[x-1]}{x-1} = \lim_{x \to 0-} \frac{-2}{x-1} = 2$$

④ $0<x<1$일 때, $-1<x-1<0$이므로 $[x-1]=-1$

$$\therefore \lim_{x \to 0+} \frac{x-1}{[x-1]} = \lim_{x \to 0+} \frac{x-1}{-1} = 1$$

⑤ $0<x<1$일 때, $-2<x-2<-1$이므로 $[x-2]=-2$

$$\therefore \lim_{x \to 0+} \frac{x-2}{[x-2]} = \lim_{x \to 0+} \frac{x-2}{-2} = 1$$

따라서 극한값이 가장 큰 것은 ③이다. 정답_ ③

049

ㄱ. (i) $\lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = 1$

(ii) $\lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x} = -1$

좌극한과 우극한이 다르므로 $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. (i) $0<x<\frac{1}{2}$, 즉 $0<2x<1$일 때, $[x]=0$, $[2x]=0$이므로

$\lim_{x \to 0+} ([2x]-[x]) = 0-0 = 0$

(ii) $-\frac{1}{2}<x<0$, 즉 $-1<2x<0$일 때,

$[x]=-1$, $[2x]=-1$이므로

$\lim_{x \to 0-} ([2x]-[x]) = -1+1 = 0$

좌극한과 우극한이 모두 0이므로 $\lim_{x \to 0} ([2x]-[x]) = 0$

ㄷ. (i) $0<x<1$일 때, $[x]=0$이므로

$$\lim_{x \to 0+} \frac{[x]}{x+1} = \lim_{x \to 0+} \frac{0}{x+1} = \frac{0}{1} = 0$$

(ii) $-1<x<0$일 때, $[x]=-1$이므로

$$\lim_{x \to 0-} \frac{[x]}{x+1} = \lim_{x \to 0-} \frac{-1}{x+1} = \frac{-1}{1} = -1$$

좌극한과 우극한이 다르므로 $\lim_{x \to 0} \frac{[x]}{x+1}$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 $x=0$에서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ이다. 정답_ ②

050

주어진 그래프에서 x가 1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$는 1보다 작은 값을 가지면서 1에 한없이 가까워진다.

즉, $f(x)=t$로 놓으면 $x \to 1$일 때 $f(x) \to 1-$이므로

$\lim_{x \to 1} [f(x)] = \lim_{t \to 1-} [t] = 0$ 정답_ ③

051

$\left[\frac{x}{4}\right] = \frac{x}{4} - h \ (0 \le h < 1)$로 놓으면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8}{x}\left[\frac{x}{4}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{8}{x}\left(\frac{x}{4}-h\right)=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{8h}{x}\right)$$
$$=2-0=2$$
정답_ ②

052

$[x]=x-h\ (0\le h<1)$로 놓으면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+[x]}-x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x-h}-x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x-h}-x)(\sqrt{x^2+x-h}+x)}{\sqrt{x^2+x-h}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x-h}{\sqrt{x^2+x-h}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{h}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{h}{x^2}}+1}$$
$$=\frac{1-0}{\sqrt{1+0-0}+1}=\frac{1}{2}$$
정답_ ③

053

(i) $\lim_{x\to a-}[x]^2=(a-1)^2,\ \lim_{x\to a-}[2x]=2a-1$

$\therefore \lim_{x\to a-}\frac{x+[x]^2}{[2x]}=\frac{a+(a-1)^2}{2a-1}=\frac{a^2-a+1}{2a-1}$

(ii) $\lim_{x\to a+}[x]^2=a^2,\ \lim_{x\to a+}[2x]=2a$

$\therefore \lim_{x\to a+}\frac{x+[x]^2}{[2x]}=\frac{a+a^2}{2a}=\frac{a+1}{2}$

이때, $x=a$에서 극한값이 존재하려면

$\frac{a^2-a+1}{2a-1}=\frac{a+1}{2},\ 2a^2-2a+2=2a^2+a-1$

$-3a=-3\qquad \therefore a=1$

정답_ ①

054

ㄱ은 옳지 않다.

$\lim_{x\to 1-}f(x)=1,\ \lim_{x\to 1+}f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ은 옳다.

$f(x)=t$로 놓으면

$\lim_{x\to 1+}f(f(x))=\lim_{t\to 0+}f(t)=1$

ㄷ도 옳다.

$\lim_{x\to 1-}f(f(x))=f(1)=0$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

055

$f(x)=t$로 놓으면 $\lim_{x\to 0+}f(f(x))=\lim_{t\to 3-}f(t)=3$

$\lim_{x\to 2+}f(f(x))=f(3)=2$

$\therefore \lim_{x\to 0+}f(f(x))+\lim_{x\to 2+}f(f(x))=3+2=5$ 정답_ ⑤

056

ㄱ은 옳다.

$f(x)=t$로 놓으면

$\lim_{x\to 0-}f(f(x))=\lim_{t\to 1-}f(t)=0$

$\lim_{x\to 0+}f(f(x))=\lim_{t\to -1+}f(t)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0}f(f(x))=0$

ㄴ도 옳다.

$f(x)=t$로 놓으면

$\lim_{x\to 0-}g(f(x))=\lim_{t\to 1-}g(t)=1$

$\lim_{x\to 0+}g(f(x))=\lim_{t\to -1+}g(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to 0}g(f(x))=1$

ㄷ은 옳지 않다.

$g(x)=t$로 놓으면

$\lim_{x\to 0}f(g(x))=\lim_{t\to 0+}f(t)=-1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 정답_ ③

057

$\lim_{x\to 1-}f(g(x))=f(-1)=0$

$f(x)=t$로 놓으면

$\lim_{x\to -1+}g(f(x))=\lim_{t\to 1-}g(t)=-1$

$\therefore \lim_{x\to 1-}f(g(x))+\lim_{x\to -1+}g(f(x))$

$=0-1=-1$ 정답_ ②

058

(1) $\lim_{x\to 5}\{2f(x)+3\}=2\lim_{x\to 5}f(x)+3=2\cdot 10+3=23$

(2) $\lim_{x\to 5}\{3f(x)-4g(x)\}=3\lim_{x\to 5}f(x)-4\lim_{x\to 5}g(x)$

$=3\cdot 10-4\cdot 1=26$

(3) $\lim_{x\to 5}\{5f(x)g(x)\}=5\lim_{x\to 5}f(x)\cdot\lim_{x\to 5}g(x)$

$=5\cdot 10\cdot 1=50$

(4) $\lim_{x\to 5}\frac{6f(x)}{g(x)}=\frac{6\lim_{x\to 5}f(x)}{\lim_{x\to 5}g(x)}=\frac{6\cdot 10}{1}=60$

정답_ (1) 23 (2) 26 (3) 50 (4) 60

059

$2f(x)-3g(x)=h(x)$로 놓으면 $\lim_{x\to a}h(x)=4$이고,

$g(x)=\frac{2f(x)-h(x)}{3}$이므로

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\frac{2f(x)-h(x)}{3}=\frac{2\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}h(x)}{3}$$
$$=\frac{2\cdot 5-4}{3}=2$$
정답_ 2

다른 풀이

$\lim_{x \to a} g(x)$가 수렴한다는 조건이 없으므로 위와 같이 풀어야 하지만 정답만 얻고자 한다면 다음과 같이 $\lim_{x \to a} g(x)$가 수렴한다는 가정하에 함수의 극한의 기본 성질을 이용하여 풀 수도 있다.

$$\lim_{x \to a}\{2f(x)-3g(x)\}=2\lim_{x \to a} f(x)-3\lim_{x \to a} g(x)$$
$$=2\cdot 5-3\lim_{x \to a} g(x)=4$$

$\therefore \lim_{x \to a} g(x)=2$

060

$\lim_{x \to 9999} f(x)=3,\ \lim_{x \to 9999} g(x)=a$이므로

$$\lim_{x \to 9999}\frac{f(x)+3g(x)}{f(x)g(x)-2}=\frac{3+3a}{3a-2}=\frac{1}{2}$$

$6+6a=3a-2,\ 3a=-8 \qquad \therefore a=-\frac{8}{3}$ 정답_ ②

061

$2f(x)+g(x)=h(x),\ f(x)-g(x)=k(x)$로 놓으면

$$f(x)=\frac{h(x)+k(x)}{3},\ g(x)=\frac{h(x)-2k(x)}{3}$$

$\lim_{x \to 3} h(x)=10,\ \lim_{x \to 3} k(x)=2$이므로

$$\lim_{x \to 3} f(x)=\frac{10+2}{3}=4,\ \lim_{x \to 3} g(x)=\frac{10-2\cdot 2}{3}=2$$

$\therefore \lim_{x \to 3}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{4}{2}=2$ 정답_ ②

다른 풀이

$\lim_{x \to 3} f(x),\ \lim_{x \to 3} g(x)$가 수렴한다는 조건이 없으므로 위와 같이 풀어야 하지만 정답만 얻고자 한다면 다음과 같이 $\lim_{x \to 3} f(x)$, $\lim_{x \to 3} g(x)$가 수렴한다는 가정하에 극한의 기본 성질을 이용하여 풀 수도 있다.

$\lim_{x \to 3} f(x)=a,\ \lim_{x \to 3} g(x)=b$로 놓으면 주어진 조건에서

$2a+b=10,\ a-b=2$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=2 \qquad \therefore \lim_{x \to 3}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{4}{2}=2$

062

조건 (가)에서 $f(x)+9g(x)=x^2g(x)$이므로

$g(x)(x^2-9)=f(x)$

$x \neq \pm 3$일 때, $g(x)=\frac{f(x)}{x^2-9}$

$$\therefore \lim_{x \to 3} g(x)=\lim_{x \to 3}\frac{f(x)}{x^2-9}$$
$$=\lim_{x \to 3}\frac{f(x)}{(x-3)(x+3)}$$
$$=\lim_{x \to 3}\left\{\frac{f(x)}{x-3}\cdot\frac{1}{x+3}\right\}$$
$$=18\cdot\frac{1}{6}=3$$

정답_ ③

063

$x-1=t$로 놓으면 $x \to 1$일 때 $t \to 0$이므로

$$\lim_{x \to 1}\frac{f(x-1)}{x-1}=\lim_{t \to 0}\frac{f(t)}{t}=5$$

$$\therefore \lim_{x \to 0}\frac{5x+f(x)}{x^2-2f(x)}=\lim_{x \to 0}\frac{5+\frac{f(x)}{x}}{x-2\cdot\frac{f(x)}{x}}$$
$$=\frac{5+5}{0-2\cdot 5}=-1$$

정답_ ①

064

$x-2=t$로 놓으면 $x \to 2$일 때 $t \to 0$이므로

$$\lim_{x \to 2}\frac{f(x-2)}{x-2}=\lim_{t \to 0}\frac{f(t)}{t}=4$$

$$\therefore \lim_{x \to 2}\frac{f(x-2)}{x^3-8}=\lim_{x \to 2}\left\{\frac{f(x-2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+4}\right\}$$
$$=4\cdot\frac{1}{2^2+2\cdot 2+4}=\frac{1}{3}$$

정답_ ③

065

ㄱ은 옳지 않다.

(반례) $f(x)=\frac{|x|}{x},\ g(x)=-\frac{|x|}{x}$일 때,

$\lim_{x \to 0-} f(x)=-1,\ \lim_{x \to 0+} f(x)=1$이고

$\lim_{x \to 0-} g(x)=1,\ \lim_{x \to 0+} g(x)=-1$이므로

$\lim_{x \to a} f(x),\ \lim_{x \to a} g(x)$의 값이 모두 존재하지 않지만

$\lim_{x \to a}\{f(x)+g(x)\}=0$으로 $\lim_{x \to a}\{f(x)+g(x)\}$의 값이 존재한다.

ㄴ도 옳지 않다.

(반례) $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x \geq 0) \\ x-1 & (x<0) \end{cases},\ g(x)=\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 0) \\ -x-1 & (x<0) \end{cases}$

일 때, $f(x)-g(x)=\begin{cases} -x & (x \geq 0) \\ 2x & (x<0) \end{cases}$이므로

$\lim_{x \to 0}\{f(x)-g(x)\}=0$이지만 $\lim_{x \to 0} f(x),\ \lim_{x \to 0} g(x)$의 값은 모두 존재하지 않는다.

ㄷ은 옳다.

$\lim_{x \to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha,\ \lim_{x \to a}\{f(x)-g(x)\}=\beta$

$(\alpha, \beta$는 상수$)$라 하고 $f(x)+g(x)=h(x)$,

$f(x)-g(x)=k(x)$라고 하면

$\lim_{x \to a} h(x)=\alpha,\ \lim_{x \to a} k(x)=\beta$

$f(x)=\frac{h(x)+k(x)}{2}$이므로

$$\lim_{x \to a} f(x)=\lim_{x \to a}\frac{h(x)+k(x)}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

즉, $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 존재한다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다. 정답_②

066

ㄱ은 옳지 않다.

(반례) $f(x)=\frac{2}{x^2}$, $g(x)=\frac{1}{x^2}$일 때, $f(x)-g(x)=\frac{1}{x^2}$

이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to 0} g(x)=\infty$이지만

$\lim_{x\to 0}\{f(x)-g(x)\}=\infty$

ㄴ도 옳지 않다.

(반례) $f(x)=x^2$, $g(x)=\frac{1}{x^2}$일 때, $f(x)g(x)=1$이고

$\lim_{x\to 0} f(x)=0$, $\lim_{x\to 0} g(x)=\infty$이지만

$\lim_{x\to 0} f(x)g(x)=1$

ㄷ은 옳다.

$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to a} g(x)=100$이면

$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{100}{\infty}=0$

따라서 옳은 것은 ㄷ이다. 정답_③

067

ㄱ은 옳지 않다.

(반례) $f(x)=0, g(x)=[x]$일 때, $\frac{f(x)}{g(x)}=0$이므로

$\lim_{x\to 2} f(x)=0$, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이지만

$\lim_{x\to 2} g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ은 옳다.

$\lim_{x\to a} g(x)=p$, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=q$ (p, q는 상수)라고 하면

$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\left\{g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=pq$

ㄷ도 옳지 않다.

(반례) $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases} x & (x\ge 1) \\ -x & (x<1)\end{cases}$ 일 때, $f(x)g(x)=0$

이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)=0$, $\lim_{x\to 1} f(x)g(x)=0$이지만

$\lim_{x\to 1} g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다. 정답_②

068

$5x^3-x^2+x-3<f(x)<5x^3+x^2-x+3$에서

$$\frac{(5x^3-x^2+x-3)+2x+1}{x^3+5}<\frac{f(x)+2x+1}{x^3+5}<\frac{(5x^3+x^2-x+3)+2x+1}{x^3+5}$$

$$\frac{5x^3-x^2+3x-2}{x^3+5}<\frac{f(x)+2x+1}{x^3+5}<\frac{5x^3+x^2+x+4}{x^3+5}$$

이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-x^2+3x-2}{x^3+5}=5$,

$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+x^2+x+4}{x^3+5}=5$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+2x+1}{x^3+5}=5$ 정답_5

069

$x\to\infty$일 때 $2x-1>0$이므로 $2x-1<f(x)<2x+1$의 각 변을 제곱하면

$(2x-1)^2<\{f(x)\}^2<(2x+1)^2$

위의 식의 각 변을 x^2+1로 나누면

$$\frac{(2x-1)^2}{x^2+1}<\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}<\frac{(2x+1)^2}{x^2+1}$$

이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^2}{x^2+1}=4$, $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^2}{x^2+1}=4$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1}=4$ 정답_③

070

$A(1,\ 2+\sqrt{3})$, $B\left(t,\ \frac{2}{t}+\sqrt{3}\right)$, $H\left(1,\ \frac{2}{t}+\sqrt{3}\right)$이므로

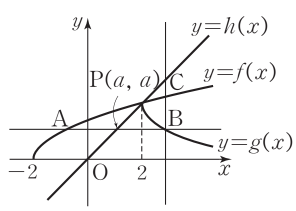
$\overline{AH}=2-\frac{2}{t}$, $\overline{BH}=t-1$

$$\therefore \lim_{t\to 1}\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}=\lim_{t\to 1}\frac{2-\frac{2}{t}}{t-1}=\lim_{t\to 1}\frac{\frac{2(t-1)}{t}}{t-1}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{2}{t}=2$$ 정답_⑤

071

점 $P(a,\ a)(0<a<2)$를 지나고 x축에 평행한 직선이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점의 y좌표는 모두 a이므로 점 A의 좌표는



$\sqrt{x+2}=a$에서 $x+2=a^2$ $\quad\therefore x=a^2-2$

$\therefore A(a^2-2,\ a)$

점 B의 좌표는

$-\sqrt{x-2}+2=a$에서 $-\sqrt{x-2}=a-2$

$x-2=a^2-4a+4$ $\quad\therefore x=a^2-4a+6$

$\therefore B(a^2-4a+6,\ a)$

$\overline{AB}=|(a^2-4a+6)-(a^2-2)|$

$=|-4a+8|=-4a+8$ ($\because 0<a<2$)

점 C의 x좌표가 a^2-4a+6이므로 점 C의 좌표는 $C(a^2-4a+6,\ a^2-4a+6)$이다.

$\overline{BC}=|(a^2-4a+6)-a|$

$=|a^2-5a+6|=a^2-5a+6$ ($\because 0<a<2$)

$$\therefore \lim_{a\to 2-}\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\lim_{a\to 2-}\frac{a^2-5a+6}{-4a+8}$$

$$=\lim_{a\to 2-}\frac{(a-2)(a-3)}{-4(a-2)}$$

$$=\lim_{a\to 2-}\frac{a-3}{-4}=\frac{1}{4}$$

정답_ ②

072

포물선 $y=1-x^2$과 x축의 교점 A, B와 y축의 교점 C의 좌표는 각각 $A(-1,\ 0),\ B(1,\ 0),\ C(0,\ 1)$

또 점 P는 포물선 위에 있는 제1사분면 위의 동점이므로 $P(a,\ 1-a^2)(0<a<1)$으로 놓을 수 있다.

직선 CP의 방정식은 $y-1=\frac{(1-a^2)-1}{a-0}(x-0)$

$\therefore y=-ax+1$

따라서 직선 CP와 x축의 교점은 $Q\left(\frac{1}{a},\ 0\right)$

직선 AP의 방정식은 $y-0=\frac{1-a^2}{a+1}(x+1)$

$\therefore y=(1-a)(x+1)$ ······㉠

세 점 A, P, R가 직선 ㉠ 위에 있으므로 점 R의 좌표는

$x=\frac{1}{a}$일 때, $y=(1-a)\left(\frac{1}{a}+1\right)=\frac{1-a^2}{a}$이므로

$R\left(\frac{1}{a},\ \frac{1-a^2}{a}\right)$

$$\therefore \lim_{P\to B}\frac{\overline{QR}}{\overline{BQ}}=\lim_{a\to 1}\frac{\overline{QR}}{\overline{BQ}}=\lim_{a\to 1}\frac{\frac{1-a^2}{a}}{\frac{1}{a}-1}$$

$$=\lim_{a\to 1}\frac{1-a^2}{1-a}$$

$$=\lim_{a\to 1}(1+a)=2$$

정답_ ⑤

073

$x=-t$로 놓으면 $x \to -\infty$일 때 $t \to \infty$이므로

$\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{9x^2+8}-ax-b)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{9t^2+8}+at-b)$

이때, $a\ge 0$이면 $\lim_{t\to\infty}(\sqrt{9t^2+8}+at-b)=\infty$이므로 $a<0$이어야 한다. ······ ❶

$\lim_{t\to\infty}(\sqrt{9t^2+8}+at-b)$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\{\sqrt{9t^2+8}+(at-b)\}\{\sqrt{9t^2+8}-(at-b)\}}{\sqrt{9t^2+8}-(at-b)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(9t^2+8)-(at-b)^2}{\sqrt{9t^2+8}-(at-b)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(9-a^2)t^2+2abt+8-b^2}{\sqrt{9t^2+8}-(at-b)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(9-a^2)t+2ab+\frac{8-b^2}{t}}{\sqrt{9+\frac{8}{t^2}}-a+\frac{b}{t}}$$ ······㉠

······ ❷

㉠의 극한값이 존재하려면

$9-a^2=0\qquad \therefore a=-3\ (\because a<0)$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{-6b+\frac{8-b^2}{t}}{\sqrt{9+\frac{8}{t^2}}+3+\frac{b}{t}}=\frac{-6b}{3+3}=-b=10$$

$\therefore b=-10$ ······ ❸

$\therefore ab=-3\cdot(-10)=30$ ······ ❹

정답_ 30

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값의 범위 구하기	30%
❷	$\lim_{t\to\infty}(\sqrt{9t^2+8}+at-b)$를 유리화하여 나타내기	30%
❸	a, b의 값 구하기	30%
❹	ab의 값 구하기	10%

074

$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax+b}{(x-1)^2}=c$에서 $x \to 1$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x\to 1}(x^3+ax+b)=0$에서 $1+a+b=0$

$\therefore b=-(a+1)$ ······㉠

······ ❶

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax-(a+1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+a+1)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+a+1}{x-1}$$ ······㉡

······ ❷

㉡에서 $x \to 1$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x\to 1}(x^2+x+a+1)=0$에서 $1+1+a+1=0$

$\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $b=2$

$a=-3$을 ㉡에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x+2)=3=c$$ ······ ❸

$\therefore abc=(-3)\cdot 2\cdot 3=-18$ ······ ❹

정답_ -18

단계	채점 기준	비율
❶	b를 a에 대한 식으로 나타내기	20%
❷	$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax+b}{(x-1)^2}$를 정리하기	20%
❸	a, b, c의 값 구하기	50%
❹	abc의 값 구하기	10%

075

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{ax+1}=2$이므로 $f(x)-x^2$은 일차항의

계수가 $2a$인 일차함수이어야 한다.

따라서 $f(x)-x^2=2ax+b$ (b는 상수), 즉

$f(x)=x^2+2ax+b$로 놓을 수 있다. ❶

조건 (나)의 $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)}=\frac{1}{4}$에서 $x\to1$일 때

(분자) $\to 0$이므로 (분모) $\to 0$이어야 한다.

$f(1)=1+2a+b=0$에서 $b=-(2a+1)$

$\therefore f(x)=x^2+2ax-(2a+1)$ ❷

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+2ax-(2a+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+2a+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+2a+1}=\frac{1}{2a+2}=\frac{1}{4}$$

$\therefore a=1$

따라서 $f(x)=x^2+2x-3$이므로

$af(3)=1\cdot(9+6-3)=12$ ❸

정답_ 12

단계	채점 기준	비율
❶	함수 $f(x)$를 $x^2+2ax+b$로 나타내기	30%
❷	b를 a에 대한 식으로 나타낸 후 $f(x)$ 나타내기	30%
❸	$af(3)$의 값 구하기	40%

076

$$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(x^2-ax+5)$$
$$=4-2a+5=-2a+9 \quad ❶$$
$$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(-x^2+5x+a)$$
$$=-4+10+a=a+6 \quad ❷$$

이때, $\lim_{x\to2}f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)$이어야 하므로

$-2a+9=a+6$

$\therefore a=1$ ❸

정답_ 1

단계	채점 기준	비율
❶	$\lim_{x\to2-}f(x)$를 a에 대한 식으로 나타내기	30%
❷	$\lim_{x\to2+}f(x)$를 a에 대한 식으로 나타내기	30%
❸	a의 값 구하기	40%

077

$x=1$일 때, $x^2+x=1^2+1=2>0$이므로 $x=1$의 근처에서 $x^2+x>0$이다.

$$\therefore A=\lim_{x\to1}\frac{|x^2+x|-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+2)=3 \quad ❶$$

$-x^2+6x-9=-(x-3)^2$이고 $x\to3$일 때 $-(x-3)^2$의 값은 0보다 작은 값을 가지면서 0에 한없이 가까워지므로

$B=\lim_{x\to3}[-x^2+6x-9]=\lim_{t\to0-}[t]=-1$ ❷

$\therefore A+B=3+(-1)=2$ ❸

정답_ 2

단계	채점 기준	비율
❶	A의 값 구하기	40%
❷	B의 값 구하기	40%
❸	$A+B$의 값 구하기	20%

078

$$\lim_{x\to0+}f(x)g(x)=\lim_{x\to0+}f(x)\cdot\lim_{x\to0+}g(x)$$
$$=0\cdot0=0$$
$$\lim_{x\to0-}f(x)g(x)=\lim_{x\to0-}f(x)\cdot\lim_{x\to0-}g(x)$$
$$=0\cdot1=0$$

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)g(x)=0$ ❶

$$\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to1+}g(x)$$
$$=-1+1=0$$
$$\lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1-}g(x)$$
$$=1+(-1)=0$$

$\therefore \lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=0$ ❷

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)g(x)+\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}$

$=0+0=0$ ❸

정답_ 0

단계	채점 기준	비율
❶	$\lim_{x\to0}f(x)g(x)$의 값 구하기	40%
❷	$\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}$의 값 구하기	40%
❸	$\lim_{x\to0}f(x)g(x)+\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}$의 값 구하기	20%

079

0이 아닌 상수 k에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)=k$라고 하면

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}(x-a)}{\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}(x-a)}$$
$$=\frac{k-(a-a)}{k+(a-a)}$$
$$=1\neq\frac{2}{3}$$

따라서 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이어야 하므로 $f(a)=0$이다.

즉, 최고차항의 계수가 1인 이차방정식 $f(x)=0$의 한 실근이 $x=a$이므로 $\alpha=a$라고 하면 $f(x)=(x-a)(x-\beta)$ ……㉠

로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-(x-\alpha)}{f(x)+(x-\alpha)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{(x-\alpha)(x-\beta)-(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\alpha)}$$
$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{(x-\alpha)(x-\beta-1)}{(x-\alpha)(x-\beta+1)}$$
$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{x-\beta-1}{x-\beta+1}$$
$$=\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta+1}=\frac{2}{3}$$

$3\alpha-3\beta-3=2\alpha-2\beta+2$

$\therefore\ \alpha-\beta=5$

$\therefore\ |\alpha-\beta|=5$

정답_ 5

080

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-6}{x^2-1}=2$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로

(분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to1}\{f(x)-6\}=0$에서 $f(1)=6$

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$r=f(1)=6\qquad\therefore\ f(x)=(x-1)g(x)+6$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-6}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)g(x)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x+1}$$
$$=\frac{g(1)}{2}=2$$

$\therefore\ g(1)=4$

$$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{\{f(x)-6\}g(x)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)g(x)\cdot g(x)}{\sqrt{x}-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\{g(x)\}^2(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\{g(x)\}^2(\sqrt{x}+1)$$
$$=\{g(1)\}^2(\sqrt{1}+1)=4^2\cdot2=32$$

정답_ 32

081

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{f(x)}-x^2-1)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(x^2+1)^2}{\sqrt{f(x)}+x^2+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(x^4+2x^2+1)}{\sqrt{f(x)}+x^2+1}=3$$

위의 극한값이 3이므로 $f(x)$는 사차항의 계수가 1인 사차함수이어야 한다. 이때, 분모의 최고차항의 차수가 2이므로 분자의 최고차항의 차수도 2이어야 한다.

따라서 $f(x)$의 삼차항의 계수는 0이어야 하므로

$f(x)=x^4+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(x^4+2x^2+1)}{\sqrt{f(x)}+x^2+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^4+ax^2+bx+c)-(x^4+2x^2+1)}{\sqrt{x^4+ax^2+bx+c}+x^2+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-2)x^2+bx+c-1}{\sqrt{x^4+ax^2+bx+c}+x^2+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-2)+\frac{b}{x}+\frac{c-1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x^3}+\frac{c}{x^4}}+1+\frac{1}{x^2}}$$
$$=\frac{a-2}{2}=3$$

$\therefore\ a=8$

주어진 조건에서 $f(0)=1$, $f(1)=0$이므로

$c=1,\ 1+a+b+c=0\qquad\therefore\ a=8,\ b=-10,\ c=1$

따라서 $f(x)=x^4+8x^2-10x+1$이므로

$f(-1)=1+8+10+1=20$

정답_ ⑤

082

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{x^2}=-11$이려면 $f(x)-x^3$은 이차항의 계수가 -11인 삼차함수이어야 한다.

따라서 $f(x)-x^3=-11x^2+ax+b$ (a, b는 상수), 즉

$f(x)=x^3-11x^2+ax+b$로 놓을 수 있다.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=-9$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로

(분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$에서 $f(1)=0$

$f(1)=1-11+a+b=0$

$\therefore\ b=-a+10$ ……㉠

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^3-11x^2+ax-a+10}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-10x+a-10)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x^2-10x+a-10)$$
$$=1-10+a-10$$
$$=a-19=-9$$

에서 $a=10$

$a=10$을 ㉠에 대입하면 $b=0$

$\therefore\ f(x)=x^3-11x^2+10x$

$x=\dfrac{1}{h}$로 놓으면 $x\longrightarrow\infty$일 때, $h\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}xf\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^3-11h^2+10h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(h^2-11h+10)=10$$

정답_ 10

083

(i) $x\longrightarrow3-$일 때, $x^2\longrightarrow9-$이므로

$$\lim_{x\to3-}([x^2]-a[x])=8-2a$$

(ii) $x \to 3+$일 때, $x^2 \to 9+$이므로

$$\lim_{x \to 3+}([x^2]-a[x])=9-3a$$

$\lim_{x \to 3}([x^2]-a[x])$의 값이 존재하려면 좌극한과 우극한이 같아야 하므로

$8-2a=9-3a \qquad \therefore a=1$

정답_ ④

보충 설명

가우스 함수의 극한이 많이 헷갈리면 가까운 수를 대입하는 방법도 좋다.

(i) $x=2.9$를 대입하면

$$\lim_{x \to 3-}[x]=[2.9]=2,\ \lim_{x \to 3-}[x^2]=[2.9^2]=[8.41]=8$$

(ii) $x=3.1$을 대입하면

$$\lim_{x \to 3+}[x]=[3.1]=3,\ \lim_{x \to 3+}[x^2]=[3.1^2]=[9.61]=9$$

084

$\frac{t}{t+1}=p$로 놓으면 $t \to \infty$일 때 $p=1-\frac{1}{t+1}<1$이므로

$p \to 1-$

$$\therefore \lim_{t \to \infty} f\left(\frac{t}{t+1}\right)=\lim_{p \to 1-} f(p)=-2$$

$\frac{t+1}{t}=q$로 놓으면 $t \to \infty$일 때 $q=1+\frac{1}{t}>1$이므로

$q \to 1+$

$$\therefore \lim_{t \to \infty} f\left(\frac{t+1}{t}\right)=\lim_{q \to 1+} f(q)=1$$

$$\therefore \lim_{t \to \infty}\left\{2f\left(\frac{t}{t+1}\right)+f\left(\frac{t+1}{t}\right)\right\}$$

$$=2\lim_{t \to \infty} f\left(\frac{t}{t+1}\right)+\lim_{t \to \infty} f\left(\frac{t+1}{t}\right)$$

$$=2\cdot(-2)+1=-3$$

정답_ ①

085

$f(-1)-2=0,\ f(0)-2=0,\ f(2)-2=0$이므로 삼차방정식 $f(x)-2=0$의 세 근은 $x=-1, 0, 2$이다.

$\therefore f(x)-2=ax(x+1)(x-2)$ (단, a는 0이 아닌 상수이다.)

ㄱ. $\lim_{x \to 2}\frac{x-2}{f(x)-2}=\lim_{x \to 2}\frac{x-2}{ax(x+1)(x-2)}$

$$=\lim_{x \to 2}\frac{1}{ax(x+1)}=\frac{1}{6a}$$

ㄴ. $\lim_{x \to 2}\frac{f(x)-2}{f(x-2)}=\frac{f(2)-2}{f(0)}=\frac{0}{2}=0$

ㄷ. $\lim_{x \to 2}\frac{f(x-2)}{x-2}=\infty$이므로 극한값이 존재하지 않는다.

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ③

086

$\overline{BD}=x$라고 하면 $\angle B=60^\circ$이므로

$\overline{DE}=\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ \overline{BE}=\frac{1}{2}x,\ \overline{CE}=2-\frac{1}{2}x$

$$\triangle CDE=\frac{1}{2}\times\overline{CE}\times\overline{DE}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(2-\frac{1}{2}x\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$=\frac{\sqrt{3}x(4-x)}{8}$$

따라서 $\frac{\triangle CDE}{\overline{BD}}$의 극한값은

$$\lim_{x \to 0}\frac{\triangle CDE}{\overline{BD}}=\lim_{x \to 0}\frac{\sqrt{3}x(4-x)}{8x}$$

$$=\lim_{x \to 0}\frac{\sqrt{3}(4-x)}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

정답_ ④

087

$C_1 : x^2+y^2=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$C_2 : (x-1)^2+y^2=r^2\ (0<r<\sqrt{2}) \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠−㉡을 하면 $x^2-(x-1)^2=1-r^2$

$2x-1=1-r^2 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}(2-r^2)$

따라서 $f(r)=\frac{1}{2}(2-r^2)$이므로

$$\lim_{r \to \sqrt{2}-}\frac{f(r)}{4-r^4}=\lim_{r \to \sqrt{2}-}\frac{2-r^2}{2(2+r^2)(2-r^2)}$$

$$=\lim_{r \to \sqrt{2}-}\frac{1}{2(2+r^2)}=\frac{1}{8}$$

정답_ $\frac{1}{8}$

088

함수 $y=-ax^2+a$의 그래프와 정사각형이 제1사분면에서 만나는 점을 $(t,\ -at^2+a)\ (t>0)$라고 하면 정사각형의 가로, 세로의 길이는 같으므로

$2t=-at^2+a,\ at^2+2t-a=0$

$$\therefore t=\frac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a}$$

$$S(a)=(2t)^2=\left(2\cdot\frac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a}\right)^2$$

$$=4\cdot\frac{1-2\sqrt{1+a^2}+1+a^2}{a^2}=\frac{4a^2+8-8\sqrt{1+a^2}}{a^2}$$

$$\therefore \lim_{a \to \infty}S(a)=\lim_{a \to \infty}\frac{4a^2+8-8\sqrt{1+a^2}}{a^2}$$

$$=\lim_{a \to \infty}\left(4+\frac{8}{a^2}-8\sqrt{\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^2}}\right)=4$$

정답_ ⑤

02 함수의 연속

089

(1), (2) $f(0)=0,\ \lim_{x\to 0}f(x)=0 \qquad \therefore \lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(3) $\lim_{x\to 0-}\dfrac{x^2-x}{x}=\lim_{x\to 0-}\dfrac{x(x-1)}{x}=\lim_{x\to 0-}(x-1)=-1,$

$\lim_{x\to 0+}\dfrac{x^2-x}{x}=\lim_{x\to 0+}\dfrac{x(x-1)}{x}=\lim_{x\to 0+}(x-1)=-1$

이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=-1$

$\therefore \lim_{x\to 0}f(x)\neq f(0)$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

정답_(1) 연속 (2) 연속 (3) 불연속

090

(1) 함수 $f(x)$는 모든 실수, 즉 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

(2) 함수 $f(x)$는 $x-2\geq 0$일 때, 즉 구간 $[2, \infty)$에서 연속이다.

(3) 함수 $f(x)$는 모든 실수, 즉 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

(4) 함수 $f(x)$는 $\lim_{x\to 0-}f(x)=-1,\ \lim_{x\to 0+}f(x)=1$이므로 $x=0$에서 불연속이고 그 외의 점에서는 연속이다. 즉, $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$에서 연속이다.

(5) (i) $x>0$일 때, $f(x)=\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{x}{x}=1$

(ii) $x<0$일 때, $f(x)=\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{-x}{x}=-1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 그 외의 점에서는 연속이다. 즉, $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$에서 연속이다.

정답_(1) $(-\infty, \infty)$ (2) $[2, \infty)$ (3) $(-\infty, \infty)$
(4) $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ (5) $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$

091

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $x^2+3\neq 0$이므로 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. $x>0$일 때 $g(x)=x^2$은 연속이고, $x<0$일 때 $g(x)=x$는 연속이므로 $x=0$에서 연속인지만 조사하면 된다.

$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}x^2=0,\ \lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}x=0$

$\therefore \lim_{x\to 0}g(x)=0$

또 $g(0)=0$이므로 $\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)$

그러므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서도 연속이다.

ㄷ. $x\neq -2$일 때 $h(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x+2}=x-2$는 연속이므로 $x=-2$에서 연속인지만 조사하면 된다.

$\lim_{x\to -2}h(x)=\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-4$

또 $h(-2)=-1$이므로 $\lim_{x\to -2}h(x)\neq h(-2)$

그러므로 함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 불연속이다.

따라서 모든 실수 x에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ이다. 정답_②

092

ㄱ은 옳다.

$\lim_{x\to 0+}f(x)=0,\ \lim_{x\to 0-}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=0$

또 $f(0)=0$이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

ㄴ도 옳다.

$\lim_{x\to 1-}f(x)\neq \lim_{x\to 1+}f(x)$이므로 불연속이다.

ㄷ은 옳지 않다.

$\lim_{x\to 2}f(x)\neq f(2)$이므로 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 정답_②

093

ㄱ은 옳지 않다.

$\lim_{x\to 3}f(x)=0$

ㄴ은 옳다.

$\lim_{x\to 1-}f(x)=1,\ \lim_{x\to 1+}f(x)=2$로 좌극한과 우극한이 다르므로 $x=1$에서 함수 $f(x)$의 극한값은 존재하지 않는다.

ㄷ도 옳다.

함수 $f(x)$는 $x=1, x=2, x=3$의 3개의 점에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 정답_⑤

094

ㄱ은 옳다.

$\lim_{x\to 0+}f(x)=1$

ㄴ은 옳지 않다.

$\lim_{x\to 2-}f(x)=1$

ㄷ도 옳다.

$\lim_{x\to 2-}|f(x)|=|1|=1,\ \lim_{x\to 2+}|f(x)|=|-1|=1$이므로

$\lim_{x\to 2}|f(x)|=1$

또 $|f(2)|=|-1|=1$이므로 $\lim_{x\to 2}|f(x)|=|f(2)|$

즉, 함수 $|f(x)|$는 $x=2$에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_③

095

함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=-1,\ x=0,\ x=1$에서 끊어져 있으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1,\ x=0,\ x=1$의 3개의 점에서 불연속이다.

$\therefore a=3$

$\lim_{x\to1-}f(x)=0$, $\lim_{x\to1+}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)\neq\lim_{x\to1+}f(x)$

즉, $x=1$에서 함수 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않으므로 $b=1$

$\therefore ab=3\cdot1=3$ 정답_ ③

096

ㄱ은 옳지 않다.

$f(x)=t$로 놓으면

$\lim_{x\to0+}g(f(x))=\lim_{t\to1+}g(t)=-1$

$\lim_{x\to0-}g(f(x))=\lim_{t\to1-}g(t)=1$

그러므로 $\lim_{x\to0}g(f(x))$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ은 옳다.

$f(x)=t$로 놓으면

$\lim_{x\to-1}g(f(x))=\lim_{t\to0}g(t)=0$

ㄷ도 옳다.

ㄱ에 의해 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

한편, $g(f(-1))=g(0)=0$이므로 ㄴ에 의해

$\lim_{x\to-1}g(f(x))=g(f(-1))=0$

그러므로 $g(f(x))$는 $x=-1$에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ④

097

ㄱ은 옳다.

$f(-1)-g(-1)=1-1=0$

$\lim_{x\to-1-}\{f(x)-g(x)\}=-1-(-1)=0$

$\lim_{x\to-1+}\{f(x)-g(x)\}=1-1=0$

즉, $\lim_{x\to-1}\{f(x)-g(x)\}=f(-1)-g(-1)$이므로 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

ㄴ도 옳다.

$f(-1)g(-1)=1\cdot1=1$

$\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=-1\cdot(-1)=1$

$\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=1\cdot1=1$

즉, $\lim_{x\to-1}f(x)g(x)=f(-1)g(-1)$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

ㄷ은 옳지 않다.

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(0)=0$

$g(x)=t$로 놓으면

$\lim_{x\to1-}f(g(x))=\lim_{t\to0-}f(t)=0$

$\lim_{x\to1+}f(g(x))=f(1)=-1$

즉, $\lim_{x\to1}(f\circ g)(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 정답_ ③

098

ㄱ. $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=\lim_{x\to1}f(x)\cdot\lim_{x\to1}g(x)=0\cdot1=0$

$f(1)g(1)=1\cdot0=0$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

즉, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $f(x)=t$로 놓으면

$\lim_{x\to1}g(f(x))=\lim_{t\to0}g(t)=0, g(f(1))=g(1)=0$

$\therefore \lim_{x\to1}g(f(x))=g(f(1))$

즉, 함수 $g(f(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면

$\lim_{x\to1}f(g(x))=\lim_{t\to1}f(t)=0$, $f(g(1))=f(0)=1$

$\therefore \lim_{x\to1}f(g(x))\neq f(g(1))$

즉, 함수 $f(g(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 $x=1$에서 연속인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 정답_ ④

099

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=2$에서 연속이어야 한다. 즉, $x=2$에서 극한값이 존재해야 하므로 좌극한과 우극한이 같아야 한다.

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(2x-5)=-1$

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(-x+a)=-2+a$

$-1=-2+a$에서 $a=1$ 정답_ 1

100

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이 되려면 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이어야 한다.

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$에서 $a=2$ 정답_ 2

101

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=-1$, $x=2$에서 연속이어야 한다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$이어야 하므로

$1+3+b=-a+1$ $\therefore a+b=-3$ ……㉠

(ii) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$이어야 하므로

$2a+1=4-6+b \qquad \therefore 2a-b=-3$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=-1$

$\therefore ab=(-2)\cdot(-1)=2$ 정답_②

102

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이 되려면 $\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to3}\frac{a\sqrt{x+6}-b}{x-3}=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠이 수렴하고 $x\to3$일 때 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to3}(a\sqrt{x+6}-b)=0$에서 $3a-b=0$

$\therefore b=3a$ ······㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{a\sqrt{x+6}-3a}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{a\{(x+6)-9\}}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{a(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{a}{\sqrt{x+6}+3}=\frac{a}{6}=2$$

따라서 $a=12,\ b=36$이므로

$a+b=12+36=48$ 정답_④

103

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이 되려면 $x=-2$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to-2}f(x)=f(-2)$

$$\therefore \lim_{x\to-2}\frac{x^2+ax+8}{x+2}=b \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠이 수렴하고 $x\to-2$일 때 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to-2}(x^2+ax+8)=0$에서 $4-2a+8=0$

$\therefore a=6$ ······㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+6x+8}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x+4)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}(x+4)=2$$

$\therefore a+b=6+2=8$ 정답_③

104

ㄱ은 옳다.

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(-x+2)=1$

ㄴ은 옳지 않다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이 되려면 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이어야 한다.

그런데 ㄱ에서 $\lim_{x\to1+}f(x)=1$이므로 $x=1$에서 연속이 되려면 $f(1)=a=1$이 되어야 한다.

ㄷ도 옳다.

함수 $f(x)$는 $x\neq1$인 모든 실수에서 연속이므로 함수 $y=(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to1+}(x-1)f(x)=\lim_{x\to1+}(x-1)(-x+2)=0\cdot1=0$

$\lim_{x\to1-}(x-1)f(x)=\lim_{x\to1-}(x-1)a=0\cdot a=0$

또 $x=1$에서 $y=(x-1)f(x)$의 함숫값은 0이므로 $y=(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

그러므로 $y=(x-1)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_③

105

ㄱ은 옳다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=a$

ㄴ은 옳지 않다.

$\lim_{x\to1}f(x)=a$에서 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}=a$

이때, $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to1}g(x)=0$

ㄷ도 옳지 않다.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x+1}\cdot\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}$$
$$=\frac{a}{2}\cdot a=\frac{a^2}{2}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 정답_①

106

$x=-2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to-2+}f(x)=\lim_{x\to-2-}f(x)$

$\lim_{x\to-2+}(x^2-x+a)=\lim_{x\to-2-}(x+b)$

$4+2+a=-2+b \qquad \therefore a-b=-8$ 정답_①

107

$$f(x)=\begin{cases} x(x-1) & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ -x^2+ax+b & (-1\le x\le1) \end{cases}$$
이므로

$x=\pm1$에서 연속이면 모든 실수 x에서 연속이다.

(i) $x=-1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)$

$\lim_{x\to-1-}x(x-1)=\lim_{x\to-1+}(-x^2+ax+b)$

$2=-1-a+b \qquad \therefore a-b=-3$ ······㉠

(ii) $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)$

$\lim_{x\to1-}(-x^2+ax+b)=\lim_{x\to1+}x(x-1)$

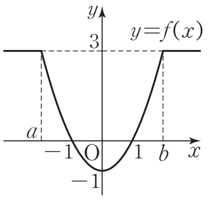
$-1+a+b=0 \qquad \therefore a+b=1$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1, b=2$

$\therefore ab=-1\cdot2=-2$ 정답_ ①

108

$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (a\le x\le b) \\ 3 & (x<a \text{ 또는 } x>b) \end{cases}$



이 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=a, x=b$에서 모두 연속이어야 한다.

(i) $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a+} f(x)$

$3=a^2-1, a^2=4$ $\therefore a=\pm2$

(ii) $x=b$에서 연속이므로 $\lim_{x\to b-} f(x)=\lim_{x\to b+} f(x)$

$b^2-1=3, b^2=4$ $\therefore b=\pm2$

$a<b$이므로 $a=-2, b=2$

$\therefore a-b=-2-2=-4$ 정답_ ①

109

$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$이므로

$x\ne1$일 때, $f(x)=\dfrac{x+2\sqrt{x}-3}{x^2+x-2}$

함수 $f(x)$가 $x>0$인 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이어야 한다.

$$\therefore f(1)=\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x+2\sqrt{x}-3}{x^2+x-2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x+2)(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}+3}{(x+2)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{4}{3\cdot2}=\frac{2}{3}$$

정답_ ③

110

기본 요금을 p원이라고 하면 사용한 수돗물의 양에 따른 수도 요금은

$$f(x)=\begin{cases} 320x+p & (0\le x\le30) \\ 510x+p-5700 & (30<x\le40) \\ 570x+p-a & (40<x\le50) \\ 790x+p-19100 & (x>50) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 연속함수이려면 $x=40$에서도 연속이어야 하므로

$510\cdot40+p-5700=570\cdot40+p-a$

$\therefore a=8100$(원) 정답_ ②

111

(i) $n-1\le x<n$일 때, $[x]=n-1$

$\lim_{x\to n-} f(x)=\lim_{x\to n-}([x]^2+[x])$

$=(n-1)^2+(n-1)=n^2-n$

(ii) $n\le x<n+1$일 때, $[x]=n$

$\lim_{x\to n+} f(x)=\lim_{x\to n+}([x]^2+[x])=n^2+n$

이때, 함수 $f(x)$가 $x=n$에서 연속이므로

$\lim_{x\to n-} f(x)=\lim_{x\to n+} f(x)=f(n)$

$n^2-n=n^2+n$ $\therefore n=0$ 정답_ ③

112

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 모든 정수 n에 대하여 $x=n$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to n-} f(x)=\lim_{x\to n-}\{[x]^2+(ax+b)[x]\}$

$=\lim_{x\to n-}\{(n-1)^2+(ax+b)(n-1)\}$

$=(n-1)^2+(an+b)(n-1)$

$\lim_{x\to n+} f(x)=\lim_{x\to n+}\{[x]^2+(ax+b)[x]\}$

$=\lim_{x\to n+}\{n^2+(ax+b)n\}=n^2+(an+b)n$

함수 $f(x)$가 $x=n$에서 연속이므로

$\lim_{x\to n-} f(x)=\lim_{x\to n+} f(x)$

$(n-1)^2+(an+b)(n-1)=n^2+(an+b)n$

$\therefore (a+2)n+b-1=0$

위의 식이 모든 정수 n에 대하여 성립해야 하므로

$a=-2, b=1$

$\therefore a^2+b^2=4+1=5$ 정답_ ③

113

ㄱ. $\lim_{x\to1-} x[x-1]=1\cdot(-1)=-1$

$\lim_{x\to1+} x[x-1]=1\cdot0=0$

이므로 $\lim_{x\to1} f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to1-}(x-1)[x]=0\cdot0=0$, $\lim_{x\to1+}(x-1)[x]=0\cdot1=0$

이므로 $\lim_{x\to1} g(x)=0$이고, $g(1)=(1-1)[1]=0$이다.

즉, $g(1)=\lim_{x\to1} g(x)$이므로 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $x(x-1)^2=t$로 놓으면

$\lim_{x\to1-}[x(x-1)^2]=\lim_{t\to0+}[t]=0$

$\lim_{x\to1+}[x(x-1)^2]=\lim_{t\to0+}[t]=0$

이므로 $\lim_{x\to1} h(x)=0$이고, $h(1)=[1\cdot(1-1)^2]=0$이다.

즉, $h(1)=\lim_{x\to1} h(x)$이므로 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

따라서 $x=1$에서 연속인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

114

ㄱ은 옳지 않다.

$-x=t$로 놓으면

$\lim_{x\to 0-} f(-x)=\lim_{x\to 0-}[-x]=\lim_{t\to 0+}[t]=0$

$\lim_{x\to 0+} f(-x)=\lim_{x\to 0+}[-x]=\lim_{t\to 0-}[t]=-1$

따라서 좌극한과 우극한이 다르므로 $\lim_{x\to 0} f(-x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ은 옳다.

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-}([x]+[-x])=\lim_{x\to 0-}[x]+\lim_{x\to 0-}[-x]$

$=\lim_{x\to 0-}[x]+\lim_{t\to 0+}[t]=-1+0=-1$

$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+}([x]+[-x])=\lim_{x\to 0+}[x]+\lim_{x\to 0+}[-x]$

$=\lim_{x\to 0+}[x]+\lim_{t\to 0-}[t]=0-1=-1$

즉, $\lim_{x\to 0} g(x)=-1$이므로 $\lim_{x\to 0} g(x)$의 값은 존재한다.

ㄷ도 옳지 않다.

$\lim_{x\to 0} g(x)=-1$, $g(0)=0$이므로 $\lim_{x\to 0} g(x)\neq g(0)$

즉, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 정답_ ②

115

모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서도 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)$

$3\cdot 1=1^2+a\cdot 1+b \quad \therefore a+b=2$ ……㉠

$f(x+4)=f(x)$에서 $f(4)=f(0)$이므로

$4^2+a\cdot 4+b=0 \quad \therefore 4a+b=-16$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6, b=8$

따라서 $f(x)=\begin{cases} 3x & (0\le x<1) \\ x^2-6x+8 & (1\le x\le 4) \end{cases}$이므로

$f(10)=f(6)=f(2)=2^2-6\cdot 2+8=0$ 정답_ ②

116

조건 (가)의 양변에 $x=y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+a \quad \therefore f(0)=-a$

조건 (나)의 극한이 수렴하고, $x \to 2$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$x-2=t$로 놓으면

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x-2}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=1$에서 $\lim_{t\to 0} f(t)=0$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $f(0)=\lim_{t\to 0} f(t)$에서

$-a=0 \quad \therefore a=0$ 정답_ ③

117

$f(2x)=f(x)$이므로

$f(x)=f\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(2\cdot\frac{x}{4}\right)=f\left(\frac{x}{4}\right)=\cdots=f\left(\frac{x}{2^n}\right)$

(단, n은 자연수이다.)

즉, $f(x)=f\left(\frac{x}{2^n}\right)$이고, $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f(0)=2 \quad \therefore f(2)=2$ 정답_ ②

118

$x=y=0$이면 $f(0)=f(0)+f(0)$이므로 $f(0)=\boxed{(가)\ 0}$

$f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 0} f(0)=\boxed{(나)\ f(0)}$

임의의 실수 a와 h에 대하여 $x=a+h$라고 하면

$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{h\to 0} f(a+h)=\lim_{h\to 0}\{f(a)+f(h)+ah\}$

$=f(a)+\boxed{(다)\ \lim_{h\to 0} f(h)}=f(a)+0=f(a)$

따라서 임의의 실수 a에 대하여 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이므로 모든 실수 x에서 연속이다. 정답_ ②

119

(1) $f(x)=x$와 $g(x)=x^2+1$이 실수 전체의 집합에서 연속이고, 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\neq 0$이므로 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x}{x^2+1}$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(2) $f(x)=2x+1$과 $g(x)=x^2-4x+3$이 실수 전체의 집합에서 연속이고, $g(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$이므로 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x+1}{x^2-4x+3}$은 $x=1$, $x=3$인 점에서 불연속이고 그 이외의 점에서는 연속이다. 정답_ 풀이 참조

120

$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2+2x+2}{x^2-7x+12}=\frac{x^2+2x+2}{(x-3)(x-4)}$는 $x=3$, $x=4$에서 정의되어 있지 않으므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $x=3$, $x=4$에서 불연속이다.

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 합은

$3+4=7$ 정답_ 7

121

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

① $\lim_{x\to a}\{f(x)\}^2=\{f(a)\}^2$이므로 $y=\{f(x)\}^2$은 $x=a$에서 연속이다.

② $f(a)\neq 0$이므로 $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{f(a)}$이다.

따라서 $y=\frac{1}{f(x)}$은 $x=a$에서 연속이다.

③ $y=f(f(x))$는 $x=a$에서 연속이 아닐 수도 있다.

(반례) $f(x)=\frac{1}{x+1}$은 $x=-2$에서 연속이지만

$$f(f(x))=\frac{1}{\frac{1}{x+1}+1}=\frac{x+1}{x+2}$$

은 $x=-2$에서 연속이 아니다.

④ $\lim\limits_{x\to a}\{x^2+f(x)\}=a^2+f(a)$이므로 $y=x^2+f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

⑤ $\lim\limits_{x\to a}5f(x)=5f(a)$이므로 $y=5f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

정답_ ③

122

$$\lim_{x\to2}\frac{(x^2-4)f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)f(x)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}(x+2)f(x) \quad \cdots\cdots ㉠$$

함수 $y=x+2$와 $y=f(x)$는 연속함수이므로 ㉠에서

$\lim\limits_{x\to2}(x+2)f(x)=(2+2)f(2)=4f(2)=12$

$\therefore f(2)=3$

정답_ ③

123

ㄱ은 옳다.

임의의 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=b$로 놓으면 $g(x)$가 연속이므로 $b=g(a)$

또 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to a}f(g(x))=f(b)=f(g(a))$

ㄴ은 옳지 않다.

(반례) $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\geq0)\\-1 & (x<0)\end{cases}$ 일 때,

$y=f(x)$와 $y=f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 $y=g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ도 옳지 않다.

(반례) $f(x)=\begin{cases}1 & (x\geq0)\\-1 & (x<0)\end{cases}$ 일 때, $|f(x)|=1$이므로

$y=|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이지만 $y=f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

정답_ ①

124

ㄱ은 옳다.

$(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(1)=1$

$\lim\limits_{x\to0+}(g\circ f)(x)=g(1)=1$

$\lim\limits_{x\to0-}(g\circ f)(x)=g(-1)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(0)$

그러므로 $y=(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ은 옳지 않다.

(반례) ㄱ에서 $y=(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 $y=f(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

ㄷ도 옳지 않다.

(반례) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (x\neq0)\\0 & (x=0)\end{cases}$ 일 때, $f(f(0))=f(0)=0$

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면

$\lim\limits_{x\to0+}f(f(x))=\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=0$

$\lim\limits_{x\to0-}f(f(x))=\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}f(f(x))=f(f(0))$

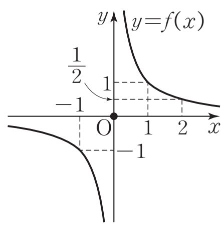
그러므로 $y=(f\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 $y=f(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

정답_ ①

125

함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (x\neq0)\\0 & (x=0)\end{cases}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 구간 $[-1, 1]$에서 최댓값과 최솟값이 존재하지 않으므로 S가 될 수 없다.

ㄴ. 구간 $[0, 1]$에서 최댓값은 존재하지 않고, 최솟값은 $f(0)=0$이므로 S가 될 수 없다.

ㄷ. 구간 $[1, 2]$에서 최댓값은 $f(1)=1$, 최솟값은 $f(2)=\frac{1}{2}$이므로 S가 될 수 있다.

따라서 S가 될 수 있는 것은 ㄷ이다.

정답_ ㄷ

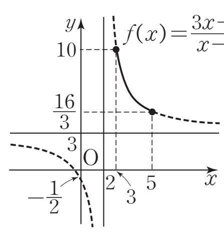
126

구간 $[3, 5]$에서 함수

$$f(x)=\frac{3x+1}{x-2}=\frac{3(x-2)+7}{x-2}$$

$$=3+\frac{7}{x-2}$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



최댓값은 $f(3)=10$ $\quad\therefore M=10$

최솟값은 $f(5)=\frac{16}{3}$ $\quad\therefore m=\frac{16}{3}$

$\therefore M-m=10-\frac{16}{3}=\frac{14}{3}$

정답_ $\frac{14}{3}$

127

ㄱ은 옳다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=-1$, $x=2$에서 끊어져 있으므로 불연속이 되는 x의 값은 $x=-1$, $x=2$의 2개이다.

ㄴ은 옳지 않다.

$x=-1$에서 불연속이므로 구간 $[-2,\ 1]$에서 최솟값을 갖지 않는다.

ㄷ도 옳다.

구간 $[-2,\ 2]$에서 $x=1$일 때 최댓값 $f(1)=1$을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_ ④

128

$g(x)=f(x)-x$로 놓으면 $f(x)$가 $[a,\ b]$에서 연속이므로 $g(x)$도 구간 $[a,\ b]$에서 $\boxed{\text{(가) 연속}}$이다. 그런데

$g(a)g(b)=\{f(a)-a\}\{f(b)-b\}$

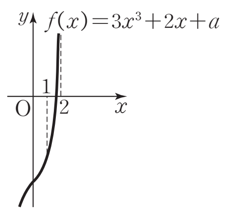
$\quad =(b-a)(a-b)\ \boxed{\text{(나)} <}\ 0\ (\because a<b)$

이므로 $\boxed{\text{(다) 사잇값}}$(의) 정리에 의해 $g(c)=0$인 c가 a, b 사이에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $f(c)=c$인 c가 a, b 사이에 존재한다. 정답_ ④

129

$f(x)=3x^3+2x+a$로 놓으면 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(1)f(2)=(a+5)(a+28)<0$

$\therefore -28<a<-5$

정답_ $-28<a<-5$

130

$f(x)=x^3+4x-6$으로 놓으면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$f(-2)=-22<0,\ f(-1)=-11<0,\ f(0)=-6<0,$

$f(1)=-1<0,\ f(2)=10>0,\ f(3)=33>0$

이때, $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 a는 구간 $(1,\ 2)$에 속한다. 정답_ ④

131

$f(-2)f(-1)<0,\ f(-1)f(0)<0,\ f(1)f(2)<0$이므로 사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-3,\ 2)$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다. 정답_ ③

132

$g(x)=f(x)-x$로 놓으면 함수 $g(x)$는 연속함수이므로 $g(0)g(1)<0$이면 방정식 $g(x)=0$은 0과 1 사이에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$g(0)=f(0)-0=a,\ g(1)=f(1)-1=a-3-1=a-4$이므로

$g(0)g(1)=a(a-4)<0 \qquad \therefore 0<a<4$ 정답_ $0<a<4$

133

$f(x)=10x^{10}+10x-a$로 놓으면 함수 $f(x)$가 연속함수이고, 방정식 $f(x)=0$이 구간 $(-1,\ 1)$에서 오직 하나의 실근을 가지므로 $f(-1)f(1)<0$이다.

$f(-1)=-a,\ f(1)=20-a$에서

$(-a)(20-a)<0,\ a(a-20)<0 \qquad \therefore 0<a<20$

따라서 구하는 정수 a의 개수는 $1, 2, 3, \cdots, 19$로 19개이다.

정답_ ③

134

$g(x)=f(x)-2x$로 놓으면 함수 $g(x)$는 연속함수이므로 $g(1)g(2)<0$이면 방정식 $g(x)=0$은 1과 2 사이에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$g(1)=f(1)-2=(a^2+2a+2)-2=a^2+2a$

$g(2)=f(2)-4=(a+2)-4=a-2$

이므로 $(a^2+2a)(a-2)<0,\ a(a+2)(a-2)<0$

이때, 양수 a에 대하여 $a(a+2)>0$이므로 $a-2<0$

$\therefore 0<a<2\ (\because a>0)$ 정답_ ①

135

$f(0)f(-1)=f(0)f(1)<0,\ f(3)f(4)=f(-3)f(-4)>0,$

$f(-2)f(-3)=f(2)f(3)<0$

함수 $f(x)$는 구간 $(-1,\ 0), (0,\ 1), (-3,\ -2), (2, 3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 구간 $(-4,\ 4)$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수의 최솟값은 4이다. 정답_ ③

136

$f(x)=(x-a)(x+a)^2+x^2\ (a>0)$으로 놓으면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

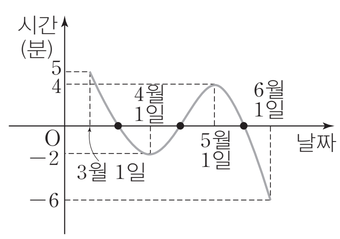
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ f(-a)=a^2>0,\ f(0)=-a^3<0,$

$f(a)=a^2>0,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

이므로 사잇값의 정리에 의해 구간 $(-\infty,\ -a), (-a,\ 0), (0,\ a)$에서 각각 한 개의 실근을 갖는다.

따라서 주어진 삼차방정식은 한 개의 양의 실근과 서로 다른 두 개의 음의 실근을 갖는다. 정답_ ⑤

137



위의 그래프에서 벽시계가 정시를 나타내는 순간은 3개월 동안

적어도 3번 나타난다. 정답_ 3번

138

몸무게가 60 kg ⟶ 72 kg ⟶ 65 kg으로 변하므로

①, ② 몸무게가 62 kg 또는 64 kg인 때에는 60 kg ⟶ 72 kg일 때 적어도 한 번 있었다.

③, ④, ⑤ 몸무게가 66 kg 또는 68 kg 또는 70 kg인 때에는 60 kg ⟶ 72 kg일 때와 72 kg ⟶ 65 kg일 때 적어도 두 번 있었다.

따라서 옳지 않은 것은 ②이다. 정답_ ②

139

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\begin{cases}\dfrac{ax+1}{x^2-4x+6} & (x<2)\\ ax+1 & (x\geq 2)\end{cases}$$

이때, $x^2-4x+6=(x-2)^2+2>0$이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 한다.

즉, $\frac{g(2)}{f(2)}=\lim\limits_{x\to2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to2-}\frac{g(x)}{f(x)}$이어야 한다. ❶

$\lim\limits_{x\to2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to2+}(ax+1)=2a+1$ ❷

$\lim\limits_{x\to2-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to2-}\frac{2a+1}{2^2-4\cdot2+6}=\frac{2a+1}{2}$ ❸

$2a+1=\frac{2a+1}{2}$, $4a+2=2a+1$

$2a=-1$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$ ❹

정답_ $-\frac{1}{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	실수 전체의 집합에서 연속이기 위한 조건식 구하기	30%
❷	$\lim\limits_{x\to2+}\frac{g(x)}{f(x)}$를 a에 대한 식으로 나타내기	20%
❸	$\lim\limits_{x\to2-}\frac{g(x)}{f(x)}$를 a에 대한 식으로 나타내기	20%
❹	a의 값 구하기	30%

140

$x\neq0$일 때, $f(x)=\frac{8x^2+24x+a}{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이어야 한다.

$\therefore f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{8x^2+24x+a}{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}$ ……㉠

❶

㉠에서 $x\to0$일 때 (분모) ⟶ 0이므로 (분자) ⟶ 0이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to0}(8x^2+24x+a)=0$에서 $a=0$ ❷

$a=0$을 ㉠에 대입하면

$$f(0)=\lim_{x\to0}\frac{8x^2+24x}{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{8x(x+3)(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}{2x}$$
$$=\lim_{x\to0}4(x+3)(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})$$
$$=4\cdot3\cdot6=72$$ ❸

정답_ 72

단계	채점 기준	비율
❶	$x=0$에서 연속이기 위한 조건식 구하기	30%
❷	a의 값 구하기	30%
❸	$f(0)$의 값 구하기	40%

141

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=2$에서도 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to2-}f(x)=\lim\limits_{x\to2+}f(x)$

$\frac{1}{2}\cdot2=a\cdot2+b$ $\quad\therefore 2a+b=1$ ……㉠

❶

$f(x-1)=f(x+3)$의 양변에 x 대신 $x+1$을 대입하면

$f(x)=f(x+4)$이므로 $f(0)=f(4)$

$\frac{1}{2}\cdot0=a\cdot4+b$ $\quad\therefore 4a+b=0$ ……㉡

❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2}$, $b=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & (0\leq x<2)\\ -\frac{1}{2}x+2 & (2\leq x\leq4)\end{cases}$ 이므로

$f(2018)=f(4\cdot504+2)=f(2)=-\frac{1}{2}\cdot2+2=1$ ❸

정답_ 1

단계	채점 기준	비율
❶	조건 (가)를 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	30%
❷	조건 (나)를 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	40%
❸	$f(2018)$의 값 구하기	30%

142

$x=1$에서 연속이어야 하므로 $\lim\limits_{x\to1}g(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-x^3}{(x-1)^2}$에서

$f(x)-x^3$은 $(x-1)^2$을 인수로 가져야 한다. ❶

또 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=4$이므로 $f(x)-x^3$은 최고차항의 계수가 4인 이차함수이다. ❷

따라서 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-x^3}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{4(x-1)^2}{(x-1)^2}=4$이므로

$k=4$ ❸

정답_ 4

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)-x^3$의 인수 구하기	30%
❷	$f(x)-x^3$의 최고차항의 계수 구하기	40%
❸	k의 값 구하기	30%

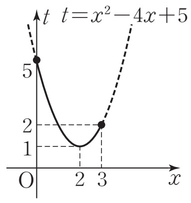
143

$y=-(x^2-4x+5)^2+2(x^2-4x+5)+5$에서

$x^2-4x+5=t$로 치환하면

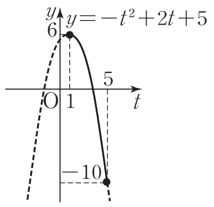
$y=-t^2+2t+5$

이때, $t=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$의 그래프는 $0\le x\le 3$에서 오른쪽 그림과 같으므로 $1\le t\le 5$



……………………………………………………… ❶

$y=-t^2+2t+5=-(t-1)^2+6$의 그래프는 $1\le t\le 5$에서 오른쪽 그림과 같으므로



$t=1$일 때, 최댓값 $M=6$

$t=5$일 때, 최솟값 $m=-10$

……………………………………………………… ❷

$\therefore\ M+m=6+(-10)=-4$ ……………………………… ❸

정답_ -4

단계	채점 기준	비율
❶	$x^2-4x+5=t$로 치환하여 t의 값의 범위 구하기	30%
❷	M, m의 값 구하기	50%
❸	$M+m$의 값 구하기	20%

144

$f(1)f(2)<0$, $f(3)f(4)<0$이므로 사잇값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1,\ 2)$, $(3,\ 4)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다. ……………………………………… ❶

이때, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=-f(-x)$이므로

$f(-1)f(-2)=\{-f(1)\}\{-f(2)\}=f(1)f(2)<0$,

$f(-3)f(-4)=\{-f(3)\}\{-f(4)\}=f(3)f(4)<0$

즉, 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-2,\ -1)$, $(-4,\ -3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다. ……………………………… ❷

또 $x=0$일 때, $f(0)=-f(0)$, 즉 $f(0)=0$이므로 $x=0$은 방정식 $f(x)=0$의 근이다. ……………………………………… ❸

따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 5개의 근을 갖는다. ………… ❹

정답_ 5개

단계	채점 기준	비율
❶	$x>0$인 범위에서 주어진 방정식의 실근의 개수 구하기	20%
❷	$x<0$인 범위에서 주어진 방정식의 실근의 개수 구하기	30%
❸	$x=0$이 주어진 방정식의 근이 됨을 알기	20%
❹	실근의 개수 구하기	30%

145

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1+}g(x)=g(1)$

(ⅰ) $\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1-}(x+a)f(x)=(1+a)\cdot 1=1+a$

(ⅱ) $\lim_{x\to 1+}g(x)=\lim_{x\to 1+}(x+a)f(x)$

$=(1+a)\cdot(-1)=-1-a$

(ⅲ) $g(1)=(1+a)f(1)=(1+a)\cdot 1=1+a$

$1+a=-1-a$ $\quad\therefore\ a=-1$

정답_ ②

146

함수 $f(x)$는 $x\ne\pm1$인 실수 x에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $a\ne\pm1$ …… ㉠

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{\{g(x)\}^3+2g(x)+1}{\{g(x)\}^2-1}$이므로

$(f\circ g)(x)$는 $\{g(x)\}^2-1=0$인 실수 x에서 불연속이다.

$\{g(x)\}^2-1=0$에서 $(x+4)^2=1$, $x+4=\pm1$

$\therefore\ x=-5$ 또는 $x=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 주어진 조건을 만족시키는 a의 값은

$a=-5$ 또는 $a=-3$

따라서 모든 a의 값의 합은

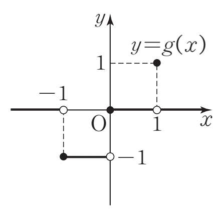
$-5+(-3)=-8$

정답_ ②

147

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3+x-1}=5$이려면 $f(x)$는 삼차항의 계수가 5인 삼차함수이어야 한다 …… ㉠

조건 (나)에서 $h(x)=f(x)g(x)$라고 하면 다항함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고 함수 $g(x)$는 $x=\pm1$, $x=0$에서 불연속이므로 모든 실수 x에서 함수 $f(x)g(x)$가 연속이려면 함수 $h(x)$가 $x=\pm1$, $x=0$에서 연속이어야 한다.



(ⅰ) $x=1$에서 함수 $h(x)$가 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 1-}h(x)=\lim_{x\to 1+}h(x)=h(1)$에서

$\lim_{x\to 1-}f(x)\cdot 0=\lim_{x\to 1+}f(x)\cdot 0=f(1)\cdot[1]$

$\therefore\ f(1)=0$ …… ㉡

(ⅱ) $x=-1$에서 함수 $h(x)$가 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to -1-}h(x)=\lim_{x\to -1+}h(x)=h(-1)$에서

$\lim_{x\to -1-}f(x)\cdot 0=\lim_{x\to -1+}f(x)\cdot(-1)=f(-1)\cdot[-1]$

$\therefore\ f(-1)=0$ …… ㉢

(ⅲ) $x=0$에서 함수 $h(x)$가 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 0-}h(x)=\lim_{x\to 0+}h(x)=h(0)$에서

$\lim_{x\to 0-}f(x)\cdot(-1)=\lim_{x\to 0+}f(x)\cdot 0=f(0)\cdot[0]$

$\therefore \lim_{x \to 0-} f(x)=0$

이때, $f(x)$는 다항함수이므로 $f(0)=0$ ……㉣

㉠~㉣에 의해 삼차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 5이고 방정식 $f(x)=0$은 $x=-1$, $x=0$, $x=1$을 세 근으로 가지므로

$f(x)=5x(x-1)(x+1)$

$\therefore f(2)=5\cdot2\cdot1\cdot3=30$ 정답_ 30

148

구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$일 때 최댓값 $f(\alpha)=1$, $x=\beta$일 때 최솟값 $f(\beta)=0$을 갖는다고 하면

$0\le\alpha\le1$, $0\le\beta\le1$

ㄱ은 옳다.

$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}$로 놓으면

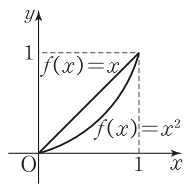
$g(\alpha)=f(\alpha)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $g(\beta)=f(\beta)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$에서

$g(\alpha)g(\beta)<0$이므로 사잇값의 정리에 의해 방정식

$g(x)=0$은 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ은 옳지 않다.

(반례) $f(x)=x^2$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 실근은 $x^2=x$에서 $x=0$ 또는 $x=1$이다. 즉, 구간 $(0,\ 1)$에서 실근이 존재하지 않는다.



ㄷ은 옳다.

$h(x)=f(x)-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$로 놓으면

$h(\alpha)=f(\alpha)-\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{3}=\frac{2-\alpha}{3}>0$ $(\because 0\le\alpha\le1)$

$h(\beta)=f(\beta)-\frac{1}{3}\beta-\frac{1}{3}=-\frac{\beta+1}{3}<0$ $(\because 0\le\beta\le1)$

에서 $h(\alpha)h(\beta)<0$이므로 사잇값의 정리에 의해 방정식

$h(x)=0$은 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_ ④

149

$f(x)=f(-x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

①은 옳다.

$f(x)$가 연속함수이므로 조건 (나)에 의해

$f(5)=\lim_{x\to5+}f(x)=0$, $f(-5)=\lim_{x\to-5-}f(x)=0$

②도 옳다.

조건 (다)에 의해 $f(x)$의 최댓값은 10이다. 한편, $f(x)=10$이 되는 x는 오직 한 개 있고, $f(x)=f(-x)$이므로 $f(0)=10$

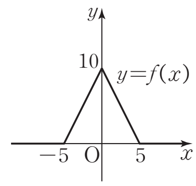
따라서 $f(x)$는 $x=0$일 때 최대이다.

③도 옳다.

$f(x)$는 연속함수이고, $f(-5)=f(5)=0$, $f(0)=10$이므로 $f(x)=5$가 되는 x가 구간 $(-5,\ 0)$, $(0,\ 5)$에 각각 적어도 하나씩 있다.

④는 옳지 않다.

(반례) 함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으면 주어진 조건을 만족시키지만 $f(x)$가 최소가 되는 x는 무수히 많다.



⑤는 옳다.

조건 (나)에 의해 $x\ge0$이면 $f(x+5)=0$, $x<0$이면 $f(x-5)=0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x+5)f(x-5)=0$이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 정답_ ④

II 미분

03 미분계수와 도함수

150

x의 값이 1에서 a까지 변할 때의 평균변화율이 2이므로

$$\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{(a^3-4a^2+a)-(-2)}{a-1}$$
$$=\frac{(a-1)(a^2-3a-2)}{a-1}$$
$$=a^2-3a-2=2$$

$a^2-3a-4=0$, $(a+1)(a-4)=0$　　$\therefore a=-1$ 또는 $a=4$

이때, $a>0$이므로　$a=4$　　정답_ ④

151

x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{f(a)}{a}=a^2+3a$$

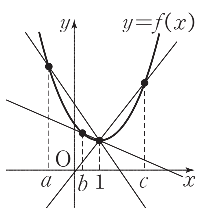
따라서 $f(a)=a^3+3a^2$이므로

$f(1)=1^3+3\cdot1=4$　　정답_ 4

152

함수 $f(x)$에 대하여 x의 값이 1에서 t까지 변할 때의 평균변화율은 두 점 $(1,\ f(1))$, $(t,\ f(t))$를 지나는 직선의 기울기와 같으므로 오른쪽 그림에서

$g(a)<g(b)<g(c)$



정답_ ①

153

x의 값이 -2에서 1까지 변할 때의 함수 $y=g(x)$의 평균변화율은

$$\frac{g(1)-g(-2)}{1-(-2)}=\frac{(f\circ f)(1)-(f\circ f)(-2)}{3}$$
$$=\frac{f(3)-f(0)}{3}=\frac{4-7}{3}=-1$$

정답_ -1

154

직선 AB의 기울기가 1이므로

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=1\qquad \therefore f(4)-f(1)=3$$

$f(0)=f(4)$이므로 x의 값이 0에서 1까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f(1)-f(4)}{1-0}=-\{f(4)-f(1)\}=-3$$

정답_ ①

155

$f'(x)=8x^7+7x^6+6x^5+\cdots+2x+1$이므로 $x=-1$에서의 미분계수는

$$f'(-1)=-8+7+(-6)+5+(-4)+3+(-2)+1$$
$$=-4$$

정답_ ②

156

$f(x)=ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=2ax+b$이므로

$f(2)=4a+2b+c=6$, $f'(0)=b=2$, $f'(1)=2a+b=4$

세 식을 연립하여 풀면　$a=1, b=2, c=-2$

$\therefore a^2+b^2+c^2=1^2+2^2+(-2)^2=9$　　정답_ ⑤

157

x의 값이 -1에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(-1)}{a-(-1)}=\frac{(a^2-2a)-3}{a+1}=a-3\qquad\cdots\cdots ㉠$$

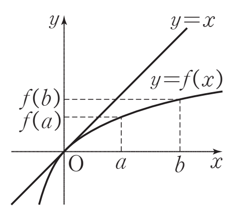
$f(x)=x^2-2x$에서　$f'(x)=2x-2$이므로 $x=2$에서의 미분계수는　$f'(2)=2\cdot2-2=2$　　$\cdots\cdots ㉡$

㉠과 ㉡이 같으므로　$a-3=2$　　$\therefore a=5$　　정답_ ⑤

158

ㄱ은 옳지 않다.

$\frac{f(a)}{a}$는 원점과 점 $(a,\ f(a))$를 지나는 직선의 기울기이고, $\frac{f(b)}{b}$는 원점과 점 $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기이므로　$\frac{f(a)}{a}>\frac{f(b)}{b}$



ㄴ도 옳지 않다.

두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기는 직선 $y=x$의 기울기 1보다 작으므로　$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$

이때, $a<b$에서 $b-a>0$이므로　$f(b)-f(a)<b-a$

ㄷ은 옳다.

$f'(a)$는 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기이고, $f'(b)$는 점 $(b,\ f(b))$에서의 접선의 기울기이다.

그런데 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기가 점 $(b,\ f(b))$에서의 접선의 기울기보다 크므로　$f'(a)>f'(b)$

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.　　정답_ ③

159

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot2=2f'(1)$$

$f(x)=x^4+4x^2+1$에서 $f'(x)=4x^3+8x$이므로

$f'(1)=4+8=12$

$\therefore$ (주어진 식)$=2f'(1)=2\times12=24$　　정답_ ④

160

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)-f(a-h)+f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$
$=2f'(a)=8$

$\therefore\ f'(a)=4$

$f(x)=x^2-6x+5$에서 $f'(x)=2x-6$

$f'(a)=2a-6=4\quad \therefore\ a=5$ 정답_ ①

161

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}\cdot(-3)$$
$$=-3f'(a)=-3\cdot\frac{2}{3}=-2$$
$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}\cdot h\right\}$$
$$=f'(a)\cdot0=\frac{2}{3}\cdot0=0$$
$\therefore$ (주어진 식)$=-2+0=-2$ 정답_ ①

162

$f(1)=g(1)=3$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-g(1-h)}{3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)+g(1)-g(1-h)}{3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1+2h)-f(1)}{3h}-\frac{g(1-h)-g(1)}{3h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot\frac{2}{3}+\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}\cdot\frac{1}{3}\right\}$$
$$=\frac{2}{3}f'(1)+\frac{1}{3}g'(1)$$
$f(x)=x+x^3+x^5$, $g(x)=x^2+x^4+x^6$에서

$f'(x)=1+3x^2+5x^4$, $g'(x)=2x+4x^3+6x^5$이므로

$f'(1)=1+3+5=9$, $g'(1)=2+4+6=12$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{2}{3}f'(1)+\frac{1}{3}g'(1)$

$=\frac{2}{3}\cdot9+\frac{1}{3}\cdot12=10$ 정답_ ⑤

163

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=4$에서 $f'(1)=4$

$$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\cdot\frac{3}{2}$$
$$=f'(1)\cdot\frac{3}{2}=4\cdot\frac{3}{2}=6$$
정답_ ③

164

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\frac{f(1-h)-f(1)}{h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\right\}$$
$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)=6$

$\therefore\ f'(1)=3$

$$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{f(x)-f(1)}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{x-1}{f(x)-f(1)}\cdot(x+1)\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}\cdot(x+1)\right\}$$
$$=\frac{2}{f'(1)}=\frac{2}{3}$$
정답_ ②

165

$$\lim_{x\to3}\frac{xf(3)-3f(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{xf(3)-3f(3)+3f(3)-3f(x)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\left\{\frac{(x-3)f(3)}{x-3}-\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\cdot3\right\}$$
$$=f(3)-3f'(3)=-2$$
정답_ ②

166

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(a)+a^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(a)(x^2-a^2)-a^2\{f(x)-f(a)\}}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\left\{f(a)(x+a)-a^2\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right\}$$
$=2af(a)-a^2f'(a)$ 정답_ ③

167

$f(x)=x^4+ax+b$이고 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=9$에서 $x\to1$일 때

(분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(1)=1+a+b=0\quad\therefore\ a+b=-1$ ……㉠

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=9$$
$f'(x)=4x^3+a$이므로

$f'(1)=4+a=9\quad\therefore\ a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면

$5+b=-1\quad\therefore\ b=-6$

$\therefore\ ab=5\cdot(-6)=-30$ 정답_ ①

168

$h=\dfrac{1}{n}$이라 하면 $n\to\infty$일 때 $h\to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f\left(x-\frac{1}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$
$$=2f'(x)=4x^2+2x-8$$

$\therefore\ f'(x)=2x^2+x-4$

$\therefore\ f'(1)=2+1-4=-1$ 정답_ -1

169

$f(x)=x^8-2x-3$으로 놓으면 $f(-1)=0$이므로

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^8-2x-3}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$$

이때, $f'(x)=8x^7-2$이므로 $f'(-1)=-8-2=-10$

정답_ ①

170

$f(x)=x^n+x^2+x-3$으로 놓으면 $f(1)=0$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n+x^2+x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

이때, $f'(x)=nx^{n-1}+2x+1$이므로 $f'(1)=n+3$

즉, $n+3=15$이므로 $n=12$ 정답_ ③

171

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(\boxed{(가)\ x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+a^{n-1}})}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}(\boxed{(가)\ x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+a^{n-1}})$$
$$=a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots+a^{n-1}=\boxed{(나)\ na^{n-1}}$$

$\therefore\ f'(x)=nx^{n-1}$ 정답_ ④

보충 설명

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$,

$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$, $\cdots$,

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$

(단, n은 양의 정수이다.)

172

$$f'(x)=(2x^2-k)'(x^2+x-2)+(2x^2-k)(x^2+x-2)'$$
$$=4x(x^2+x-2)+(2x^2-k)(2x+1)$$

이므로

$$f'(2)=8\cdot(4+2-2)+(8-k)(4+1)$$
$$=32+(40-5k)=72-5k$$

따라서 $72-5k=67$에서 $k=1$ 정답_ ①

173

$f'(x)=2(x+1)g(x)+(x+1)^2g'(x)$이므로

$$f'(2)=2\cdot 3\cdot g(2)+3^2\cdot g'(2)$$
$$=2\cdot 3\cdot(-3)+3^2\cdot 5=27$$

정답_ ②

174

$$f'(x)=5(x^2-3x+4)^4(x^2-3x+4)'$$
$$=5(x^2-3x+4)^4(2x-3)$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}f'(2)=\frac{1}{4}\cdot 5\cdot(4-6+4)^4\cdot(4-3)$$
$$=20$$

정답_ ②

175

$$f'(x)=4(x^2+1)^3(x^2+1)'=8x(x^2+1)^3$$

$$\therefore\ \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{16h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\cdot\frac{1}{16}$$
$$=\frac{1}{16}f'(1)=\frac{1}{16}\cdot 8\cdot(1+1)^3=4$$

정답_ ④

176

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로

(분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다. 즉, $\displaystyle\lim_{x\to 1}\{f(x)-2\}=0$이므로

$f(1)-2=0$에서 $f(1)=2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$$\therefore\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3 \quad\cdots\cdots ㉡$$

$g(x)=\{f(x)\}^3$에서 $g'(x)=3\{f(x)\}^2f'(x)$이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$g'(1)=3\{f(1)\}^2f'(1)=3\cdot 2^2\cdot 3=36$ 정답_ ④

177

$\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-3}{x-5}=2$에서 $x\longrightarrow 5$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로

(분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다. 즉, $\displaystyle\lim_{x\to 5}\{f(x)-3\}=0$이므로

$f(5)-3=0$에서 $f(5)=3$ $\cdots\cdots$ ㉠

$$\therefore\ \lim_{x\to 5}\frac{f(x)-3}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=f'(5)=2 \quad\cdots\cdots ㉡$$

또 $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{g(x)-1}{x-5}=1$에서 $x\longrightarrow 5$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로

(분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다. 즉, $\displaystyle\lim_{x\to 5}\{g(x)-1\}=0$이므로

$g(5)-1=0$에서 $g(5)=1$ $\cdots\cdots$ ㉢

$\therefore \lim_{x \to 5} \frac{g(x)-1}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{g(x)-g(5)}{x-5} = g'(5) = 1$ ······ ㉣

$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$이므로 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 의해 $x=5$에서의 미분계수는

$f'(5)g(5) + f(5)g'(5) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$ 정답_ ①

178

$g(x) = (x^2+2)f(x)$로 놓으면 $g(2) = 6f(2)$이므로

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x^2+2)f(x) - 6f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = g'(2)$$

$g'(x) = 2xf(x) + (x^2+2)f'(x)$이고 $f(2)=3$, $f'(2)=1$이므로

$g'(2) = 4f(2) + 6f'(2) = 4 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 18$ 정답_ ③

다른 풀이

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x^2+2)f(x) - 6f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x^2+2)f(x) - 6f(x) + 6f(x) - 6f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{f(x)(x^2-4) + 6\{f(x)-f(2)\}}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \left\{ f(x) \cdot (x+2) + 6 \cdot \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \right\}$$

$$= 4f(2) + 6f'(2) = 4 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 18$$

179

다항식 $x^{10} - 2x^3 + 1$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x) = ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$x^{10} - 2x^3 + 1 = (x+1)^2 Q(x) + ax + b$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1+2+1 = -a+b$ $\quad \therefore a-b = -4$ ······ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9 - 6x^2 = 2(x+1)Q(x) + (x+1)^2 Q'(x) + a$

위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-10-6 = a$ $\quad \therefore a = -16$

이 값을 ㉡에 대입하면 $-16-b=-4$ $\quad \therefore b=-12$

따라서 $R(x) = -16x - 12$이므로 $R(-2) = 20$ 정답_ ⑤

180

$2x^4 + px^2 + qx + 6$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면

$2x^4 + px^2 + qx + 6 = (x-1)^2 Q(x) + 5x - 4$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2+p+q+6 = 5-4$ $\quad \therefore p+q = -7$ ······ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하며 미분하면

$8x^3 + 2px + q = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x) + 5$ ······ ㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$8+2p+q = 5$ $\quad \therefore 2p+q = -3$ ······ ㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $p=4, q=-11$

$f(x) = 6x^5 + 2px + q$로 놓으면 $f(x) = 6x^5 + 8x - 11$

이때, $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $f(1)$이므로

$f(1) = 6+8-11 = 3$ 정답_ 3

181

함수 $y=f(x)$는 $x=-2, x=1$에서 불연속이므로 $m=2$

또, 함수 $y=f(x)$는 $x=-3, x=-2, x=1, x=2$에서 미분가능하지 않으므로 $n=4$

$\therefore m+n = 2+4 = 6$ 정답_ ④

182

$$\lim_{x \to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{\{3x-(x-1)\}-3}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{2(x-1)}{x-1} = \boxed{^{(가)}2}$$

$$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1-} \frac{\{3x+(x-1)\}-3}{x-1} = \lim_{x \to 1-} \frac{4(x-1)}{x-1} = \boxed{^{(나)}4}$$

정답_ ④

183

ㄱ. $f(x)=1$은 상수함수이므로 $x=0$에서 연속이고 $f'(x)=0$이므로 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄴ. (i) $\lim_{x \to 0+} g(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0-} g(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{-x}{x} = -1$

즉, $\lim_{x \to 0} g(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

(ii) $x=0$에서 연속이 아니므로 미분가능하지 않다.

ㄷ. (i) $\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 - 4|x| + 3) = 3$,

$h(0) = 3$이므로 $\lim_{x \to 0} h(x) = h(0)$

즉, 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $h'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2-4|x|}{x}$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x^2-4|x|}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x(x-4)}{x} = \lim_{x \to 0+} (x-4) = -4$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{x^2-4|x|}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{x(x+4)}{x} = \lim_{x \to 0-} (x+4) = 4$$

즉, $h'(0)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

따라서 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 것은 ㄷ이다.

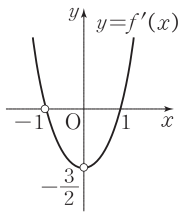
정답_ ③

184

함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=0$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

$\therefore\ f'(x)=\frac{3}{2}(x^2-1)$ (단, $x\neq-1, x\neq0$)

따라서 도함수 $f'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ은 옳지 않다.

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ은 옳다.

함수 $y=f'(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to0}f'(x)=-\frac{3}{2}$

ㄷ도 옳지 않다.

$f(x)=t$로 놓으면

$\lim_{x\to-1+}f(f'(x))=\lim_{t\to0-}f(t)=-1$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다. 정답_ ②

185

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로 $x=-1$에서 연속이고, $f'(-1)$의 값이 존재한다.

$$f(x)=\begin{cases} a(x+3)^2+b & (x\geq-1) \\ x^3 & (x<-1)\end{cases} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2a(x+3) & (x\geq-1) \\ 3x^2 & (x<-1)\end{cases} \quad \cdots\cdots ㉡$$

(i) $x=-1$에서 연속이므로 ㉠에서 $f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)$

$a(-1+3)^2+b=(-1)^3 \qquad \therefore\ 4a+b=-1 \quad \cdots\cdots ㉢$

(ii) $f'(-1)$의 값이 존재하므로 ㉡에서

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)$

$2a(-1+3)=3\cdot(-1)^2 \qquad \therefore\ a=\frac{3}{4}$

$a=\frac{3}{4}$을 ㉢에 대입하면 $b=-4$

$\therefore\ f(1)=16a+b=16\cdot\frac{3}{4}+(-4)=8$ 정답_ ⑤

186

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하므로 $x=1$에서 미분가능하고, $x=1$에서 연속이다. 즉, $f'(1)$의 값이 존재한다.

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax & (x<1) \\ bx^2+x+1 & (x\geq1)\end{cases} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+a & (x<1) \\ 2bx+1 & (x\geq1)\end{cases} \quad \cdots\cdots ㉡$$

(i) $x=1$에서 연속이므로 ㉠에서 $f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$

$b+1+1=1+a \qquad \therefore\ a-b=1 \quad \cdots\cdots ㉢$

(ii) $f'(1)$의 값이 존재하므로 ㉡에서 $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)$

$2b+1=3+a \qquad \therefore\ a-2b=-2 \quad \cdots\cdots ㉣$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=4, b=3$

$\therefore\ a+b=4+3=7$ 정답_ ③

187

$f(x)=|x-1|(x-3a)$에서

$$f(x)=\begin{cases} (x-1)(x-3a) & (x\geq1) \\ -(x-1)(x-3a) & (x<1)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $f'(1)$의 값이 존재하므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x-3a)-0}{x-1}=\lim_{x\to1+}(x-3a)=1-3a$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-(x-1)(x-3a)-0}{x-1}=\lim_{x\to1-}\{-(x-3a)\}=-1+3a$$

$1-3a=-1+3a$이므로 $a=\frac{1}{3}$ 정답_ ②

188

연결한 그래프 전체를 나타내는 함수를 $f(x)$라고 하면

함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=1$에서 미분가능하므로 $x=0$, $x=1$에서 연속이고, $f'(0)$, $f'(1)$의 값이 존재한다.

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x<0) \\ ax^3+bx^2+cx+1 & (0\leq x\leq1) \\ 0 & (x>1)\end{cases} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$f'(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ 3ax^2+2bx+c & (0\leq x\leq1) \\ 0 & (x>1)\end{cases} \quad \cdots\cdots ㉡$$

(i) $x=0, x=1$에서 연속이므로 ㉠에서

$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)$, $f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$

$1=1, a+b+c+1=0 \qquad \therefore\ a+b+c=-1 \quad \cdots\cdots ㉢$

(ii) $f'(0)$, $f'(1)$의 값이 존재하므로 ㉡에서

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)$, $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)$

$0=c, 3a+2b+c=0 \quad \cdots\cdots ㉣$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=2, b=-3, c=0$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=2^2+(-3)^2+0^2=13$ 정답_ ③

189

$f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy$의 양변에 $x=0, y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore\ f(0)=0$

$f'(0)=1$이므로

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=1$$

$\therefore\ f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)+3h-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+3=1+3=4$ 정답_ ⑤

190

$f(xy)=f(x)+f(y)$의 양변에 $x=1, y=1$을 대입하면

$f(1)=f(1)+f(1)\qquad\therefore\ f(1)=0$

$f(1)=\boxed{^{(가)}0}$이므로

$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)}{h}=a$

$\therefore\ f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\boxed{^{(나)}1+\frac{h}{x}}\right)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\boxed{^{(나)}1+\frac{h}{x}}\right)}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}$

$=\boxed{^{(다)}a}\cdot\frac{1}{x}$ 정답_ ③

191

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy\,f(x+y)$의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)\qquad\therefore\ f(0)=0$

$f'(0)=a$이므로

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=a$

$\therefore\ f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+xhf(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+xhf(x+h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}+xf(x+h)\right\}$

$=xf(x)+a$ 정답_ ③

192

$f(-x)=f(x),\ f'(2)=3$이므로

$f'(-2)=\lim_{h\to0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(-(2-h))-f(-2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\cdot(-1)$

$=f'(2)\cdot(-1)=3\cdot(-1)=-3$ 정답_ ①

193

$f(-ax)=-af(x)$에서 $f(x)=-\frac{1}{a}f(-ax)$

$\therefore\ f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{-\frac{1}{a}f(-ax-ah)+\frac{1}{a}f(-ax)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(-ax-ah)-f(-ax)}{-ah}=f'(-ax)$

정답_ ④

194

$f(x)=2x^3+4f'(1)x$에서 $f'(x)=6x^2+4f'(1)$

$x=1$을 대입하면 $f'(1)=6+4f'(1)$

$\therefore\ f'(1)=-2$

따라서 $f'(x)=6x^2-8$이므로

$f'(-1)=6-8=-2$ 정답_ ②

195

$f(x)=3x^2-2f'(2)x$에서 $f'(x)=6x-2f'(2)$

$x=2$를 대입하면 $f'(2)=12-2f'(2)$

$\therefore\ f'(2)=4$

따라서 $f'(x)=6x-8$이므로

$f'(3)=18-8=10$ 정답_ ③

196

$f(x)$는 이차함수이므로 $f(x)=ax^2+bx+c$

$(a, b, c$는 상수, $a\neq0)$로 놓을 수 있다.

이때, $f'(x)=2ax+b$이므로 $f(x)=xf'(x)-x^2$에서

$ax^2+bx+c=x(2ax+b)-x^2\qquad\therefore\ (1-a)x^2+c=0$

위의 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 $a=1, c=0$

$f'(1)=3$이므로 $2a+b=3, 2+b=3\qquad\therefore\ b=1$

따라서 $f(x)=x^2+x$이므로 $f(2)=4+2=6$ 정답_ ③

197

$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)=x^3+3x-2$

$f(x)=g'(x)$이므로

$f'(x)+f(x)=x^3+3x-2$ ······㉠

즉, $f(x)$는 삼차식이므로

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$) ······㉡

로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ ······㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$ax^3+(3a+b)x^2+(2b+c)x+c+d=x^3+3x-2$

위의 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=1, 3a+b=0, 2b+c=3, c+d=-2$

$\therefore a=1, b=-3, c=9, d=-11$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+9x-11$이므로

$f(1)=1-3+9-11=-4$

정답_ -4

198

$f(x)f'(x)=4x+6$에서 ······㉠

$f(x)$를 n차식이라고 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차식이므로 ㉠의 좌변의 차수는 $n+(n-1)=2n-1$

그런데 ㉠의 우변은 일차식이므로 $2n-1=1$ $\quad\therefore n=1$

따라서 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)로 놓을 수 있다.

이때, $f'(x)=a$이므로 ㉠에 대입하면

$(ax+b)\cdot a=4x+6$ $\quad\therefore (a^2-4)x+(ab-6)=0$

위의 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a^2-4=0, ab-6=0$

$\therefore a=2, b=3$ 또는 $a=-2, b=-3$

(i) $a=2, b=3$일 때, $f(x)=2x+3$이므로

$f(1)f(2)=5\cdot7=35$

(ii) $a=-2, b=-3$일 때, $f(x)=-2x-3$이므로

$f(1)f(2)=(-5)\cdot(-7)=35$

(i), (ii)에 의해 $f(1)f(2)=35$

정답_ ④

199

함수 $f(x)=ax^2+bx+1$에 대하여 x의 값이 -1에서 0까지 변할 때의 평균변화율이 -1이므로

$\dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=\dfrac{1-(a-b+1)}{1}=-a+b=-1$ ······㉠

··· ❶

$f(x)=ax^2+bx+1$의 $x=-1$에서의 순간변화율이 1이므로

$f'(x)=2ax+b$에서 $f'(-1)=-2a+b=1$ ······㉡

··· ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2, b=-3$

$\therefore a+b=-5$ ··· ❸

정답_ -5

단계	채점 기준	비율
❶	평균변화율을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	40%
❷	순간변화율을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	40%
❸	$a+b$의 값 구하기	20%

200

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left\{\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)\right\}=2f'(1)$

이므로 $2f'(1)=4$

$\therefore f'(1)=2$ ······㉠

··· ❶

$\lim_{x\to3}\dfrac{x-3}{f(x)-f(3)}=\lim_{x\to3}\dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}}=\dfrac{1}{f'(3)}$이므로

$\dfrac{1}{f'(3)}=\dfrac{1}{10}$

$\therefore f'(3)=10$ ······㉡

··· ❷

$f(x)=2ax^2-bx+2$에서 $f'(x)=4ax-b$이므로 ㉠, ㉡에 의해 $f'(1)=4a-b=2$, $f'(3)=12a-b=10$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=2$

$\therefore a+b=1+2=3$ ··· ❸

정답_ 3

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(1)$의 값 구하기	30%
❷	$f'(3)$의 값 구하기	30%
❸	$a+b$의 값 구하기	40%

201

$\lim_{h\to0}\dfrac{f(1+2h)-3}{h}=4$에서 $h\to0$일 때 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{h\to0}\{f(1+2h)-3\}=0$이므로 $f(1)-3=0$에서

$f(1)=3$ ······㉠

··· ❶

$\lim_{h\to0}\dfrac{f(1+2h)-3}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot2=2f'(1)$

$2f'(1)=4$에서

$f'(1)=2$ ······㉡

··· ❷

$y'=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)$이므로 ㉠, ㉡에 의해 $x=1$에서의 미분계수는

$2f(1)+2f'(1)=2\cdot3+2\cdot2=10$ ··· ❸

정답_ 10

단계	채점 기준	비율
❶	$f(1)$의 값 구하기	20%
❷	$f'(1)$의 값 구하기	40%
❸	$y=(x^2+1)f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수 구하기	40%

202

$h(x)=f(x)g(x)$로 놓으면 $f(0)=1,\ g(0)=4$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)-4}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}\\&=\lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\\&=h'(0)=0\ \cdots\cdots ❶\end{aligned}$$

$f'(0)=-b,\ h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$$\begin{aligned}h'(0)&=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)\\&=(-6)\cdot4+1\cdot g'(0)=-24+g'(0)=0\end{aligned}$$

$\therefore\ g'(0)=24$ ······ ❷

정답_ 24

단계	채점 기준	비율
❶	$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)g(x)-4}{x}$를 간단히 하기	50%
❷	$g'(0)$의 값 구하기	50%

203

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하므로 $x=3$에서 미분가능하고 $x=3$에서 연속이다.

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\le3)\\ -\frac{1}{2}(x-a)^2+b & (x>3)\end{cases}\ \cdots\cdots ㉠$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x & (x\le3)\\ -x+a & (x>3)\end{cases}\ \cdots\cdots ㉡$$

······ ❶

(i) $x=3$에서 미분가능하므로 ㉡에서

$6=-3+a\quad\therefore\ a=9$ ······ ❷

(ii) $x=3$에서 연속이므로 ㉠에서

$9=-\frac{1}{2}(3-a)^2+b$

$\therefore\ (3-a)^2-2b=-18$ ······ ㉢

$a=9$를 ㉢에 대입하면 $b=27$ ······ ❸

$\therefore\ a+b=9+27=36$ ······ ❹

정답_ 36

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)$ 구하기	10%
❷	a의 값 구하기	40%
❸	b의 값 구하기	40%
❹	$a+b$의 값 구하기	10%

204

x의 값이 n에서 $n+1$까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율이 $n+1$이므로

$$\frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}=n+1\qquad\therefore\ f(n+1)-f(n)=n+1$$

따라서 x의 값이 1에서 100까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\begin{aligned}&\frac{f(100)-f(1)}{100-1}\\&=\frac{\{f(100)-f(99)\}+\{f(99)-f(98)\}+\cdots+\{f(2)-f(1)\}}{99}\\&=\frac{100+99+\cdots+2}{99}=\frac{\frac{100\cdot101}{2}-1}{99}=51\end{aligned}$$

정답_ ①

205

$f(1)=0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)\}^2-2f(x)}{1-x}&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)\{f(x)-2\}}{-(x-1)}\\&=\lim_{x\to1}\left[\frac{f(x)}{x-1}\cdot\{2-f(x)\}\right]\\&=\lim_{x\to1}\left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\{2-f(x)\}\right]\\&=f'(1)\{2-f(1)\}=2f'(1)\end{aligned}$$

$2f'(1)=10$에서 $f'(1)=5$

정답_ ⑤

206

$\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=3$에서 $x\to2$일 때 (분모) $\to0$이므로

(분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to2}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=3$$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$에서 $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이므로

(분자) $\to0$이어야 한다. 즉, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=2$$

$f(2)=0,\ f(0)=0$에서 $f(f(2))=0$이므로

$$\begin{aligned}\therefore\ \lim_{x\to2}\frac{f(f(x))}{x-2}&=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(f(x))-f(f(2))}{f(x)-f(2)}\cdot\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right\}\\&=f'(f(2))f'(2)\\&=f'(0)f'(2)\\&=2\cdot3=6\end{aligned}$$

정답_ ⑤

207

$\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-a}{x-2}=4$에서 $x\to2$일 때 (분모) $\to0$이므로

(분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to2}\{f(x)-a\}=0$이므로 $f(2)-a=0$에서 $a=f(2)$

$$\therefore\ \lim_{x\to2}\frac{f(x)-a}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=4$$

다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지가 $bx+3$이므로 $f(x)=(x-2)^2Q(x)+bx+3$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=2b+3\qquad\therefore\ a=2b+3$ ······ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+b$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면 $f'(2)=b$ $\therefore b=4$

$b=4$를 ㉡에 대입하면 $a=11$

$\therefore a+b=11+4=15$ 정답_ 15

208

$f(a)=f'(a)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-a)^2$을 인수로 갖고, $f(b)=0$이므로 $f(x)$는 $x-b$를 인수로 갖는다.

이때, $f(x)$는 삼차함수이므로

$f(x)=p(x-a)^2(x-b)$ $(p\neq 0)$로 놓을 수 있다.

$\therefore f'(x)=2p(x-a)(x-b)+p(x-a)^2$

$f'(c)=0$이므로 $2p(c-a)(c-b)+p(c-a)^2=0$

$p(c-a)\{2(c-b)+(c-a)\}=0$

$c\neq a$이므로 $2(c-b)+c-a=0,\ 3c-2b-a=0$ $(\because c\neq a)$

$\therefore c=\dfrac{a+2b}{3}$ 정답_ ④

209

$f(x)=[2x](x^2+ax+b)$에서

(i) $\dfrac{1}{2}\le x<1$일 때, $1\le 2x<2$이므로 $[2x]=1$

따라서 $f(x)=x^2+ax+b$이므로 ……㉠

$f'(x)=2x+a$ ……㉡

(ii) $1\le x<\dfrac{3}{2}$일 때, $2\le 2x<3$이므로 $[2x]=2$

따라서 $f(x)=2(x^2+ax+b)$이므로 ……㉢

$f'(x)=2(2x+a)$ ……㉣

$x=1$에서 미분가능하면 반드시 $x=1$에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면 ㉠, ㉢에 $x=1$을 대입한 값이 같아야 하므로

$1+a+b=2(1+a+b)$

$1+a+b=0$ $\therefore a+b=-1$ ……㉤

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 ㉡, ㉣에 $x=1$을 대입한 값이 같아야 하므로

$2+a=2(2+a),\ 2+a=0$ $\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉤에 대입하면 $b=1$

따라서 $f(x)=[2x](x^2-2x+1)$이므로

$f(2)=[4]\cdot(4-4+1)=4$ 정답_ 4

210

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

ㄱ. $F(x)=xf(x)$로 놓으면

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{x}=\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

따라서 $F'(0)$의 값이 존재하므로 함수 $F(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄴ. $G(x)=x^2f(x)$로 놓으면

$$G'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{G(x)-G(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}xf(x)=0\cdot f(0)=0$$

따라서 $G'(0)$의 값이 존재하므로 함수 $G(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $H(x)=\dfrac{1}{1+xf(x)}$로 놓으면

$$H'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{H(x)-H(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+xf(x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-f(x)}{1+xf(x)}=\frac{-f(0)}{1+0\cdot f(0)}=-f(0)$$

따라서 $H'(0)$의 값이 존재하므로 함수 $H(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 $x=0$에서 미분가능한 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

211

ㄱ은 옳다.

$F(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$로 놓으면 $F(2)=\dfrac{g(2)}{f(2)}=\dfrac{0}{2}=0$이고

$\lim_{x\to 2}F(x)=\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{0}{1}=0$이므로

$\lim_{x\to 2}F(x)=F(2)$

즉, $F(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

ㄴ은 옳지 않다.

$G(x)=(g\circ f)(x)$로 놓으면

$G(1)=(g\circ f)(1)=g(1)=-1$이고

$\lim_{x\to 1-}G(x)=\lim_{x\to 1-}g(f(x))=g(0)=-1$,

$\lim_{x\to 1+}G(x)=\lim_{x\to 1+}g(f(x))=g(1)=-1$이므로

$\lim_{x\to 1}G(x)=G(1)$

즉, $G(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ도 옳다.

$3\le x<4$일 때 $f(x)=1,\ g(x)=x-4$

$4\le x<5$일 때 $f(x)=x-3,\ g(x)=x-4$

$H(x)=f(x)g(x)$로 놓으면

$$H(x)=\begin{cases} x-4 & (3\le x<4) \\ (x-3)(x-4) & (4\le x<5)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 4-}\frac{H(x)-H(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4-}\frac{(x-4)-0}{x-4}=1$$

$$\lim_{x\to 4+}\frac{H(x)-H(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4+}\frac{(x-3)(x-4)-0}{x-4}=\lim_{x\to 4+}(x-3)=1$$

$\therefore H'(4)=\lim_{x\to4}\frac{H(x)-H(4)}{x-4}=1$

즉, $H'(4)$의 값이 존재하므로 $H(x)$는 $x=4$에서 미분가능하다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_ ③

212

ㄱ은 옳다.

$f(1)=0$이므로

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{\{(1+h)^2-1\}-0}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h^2+2h}{h}=\lim_{h\to0-}(h+2)=2$$

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{\frac{2}{3}\{(1+h)^3-1\}-0}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{\frac{2}{3}(h^3+3h^2+3h)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{2}{3}(h^2+3h+3)=2$$

$\therefore f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=2$

즉, $f'(1)$의 값이 존재하므로 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄴ은 옳지 않다.

$F(x)=|f(x)|$로 놓으면 $F(0)=f(0)=-1$이므로

$$\lim_{h\to0-}\frac{F(0+h)-F(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{|f(h)|-|f(0)|}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{|1-h|-1}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{(1-h)-1}{h}=-1$$

$$\lim_{h\to0+}\frac{F(0+h)-F(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{|f(h)|-|f(0)|}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{|h^2-1|-1}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{-(h^2-1)-1}{h}=\lim_{h\to0+}(-h)=0$$

이때, $F'(0)$의 값이 존재하지 않으므로 $F(x)$, 즉 $|f(x)|$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ도 옳다.

$G(x)=x^kf(x)$로 놓으면 $G(0)=0$이므로

$$\lim_{h\to0-}\frac{G(0+h)-G(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h^kf(h)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h^k(1-h)}{h}=\lim_{h\to0-}h^{k-1}(1-h)\quad\cdots\cdots㉠$$

$$\lim_{h\to0+}\frac{G(0+h)-G(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h^kf(h)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h^k(h^2-1)}{h}=\lim_{h\to0+}h^{k-1}(h^2-1)\quad\cdots\cdots㉡$$

(i) $k=1$일 때, ㉠$=1$, ㉡$=-1$

(ii) $k\ge2$일 때, ㉠$=$㉡$=0$

즉, $k\ge2$일 때, $G'(0)$의 값이 존재하므로 $G(x)$, 즉 $x^kf(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 최소의 자연수 k는 2이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_ ③

213

조건 ㈎에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2-f(x^2)}{x^3f(x)}=3$이므로 분모와 분자의 차수가 같아야 한다. 함수 $f(x)$의 차수를 n이라고 하면

(분모의 차수)$=n+3$, (분자의 차수)$=2n$이므로

$n+3=2n\qquad\therefore n=3$

따라서 함수 $f(x)$는 삼차함수이다.

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a $(a\neq0)$라고 하면 조건 ㈎에 의해 분모, 분자의 최고차항의 계수의 비를 구하면

$\frac{a^2-a}{a}=3$, $a^2-4a=0$

$a(a-4)=0\qquad\therefore a=4\ (\because a\neq0)$

$f(x)=4x^3+bx^2+cx+d$ (b, c, d는 상수)라고 하면

$f'(x)=12x^2+2bx+c$

조건 ㈏에서

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{12x^2+2bx+c}{x}=6\quad\cdots\cdots㉠$$

$x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(12x^2+2bx+c)=0$에서 $c=0$

$c=0$을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{12x^2+2bx}{x}=\lim_{x\to0}(12x+2b)=2b=6\qquad\therefore b=3$

따라서 $f'(x)=12x^2+6x$이므로

$f'(1)=12+6=18$ 정답_ 18

04 도함수의 활용 (1)

214

$f(x)=x^4-4x^3+6x^2+4$에서 $f'(x)=4x^3-12x^2+12x$

(i) 함수 $f(x)$의 그래프가 점 $(a,\ b)$를 지나므로 $f(a)=b$에서

$a^4-4a^3+6a^2+4=b$ ⋯⋯ ㉠

(ii) $x=a$인 점에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(a)=4$에서

$4a^3-12a^2+12a=4,\ (a-1)^3=0$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=7$

$\therefore a^2+b^2=1^2+7^2=50$

정답_ ⑤

215

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+1$에서 $f'(x)=x^2-ax$

$x=-1,\ x=3$인 점에서의 접선의 기울기는 각각

$f'(-1)=1+a,\ f'(3)=9-3a$

이때, 두 접선이 평행하므로 $1+a=9-3a$

$4a=8$ $\quad\therefore a=2$

정답_ ②

216

$f(x)=x^3-ax+b$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-a$

함수 $f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$f(1)=1-a+b=1$ $\quad\therefore a=b$ ⋯⋯ ㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-a$

이때, 점 $(1,\ 1)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 $f'(1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$에서

$(3-a)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1,\ 3-a=2$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore a+b=1+1=2$

정답_ 2

217

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기가 6이므로

$f'(2)=6$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(2-2h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2-2h)-f(2)}{-2h}\cdot(-2)$$

$$=-2f'(2)=-12$$

정답_ ①

218

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=a$인 점에서의 접선의 기울기가 a^2-a+7이므로

$f'(a)=a^2-a+7$ $\quad\therefore f'(1)=7$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)\right\}$$

$$=2f'(1)=2\cdot 7=14$$

정답_ 14

219

$f'(x)=3x^2-12x+16=3(x-2)^2+4$이므로 $f'(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 4를 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 접선의 기울기의 최솟값은 4이다.

정답_ ④

220

$f'(x)=-3x^2+18x-20=-3(x-3)^2+7$이므로 $f'(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 7을 갖는다.

이때, $f(3)=-27+81-60+1=-5$이므로 접점의 좌표는 $(3,\ -5)$이다.

따라서 $a=3,\ b=-5,\ M=7$이므로

$a+b+M=3+(-5)+7=5$

정답_ ⑤

221

$f(x)=x^3-3x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-3$

점 $(2,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=12-3=9$이므로 접선의 방정식은

$y-2=9(x-2)$ $\quad\therefore y=9x-16$

따라서 $a=9,\ b=-16$이므로 $a-b=9-(-16)=25$

정답_ ③

222

$f(x)=(x^2+1)(x-2)$로 놓으면

$f'(x)=(x^2+1)'(x-2)+(x^2+1)(x-2)'$

$=2x(x-2)+(x^2+1)\cdot 1=3x^2-4x+1$

$x=2$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=12-8+1=5$

이때, $f(2)=0$이므로 점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y-0=5(x-2)$ $\quad\therefore y=5x-10$

위의 직선이 점 $(3,\ a)$를 지나므로 $a=5$

정답_ ⑤

223

$f(x)=x^3-3x^2-6x+8$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6x-6$

(i) 점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3-6-6=-9$이므로 접선의 방정식은

$y-0=-9(x-1)$ $\quad\therefore y=-9x+9$ ⋯⋯ ㉠

(ii) 점 $(4,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(4)=48-24-6=18$이므로 접선의 방정식은

$y-0=18(x-4)$ $\quad\therefore y=18x-72$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=3,\ y=-18$

따라서 두 접선의 교점은 $(3,\ -18)$이므로 $a=3,\ b=-18$

$\therefore a+b=3+(-18)=-15$

정답_ ②

224

$g'(x)=f(x)$이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선의 기울기는 $g'(2)=f(2)=(2-3)^2=1$이고 접선의 방정식은

$y-g(2)=g'(2)(x-2)$ $\therefore y=x-2+g(2)$ ······㉠

㉠에서 y절편이 -5이므로

$-2+g(2)=-5$ $\therefore g(2)=-3$

따라서 접선의 방정식은 $y=x-5$이므로 $y=0$을 대입하면 x절편은 5이다. 정답_⑤

225

$f(x)=x(x+1)(2-x)$로 놓으면

$f'(x)=(x+1)(2-x)+x(2-x)-x(x+1)$

점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=0+0-2\cdot3=-6$이므로 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{6}$이다.

점 $(2,\ 0)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{6}$인 직선의 방정식은

$y-0=\frac{1}{6}(x-2)$ $\therefore y=\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}$

따라서 $m=\frac{1}{6}$, $n=-\frac{1}{3}$이므로

$m+n=\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{6}$ 정답_③

226

$f(x)=x^3-2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2$

곡선 $y=f(x)$가 점 $\mathrm{P}(a,\ 6)$을 지나므로

$f(a)=a^3-2=6,\ a^3=8$ $\therefore a=2$

점 $\mathrm{P}(2,\ 6)$에서의 접선의 기울기가 m이므로

$f'(2)=3\times2^2=12=m$

즉, 접선 $y=12x+n$이 점 $\mathrm{P}(2,\ 6)$을 지나므로

$6=24+n$ $\therefore n=-18$

$\therefore a+m+n=2+12+(-18)=-4$ 정답_④

227

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+px+q$로 놓으면 $f'(x)=x^2+p$

이때, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ -1)$을 지나므로

$f(1)=\frac{1}{3}+p+q=-1$ $\therefore p+q=-\frac{4}{3}$ ······㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=1+p$이므로 접선의 방정식은

$y+1=(1+p)(x-1)$

이 접선이 원점을 지나므로 $1=-1-p$ $\therefore p=-2$

$p=-2$를 ㉠에 대입하면 $q=\frac{2}{3}$

$\therefore p+3q=(-2)+3\cdot\frac{2}{3}=0$ 정답_①

228

$f(x)=x^3-3x-4$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-3$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ -2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3-3=0$이므로 접선의 방정식은

$y+2=0\cdot(x+1)$ $\therefore y=-2$

$y=x^3-3x-4,\ y=-2$를 연립하여 풀면 $x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 점 P의 좌표는 $(2,\ -2)$이다.

점 $\mathrm{P}(2,\ -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=12-3=9$이므로 접선의 방정식은

$y+2=9(x-2)$ $\therefore y=9x-20$ 정답_④

229

$f(x)=-x^3+15x-22$로 놓으면 $f'(x)=-3x^2+15$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=-12+15=3$이므로 접선의 방정식은

$y-0=3(x-2)$ $\therefore y=3x-6$

따라서 이 직선의 x절편과 y절편이 각각 $2,\ -6$이므로 이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot2\cdot6=6$ 정답_①

230

$f(x)=x^3-5x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-5$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ -4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-5=-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(-4)=-2(x-1)$ $\therefore y=-2x-2$

$y=x^3-5x$와 $y=-2x-2$를 연립하여 풀면

$x^3-5x=-2x-2,\ x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=-2$

이때, 점 A의 x좌표가 1이므로 $\mathrm{B}(-2,\ 2)$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-2-1)^2+\{2-(-4)\}^2}=3\sqrt{5}$ 정답_④

231

$y=x^3+ax^2-2ax+a+2$를 a에 대하여 정리하면

$a(x^2-2x+1)+(x^3-y+2)=0$

위의 식은 a에 대한 항등식이므로

$x^2-2x+1=0,\ x^3-y+2=0$

$x^2-2x+1=0$에서 $(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$

$x^3-y+2=0$에서 $y=3$ $\therefore \mathrm{P}(1,\ 3)$

$f(x)=x^3+ax^2-2ax+a+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax-2a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3+2a-2a=3$

따라서 점 P에서의 접선의 방정식은

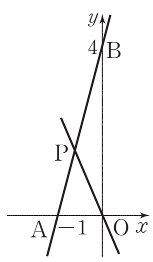
$y-3=3(x-1)$ $\therefore y=3x$ 정답_④

232

$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-3}{x-2}=5$에서 $x \to 2$일 때 (분모) $\to$ 0이므로
(분자) $\to$ 0이어야 한다. 즉, $\lim_{x \to 2}\{f(x)-3\}=0$이므로
$f(2)-3=0$에서 $f(2)=3$ ······㉠
$\therefore \lim_{x \to 2} \frac{f(x)-3}{x-2}=\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=5$ ······㉡
㉠, ㉡에 의해 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 5이므로 접선의 방정식은
$y-3=5(x-2)$ $\therefore 5x-y=7$
따라서 $a=5, b=-1$이므로 $ab=5\cdot(-1)=-5$ 정답_ ①

233

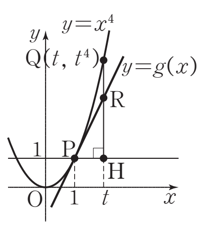
$f(x)=x(x-3)(x+1)$로 놓으면
$f'(x)=(x-3)(x+1)+x(x+1)+x(x-3)$
(i) 점 $A(-1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=4$이므로 접선의 방정식은
$y-0=4(x+1)$ $\therefore y=4x+4$ ······㉠
(ii) 점 $O(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=-3$이므로 접선의 방정식은
$y-0=-3(x-0)$ $\therefore y=-3x$ ······㉡
직선 ㉠의 y절편은 4이므로 $B(0,\ 4)$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-\frac{4}{7},\ y=\frac{12}{7}$
$\therefore P\left(-\frac{4}{7},\ \frac{12}{7}\right)$
따라서 삼각형 AOP, OBP의 넓이는 각각
$S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \frac{12}{7}=\frac{6}{7}, T=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot \frac{4}{7}=\frac{8}{7}$



$\therefore 49ST=49\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}=48$ 정답_ ④

234

$f(x)=x^4$으로 놓으면 $f'(x)=4x^3$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=4$이므로 접선의 방정식은
$y-1=4(x-1)$ $\therefore y=4x-3$
따라서 $g(x)=4x-3$이므로
$R(t,\ 4t-3)$
이때 $Q(t,\ t^4), H(t,\ 1)$이므로
$\overline{QR}=t^4-(4t-3)=t^4-4t+3$
$\overline{RH}=(4t-3)-1=4t-4$



$$\therefore \lim_{t \to 1} \frac{\overline{QR}}{\overline{RH}}=\lim_{t \to 1} \frac{t^4-4t+3}{4t-4}$$
$$=\lim_{t \to 1} \frac{(t-1)(t^3+t^2+t-3)}{4(t-1)}$$
$$=\lim_{t \to 1} \frac{t^3+t^2+t-3}{4}=0$$
정답_ ①

235

$f(x)=x^3-3x^2+4x+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6x+4$
접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2+4t+1)$이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $\tan 45°=1$이므로
$f'(t)=3t^2-6t+4=1,\ t^2-2t+1=0$
$(t-1)^2=0$ $\therefore t=1$
즉, 접점의 좌표가 $(1,\ 3)$이므로 접선의 방정식은
$y-3=(x-1)$ $\therefore y=x+2$
따라서 접선의 x절편은 -2이다. 정답_ ②

236

직선 $x+3y+3=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x-1$에 수직인 직선의 기울기는 3이므로 기울기가 3인 접선을 구하는 것이다.
$f(x)=2x^2-x+3$으로 놓으면 $f'(x)=4x-1$
접점의 좌표를 $(a,\ 2a^2-a+3)$이라고 하면 접선의 기울기가 3이므로 $f'(a)=4a-1=3$ $\therefore a=1$
따라서 접점의 좌표는 $(1,\ 4)$이므로 접선의 방정식은
$y-4=3(x-1)$ $\therefore y=3x+1$
이 직선이 x축과 만나는 점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{3},\ 0\right)$이므로
$a=-\frac{1}{3}$ $\therefore 6a=-2$ 정답_ ①

237

직선 $y=-x-7$에 평행한 직선의 기울기는 -1이므로 기울기가 -1인 접선을 구하는 것이다.
$f(x)=x^3-4x-5$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-4$
접점의 좌표를 (a, a^3-4a-5)라고 하면 접선의 기울기가 -1이므로 $f'(a)=3a^2-4=-1$
$a^2=1$ $\therefore a=\pm 1$
(i) $a=1$일 때, 접점의 좌표는 $(1,\ -8)$이므로 접선의 방정식은
$y-(-8)=-(x-1)$ $\therefore y=-x-7$
(ii) $a=-1$일 때, 접점의 좌표는 $(-1,\ -2)$이므로 접선의 방정식은
$y-(-2)=-\{x-(-1)\}$ $\therefore y=-x-3$
곡선 $y=x^3-4x-5$에 접하고 직선 $y=-x-7$에 평행한 직선의 방정식은 $y=-x-3$, 즉 $x+y=-3$이므로
$a=1, b=-3$
$\therefore a-b=1-(-3)=4$ 정답_ ④

238

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+3$으로 놓으면 $f'(x)=-x^2$
접점의 좌표를 $\left(a,\ -\frac{1}{3}a^3+3\right)$이라고 하면 접선의 기울기가 -1이므로 $f'(a)=-a^2=-1$
$a^2=1$ $\therefore a=\pm 1$

(i) $a=1$일 때, 접점의 좌표는 $\left(1,\ \frac{8}{3}\right)$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{8}{3}=-(x-1)$ $\therefore 3x+3y-11=0$ ……㉠

(ii) $a=-1$일 때, 접점의 좌표는 $\left(-1,\ \frac{10}{3}\right)$이므로 접선의 방정식은 $y-\frac{10}{3}=-(x+1)$ $\therefore 3x+3y-7=0$ ……㉡

두 직선 ㉠, ㉡ 사이의 거리는 직선 ㉠ 위의 점 $\left(1,\ \frac{8}{3}\right)$과 직선 ㉡ 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는

$\frac{|3+8-7|}{\sqrt{3^2+3^2}}=\frac{4}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

정답_ ②

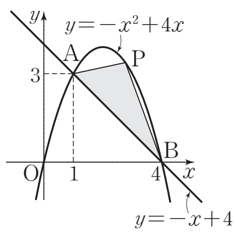
239

곡선 $y=-x^2+4x$와 직선 $y=-x+4$의 두 교점의 좌표를 구하면

$-x^2+4x=-x+4,\ x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=4$

따라서 A$(1,\ 3)$, B$(4,\ 0)$이라고 하면 삼각형 ABP의 넓이가 최대일 때는 점 P에서의 접선의 기울기가 선분 AB의 기울기와 같을 때이다.



$f(x)=-x^2+4x$로 놓으면

$f'(x)=-2x+4$

점 P의 좌표를 $(a,\ -a^2+4a)$라고 하면 선분 AB의 기울기가 -1이므로

$f'(a)=-2a+4=-1$ $\therefore a=\frac{5}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{15}{4}\right)$이므로 $\alpha=\frac{5}{2},\beta=\frac{15}{4}$

$\therefore \alpha+2\beta=\frac{5}{2}+2\cdot\frac{15}{4}=10$

정답_ ②

240

곡선 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{3}$ $(x>0)$ 위의 점과 직선 $x-y-10=0$, 즉 $y=x-10$ 사이의 거리의 최솟값은 직선 $y=x-10$과 평행한 접선의 접점과 직선 $y=x-10$ 사이의 거리와 같다.

따라서 점 P$(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 1이어야 한다.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{3}$ $(x>0)$로 놓으면 $f'(x)=x^2$

$f'(a)=a^2=1$

이때, $x>0$이므로 $a>0$ $\therefore a=1$

$f(1)=\frac{1}{3}+\frac{11}{3}=4$이므로 점 P의 좌표는 $(1,\ 4)$이다.

따라서 $a=1, b=4$이므로 $a+b=1+4=5$

정답_ 5

241

$f(x)=x^3-2x^2+x+8$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-4x+1$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3-2a^2+a+8)$이라고 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2-4a+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^3-2a^2+a+8)=(3a^2-4a+1)(x-a)$

이 직선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$-(a^3-2a^2+a+8)=(3a^2-4a+1)(-a)$

$a^3-a^2-4=0,\ (a-2)(a^2+a+2)=0$ $\therefore a=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 10)$이다.

정답_ ⑤

242

$f(x)=x^3-3x^2+2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-6x$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3-3a^2+2)$라고 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2-6a$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^3-3a^2+2)=(3a^2-6a)(x-a)$

$\therefore y=(3a^2-6a)x-2a^3+3a^2+2$

이 직선이 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=-2a^3+3a^2+2,\ 2a^3-3a^2+1=0$

$(a-1)^2(2a+1)=0$ $\therefore a=1$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$

$\therefore f'(1)=3-6=-3,\ f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}+3=\frac{15}{4}$

따라서 $m_1=-3, m_2=\frac{15}{4}$이므로

$m_2-m_1=\frac{15}{4}-(-3)=\frac{27}{4}$

정답_ ⑤

243

$f(x)=x^2+2$로 놓으면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(a,\ a^2+2)$라고 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=2a$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2+2)=2a(x-a)$

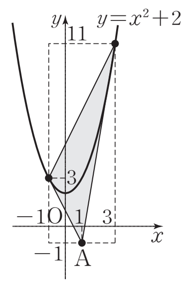
이 직선이 점 $(1,\ -1)$을 지나므로

$-1-(a^2+2)=2a(1-a)$

$a^2-2a-3=0,\ (a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 3)$, $(3,\ 11)$이므로 삼각형 ABC의 넓이는



$4\cdot12-\left(\frac{1}{2}\cdot2\cdot4+\frac{1}{2}\cdot2\cdot12+\frac{1}{2}\cdot4\cdot8\right)$

$=16$

정답_ ③

244

$f(x)=3x^3$으로 놓으면 $f'(x)=9x^2$

두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ a)$에서 곡선에 그은 접선의 접점의 좌표를 각각 A$(t,\ 3t^3)$, B$(s,\ 3s^3)$이라고 하면 각 접점에서의 기울기가 같으므로

$9t^2=9s^2,\ t^2-s^2=0$

$(t+s)(t-s)=0$ $\therefore s=-t$ $(\because s\neq t)$

점 A$(t,\ 3t^3)$에서의 접선의 방정식은

$y-3t^3=9t^2(x-t)$ $\therefore y=9t^2(x-t)+3t^3$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로 $\quad 9t^2a-6t^3=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

점 $B(-t,\ -3t^3)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-3t^3)=9t^2\{x-(-t)\} \qquad \therefore y=9t^2(x+t)-3t^3$

이 직선이 점 $(0,\ a)$를 지나므로 $\quad a=6t^3 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면

$9t^2\cdot 6t^3-6t^3=0,\ t^3(9t^2-1)=0$

$t^3(3t+1)(3t-1)=0 \qquad \therefore t=0$ 또는 $t=\pm\frac{1}{3}$

(i) $t=0$이면 $\quad a=0$

(ii) $t=\frac{1}{3}$이면 $\quad a=6\cdot\frac{1}{27}=\frac{2}{9}$

(iii) $t=-\frac{1}{3}$이면 $\quad a=6\cdot\left(-\frac{1}{27}\right)=-\frac{2}{9}$

(i), (ii), (iii)에 의해 $t=\frac{1}{3},\ a=\frac{2}{9}\ (a>0)$이므로

$90a=90\cdot\frac{2}{9}=20$ 정답_ 20

245

$f(x)=x^3-3x+1$로 놓으면 $\quad f'(x)=3x^2-3$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3-3a+1)$이라고 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=3a^2-3$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^3-3a+1)=(3a^2-3)(x-a)$

이 직선이 점 $(4,\ 1)$을 지나므로

$1-(a^3-3a+1)=(3a^2-3)(4-a) \qquad \therefore a^3-6a^2+6=0$

따라서 세 접점의 x좌표의 합은 근과 계수의 관계에 의해 6이다.

정답_ ②

246

$f(x)=3x-k,\ g(x)=-x^3+3x^2-5$로 놓으면

$f'(x)=3,\ g'(x)=-3x^2+6x$

곡선과 직선이 $x=t$에서 접한다고 하면

(i) $f(t)=g(t)$에서 $\quad 3t-k=-t^3+3t^2-5 \quad \cdots\cdots ㉠$

(ii) $f'(t)=g'(t)$에서 $\quad 3=-3t^2+6t$

$t^2-2t+1=0,\ (t-1)^2=0 \qquad \therefore t=1$

$t=1$을 ㉠에 대입하면

$3-k=-1+3-5 \qquad \therefore k=6$ 정답_ ⑤

247

$f(x)=x^3+ax^2+ax+1,\ g(x)=x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+a,\ g'(x)=1$

곡선과 직선이 $x=t$에서 접한다고 하면

(i) $f(t)=g(t)$에서 $\quad t^3+at^2+at+1=t+1$

$t^3+at^2+(a-1)t=0,\ t(t+1)(t+a-1)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=-1$ 또는 $t=1-a$

(ii) $f'(t)=g'(t)$에서 $\quad 3t^2+2at+a=1$

$t=0$일 때, $\quad a=1$

$t=-1$일 때, $\quad 3-2a+a=1 \qquad \therefore a=2$

$t=1-a$일 때, $\quad 3-6a+3a^2+2a-2a^2+a=1$

$a^2-3a+2=0,\ (a-1)(a-2)=0 \qquad \therefore a=1$ 또는 $a=2$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 $\quad 1+2=3$ 정답_ ③

248

$f(x)=x^3+ax+3,\ g(x)=x^2+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a,\ g'(x)=2x$

두 곡선이 $x=t$에서 접한다고 하면

(i) $f(t)=g(t)$에서 $\quad t^3+at+3=t^2+2 \quad \cdots\cdots ㉠$

(ii) $f'(t)=g'(t)$에서 $\quad 3t^2+a=2t$

$\therefore a=-3t^2+2t \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad 2t^3-t^2-1=0$

$(t-1)(2t^2+t+1)=0 \qquad \therefore t=1\ (\because 2t^2+t+1>0)$

$t=1$을 ㉡에 대입하면 $\quad a=-3+2=-1$ 정답_ ②

249

$f(x)=x^2+ax+b,\ g(x)=-x^3+c$에서

$f'(x)=2x+a,\ g'(x)=-3x^2$

(i) 두 곡선이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$f(1)=1+a+b=2 \qquad \therefore a+b=1 \quad \cdots\cdots ㉠$

$g(1)=-1+c=2 \qquad \therefore c=3$

(ii) 두 곡선이 $x=1$에서 접하므로 $\quad f'(1)=g'(1)$

$2+a=-3 \qquad \therefore a=-5$

$a=-5$를 ㉠에 대입하면 $\quad b=6$

따라서 $f(x)=x^2-5x+6,\ g(x)=-x^3+3$이므로

$f(-1)+g(-1)=12+4=16$ 정답_ ④

250

$f(x)=ax^3+b,\ g(x)=x^2+cx$에서

$f'(x)=3ax^2,\ g'(x)=2x+c$

(i) 두 곡선이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$f(-1)=-a+b=0 \qquad \therefore -a+b=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

$g(-1)=1-c=0 \qquad \therefore c=1$

(ii) 두 곡선의 $x=-1$에서의 접선이 수직이므로

$f'(-1)g'(-1)=-1$

$3a\cdot(-2+c)=-1,\ -6a+3ac=-1$

위의 식에 $c=1$을 대입하면

$-6a+3a=-1 \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$

$a=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=\frac{1}{3}$

$\therefore 9abc=9\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=1$ 정답_ ④

251

$f(x)=x^2+\frac{1}{2},\ g(x)=-2x^2+ax$에서

$f'(x)=2x,\ g'(x)=-4x+a$

두 곡선 위의 $x=t$인 점에서의 접선이 서로 수직이므로

(i) $f(t)=g(t)$에서 $t^2+\frac{1}{2}=-2t^2+at$

$\therefore at=3t^2+\frac{1}{2}$ ······ ㉠

(ii) $f'(t)g'(t)=-1$에서 $2t(-4t+a)=-1$

$\therefore 8t^2-2at-1=0$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $8t^2-6t^2-1-1=0$

$2t^2-2=0, t^2=1$ $\quad\therefore t=\pm1$

(i) $t=1$일 때, $a=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

(ii) $t=-1$일 때, $-a=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$ $\quad\therefore a=-\frac{7}{2}$

그런데 $a>0$이므로 $a=\frac{7}{2}$ 정답_④

252

$f(x)=x^3$, $g(x)=-x^2+5x+m$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=-2x+5$

두 곡선이 $x=t$ $(t>0)$에서 접한다고 하면

(i) $f(t)=g(t)$에서 $t^3=-t^2+5t+m$ ······ ㉠

(ii) $f'(t)=g'(t)$에서 $3t^2=-2t+5, 3t^2+2t-5=0$

$(t-1)(3t+5)=0$ $\quad\therefore t=1$ $(\because t>0)$

$t=1$을 ㉠에 대입하면

$1=-1+5+m$ $\quad\therefore m=-3$

점 P의 좌표는 $(1, 1)$이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$y-1=3(x-1)$ $\quad\therefore y=3x-2$

따라서 $a=3, b=-2$이므로

$m+a+b=-3+3+(-2)=-2$ 정답_③

253

$f(x)=x^3-1$, $g(x)=x^3+3$에서 $f'(x)=3x^2$, $g'(x)=3x^2$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $y=h(x)$의 접점의 x좌표를 각각 α, β라고 하면

(i) 곡선 $y=f(x)$의 $x=\alpha$에서의 접선의 방정식은

$y-(\alpha^3-1)=3\alpha^2(x-\alpha)$

$\therefore y=3\alpha^2x-2\alpha^3-1$ ······ ㉠

(ii) 곡선 $y=g(x)$의 $x=\beta$에서의 접선의 방정식은

$y-(\beta^3+3)=3\beta^2(x-\beta)$

$\therefore y=3\beta^2x-2\beta^3+3$ ······ ㉡

㉠, ㉡이 일치해야 하므로 $3\alpha^2=3\beta^2$ ······ ㉢

$-2\alpha^3-1=-2\beta^3+3$ ······ ㉣

㉢에서 $\beta=\pm\alpha$이지만 $\beta=\alpha$이면 ㉣을 만족시키지 않으므로

$\beta=-\alpha$

$\beta=-\alpha$를 ㉣에 대입하면 $-2\alpha^3-1=2\alpha^3+3$

$\alpha^3=-1$ $\quad\therefore \alpha=-1$

$\alpha=-1$을 ㉠에 대입하면 $y=3x+1$

$\therefore h(3)=9+1=10$ 정답_①

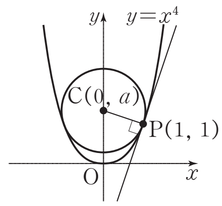
254

$f(x)=x^4$으로 놓으면 $f'(x)=4x^3$

점 $\mathrm{P}(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=4$

원의 중심을 $\mathrm{C}(0, a)$라고 하면 직선

CP의 기울기는 $\frac{1-a}{1-0}=1-a$



이때, 접선과 직선 CP는 수직이므로

$4\cdot(1-a)=-1$ $\quad\therefore a=\frac{5}{4}$

따라서 원의 중심은 $\mathrm{C}\left(0, \frac{5}{4}\right)$이므로 원의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(1-0)^2+\left(1-\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{4}$ 정답_①

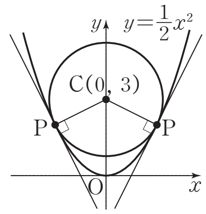
255

$f(x)=\frac{1}{2}x^2$으로 놓으면 $f'(x)=x$

접점을 $\mathrm{P}\left(a, \frac{1}{2}a^2\right)$이라고 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=a$

원의 중심은 $\mathrm{C}(0, 3)$이므로 직선 CP의

기울기는 $\dfrac{\frac{1}{2}a^2-3}{a-0}=\dfrac{a^2-6}{2a}$



이때, 접선과 직선 CP는 수직이므로

$a\cdot\dfrac{a^2-6}{2a}=-1$, $a^2=4$ $\quad\therefore a=\pm2$

따라서 접점 P의 좌표는 $(2, 2)$, $(-2, 2)$이므로 원의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(2-0)^2+(2-3)^2}=\sqrt{5}$ 정답_④

256

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 6]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 6)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(6)=3$이므로 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(0, 6)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)=12x-2x^2+3$에서 $f'(x)=12-4x$이므로

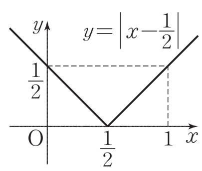
$f'(c)=12-4c=0$ $\quad\therefore c=3$ 정답_③

257

구간 $[0, 1]$에서 롤의 정리가 성립하려면 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$에서 미분가능하여야 하며, $f(0)=f(1)$이어야 한다.

ㄱ. $f(x)=x^3(1-x)$는 다항함수이므로 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$에서 미분가능하며, $f(0)=f(1)=0$이다.

ㄴ. 함수 $y=\left|x-\frac{1}{2}\right|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 연속이고, $f(0)=f(1)=\frac{1}{2}$이지만 $x=\frac{1}{2}$에서



미분가능하지 않다.

ㄷ. $0\le x\le 1$에서 $x+3>0$이므로

$$f(x)=\frac{|x+3|}{x+3}=\frac{x+3}{x+3}=1$$

그러므로 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(1)=1$이다.

따라서 롤의 정리가 성립하는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_ ③

258

함수 $f(x)=x^2+2x$는 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능하므로

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$$

인 c가 구간 $(0,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2+2$이므로 $\dfrac{33-0}{3-0}=3c^2+2$

$c^2=3$ $\quad\therefore c=\sqrt{3}$ $(\because 0<c<3)$ 정답_ ⑤

259

$x\ge 0$일 때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[x,\ x+a]$에서 연속이고, 열린구간 $(x,\ x+a)$에서 미분가능하므로

$\dfrac{f(x+a)-f(x)}{(x+a)-x}=f'(c)$, 즉 $f(x+a)-f(x)=af'(c)$인

c가 구간 $(x,\ x+a)$에 적어도 하나 존재한다.

$x<c<x+a$에서 $x\to\infty$일 때 $c\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x+a)-f(x)\}=\lim_{c\to\infty}af'(c)$$
$$=\lim_{x\to\infty}af'(x)=ab$$

정답_ ④

260

$f(x)=2x^2$에서 $f'(x)=4x$이므로

$f(a+h)-f(a)=hf'(a+kh)$에서

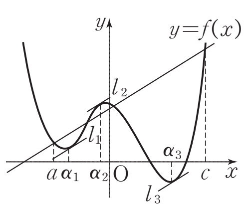
$2(a+h)^2-2a^2=h\cdot 4(a+kh)$, $4ah+2h^2=h\cdot 4(a+kh)$

$2a+h=2(a+kh)$, $h=2kh$ $\quad\therefore k=\dfrac{1}{2}$ 정답_ ②

261

$\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(\alpha)$를 만족시키는 실수 α $(a<\alpha<c)$의 개수가 p이다.

즉, 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(a,\ f(a))$와 $(c,\ f(c))$를 연결한 직선과 기울기가 같은 접선을 찾으면 된다.

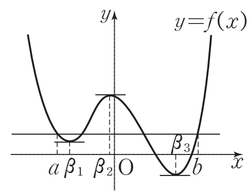


이때, 세 직선 l_1, l_2, l_3의 접점의 x좌표가 구하는 x의 값이므로

$p=3$

$f(a)=f(b)$이므로 $f'(\beta)=0$을 만족시키는 실수 β $(a<\beta<b)$의 개수가 q개이다.

즉, 오른쪽 그림과 같이 접선의 기울기가 0이 되는 x의 값은 3개이므로 $q=3$



$\therefore p+q=3+3=6$

정답_ ④

262

$f(x)=x^3-2x^2+k$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-4x$

$x=1$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3-4=-1$이므로

접선에 수직인 직선의 기울기는 1이다. ··· ❶

$f(1)=1-2+k=k-1$이므로 점 $(1,\ k-1)$을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y-(k-1)=x-1$ $\quad\therefore y=x+k-2$ ······㉠

··· ❷

직선 ㉠의 y절편이 1이므로

$k-2=1$ $\quad\therefore k=3$ ··· ❸

정답_ 3

단계	채점 기준	비율
❶	$x=1$인 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기 구하기	40%
❷	점 $(1,\ k-1)$을 지나는 접선에 수직인 직선의 방정식 구하기	40%
❸	k의 값 구하기	20%

263

조건 (나)의 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}=2$에서 $x\to 2$일 때,

(분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to 2}\{f(x)-g(x)\}=0$이므로 $f(2)-g(2)=0$에서

$f(2)=g(2)$

조건 (가)에서 $g(x)=x^3f(x)-7$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$g(2)=8f(2)-7$, $7g(2)=7$ $\quad\therefore g(2)=1$ ··· ❶

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$
$$=f'(2)-g'(2)=2$$

$\therefore g'(2)=f'(2)-2$ ······㉠

$g(x)=x^3f(x)-7$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$g'(2)=12f(2)+8f'(2)$

$f'(2)-2=12\cdot 1+8f'(2)$ $(\because$ ㉠$)$ $\quad\therefore f'(2)=-2$

㉠에서 $g'(2)=-2-2=-4$ ··· ❷

즉, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$, 즉 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $g'(2)=-4$이므로 접선의 방정식은

$y-1=-4(x-2)$ $\quad\therefore y=-4x+9$ ··· ❸

따라서 $a=-4, b=9$이므로

$a^2+b^2=(-4)^2+9^2=97$ ········ ❹

정답_ 97

단계	채점 기준	비율
❶	$g(2)$의 값 구하기	20%
❷	$g'(2)$의 값 구하기	40%
❸	곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 방정식 구하기	20%
❹	a^2+b^2의 값 구하기	20%

264

$f(x)=x^3-3x^2+7x+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x+7=3(x-1)^2+4$

이므로 $f'(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 4를 갖는다.

이때, $f(1)=1-3+7+2=7$이므로 접점의 좌표는 $(1,\ 7)$이다. ········ ❶

따라서 곡선 $y=f(x)$의 접선 중 기울기가 최소인 직선은 기울기가 4이고, 점 $(1,\ 7)$을 지나는 직선이므로 $y-7=4(x-1)$

$\therefore y=4x+3$ ······㉠

········ ❷

직선 ㉠이 점 $(a,\ a)$를 지나므로

$a=4a+3 \qquad \therefore a=-1$ ········ ❸

정답_ -1

단계	채점 기준	비율
❶	접점의 좌표 구하기	40%
❷	기울기가 최소인 접선의 방정식 구하기	30%
❸	a의 값 구하기	30%

265

$f(x)=x^3-5x^2+6x$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-10x+6$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-5t^2+6t)$라고 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-10t+6$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-5t^2+6t)=(3t^2-10t+6)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-10t+6)x-2t^3+5t^2$ ······㉠

직선 ㉠이 점 $(-1,\ 4)$를 지나므로

$4=-(3t^2-10t+6)-2t^3+5t^2$ ········ ❶

$t^3-t^2-5t+5=0, (t-1)(t^2-5)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=\pm\sqrt{5}$

그런데 기울기가 유리수이므로 $t=1$ ······㉡

········ ❷

㉡을 ㉠에 대입하면 $y=-x+3$

따라서 $a=-1, b=3$이므로 $ab=(-1)\cdot3=-3$ ········ ❸

정답_ -3

단계	채점 기준	비율
❶	접점의 x좌표를 t로 놓고 접선의 방정식을 t로 나타내기	40%
❷	t의 값 구하기	40%
❸	ab의 값 구하기	20%

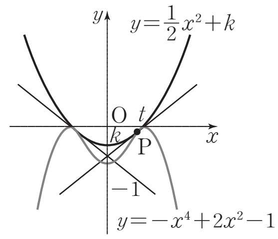
266

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+k$,

$g(x)=-x^4+2x^2-1$로 놓으면

$f'(x)=x,\ g'(x)=-4x^3+4x$

두 접점 중 제4사분면 위의 점을 P라 하고 점 P의 x좌표를 $t\ (t>0)$라고 하면



$f(t)=g(t)$에서 $\frac{1}{2}t^2+k=-t^4+2t^2-1$ ······㉠

········ ❶

$f'(t)=g'(t)$에서 $t=-4t^3+4t,\ 4t^3-3t=0$

$t(4t^2-3)=0 \qquad \therefore t=\frac{\sqrt{3}}{2}\ (\because t>0)$ ········ ❷

$t=\frac{\sqrt{3}}{2}$을 ㉠에 대입하면 $k=-\frac{7}{16}$ ········ ❸

정답_ $-\frac{7}{16}$

단계	채점 기준	비율
❶	두 곡선의 교점의 x좌표를 t로 놓고 $f(t)=g(t)$임을 이용하여 식 세우기	40%
❷	t의 값 구하기	40%
❸	k의 값 구하기	20%

267

$f(x)=x^2-x$는 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 4)$에서 미분가능하다.

평균값 정리에 의해

$k=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)\ (1\le x_1<c<x_2\le4)$인 c가 열린구간 $(1,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다. ········ ❶

이때, $f'(x)=2x-1$에서 $f'(c)=2c-1$이고

$1<c<4$이므로 $2<2c<8, 1<2c-1<7$

$\therefore 1<k<7$ ········ ❷

정답_ $1<k<7$

단계	채점 기준	비율
❶	평균값 정리를 이용하여 $f'(c)=k$인 c가 구간 $(1,\ 4)$에 적어도 하나 존재함을 보이기	50%
❷	실수 k의 값의 범위 구하기	50%

268

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(2,\ 1)$에서의 접선의 방정식이 $y=3x-5$이므로 $f'(2)=3$

$\frac{1}{3n}=h$로 놓으면 $n=\frac{1}{3h}$이고 $n\to\infty$일 때 $h\to0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left\{f\left(2+\frac{1}{3n}\right)-f(2)\right\}=\frac{1}{6}\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\frac{1}{6}f'(2)=\frac{1}{2}$$

정답_ ②

269

$f(x)=x^3+ax^2+x+1$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+2ax+1$

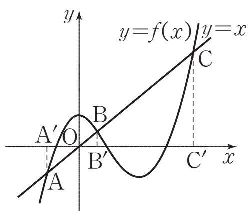
곡선 $y=f(x)$ 위의 어떤 점에서도 기울기가 -1인 접선을 그을 수 없으려면 모든 x에 대하여 $f'(x)\neq -1$이어야 하므로

$3x^2+2ax+1\neq -1$ $\quad\therefore 3x^2+2ax+2\neq 0$

$3x^2+2ax+2=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-6<0$ $\quad\therefore -\sqrt{6}<a<\sqrt{6}$ 정답_ ①

270



오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, C′이라고 하자.

$\overline{\text{AB}}:\overline{\text{BC}}=1:2$에서

$\overline{\text{A'B'}}:\overline{\text{B'C'}}=1:2$

$\text{A}'(a,\ 0)$으로 놓으면

$\text{B}'(a+k,\ 0), \text{C}'(a+3k,\ 0)$ $(k>0)$으로 놓을 수 있다.

이때, 방정식 $f(x)=x$, 즉 $f(x)-x=0$의 세 근이 a, $a+k$, $a+3k$ $(k>0)$이므로

$f(x)-x=(x-a)(x-a-k)(x-a-3k)$

$f(x)=(x-a)(x-a-k)(x-a-3k)+x$

$f'(x)=(x-a-k)(x-a-3k)+(x-a)(x-a-3k)$
$\qquad+(x-a)(x-a-k)+1$

점 A에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(a)=4$

$f'(a)=-k\cdot(-3k)+1=3k^2+1=4$

$\therefore k=1$ $(\because k>0)$

따라서 점 C에서의 접선의 기울기는

$f'(a+3k)=3k\cdot 2k+1=6k^2+1=6\cdot 1^2+7=13$ 정답_ 13

271

$f(x)=x^3-3x^2+2x-2$에서 $f'(x)=3x^2-6x+2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 서로 다른 두 점 $\text{P}(\alpha,\ f(\alpha)), \text{Q}(\beta,\ f(\beta))$에서의 접선이 평행하면 $f'(\alpha)=f'(\beta)$

$3\alpha^2-6\alpha+2=3\beta^2-6\beta+2$, $(\alpha^2-\beta^2)-2(\alpha-\beta)=0$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-2)=0$ $\quad\therefore \alpha+\beta=2$ $(\because \alpha\neq\beta)$

선분 PQ의 중점을 $\text{M}(X,\ Y)$라고 하면

$X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

$Y=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$

$=\dfrac{(\alpha^3-3\alpha^2+2\alpha-2)+(\beta^3-3\beta^2+2\beta-2)}{2}$

$=\dfrac{(\alpha^3+\beta^3)-3(\alpha^2+\beta^2)+2(\alpha+\beta)-4}{2}$

이때, $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=8-6\alpha\beta$,

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4-2\alpha\beta$이므로

$Y=\dfrac{(8-6\alpha\beta)-3(4-2\alpha\beta)+2\cdot 2-4}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2$

따라서 선분 PQ의 중점은 항상 점 $(1,\ -2)$이므로

$a=1, b=-2$ $\quad\therefore a+b=1+(-2)=-1$ 정답_ ②

272

$f(x)=x^2$에서 $f'(x)=2x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\text{P}(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$이므로 접선 l의 방정식은

$y-1=2(x-1)$ $\quad\therefore y=2x-1$ ······㉠

직선 l과 곡선 $y=g(x)$의 접점 Q의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면 점 Q는 직선 l 위의 점이므로 ㉠에서

$b=2a-1$ ······㉡

$g(x)=-(x-3)^2+k=-x^2+6x-9+k$에서

$g'(x)=-2x+6$

㉠에 의해 점 Q에서의 접선의 기울기가 2이므로

$g'(a)=-2a+6=2$ $\quad\therefore a=2$

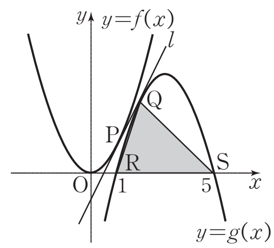
$a=2$를 ㉡에 대입하면 $b=3$

한편, 점 $\text{Q}(2,\ 3)$이 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

$3=-(2-3)^2+k$ $\quad\therefore k=4$

$\therefore g(x)=-x^2+6x-5$

곡선 $y=g(x)$와 x축이 만나는 두 점 R, S의 x좌표는 방정식 $g(x)=0$의 두 근이다.



즉, $-x^2+6x-5=0$에서

$x^2-6x+5=0$

$(x-1)(x-5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

따라서 삼각형 QRS의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6$ 정답_ ⑤

273

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x_1,\ f(x_1))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$이므로

$g(x)=f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1)$

$\therefore F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-f(x_1)-f'(x_1)(x-x_1)$

ㄱ은 옳다.

$F(x_1)=f(x_1)-f(x_1)-f'(x_1)(x_1-x_1)=0$

ㄴ도 옳다.

$F'(x)=f'(x)-f'(x_1)$이므로

$F'(x_1)=f'(x_1)-f'(x_1)=0$

ㄷ도 옳다.

$F(x)$를 $(x-x_1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$F(x)=(x-x_1)^2Q(x)+ax+b$

$F'(x)=2(x-x_1)Q(x)+(x-x_1)^2Q'(x)+a$

위의 두 식의 양변에 $x=x_1$을 대입하면

$F(x_1)=ax_1+b, F'(x_1)=a$

이때, $F(x_1)=0, F'(x_1)=0$이므로 $a=0, b=0$

$\therefore F(x)=(x-x_1)^2Q(x)$

즉, $F(x)$는 $(x-x_1)^2$을 인수로 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

274

$y=x^3$에서 $y'=3x^2$

점 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$에서의 접선의 방정식은

$y-t^3=3t^2(x-t)$ $\therefore 3t^2x-y-2t^3=0$ ……㉠

직선 ㉠과 원점 사이의 거리는

$$f(t)=\frac{|-2t^3|}{\sqrt{(3t^2)^2+(-1)^2}}=\frac{|-2t^3|}{\sqrt{9t^4+1}}$$

$$\alpha=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{|-2t^3|}{t\sqrt{9t^4+1}}$$

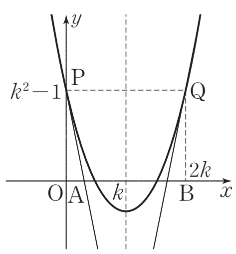
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^2}{\sqrt{9t^4+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{2}{\sqrt{9+\frac{1}{t^4}}}=\frac{2}{\sqrt{9+0}}=\frac{2}{3}$$

$\therefore 30\alpha=30\cdot\frac{2}{3}=20$ 정답_ 20

275

$f(0)=k^2-1, f(2k)=4k^2-4k^2+k^2-1=k^2-1$에서

$\mathrm{P}(0,\ k^2-1), \mathrm{Q}(2k,\ k^2-1)$



$f(x)=x^2-2kx+k^2-1$에서 $f'(x)=2x-2k$

$f'(0)=-2k$이므로 점 $\mathrm{P}(0,\ k^2-1)$에서의 접선의 방정식은

$y-(k^2-1)=-2k(x-0)$

$\therefore y=-2kx+k^2-1$

위의 직선이 x축과 만나는 점은 $\mathrm{A}\left(\frac{k^2-1}{2k},\ 0\right)$

$f'(2k)=2k$이므로 점 $\mathrm{Q}(2k,\ k^2-1)$에서의 접선의 방정식은

$y-(k^2-1)=2k(x-2k)$ $\therefore y=2kx-3k^2-1$

위의 직선이 x축과 만나는 점은 $\mathrm{B}\left(\frac{3k^2+1}{2k},\ 0\right)$

$$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{3k^2+1}{2k}-\frac{k^2-1}{2k}=\frac{2k^2+2}{2k}$$

$$=\frac{k^2+1}{k}=k+\frac{1}{k}$$

이때, $k>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$\overline{\mathrm{AB}}=k+\frac{1}{k}\ge2\sqrt{k\cdot\frac{1}{k}}=2$$

$\left(\text{단, 등호는 } k=\frac{1}{k}\text{, 즉 } k=1\text{일 때 성립}\right)$

따라서 선분 AB의 길이의 최솟값은 2이다. 정답_ 2

276

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ (a<c<b)$$

인 c가 적어도 하나 존재한다.

$f(x)=x^3-6x^2+11x$에서

$f'(x)=3x^2-12x+11$

$\therefore f'(c)=3c^2-12c+11=3(c-2)^2-1$

$0<c<2$일 때, $-1<f'(c)<11$

따라서 평균변화율 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$들의 집합은

$\{f'(c)\,|\,0<c<2\}=\{x\,|\,-1<x<11\}$ 정답_ ②

277

세 점 $(2,\ 0), (3,\ 1), (5,\ 9)$를 지나는 다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 연속이다.

ㄱ은 옳다.

닫힌구간 $[2,\ 5]$에서 $f(x)$의 평균변화율은 $\frac{9-0}{5-2}=3$이므로 평균값정리에 의해 $f'(c)=3$인 c가 열린구간 $(2,\ 5)$에 적어도 하나 존재한다. 즉, $f'(x)=3$인 x가 열린구간 $(2,\ 5)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄴ도 옳다.

닫힌구간 $[3,\ 5]$에서 $f(x)$의 평균변화율은 $\frac{9-1}{5-3}=4$이므로 평균값정리에 의해 $f'(c)=4$인 c가 열린구간 $(3,\ 5)$에 적어도 하나 존재한다. 즉, $f'(x)=4$인 x가 열린구간 $(3,\ 5)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ도 옳다.

$g(x)=f(x)-x+1$에서 $g'(x)=f'(x)-1$

$g'(x)=0$에서 $f'(x)=1$이므로 $f'(x)=1$인 x가 열린구간 $(2,\ 3)$에 존재함을 보이면 된다. 닫힌구간 $[2,\ 3]$에서 $f(x)$의 평균변화율은 $\frac{1-0}{3-2}=1$이므로 평균값 정리에 의해 $f'(c)=1$인 c가 열린구간 $(2,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다. 즉, $f'(x)=1$인 x가 열린구간 $(2,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

278

(1) $f(x)=x^2-6x+8$에서 $f'(x)=2x-6$

$f'(x)=0$에서 $x=3$

x	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x\le3$에서 감소하고, $x\ge3$에서 증가한다.

(2) $f(x)=-2x^2+4x-2$에서 $f'(x)=-4x+4$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	0	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x\le1$에서 증가하고, $x\ge1$에서 감소한다.

(3) $f(x)=x^3+3x^2+3x+4$에서

$f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↗

따라서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

(4) $f(x)=-x^3+6x^2-13x+1$에서

$f'(x)=-3x^2+12x-13=-3(x-2)^2-1<0$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다. 정답_ 풀이 참조

279

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+bx+2$에서 $f'(x)=x^2-ax+b$

함수 $f(x)$가 감소하는 구간이 $[2,\ 3]$이므로

$f'(x)=x^2-ax+b\le0$의 해는 $2\le x\le3$이다.

따라서 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근은 2, 3이므로 근과 계수의 관계에 의해 $2+3=5=a,\ 2\cdot3=6=b$

$\therefore ab=5\cdot6=30$ 정답_ ③

280

$f(x)=-2x^3+3x^2+px-5$에서 $f'(x)=-6x^2+6x+p$

함수 $f(x)$가 증가하는 x의 값의 범위가 $-1\le x\le q$이므로

$f'(x)=-6x^2+6x+p\ge0$의 해는 $-1\le x\le q$이다.

따라서 이차방정식 $-6x^2+6x+p=0$의 두 근은 $-1,\ q$이므로 근과 계수의 관계에 의해

$-1+q=-\frac{6}{-6}=1 \qquad \therefore q=2$

$(-1)\cdot q=(-1)\cdot2=\frac{p}{-6} \qquad \therefore p=12$

$\therefore p+q=12+2=14$ 정답_ 14

다른 풀이

함수 $f(x)$가 증가하는 x의 값의 범위, 즉 $f'(x)\ge0$의 해가 $-1\le x\le q$이므로

$(x+1)(x-q)\le0,\ x^2+(1-q)x-q\le0$

$-6x^2+6(q-1)x+6q\ge0$

위의 식과 $f'(x)=-6x^2+6x+p\ge0$을 비교하면

$q-1=1,\ 6q=p$

$\therefore p=12,\ q=2$

$\therefore p+q=12+2=14$

281

$f(t)=-\frac{2}{3}t^3+3t^2+20t$에서 $f'(t)=-2t^2+6t+20$

약효 $f(t)$가 증가하는 구간은 $f'(t)=-2t^2+6t+20\ge0$의 해이므로

$t^2-3t-10\le0,\ (t+2)(t-5)\le0$

$\therefore -2\le t\le5$

그런데 $0\le t\le8$이므로 $0\le t\le5$

따라서 약효가 증가하는 것은 약을 먹은 후 5시간 동안이다.

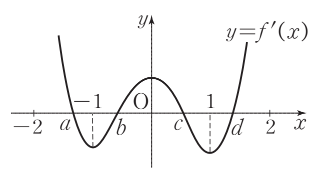
정답_ ⑤

282

구간 $a\le x\le c,\ x\ge g$에서 $f'(x)\ge0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$가 증가하는 구간은 ㄴ, ㅁ이다. 정답_ ②

283



위의 그림과 같이 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 a,b,c,d라고 하면

$f(x)$가 증가하는 구간은 $f'(x)\ge0$이므로

$(-\infty,\ a],\ [b,\ c],\ [d,\ \infty)$

$f(x)$가 감소하는 구간은 $f'(x)<0$이므로

$[a,\ b],\ [c,\ d]$

①~④는 주어진 구간에서 $f(x)$가 증가, 감소하는 구간이 모두 있으므로 옳지 않다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다. 정답_ ⑤

284

$f(x)=x^3-ax^2+(a+6)x+5$에서

$f'(x)=3x^2-2ax+a+6$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3(a+6)\leq0,\ a^2-3a-18\leq0$

$(a+3)(a-6)\leq0$ $\quad\therefore -3\leq a\leq6$ 정답_ ②

285

$f(x)=-x^3+3x^2+ax-2$에서 $\ f'(x)=-3x^2+6x+a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=9+3a\leq0$ $\quad\therefore a\leq-3$

따라서 정수 a의 최댓값은 -3이다. 정답_ ②

286

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(2a-1)x+4$에서

$f'(x)=x^2-2ax+2a-1$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(2a-1)\leq0$

$(a-1)^2\leq0$ $\quad\therefore a=1$ 정답_ ④

287

$f(x)=-3x^3+ax^2-9x+7$에서 $\ f'(x)=-9x^2+2ax-9$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-81\leq0,\ (a+9)(a-9)\leq0$ $\quad\therefore -9\leq a\leq9$

따라서 $M=9,\ m=-9$이므로

$M+m=9+(-9)=0$ 정답_ ③

288

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2-(a-6)x-2$에서

$f'(x)=x^2-2ax-(a-6)$

$x_1<x_2$인 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$를 만족시키려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2+a-6\leq0,\ (a+3)(a-2)\leq0$

$\therefore -3\leq a\leq2$

따라서 구하는 정수 a의 개수는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$로 6이다.

정답_ 6

289

주어진 명제는 함수 $f(x)$가 일대일함수임을 의미한다. 그런데 x^3의 계수가 양수이므로 $f(x)$가 일대일함수이려면 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

$f(x)=x^3+(a-1)x^2+(a-1)x+1$에서

$f'(x)=3x^2+2(a-1)x+a-1$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-3(a-1)\leq0$

$a^2-5a+4\leq0,\ (a-1)(a-4)\leq0$ $\quad\therefore 1\leq a\leq4$

따라서 실수 a의 최댓값은 4, 최솟값은 1이므로 그 합은

$4+1=5$ 정답_ ③

290

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다. 그런데 함수 $f(x)$의 (치역)=(공역)이고, x^3의 계수가 양수이므로 $f(x)$가 일대일대응이려면 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

$f(x)=x^3+ax^2+ax+1$에서 $\ f'(x)=3x^2+2ax+a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a\leq0,\ a(a-3)\leq0$ $\quad\therefore 0\leq a\leq3$ 정답_ ③

291

함수 $f(x)$가 일대일함수이려면 실수 전체의 집합에서 증가하거나 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

$f(x)=ax^3-3(a^2+1)x^2+12ax$에서

$f'(x)=3ax^2-6(a^2+1)x+12a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$ 또는 $f'(x)\leq0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=9(a^2+1)^2-36a^2\leq0,\ a^4-2a^2+1\leq0,\ (a^2-1)^2\leq0$

$a^2-1=0$ $\quad\therefore a=\pm1$

따라서 구하는 합은 $\ 1+(-1)=0$ 정답_ ③

보충 설명

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq0$, a, b, c, d는 상수)에 대하여 다음과 같이 정리해 두도록 하자.

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 $\frac{D}{4}=b^2-3ac$라고 하면

(ⅰ) $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가 $\Longleftrightarrow$ $a>0$, $\frac{D}{4}\le0$

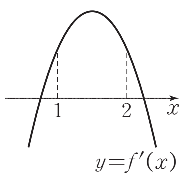
(ⅱ) $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소 $\Longleftrightarrow$ $a<0$, $\frac{D}{4}\le0$

(ⅲ) $f(x)$가 일대일함수 $\Longleftrightarrow$ $\frac{D}{4}\le0$

292

$f(x)=-x^3+2x^2+ax-2$에서 $f'(x)=-3x^2+4x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $[1,\ 2]$에서 증가하려면 $1\le x\le2$에서 $f'(x)\ge0$이어야 하므로 $f'(x)=-3x^2+4x+a$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(ⅰ) $f'(1)=-3+4+a\ge0$에서 $a\ge-1$

(ⅱ) $f'(2)=-12+8+a\ge0$에서 $a\ge4$

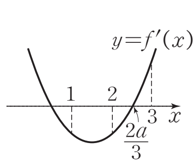
(ⅰ), (ⅱ)의 공통 범위는 $a\ge4$

따라서 구하는 실수 a의 최솟값은 4이다. 정답_ ④

293

$f(x)=x^3-ax^2+1$에서 $f'(x)=3x^2-2ax$

함수 $f(x)$가 구간 $[1,\ 2]$에서 감소하고 구간 $[3,\ \infty)$에서 증가하려면 $1\le x\le2$에서 $f'(x)\le0$, $x>3$에서 $f'(x)\ge0$이어야 하므로 $f'(x)=3x^2-2ax=x(3x-2a)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(ⅰ) $f'(1)=3-2a\le0$에서 $a\ge\frac{3}{2}$

(ⅱ) $f'(2)=12-4a\le0$에서 $a\ge3$

(ⅲ) $f'(3)=27-6a\ge0$에서 $a\le\frac{9}{2}$

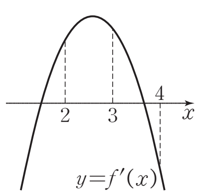
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)의 공통 범위는 $3\le a\le\frac{9}{2}$

따라서 $p=3$, $q=\frac{9}{2}$이므로 $p+q=3+\frac{9}{2}=\frac{15}{2}$ 정답_ $\frac{15}{2}$

294

$f(x)=-\frac{1}{6}x^3+ax+3$에서 $f'(x)=-\frac{1}{2}x^2+a$

함수 $f(x)$가 $2\le x\le3$에서 증가하고, $x\ge4$에서 감소하려면 $2\le x\le3$에서 $f'(x)\ge0$이고, $x\ge4$에서 $f'(x)\le0$이어야 하므로 $f'(x)=-\frac{1}{2}x^2+a$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(ⅰ) $f'(2)=-2+a\ge0$에서 $a\ge2$

(ⅱ) $f'(3)=-\frac{9}{2}+a\ge0$에서 $a\ge\frac{9}{2}$

(ⅲ) $f'(4)=-8+a\le0$에서 $a\le8$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)의 공통 범위는 $\frac{9}{2}\le a\le8$

따라서 구하는 정수 a는 5, 6, 7, 8이므로 그 합은

$5+6+7+8=26$ 정답_ ③

295

$f(x)=2x^3-9x^2+12x+2$에서

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	7	↘	6	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극댓값 $M=7$, $x=2$일 때 극솟값 $m=6$을 가지므로 $Mm=7\cdot6=42$ 정답_ ④

296

$f(x)=2x^3-6x+3$에서

$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	−1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	7	↘	−1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극댓값 7, $x=1$일 때 극솟값 −1을 가지므로 극대가 되는 점 $(-1,\ 7)$과 극소가 되는 점 $(1,\ -1)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(1+1)^2+(-1-7)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$ 정답_ ⑤

297

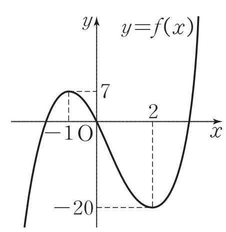
$f(x)=2x^3-3x^2-12x$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

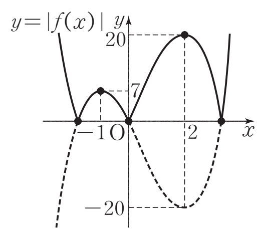
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	−1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	7	↘	−20	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같고, $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프의 x축 아래쪽을 위쪽으로 접어 올린 것이므로 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

따라서 $y=|2x^3-3x^2-12x|$의 극대 또는 극소가 되는 점은 5개이다. 정답_ ③

298

$f(x)=x^3-6x^2+9x+a$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 극솟값을 갖고, 주어진 조건에서 극솟값이 3이므로

$f(3)=27-54+27+a=3$ $\therefore a=3$ 정답_ ②

299

$f(x)=-x^3+\frac{9}{2}x^2-6x+a$에서

$f'(x)=-3x^2+9x-6=-3(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극솟값

$f(1)=-1+\frac{9}{2}-6+a=-\frac{5}{2}+a,$

$x=2$일 때 극댓값 $f(2)=-8+18-12+a=-2+a$를 갖는다.

이때, 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 그 부호가 서로 다르므로

$-\frac{5}{2}+a=-(-2+a),\ 2a=\frac{9}{2}$ $\therefore a=\frac{9}{4}$

$\therefore |4a|=\left|4\cdot\frac{9}{4}\right|=9$ 정답_ 9

300

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-9a^2x$에서

$f'(x)=x^2-9a^2=(x+3a)(x-3a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3a$ 또는 $x=3a$

이때, $a>0$이므로 $-3a<3a$

x	$\cdots$	$-3a$	$\cdots$	$3a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3a$일 때 극댓값

$f(-3a)=-9a^3+27a^3=18a^3$, $x=3a$일 때 극솟값

$f(3a)=9a^3-27a^3=-18a^3$을 갖는다.

이때, 극댓값과 극솟값의 차가 36이므로

$18a^3-(-18a^3)=36,\ a^3=1$ $\therefore a=1$ 정답_ ①

301

$f(x)=x^3-3x^2+a$에서 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 극댓값 $f(0)=a$, $x=2$일 때 극솟값 $f(2)=8-12+a=a-4$를 갖는다. 이때, 모든 극값의 곱이 -4이므로

$a(a-4)=-4,\ a^2-4a+4=0$

$(a-2)^2=0$ $\therefore a=2$ 정답_ ①

302

$f(x)=-x^3+ax^2+bx+1$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$ ······㉠

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값, $x=3$에서 극댓값을 가지므로

$f'(1)=f'(3)=0$

㉠에 $x=1$을 대입하면 $2a+b=3$ ······㉡

㉠에 $x=3$을 대입하면 $6a+b=27$ ······㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=6, b=-9$

$\therefore f(x)=-x^3+6x^2-9x+1$

따라서 극댓값은 $f(3)=-27+54-27+1=1$, 극솟값은

$f(1)=-1+6-9+1=-3$이므로 구하는 합은

$1+(-3)=-2$ 정답_ -2

303

$f(x)=x^3+ax^2+bx-2$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 극댓값 25를 가지므로

(i) $f(-3)=25$에서 $-27+9a-3b-2=25$

$\therefore 3a-b=18$ ······㉠

(ii) $f'(-3)=0$에서 $27-6a+b=0$

$\therefore 6a-b=27$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3, b=-9$

$f(x)=x^3+3x^2-9x-2$에서

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	25	↘	-7	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극솟값 -7을 갖는다. 정답_ ②

304

$g(x)=(x^3+2)f(x)$에서 $g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+2)f'(x)$

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 36을 가지므로

(i) $g(1)=3f(1)=36$에서 $f(1)=12$

(ii) $g'(1)=3f(1)+3f'(1)=0$에서

$f(1)+f'(1)=0 \qquad \therefore f'(1)=-f(1)=-12$

$\therefore f(1)-f'(1)=12-(-12)=24$ 정답_ 24

305

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극솟값 2를 가지므로

$f(0)=2, f'(0)=0 \qquad \therefore c=0, d=2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ 6)$에서의 접선의 기울기가 -6이므로

(i) $f(-1)=6$에서 $-a+b-c+d=6$

$\therefore a-b=-4$ ……㉠

(ii) $f'(-1)=-6$에서 $3a-2b+c=-6$

$\therefore 3a-2b=-6$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2, b=6$

$f(x)=2x^3+6x^2+2$이므로 $f'(x)=6x^2+12x=6x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	…	-2	…	0	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	10	↘	2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 극댓값 10을 갖는다. 정답_ ⑤

306

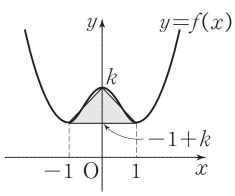
$f(x)=x^4-2x^2+k$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

x	…	-1	…	0	…	1	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$일 때 극솟값 $f(-1)=f(1)=-1+k$를 갖고, $x=0$일 때 극댓값 $f(0)=k$를 갖는다.



이때, 세 점 $(-1,\ -1+k), (0,\ k)$, $(1,\ -1+k)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times\{k-(-1+k)\}=1$ 정답_ 1

307

$f(x)=x^3+3ax^2+(6-3a)x+7$에서

$f'(x)=3x^2+6ax+6-3a$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(3a)^2-3(6-3a)>0$

$a^2+a-2>0, (a-1)(a+2)>0$

$\therefore a<-2$ 또는 $a>1$ 정답_ ②

308

$f(x)=\frac{2}{3}x^3+ax^2+8x+5$에서 $f'(x)=2x^2+2ax+8$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-16>0, (a+4)(a-4)>0 \qquad \therefore a<-4$ 또는 $a>4$

따라서 $\alpha=-4, \beta=4$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(-4)^2+4^2=32$ 정답_ ①

309

$f(x)=2x^3+kx^2+kx+2$에서 $f'(x)=6x^2+2kx+k$

함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=k^2-6k>0, k(k-6)>0 \qquad \therefore k<0$ 또는 $k>6$

따라서 자연수 k의 최솟값은 7이다. 정답_ ③

310

$f(x)=x^3+ax^2+3ax-6$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+3a$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

$f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9a\le0, a(a-9)\le0 \qquad \therefore 0\le a\le9$

따라서 정수 a의 개수는 $0, 1, 2, \cdots, 8, 9$로 10개이다. 정답_ ④

311

$f(x)=-x^3-ax^2+(a-6)x+8$에서

$f'(x)=-3x^2-2ax+a-6$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

$f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2+3(a-6)\le0, a^2+3a-18\le0$

$(a+6)(a-3)\le0 \qquad \therefore -6\le a\le3$

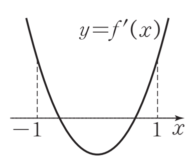
따라서 실수 a의 최댓값은 3, 최솟값은 -6이므로 그 합은

$3+(-6)=-3$ 정답_ ③

312

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+3ax+5$에서 $f'(x)=x^2+2ax+3a$

함수 $f(x)$가 $|x|<1$, 즉 $-1<x<1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $-1<x<1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



$f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

(ⅰ) $\frac{D}{4}=a^2-3a>0$에서 $a(a-3)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>3$

(ⅱ) $f'(-1)=a+1>0$에서 $a>-1$ ……㉠

$f'(1)=5a+1>0$에서 $a>-\frac{1}{5}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a>-\frac{1}{5}$

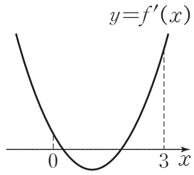
(ⅲ) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-a$이므로 $-1<-a<1$에서 $-1<a<1$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 실수 a의 값의 범위는 $-\frac{1}{5}<a<0$ 정답_①

313

$f(x)=2x^3-6x^2+ax-1$에서 $f'(x)=6x^2-12x+a$

함수 $f(x)$가 $0<x<3$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $0<x<3$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



$f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

(ⅰ) $\frac{D}{4}=36-6a>0$에서 $a<6$

(ⅱ) $f'(0)=a>0$, $f'(3)=18+a>0$에서 $a>0$

(ⅲ) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이고 $0<1<3$이다.

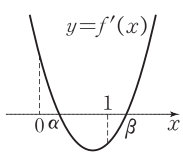
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 실수 a의 값의 범위는 $0<a<6$

따라서 정수 a는 1, 2, 3, 4, 5로 5개이다. 정답_⑤

314

$f(x)=x^3-a^2x^2+ax$에서 $f'(x)=3x^2-2a^2x+a$

이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라고 하면 $0<\alpha<1$, $\beta>1$이어야 하므로



(ⅰ) $f'(0)=a>0$

(ⅱ) $f'(1)=3-2a^2+a<0$에서

$2a^2-a-3>0$, $(a+1)(2a-3)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>\frac{3}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 실수 a의 값의 범위는 $a>\frac{3}{2}$ 정답_③

315

$f(x)=-x^4+2x^3-ax^2$에서

$f'(x)=-4x^3+6x^2-2ax=-2x(2x^2-3x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $2x^2-3x+a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $2x^2-3x+a=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=9-8a>0$에서 $a<\frac{9}{8}$

따라서 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖도록 하는 자연수 a는 1뿐으로 1개이다. 정답_①

316

$f(x)=x^4-4(a-1)x^3+2(a^2-1)x^2$에서

$f'(x)=4x^3-12(a-1)x^2+4(a^2-1)x$

$=4x\{x^2-3(a-1)x+a^2-1\}$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근이 두 개 이하이어야 하므로 이차방정식 $x^2-3(a-1)x+a^2-1=0$ ……㉠

이 중근 또는 허근을 갖거나 $x=0$을 근으로 가져야 한다.

(ⅰ) ㉠이 중근 또는 허근을 가질 때,

㉠의 판별식을 D라고 하면

$D=9(a-1)^2-4(a^2-1)\le 0$, $5a^2-18a+13\le 0$

$(a-1)(5a-13)\le 0$ $\therefore 1\le a\le \frac{13}{5}$

(ⅱ) ㉠이 $x=0$을 근으로 가질 때,

$a^2-1=0$ $\therefore a=\pm 1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 실수 a의 값의 범위는

$a=-1$ 또는 $1\le a\le \frac{13}{5}$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ①이다. 정답_①

317

함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프에서

(ⅰ) $x\to\infty$일 때 $f(x)\to\infty$이므로 $a>0$

(ⅱ) y축과 x축 윗부분에서 만나므로 $d>0$

(ⅲ) $f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 방정식 $f'(x)=0$의 두 근은 -1, 2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$-\frac{2b}{3a}=-1+2=1>0$에서 $\frac{b}{a}<0$이고 $a>0$이므로

$b<0$

$\frac{c}{3a}=(-1)\cdot 2=-2<0$에서 $\frac{c}{a}<0$이고 $a>0$이므로

$c<0$ 정답_ $a>0$, $b<0$, $c<0$, $d>0$

318

함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프에서

(ⅰ) $x\to\infty$일 때 $f(x)\to-\infty$이므로 $a<0$

(ⅱ) y축과 x축 아랫부분에서 만나므로 $d<0$

(ⅲ) $f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근은 α, β이고, α, β는 서로 다른 두 양수이다.

$f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면 이차방정식이 서로 다른 두 양의 근을 가질 조건에 의해

$$\frac{D}{4}=b^2-3ac>0 \qquad \therefore b^2>3ac$$

$$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}>0, \alpha\beta=\frac{c}{3a}>0$$

$a<0$이므로 $\quad b>0, c<0$

따라서 옳은 것은 ④이다. 정답_ ④

319

함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프에서

(i) $x \longrightarrow \infty$일 때 $f(x) \longrightarrow \infty$이므로 $\quad a>0$

(ii) y축과 x축 윗부분에서 만나므로 $\quad d>0$

(iii) $f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β라고 하면 α, β는 극대, 극소인 점의 x좌표이므로 주어진 그래프에서 α, β는 모두 양수이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}>0, \alpha\beta=\frac{c}{3a}>0$$

이때, $a>0$이므로 $\quad b<0, c>0$

함수 $g(x)=ax^2+bx+c$의 그래프는

(iv) $a>0$이므로 ∪자형이고

(v) $a>0, b<0$에서 $x=-\dfrac{b}{2a}>0$이므로 축은 y축의 오른쪽에 있고

(vi) $c>0$이므로 y축과 x축 윗부분에서 만난다.

따라서 함수 $g(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ④이다.

정답_ ④

320

①은 옳다.

함숫값이 정의되지 않은 x좌표는 $x=b, d$의 2개이다.

②는 옳지 않다.

극한값이 존재하지 않는 x좌표는 $x=b,\ f$의 2개이다.

③은 옳다.

미분가능하지 않은 점은 $x=b, c, d, e,\ f$에서의 5개이다.

④도 옳다.

$x=e$에서 극댓값을 갖는다.

⑤도 옳다.

최댓값은 $f(c)$이다.

따라서 옳지 않은 것은 ②이다. 정답_ ②

321

ㄱ은 옳지 않다.

$x=a$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

한편, $x=b$에서는 뾰족점이므로 미분가능하지 않다.

ㄴ은 옳지 않다.

$x=a$에서 미분가능하지 않으므로 접선이 존재하지 않는다.

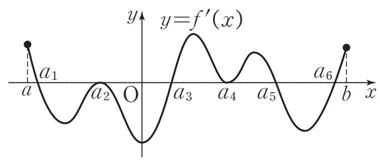
ㄷ은 옳다.

구간 $(a,\ b)$에서 $f(x)$는 감소하므로 $\quad f'(x)<0$

따라서 옳은 것은 ㄷ이다. 정답_ ②

322

다음 그림과 같이 $y=f'(x)$의 그래프의 x가 x축과 만나는 점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6$이라고 하자.



(i) $x=a_1, x=a_5$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 극대이다.

(ii) $x=a_3, x=a_6$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 극소이다.

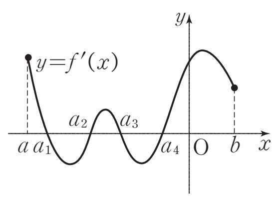
(iii) $x=a_2,\ x=a_4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 극대도 극소도 아니다.

따라서 함수 $y=f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 점은 4개이다.

정답_ ④

323

다음 그림과 같이 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x가 x축과 만나는 점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 a_1, a_2, a_3, a_4라고 하자.



(i) $x=a_1, x=a_3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a_1, x=a_3$에서 극댓값을 갖는다.

(ii) $x=a_2, x=a_4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a_2, x=a_4$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 $m=2, n=2$이므로

$m+n=2+2=4$ 정답_ 4

324

$y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서는 극값을 갖지 않고, $x=0$에서 극댓값 $f(0)=0$을 가지므로 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ②이다. 정답_ ②

325

$g(x)=f(x)-kx$에서 $\quad g'(x)=f'(x)-k$

$f'(x)=x^2-1$이므로 $\quad g'(x)=x^2-1-k$

함수 $g(x)$가 $x=-3$에서 극값을 가지므로

$g'(-3)=9-1-k=0$

$\therefore k=8$

정답_ ⑤

326

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $\quad f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값, $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$f'(-2)=12-4a+b=0 \qquad \therefore -4a+b=-12 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(1)=3+2a+b=0 \qquad \therefore 2a+b=-3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{3}{2}, b=-6$

함수 $f(x)$의 극솟값이 $\frac{9}{2}$이므로

$f(1)=1+a+b+c=1+\frac{3}{2}+(-6)+c=\frac{9}{2} \qquad \therefore c=8$

따라서 $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+8$이므로 극댓값은

$f(-2)=-8+6+12+8=18$

정답_ 18

327

①은 옳지 않다.

$x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이다.

②도 옳지 않다.

$x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 극값을 갖지 않는다.

③은 옳다.

$f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고, $x=1$에서 극소이므로 모두 2개의 극값을 갖는다.

④는 옳지 않다.

구간 $[0, 1]$에서 $f'(x)\le 0$이므로 $f(x)$는 감소하고, 구간 $[1, 2]$에서 $f'(x)\ge 0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

⑤도 옳지 않다.

$x=3$은 방정식 $f'(x)=0$의 중근이지만 방정식 $f(x)=0$의 근인지는 알 수 없다.

따라서 옳은 것은 ③이다.

정답_ ③

328

$f(x)=-2x^3-3x^2+1$에서

$f'(x)=-6x^2-6x=-6x(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=0$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	5	↘	0	↗	1	↘	-4

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-2, 1]$에서 $x=-2$일 때 최댓값 $M=5$, $x=1$일 때 최솟값 $m=-4$를 가지므로

$M-m=5-(-4)=9$

정답_ ④

329

$f(x)=2x^3-9x^2+12x-2$에서

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=2$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(2)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	(-2)	↗	3	↘	(2)

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0, 2)$에서 $x=1$일 때 최댓값 3을 갖고, 최솟값은 없다.

정답_ ③

330

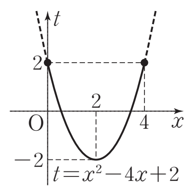
$y=-(x^2-4x+2)^3+12(x^2-4x+2)-1$에서

$x^2-4x+2=t$로 놓으면

$y=-t^3+12t-1$

$t=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $0\le x\le 4$일 때

$-2\le t\le 2$



$f(t)=-t^3+12t-1$로 놓으면

$f'(t)=-3t^2+12=-3(t+2)(t-2)$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=-2$ 또는 $t=2$

t	-2	$\cdots$	2
$f'(t)$	0	$+$	0
$f(t)$	-17	↗	15

따라서 함수 $f(t)$는 $-2\le t\le 2$에서 $t=2$일 때 최댓값 15, $t=-2$일 때 최솟값 -17을 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은

$15+(-17)=-2$

정답_ ①

331

$f(x)=x^3-3x^2+a$에서 $\quad f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2\ (\because 1<x<4)$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a-2$	↘	$a-4$	↗	$a+16$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[1, 4]$에서 $x=4$일 때 최댓값 $16+a$, $x=2$일 때 최솟값 $a-4$를 갖고, 최댓값과 최솟값의 합이 22이므로

$(a+16)+(a-4)=22, 2a=10 \qquad \therefore a=5$

정답_ 5

332

$f(x)=2ax^3-3ax^2+b\ (a>0)$에서

$f'(x)=6ax^2-6ax=6ax(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	b	↘	$-a+b$	↗	$27a+b$

따라서 함수 $f(x)$는 $0\le x\le 3$에서 $x=3$일 때 최댓값 $27a+b$, $x=1$일 때 최솟값 $-a+b$를 갖는다. ($\because a>0$)

이때, 최솟값이 7, 최댓값이 35이므로

$-a+b=7,\ 27a+b=35$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=8$

$\therefore a+b=1+8=9$

정답_ ④

333

$f(x)=2x^3-3x^2+k$에서 $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k-5$	↗	k	↘	$k-1$	↗	$k+4$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-1,\ 2]$에서 $x=-1$일 때 최솟값 $k-5$, $x=2$일 때 최댓값 $k+4$를 갖는다.

이때, 최솟값은 -2이므로 $k-5=-2$ $\therefore k=3$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$k+4=3+4=7$

정답_ ②

334

구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $f(x)$의 최대, 최소는 구간의 양 끝값이나 극값이다. 그런데 $f(x)$가 $x=2$에서 최솟값을 가지므로 $x=2$에서 극소이어야 한다.

$f(x)=x^3-ax^2+b$에서

$f'(x)=3x^2-2ax$

이때, $x=2$에서 극솟값이 10이므로

$f'(2)=0$에서 $12-4a=0$ $\therefore a=3$

$f(2)=10$에서 $8-4a+b=10$ $\therefore b=14$

$f(x)=x^3-3x^2+14$이므로

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	14	↘	10	↗	30

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[0,\ 4]$에서 $x=4$일 때 최댓값 30을 갖는다.

정답_ ③

335

$f(x)=x^3+ax^2+b$에서 $f'(x)=3x^2+2ax$

$f'(1)=9$에서 $3+2a=9$ $\therefore a=3$

$f(x)=x^3+3x^2+b$이므로 $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because 0\le x\le 2$)

x	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	b	↗	$20+b$

함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $20+b$, $x=0$일 때 최솟값 b를 갖는다.

이때, 함수 $f(x)$의 최댓값이 26이므로

$20+b=26$ $\therefore b=6$

따라서 구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 6이다.

정답_ ③

336

$f(x)=-x^3+3x+2$에서

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	4	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-1,\ 2]$에서 $x=-1,\ x=2$일 때 최솟값 0, $x=1$일 때 최댓값 4를 갖는다.

$f(x)=t$로 놓으면 $0\le t\le 4$이고,

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(t)=-t^3+3t+2$

$f'(t)=-3t^2+3=-3(t+1)(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because 0\le t\le 4$)

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	2	↗	4	↘	-50

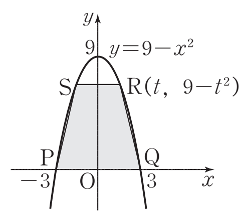
따라서 함수 $f(t)$는 $0\le t\le 4$에서 $t=4$일 때 최솟값 -50을 갖는다.

정답_ ③

337

$9-x^2=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=3$이므로 점 P의 좌표는 $(-3,\ 0)$, 점 Q의 좌표는 $(3,\ 0)$이다.

오른쪽 그림과 같이 점 R의 좌표를 $(t,\ 9-t^2)\ (0<t<3)$으로 놓고 사다리꼴 PQRS의 넓이를 $S(t)$라고 하면



$S(t)=\frac{1}{2}(2t+6)(9-t^2)=-t^3-3t^2+9t+27$

$S'(t)=-3t^2-6t+9=-3(t+3)(t-1)$

$S'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because 0<t<3$)

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(3)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	(27)	↗	32	↘	(0)

따라서 $S(t)$는 $0<t<3$에서 $t=1$일 때 최댓값 32를 가지므로 사다리꼴의 넓이의 최댓값은 32이다. 정답_ 32

338

점 $Q(a,\ b)$는 곡선 $y=x^2$ 위의 점이므로 $b=a^2$

$P(9,\ 8)$이고 $\overline{PQ}=\sqrt{(a-9)^2+(b-8)^2}$이므로

$\overline{PQ}^2=(a-9)^2+(a^2-8)^2=a^4-15a^2-18a+145$

$f(a)=a^4-15a^2-18a+145$라고 하면 $f(a)$가 최소일 때, $\overline{PQ}$의 길이가 최소이다.

$f'(a)=4a^3-30a-18=2(a-3)(2a^2+6a+3)$

이때 곡선 $y=x^2$ 위의 점 중에서 점 $(9,\ 8)$과의 거리가 최소인 점 Q는 제1사분면 위의 점이다.

$\therefore a>0$

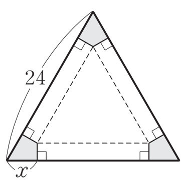
$f'(a)=0$에서 $a=3$

a	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$		$\searrow$	최소	$\nearrow$

따라서 $f(a)$는 $a>0$에서 $a=3$일 때 최솟값을 가지므로

$b=3^2=9 \qquad \therefore 10a+b=10\cdot3+9=39$ 정답_ 39

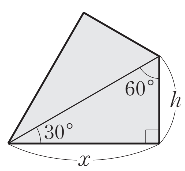
339



오른쪽 그림과 같이 정삼각형의 꼭짓점으로부터 거리가 $x(0<x<12)$인 부분까지 자른다고 하면 밑면은 한 변의 길이가 $24-2x$인 정삼각형이므로 그 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}(24-2x)^2$

또, 상자의 높이를 h라고 하면



$h=x\tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$

따라서 상자의 부피를 $V(x)$라고 하면

$V(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(24-2x)^2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}x=x^3-24x^2+144x$

이때, 상자의 밑면의 한 변의 길이와 높이는 모두 양수이어야 하므로

$24-2x>0,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}x>0 \qquad \therefore 0<x<12$

$V(x)=x^3-24x^2+144x$에서

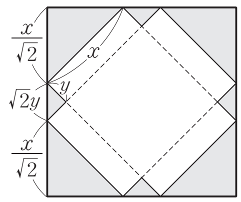
$V'(x)=3x^2-48x+144=3(x-4)(x-12)$

$V'(x)=0$에서 $x=4$ 또는 $x=12$

x	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$	(12)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	256	$\searrow$	

따라서 $V(x)$는 $0<x<12$에서 $x=4$일 때 최댓값 256을 가지므로 상자의 부피의 최댓값은 256이다. 정답_ ③

340



직육면체의 높이를 y라고 하면 오른쪽 그림에서

$2\cdot\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}y=10\sqrt{2}$

$x+y=10 \qquad \therefore y=10-x$

직육면체의 부피를 $V(x)$라고 하면

$V(x)=x^2y=x^2(10-x)=10x^2-x^3$

이때, 직육면체의 각 모서리의 길이는 양수이어야 하므로

$x>0,\ 10-x>0 \qquad \therefore 0<x<10$

$V(x)=10x^2-x^3$에서

$V'(x)=20x-3x^2=x(20-3x)$

$V'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{20}{3}$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{20}{3}$	$\cdots$	(10)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	최대	$\searrow$	

$V(x)$는 $0<x<10$에서 $x=\dfrac{20}{3}$일 때 최대이므로 상자의 부피가 최대가 되도록 하는 밑면의 한 변의 길이는 $x=\dfrac{20}{3}$이다.

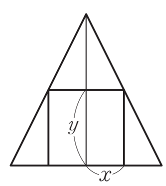
정답_ ③

341

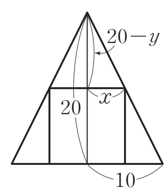
다음 [그림 1]과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x, 높이를 y라고 하면 [그림 2]에서

$10:20=x:(20-y),\ 20x=10(20-y)$

$\therefore y=20-2x$ (단, $0<x<10$)



[그림 1]



[그림 2]

따라서 원기둥의 부피를 $V(x)$라고 하면

$V(x)=\pi x^2y=\pi x^2(20-2x)=2\pi(10x^2-x^3)$

$V'(x)=2\pi(20x-3x^2)=-6\pi x\left(x-\dfrac{20}{3}\right)$

$V'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{20}{3}$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{20}{3}$	$\cdots$	(10)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	최대	$\searrow$	

따라서 $V(x)$는 $0<x<10$에서 $x=\dfrac{20}{3}$일 때 최대이므로 원기둥의 부피를 최대가 되도록 하려면 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 $\dfrac{20}{3}$ cm로 하면 된다. 정답_ ③

342

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

(i) $x>2a$일 때,

$f(x)=x^3+6x^2+15x-30a+3$에서

$f'(x)=3x^2+12x+15=3(x+2)^2+3>0$

따라서 $x>2a$일 때, 함수 $f(x)$는 증가한다.

(ii) $x=2a$일 때,

$f(x)=x^3+6x^2+3$에서

$f'(x)=3x^2+12x=3x(x+4)$

이때, $f'(x)\geq 0$이어야 하므로

$3x(x+4)\geq 0 \quad \therefore x\leq -4$ 또는 $x\geq 0$ ······㉠

(iii) $x<2a$일 때,

$f(x)=x^3+6x^2-15x+30a+3$에서

$f'(x)=3x^2+12x-15=3(x+5)(x-1)$

이때, $f'(x)\geq 0$이어야 하므로

$3(x+5)(x-1)\geq 0 \quad \therefore x\leq -5$ 또는 $x\geq 1$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $x\leq -5$ 또는 $x\geq 1$ ❶

즉, $x\leq 2a$일 때, $x\leq -5$ 또는 $x\geq 1$이 성립해야 함수 $f(x)$가 증가하므로 $2a\leq -5$

$\therefore a\leq -\frac{5}{2}$ ❷

따라서 실수 a의 최댓값은 $-\frac{5}{2}$이다. ❸

정답_ $-\frac{5}{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	$x>2a$, $x=2a$, $x<2a$에서 $f(x)$가 증가하는 x의 값의 범위 구하기	60%
❷	a의 값의 범위 구하기	30%
❸	실수 a의 최댓값 구하기	10%

343

$x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$가 성립하므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다. ❶

$f(x)=ax^3-2x^2+3ax-2$에서

$f'(x)=3ax^2-4x+3a$ ❷

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로

(i) $a>0$ ······㉠

(ii) $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=4-9a^2\leq 0$, $(3a+2)(3a-2)\geq 0$

$\therefore a\leq -\frac{2}{3}$ 또는 $a\geq \frac{2}{3}$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $a\geq \frac{2}{3}$ ❸

정답_ $a\geq \frac{2}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	함수 $f(x)$의 그래프의 개형 파악하기	30%
❷	$f(x)$의 도함수 구하기	20%
❸	a의 값의 범위 구하기	50%

344

함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq 0$, a, b, c, d는 상수)로 놓을 수 있다. ❶

곡선 $y=f(x)$가 원점에 대하여 대칭이 되려면 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이어야 하므로

$a(-x)^3+b(-x)^2+c(-x)+d=-ax^3-bx^2-cx-d$

$2bx^2+2d=0 \quad \therefore b=0, d=0$ ❷

$\therefore f(x)=ax^3+cx$

$f'(x)=3ax^2+c$이고, $x=-1$에서 극댓값을 가지므로

$f'(-1)=3a+c=0$ ······㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=3$인 점에서의 접선의 기울기가 24이므로

$f'(3)=27a+c=24$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, c=-3$ ❸

$f(x)=x^3-3x$이므로

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극댓값 2를 갖는다. ❹

정답_ 2

단계	채점 기준	비율
❶	삼차함수 $f(x)$를 ax^3+bx^2+cx+d로 놓기	10%
❷	조건 (가)를 이용하여 b, d의 값 구하기	20%
❸	조건 (나), (다)를 이용하여 a, c의 값 구하기	45%
❹	함수 $f(x)$의 극댓값 구하기	25%

345

$f(x-y)=f(x)-f(y)+xy(x-y)$의 양변에 $x=y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)-f(0) \quad \therefore f(0)=0$ ❶

$f(0)=0$, $f'(0)=8$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x)-f(h)+xh(x-h)\}-f(x)}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)}{h}-x(x-h)\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(0+h)-f(0)}{h}-x(x-h)\right\}$$

$=f'(0)-x^2=8-x^2$ ❷

$f'(x)=-x^2+8=-(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})$

$f'(x)=0$에서 $x=-2\sqrt{2}$ 또는 $x=2\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2\sqrt{2}$일 때 극댓값, $x=-2\sqrt{2}$일 때 극솟값을 가지므로 $a=2\sqrt{2}, b=-2\sqrt{2}$

$\therefore a^2+b^2=(2\sqrt{2})^2+(-2\sqrt{2})^2=16$ ……… ❸

정답_ 16

단계	채점 기준	비율
❶	$f(0)$의 값 구하기	10%
❷	$f(x)$의 도함수 구하기	50%
❸	a^2+b^2의 값 구하기	40%

346

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+px^2+qx+1$에서

$f'(x)=x^2+2px+q$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 $-\frac{2}{3}$를 가지므로

$f'(1)=1+2p+q=0$에서 $2p+q=-1$ ……㉠

$f(1)=\frac{1}{3}+p+q+1=-\frac{2}{3}$에서 $p+q=-2$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=1, q=-3$ ……… ❶

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$

$f'(x)=x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 0\le x\le 2$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	1	↘	$-\frac{2}{3}$	↗	$\frac{5}{3}$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 동시에 최소이다.

이때, 주어진 구간의 양 끝점에서의 함숫값은 $f(0)=1$, $f(2)=\frac{5}{3}$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $\frac{5}{3}$를 갖는다.

……… ❷

정답_ $\frac{5}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	p, q의 값 구하기	50%
❷	$f(x)$의 최댓값 구하기	50%

347

$y=-x^2+6x=-(x-3)^2+9$이므로 축의 방정식은 $x=3$이다. 점 A의 좌표를 $(a, -a^2+6a)$ $(0<a<3)$라 하고 직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$라고 하면

$S(a)=2(3-a)(-a^2+6a)=2a^3-18a^2+36a$

$S'(a)=6a^2-36a+36=6(a^2-6a+6)$

$S'(a)=0$에서 $a=3-\sqrt{3}$ ($\because 0<a<3$) ……… ❶

a	(0)	$\cdots$	$3-\sqrt{3}$	$\cdots$	(3)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	극대	↘	

따라서 $S(a)$는 $a=3-\sqrt{3}$일 때 극대이면서 동시에 최대이므로 $S(a)$가 최대가 되는 점 A의 x좌표는 $3-\sqrt{3}$이다.

따라서 $p=3, q=3$이므로

$p+q=3+3=6$ ……… ❷

정답_ 6

단계	채점 기준	비율
❶	직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$라 하고 $S'(a)=0$을 만족시키는 a의 값 구하기	60%
❷	$p+q$의 값 구하기	40%

348

$F(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$F'(x)=f'(x)-g'(x)$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>g'(x)$이므로 $F'(x)>0$

즉, 모든 실수 x에 대하여 함수 $F(x)$는 증가한다.

이때, $F(1)=f(1)-g(1)=0$이므로

(ⅰ) $x<1$일 때, $F(x)<0$ $\therefore f(x)<g(x)$

(ⅱ) $x>1$일 때, $F(x)>0$ $\therefore f(x)>g(x)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

정답_ ②

349

함수 $(f\circ g)(x)=x$를 만족시키는 함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 함수 $g(x)$가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 한다.

그런데 함수 $f(x)$의 (치역)=(공역)이고, x^3의 계수가 음수이므로 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+ax^2+(b^2-1)x+1$에서

$f'(x)=-x^2+2ax+b^2-1$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2+b^2-1\le 0$ $\therefore a^2+b^2\le 1$

따라서 a^2+b^2의 최댓값은 1이다.

정답_ ①

350

$f(x)=-x^3-(a+1)x^2-(2a-1)x-3$에서

$f'(x)=-3x^2-2(a+1)x-(2a-1)$

$=-(x+1)(3x+2a-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1-2a}{3}$

이때, $a>2$에서 $\quad -2a<-4, 1-2a<-3$

$\therefore \dfrac{1-2a}{3}<-1$

x	$\cdots$	$\dfrac{1-2a}{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1-2a}{3}$일 때 극솟값, $x=-1$일 때 극댓값을 갖는다.

이때, 곡선 $y=f(x)$의 극대가 되는 점이 x축 위에 있으므로 극댓값은 0이다.

즉, $f(-1)=0$이므로

$f(-1)=1-(a+1)+(2a-1)-3=0$

$a-4=0 \qquad \therefore a=4$

정답_ ②

351

ㄱ은 옳다.

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$에서 $b>a$이므로

$f(b)-f(a)>0 \qquad \therefore f(b)>f(a)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}<0$에서 $c>a$이므로

$f(c)-f(a)<0 \qquad \therefore f(c)<f(a)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

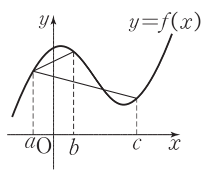
㉠, ㉡에서 $\quad f(c)<f(a)<f(b)$

ㄴ도 옳다.

ㄱ에서 $f(a)<f(b)$, $f(b)>f(c)$이고 $y=f(x)$는 연속함수이므로 구간 (a, c)에서 증가하다가 감소하는 곳이 반드시 있다. 즉, 구간 (a, c)에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ은 옳지 않다.

(반례) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 주어진 조건을 만족시키지만 $x=c$에서의 미분계수가 $x=b$에서의 미분계수보다 크므로 부등식 $f'(c)<f'(b)<f'(a)$는 성립하지 않는다.



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ④

352

삼차함수 $f(x)$가 원점에 대하여 대칭이므로 $f(x)=-f(-x)$가 성립한다.

즉, 삼차함수 $f(x)$는 이차항과 상수항이 없으므로

$f(x)=ax^3+bx$ ($a>0$, a, b는 상수) $\quad\cdots\cdots$ ㉠

로 놓는다.

㉠에서 $f'(x)=3ax^2+b$이고 극소인 점 D의 x좌표가 $\dfrac{1}{2}$이므로

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}a+b=0 \qquad \therefore b=-\dfrac{3}{4}a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

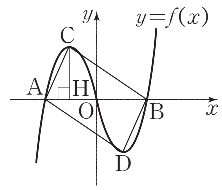
$f(x)=ax^3-\dfrac{3}{4}ax=ax\left(x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$f(x)=0$일 때, $x=0$ 또는 $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$A\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

$\therefore \overline{AB}=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\overline{CH}$의 길이가 극댓값이다.



이때, △ABC와 △BAD는 원점에 대하여 대칭이므로

△ABC=△BAD이고

□ADBC$=\sqrt{3}$이므로

△ABC$=\dfrac{1}{2}$□ADBC에서

$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\overline{CH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \overline{CH}=1$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 1이다.

정답_ ①

353

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=1$에서 $x \to a$일 때 (분모) $\to$ 0이므로

(분자) $\to$ 0이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$에서 $\quad f(a)=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$\displaystyle\lim_{x\to b}\frac{f(x)-1}{x-b}=2$에서 $x \to b$일 때 (분모) $\to$ 0이므로

(분자) $\to$ 0이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to b}\{f(x)-1\}=0$에서 $\quad f(b)=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

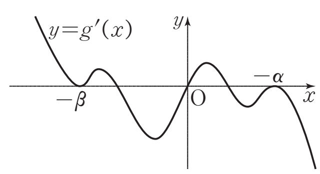
$\displaystyle\therefore \lim_{x\to b}\frac{f(x)-1}{x-b}=\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=f'(b)=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

㉠, ㉢에서 $f(a)=0$, $f(b)=1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(a, 0)$, $(b, 1)$을 지나고, ㉡, ㉣에서 $f'(a)=1$, $f'(b)=2$이므로 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

정답_ ⑤

354

$y=g'(x)$, 즉 $y=-f(-x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 다음 그림과 같다.



ㄱ은 옳다.

$g'(x)$는 $x=-\alpha$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $g'(x)$는 $x=-\alpha$에서 극대이다.

ㄴ은 옳지 않다.

$g'(x)$의 부호가 $x=-\beta$의 좌우에서 바뀌지 않으므로 $g(x)$는 $x=-\beta$에서 극값을 갖지 않는다.

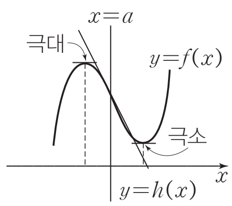
ㄷ도 옳지 않다.

$g'(x)$의 부호가 $x=0$의 좌우에서 음에서 양으로 바뀌므로 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 정답_ ①

355

직선 $x=a$가 곡선 $f(x)$의 극대가 되는 점과 극소가 되는 점 사이를 지나도록 그래프를 그려 보자.



이때, $x=a$에서 곡선 $y=f(x)$의 접선의 방정식을 $y=h(x)$라고 하면 접선 $h(x)$의 기울기는 $f'(a)$이므로 위의 그림과 같이 극대가 되는 점과 극소가 되는 점 사이를 직선 $x=a$가 지나려면 $f'(a)<0$이어야 한다.

$f(x)=x^3-ax^2-100x+10$에서

$f'(x)=3x^2-2ax-100$

즉, $f'(a)=3a^2-2a^2-100<0$이므로

$a^2-100<0$, $(a+10)(a-10)<0$ $\quad\therefore -10<a<10$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 $-9, -8, \cdots, 8, 9$로 19개이다. 정답_ 19

356

$f(x)=x^3-3x+5$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7	↘	3	↗

한편, $f(x)$의 최솟값이 3이므로 $f(x)=x^3-3x+5=3$에서

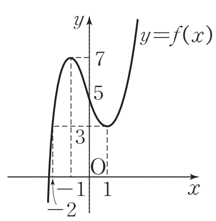
$x^3-3x+2=0$, $(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ (중근)

즉, $f(-2)=3$, $f(1)=3$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구간 $[a, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 3이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위는 $\quad -2\le a\le 1$

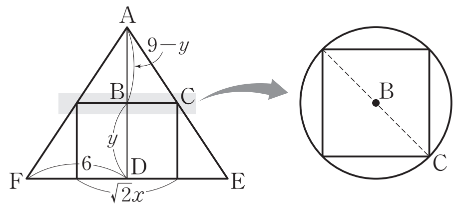
따라서 실수 a의 최댓값은 1이다.



정답_ 1

357

원뿔에 내접하는 직육면체의 밑면의 한 변의 길이를 x, 높이를 y라고 하면 다음 그림과 같이 직육면체의 윗면의 대각선이 작은 원뿔의 밑면인 원의 지름이 된다.



이때, $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$이므로

$(9-y) : \dfrac{\sqrt{2}}{2}x=9 : 6 \qquad \therefore y=9-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}x$

직육면체의 부피를 $V(x)$라고 하면

$V(x)=x^2y=x^2\left(9-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}x\right)=-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}x^3+9x^2$

이때, $0<x<12$, $y=9-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}x>0$에서 $\quad 0<x<6\sqrt{2}$

$V'(x)=-\dfrac{9\sqrt{2}}{4}x^2+18x=-9x\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}x-2\right)$

$V'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=4\sqrt{2}$

x	(0)	$\cdots$	$4\sqrt{2}$	$\cdots$	$(6\sqrt{2})$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	↗	96	↘	0

따라서 함수 $V(x)$는 $0<x<6\sqrt{2}$에서 $x=4\sqrt{2}$일 때 최댓값 96을 가지므로 직육면체의 부피의 최댓값은 96이다. 정답_ ④

06 도함수의 활용 (3)

358

$f(x)=4x^3-3x-k$로 놓으면

$f'(x)=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-k+1$	$\searrow$	$-k-1$	$\nearrow$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

(극댓값)×(극솟값)<0이어야 하므로 $f\left(-\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

$(-k+1)(-k-1)<0$ $\therefore -1<k<1$ 정답_ ④

359

함수 $f(x)=2x^3+3x^2-12x-16$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동시키면 $y=g(x)$의 그래프가 되므로

$g(x)=2x^3+3x^2-12x-16+k$

$g'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	$k+4$	$\searrow$	$k-23$	$\nearrow$

삼차방정식 $g(x)=0$이 중근과 다른 한 실근을 가지려면

(극댓값)×(극솟값)=0이어야 하므로 $g(-2)g(1)=0$

$(k+4)(k-23)=0$ $\therefore k=-4$ 또는 $k=23$ 정답_ -4, 23

360

$f(x)=2x^3+6x^2-18x+a-3$으로 놓으면

$f'(x)=6x^2+12x-18=6(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$a+51$	$\searrow$	$a-13$	$\nearrow$

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면

(극댓값)×(극솟값)>0이어야 하므로 $f(-3)f(1)>0$

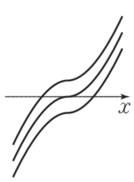
$(a+51)(a-13)>0$ $\therefore a<-51$ 또는 $a>13$

따라서 자연수 a의 최솟값은 14이다. 정답_ ④

361

$f(x)=x^3-ax^2+ax+b$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2ax+a$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 b의 값에 따라 위, 아래로 이동한다. 그러므로 삼차방정식 $f(x)=0$이 모든 상수 b의 값에 대하여 오직 한 개의 실근을 가지려면 함수 $f(x)$가 증가해야 한다.



함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a\leq 0$, $a(a-3)\leq 0$ $\therefore 0\leq a\leq 3$ 정답_ ③

362

곡선 $y=2x^3-3x^2-5x$와 직선 $y=7x+a$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $2x^3-3x^2-5x=7x+a$, 즉

$2x^3-3x^2-12x-a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=2x^3-3x^2-12x-a$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-a+7$	$\searrow$	$-a-20$	$\nearrow$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 중근과 다른 한 실근을 가져야 하므로 $f(-1)f(2)=0$

$(-a+7)(-a-20)=0$

$\therefore a=7$ 또는 $a=-20$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $7+(-20)=-13$ 정답_ ③

363

두 곡선 $y=x^3-3x^2+5x$, $y=3x^2-4x+m$이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $x^3-3x^2+5x=3x^2-4x+m$, 즉

$x^3-6x^2+9x-m=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-6x^2+9x-m$으로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-m+4$	$\searrow$	$-m$	$\nearrow$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

(극댓값)×(극솟값)<0이어야 하므로 $f(1)f(3)<0$

$(-m+4)(-m)<0$, $m(m-4)<0$

$\therefore 0<m<4$ 정답_ ②

364

$f(x)=x^3+3ax-2$로 놓으면 $f'(x)=3x^2+3a$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+3at-2)$라고 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2+3a$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+3at-2)=(3t^2+3a)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+3a)x-2t^3-2$ ……㉠

직선 ㉠이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로 $0=2(3t^2+3a)-2t^3-2$

$\therefore 2t^3-6t^2-6a+2=0$ ……㉡

점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=x^3+3ax-2$에 오직 한 개의 접선을 그

을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉡이 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

$g(t)=2t^3-6t^2-6a+2$로 놓으면

$g'(t)=6t^2-12t=6t(t-2)$

$g'(t)=0$에서 $\quad t=0$ 또는 $t=2$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\nearrow$	$-6a+2$	$\searrow$	$-6a-6$	$\nearrow$

삼차방정식 $g(t)=0$이 오직 한 개의 실근을 가지려면

(극댓값)×(극솟값)>0이어야 하므로 $\quad g(0)g(2)>0$

$(-6a+2)(-6a-6)>0,\ (3a-1)(a+1)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>\frac{1}{3}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 1이다. 정답_ ①

365

$f(x)=x^3-x+2$로 놓으면 $\quad f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-t+2)$라고 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-t+2)=(3t^2-1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-1)x-2t^3+2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 점 $(1,\ a)$를 지나므로 $\quad a=3t^2-1-2t^3+2$

$\therefore 2t^3-3t^2-1+a=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

점 $(1,\ a)$에서 곡선 $y=x^3-x+2$에 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ㉡이 중근과 다른 한 실근을 가져야 한다.

$g(t)=2t^3-3t^2-1+a$로 놓으면

$g'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $\quad t=0$ 또는 $t=1$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\nearrow$	$a-1$	$\searrow$	$a-2$	$\nearrow$

삼차방정식 $g(t)=0$이 중근과 다른 한 실근을 가지려면

(극댓값)×(극솟값)=0이어야 하므로 $\quad f(0)f(1)=0$

$(a-1)(a-2)=0 \qquad \therefore a=1$ 또는 $a=2$

따라서 상수 a의 값의 합은 $\quad 1+2=3$ 정답_ 3

366

방정식 $f(x)=g(x)$에서 $\quad 3x^3-x^2-3x=x^3-4x^2+9x+a$

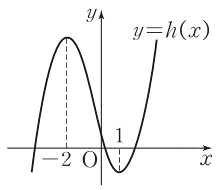
$\therefore 2x^3+3x^2-12x-a=0$

$h(x)=2x^3+3x^2-12x-a$로 놓으면

$h'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $\quad x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	$-a+20$	$\searrow$	$-a-7$	$\nearrow$



삼차방정식 $h(x)=0$이 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 가지려면 함수 $y=h(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로

(i) (극댓값)×(극솟값)<0에서

$h(-2)h(1)<0$

$(-a+20)(-a-7)<0,\ (a-20)(a+7)<0$

$\therefore -7<a<20 \quad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) (y축과 만나는 점)>0에서 $\quad h(0)=-a>0$

$\therefore a<0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad -7<a<0$

따라서 정수 a는 $-6, -5, \cdots, -1$로 6개이다. 정답_ ①

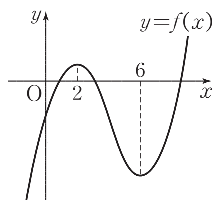
367

$f(x)=x^3-12x^2+36x+a$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-24x+36=3(x-2)(x-6)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2$ 또는 $x=6$

x	$\cdots$	2	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$a+32$	$\searrow$	a	$\nearrow$



삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 양의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로

(i) (극댓값)×(극솟값)<0에서

$f(2)f(6)<0$

$(a+32)a<0 \qquad \therefore -32<a<0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) (y절편)<0에서 $\quad f(0)=a<0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad -32<a<0$

따라서 정수 a는 $-31, -30, -29, \cdots, -1$로 31개이다. 정답_ ①

368

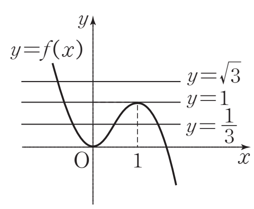
$2x^3-3x^2+a=0$에서 $-2x^3+3x^2=a$이므로

$f(x)=-2x^3+3x^2$으로 놓으면

$f'(x)=-6x^2+6x=-6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$



함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ은 옳다.

$a=\frac{1}{3}$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{3}$이 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 삼차방정식은 서로 다른 세 개의 실근을 갖는다.

ㄴ도 옳다.

$a=1$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$은 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 삼차방정식은 서로 다른 두 개의 실근(한 개는 중근)을 갖는다.

ㄷ도 옳다.

$a=\sqrt{3}$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$은 한 점에서 만나므로 주어진 삼차방정식은 한 개의 실근을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

369

두 함수 $y=x^4-4x+a$, $y=-x^2+2x-a$의 그래프가 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $x^4-4x+a=-x^2+2x-a$, 즉 $x^4+x^2-6x+2a=0$이 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

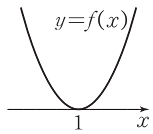
$f(x)=x^4+x^2-6x+2a$로 놓으면

$f'(x)=4x^3+2x-6=2(x-1)(2x^2+2x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$2a-4$	↗

사차방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가지려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(1)=2a-4=0$

$\therefore a=2$ 정답_ ②

370

$x^4+2x^3-x^2+3=-x^4+2x^3+3x^2+k$에서

$2x^4-4x^2+3=k$

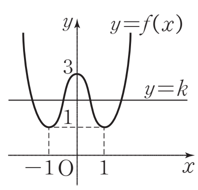
$f(x)=2x^4-4x^2+3$으로 놓으면

$f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗	3	↘	1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수가 최대이려면 $1<k<3$이어야 한다.



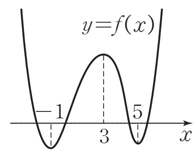
정답_ $1<k<3$

371

$y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

사차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 가지려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 극댓값은 0보다 크고 극솟값은 0보다 작아야 한다.



따라서 사차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 가질 조건은

$f(-1)<0$, $f(3)>0$, $f(5)<0$ 정답_ ②

372

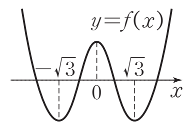
$f(x)=x^4-6x^2+a$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-12x=4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$a-9$	↗	a	↘	$a-9$	↗

사차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가지려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(-\sqrt{3})<0$, $f(\sqrt{3})<0$, $f(0)>0$

$a-9<0$, $a>0$ $\therefore 0<a<9$ 정답_ ③

373

$f(x)=3x^4+8x^3-6x^2-24x+a$로 놓으면

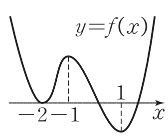
$f'(x)=12x^3+24x^2-12x-24$

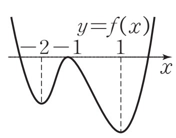
$=12(x+2)(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$a+8$	↗	$a+13$	↘	$a-19$	↗

$f(-2)>f(1)$이므로 사차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.





즉, $f(-2)=a+8=0$ 또는 $f(-1)=a+13=0$

$\therefore a=-8$ 또는 $a=-13$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$(-8)+(-13)=-21$ 정답_ ①

374

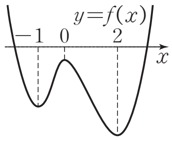
$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+a$로 놓으면

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

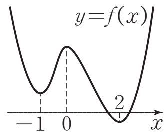
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$a-5$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$a-32$	$\nearrow$

$f(-1)>f(2)$이므로 사차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같아야 한다.



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]에서 $f(0)<0$ $\quad \therefore a<0$ ……㉠

[그림 2]에서 $f(-1)>0$, $f(2)<0$

$a-5>0$, $a-32<0$ $\quad \therefore 5<a<32$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a<0$ 또는 $5<a<32$

따라서 자연수 a는 6, 7, 8, ⋯, 31로 26개이다. 정답_②

375

$\frac{1}{3}x^3-3x\geq -2x+k$에서 $\frac{1}{3}x^3-x-k\geq 0$

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x-k$로 놓으면

$f'(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$

이때, $-1\leq x\leq 1$에서 $f'(x)\leq 0$이므로 함수 $f(x)$는 $-1\leq x\leq 1$에서 감소한다.

$-1\leq x\leq 1$일 때 $f(x)\geq 0$이려면

$f(1)=\frac{1}{3}-1-k\geq 0$ $\quad \therefore k\leq -\frac{2}{3}$

따라서 상수 k의 최댓값은 $-\frac{2}{3}$이다. 정답_②

376

$f(x)=2x^3-5x^2-4x+a$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-10x-4=2(3x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=2$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	a	$\searrow$	$a-12$	$\nearrow$

$x\geq 0$일 때 $f(x)\geq 0$이려면 $a-12\geq 0$ $\quad \therefore a\geq 12$

따라서 상수 a의 최솟값은 12이다. 정답_⑤

377

$f(x)=x^3-3x+k+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$k+3$	$\searrow$	$k-1$	$\nearrow$	$k+3$

$-1\leq x\leq 2$일 때 $f(x)\leq 0$이려면 $k+3\leq 0$ $\quad \therefore k\leq -3$

따라서 상수 k의 최댓값은 -3이다. 정답_①

378

$f(x)=4x^3+3x^2-6x+k$로 놓으면

$f'(x)=12x^2+6x-6=6(x+1)(2x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	$k+5$	$\searrow$	$k-\frac{7}{4}$	$\nearrow$	$(k+1)$

$x<1$일 때 $f(x)<0$이려면 $k+5<0$ $\quad \therefore k<-5$ 정답_①

379

$f(x)=x^4-4p^3x+12$로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4p^3=4(x-p)(x^2+px+p^2)$

이때, $x^2+px+p^2=\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2+\frac{3}{4}p^2>0$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=p$

x	$\cdots$	p	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-3p^4+12$	$\nearrow$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이려면 $-3p^4+12>0$

$p^4-4<0$ $\quad \therefore (p^2+2)(p^2-2)<0$

이때, $p^2+2>0$이므로 $p^2-2<0$

$(p+\sqrt{2})(p-\sqrt{2})<0$ $\quad \therefore -\sqrt{2}<p<\sqrt{2}$

따라서 자연수 p는 1로 1개이다. 정답_①

380

$f(x)\geq g(x)$에서 $f(x)-g(x)\geq 0$

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=x^3+a-3x^2=x^3-3x^2+a$

$h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

이때, $x\geq 2$에서 $h'(x)\geq 0$이므로 함수 $h(x)$는 $x\geq 2$에서 증가한다.

$x\geq 2$일 때 $h(x)\geq 0$이려면

$h(2)=8-12+a\geq 0$ $\quad \therefore a\geq 4$ 정답_③

381

$f(x)=-x^4+4x^2+16x-12$에서

$f'(x)=-4x^3+8x+16=-4(x-2)(x^2+2x+2)$

이때, $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=2$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	20	$\searrow$

한편, $g(x)=x^2+6x+k=(x+3)^2+k-9$이므로 $g(x)$의 최솟값은 $k-9$이다.

임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)\le g(x_2)$를 만족시키려면

$(f(x)$의 최댓값$)\le(g(x)$의 최솟값$)$이어야 하므로

$20\le k-9 \qquad \therefore k\ge 29$

따라서 실수 k의 최솟값은 29이다. 정답_ 29

382

$f(x)=x^3-3x^2+a-2$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=2\ (\because x>0)$

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$a-6$	$\nearrow$

$x>0$일 때, 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=2$보다 항상 위쪽에 있으려면 $(f(x)$의 최솟값$)>2$이어야 하므로

$a-6>2 \qquad \therefore a>8$ 정답_ $a>8$

383

$f(x)=x^{n+1}+n-(n+1)x$로 놓으면

$f'(x)=(n+1)x^n-(n+1)=(n+1)(x^n-1)$

$x>1$일 때, $f'(x)\boxed{\text{(가)}>}0$이므로 구간 $(1,\ \infty)$에서 $f(x)$는 $\boxed{\text{(나)}\ \text{증가}}$한다.

또, $f(1)=1+n-(n+1)=0$이므로 $x>1$일 때 $\ f(x)\boxed{\text{(다)}>}0$

$x^{n+1}+n-(n+1)x>0$

$\therefore x^{n+1}+n>(n+1)x$ 정답_ ①

384

$f(x)=x^n-n(x-1)$로 놓으면

$f'(x)=nx^{n-1}-n=n(x^{n-1}-1)$

$x>1$일 때 $f'(x)\boxed{\text{(가)}>}0$이므로 $f(x)$는 $\boxed{\text{(나)}\ \text{증가}}$한다.

이때, $f(1)=1$이므로 $x>1$일 때 $\ f(x)>0$

$x^n-n(x-1)>0 \qquad \therefore x^n\boxed{\text{(다)}>}n(x-1)$ 정답_ ①

385

$f(x)=x^n-nx\,(x>0)$로 놓으면

$f'(x)=nx^{n-1}-n=n(x^{n-1}-1)$

$\qquad =n(x-1)(x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

따라서 $f(x)$는 $x=\boxed{\text{(가)}\ 1}$에서 극소이며 최소이다.

즉, $f(x)\ge f(1)=\boxed{\text{(나)}\ 1-n}$이므로

$x^n-nx\ge\boxed{\text{(나)}\ 1-n}$

따라서 n이 2 이상의 자연수일 때, $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^n\ge nx+\boxed{\text{(나)}\ 1-n}$이 성립한다. 정답_ ②

386

$f(x)=2^{n-1}(x^n+1)-(x+1)^n$으로 놓으면

$f'(x)=2^{n-1}\cdot nx^{n-1}-n(x+1)^{n-1}$

$\qquad =n\{(\boxed{\text{(가)}\ 2x})^{n-1}-(x+1)^{n-1}\}$

$f'(x)=0$에서 $x=\boxed{\text{(나)}\ 1}$이므로 $\ f(x)$는 $x=\boxed{\text{(나)}\ 1}$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은

$f(1)=2^{n-1}\cdot 2-2^n=0$

$\therefore\ f(x)\ge 0$ (단, 등호는 $x=\boxed{\text{(나)}\ 1}$일 때 성립한다.)

즉, $(x+1)^n\le 2^{n-1}(x^n+1)$

위의 부등식에 $x=\boxed{\text{(다)}\ \dfrac{a}{b}}$를 대입하면

$$\left(\frac{a}{b}+1\right)^n\le 2^{n-1}\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1\right\}$$

양변에 $\boxed{\text{(라)}\ b^n}$을 곱하면 $\quad(a+b)^n\le 2^{n-1}(a^n+b^n)$ 정답_ ③

387

점 P의 시각 t에서의 속도를 v라고 하면

$v=x'=-2t+4$

$t=a$에서 점 P의 속도가 0이므로

$-2a+4=0 \qquad \therefore a=2$ 정답_ ②

388

점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=x'=3t^2-6t$, $a=v'=6t-6$

속도가 45인 순간의 시각을 구하면 $\quad 3t^2-6t=45$

$t^2-2t-15=0$, $(t+3)(t-5)=0$

$\therefore t=5\ (\because t>0)$

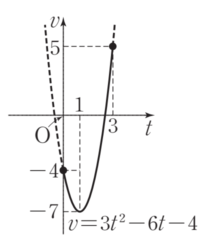
따라서 $t=5$일 때의 가속도는 $\quad 6\cdot 5-6=24$ 정답_ ③

389

점 P의 시각 t에서의 속도를 v라고 하면

$v=x'=3t^2-6t-4=3(t-1)^2-7 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$0\le t\le 3$에서 ㉠의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$-7\le v\le 5 \qquad \therefore 0\le |v|\le 7$

따라서 점 P의 속도와 속력의 최댓값은 각각 5, 7이므로

$a=5$, $b=7$

$\therefore a+b=5+7=12$ 정답_ ②

390

점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=x'=t^2-7t+10,\ \ a=v'=2t-7$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $\quad t^2-7t+10=0$

$(t-2)(t-5)=0 \qquad \therefore t=2$ 또는 $t=5$

따라서 $t=2$일 때 처음으로 운동 방향을 바꾸므로 구하는 가속도는 $2\cdot2-7=-3$ 정답_ ③

391

제동을 걸고 나서 t초 동안 달린 거리를 x m, t초 후의 속도를 v m/초라고 하면

$x=20t-\frac{1}{10}ct^2$, $v=x'=20-\frac{1}{5}ct$

열차가 정지할 때의 속도는 0 m/초이므로

$20-\frac{1}{5}ct=0 \quad \therefore t=\frac{100}{c}$ (초)

열차가 정지할 때까지 달린 거리는

$20\cdot\frac{100}{c}-\frac{1}{10}c\cdot\left(\frac{100}{c}\right)^2=\frac{1000}{c}$(m)

정지선을 넘지 않고 멈추려면 달린 거리가 200 m 이하이어야 하므로 $\frac{1000}{c}\le200 \quad \therefore c\ge5$

따라서 양수 c의 최솟값은 5이다. 정답_ ⑤

392

점 P는 원점을 출발하므로 $t=0$일 때의 위치는 0이다.

$x=t^2+at+b$에 $t=0$, $x=0$을 대입하면 $b=0$

점 P의 시각 t에서의 속도를 v라고 하면 $v=x'=2t+a$

운동 방향을 바꾸는 시각이 $t=3$이므로 $t=3$일 때의 속도는 0이다.

$v=2t+a$에 $t=3$, $v=0$을 대입하면

$2\cdot3+a=0 \quad \therefore a=-6$

따라서 $x=t^2-6t$이므로 점 P가 다시 원점을 지나가게 되는 시각은

$t^2-6t=0$에서 $t(t-6)=0 \quad \therefore t=6$ ($\because t>0$) 정답_ ⑤

393

시각 t에서의 속도를 $v(t)$라고 하면

$v(t)=f'(t)=6t^2-18t+12=6(t-1)(t-2)$

ㄱ은 옳다.

출발할 때에는 $t=0$이므로 $v(0)=12$

ㄴ은 옳지 않다.

$v(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=2$이므로 점 P는 두 번 방향을 바꾼다.

ㄷ도 옳다.

$f(t)=0$에서 $t(2t^2-9t+12)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $2t^2-9t+12=0$

이때, $2t^2-9t+12=2\left(t-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0$이므로 방정식 $f(t)=0$은 $t=0$ 이외의 해를 갖지 않는다.

즉, 점 P는 원점을 출발한 후 다시 원점으로 돌아오지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_ ③

394

시각 t일 때의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라고 하면

$v_P=f'(t)=4t-2$, $v_Q=g'(t)=2t-8$

이때, 두 점 P와 Q가 서로 반대 방향으로 움직이려면 v_P와 v_Q의 부호가 달라야 하므로

$(4t-2)(2t-8)<0$

$(2t-1)(t-4)<0 \quad \therefore \frac{1}{2}<t<4$ 정답_ ①

395

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라고 하면

$v_P=f'(t)=t^2-2$, $v_Q=g'(t)=2t+1$

두 점 P, Q의 속도가 같으므로 $v_P=v_Q$에서

$t^2-2=2t+1$, $t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0 \quad \therefore t=3$ ($\because t\ge0$)

따라서 $t=3$일 때, 두 점 P, Q의 위치는 각각

$f(3)=\frac{1}{3}\cdot3^3-2\cdot3=3$, $g(3)=3^2+3=12$

이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는 $12-3=9$ 정답_ ⑤

396

두 점 P, Q의 t분 후의 속도를 각각 v_1, v_2라고 하면

$v_1=x_1'=6t-18$, $v_2=x_2'=2t-10$

두 점 P, Q가 같은 방향으로 움직이면 속도의 부호가 같으므로

$v_1v_2>0$에서 $(6t-18)(2t-10)>0$

$(t-3)(t-5)>0 \quad \therefore t<3$ 또는 $t>5$

이때, $0<t\le10$이므로 $0<t<3$ 또는 $5<t\le10$

따라서 두 점 P, Q가 같은 방향으로 움직이는 시간은 8분 동안이다. 정답_ ⑤

397

두 점이 만날 때 두 점의 위치는 같으므로

$t^3-2t=2t^2+6t$

$t^3-2t^2-8t=0$, $t(t+2)(t-4)=0 \quad \therefore t=4$ ($\because t>0$)

두 점 P, Q의 t초 후의 속도는 각각 $v_P=3t^2-2$, $v_Q=4t+6$이므로 $t=4$일 때의 속도는 각각

$v_P=3\cdot4^2-2=46$, $v_Q=4\cdot4+6=22$

$\therefore |v_P-v_Q|=|46-22|=24$ 정답_ ①

398

로켓의 t시간 후의 속도를 v km/시, 가속도를 a km/시²이라고 하면 $v=h'=600-10t-t^2$, $a=v'=-10-2t$

로켓이 최고 높이에 도달하였을 때의 속도는 0 km/시이므로

$600-10t-t^2=0$, $t^2+10t-600=0$

$(t+30)(t-20)=0 \quad \therefore t=20$ ($\because t>0$)

따라서 $t=20$일 때의 가속도는

$a=-10-2\cdot 20=-50$ (km/시^2) 정답_ ①

399

물체의 t초 후의 속도를 v m/초, 가속도를 a m/초^{2}이라고 하면

$v=h'=100-10t$, $a=v'=-10$

ㄱ은 옳다.

물체의 가속도는 -10 m/초^{2}으로 항상 일정하다.

ㄴ도 옳다.

물체가 다시 땅에 떨어질 때의 높이는 0 m이므로

$100t-5t^2=0$, $5t(20-t)=0$ $\therefore t=20$ ($\because t>0$)

즉, 20초 후에 다시 땅에 떨어진다.

ㄷ은 옳지 않다.

$h=100t-5t^2=-5(t-10)^2+500$이므로 물체는 $t=10$일 때 최고 500 m까지 올라간다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 정답_ ③

400

ㄱ은 옳다.

$t=a$일 때 전진에서 후진으로, $t=c$일 때 후진에서 전진으로 방향을 바꾼다.

ㄴ도 옳다.

원점을 처음으로 다시 지나는 시각은 $t=b$이므로 이때의 속도는 $f'(b)$이다.

ㄷ도 옳다.

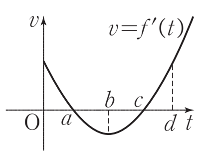
운동 방향을 처음으로 바꾸는 시각은 $t=a$이다.

$t=a$의 좌우에서 속도 v는 양 $\longrightarrow$ 0 $\longrightarrow$ 음으로 감소하므로 $t=a$에서 가속도 v'은 음수이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

보충 설명

오른쪽 그림과 같은 속도 $v=f'(t)$의 그래프에서 가속도는 접선의 기울기이므로 $t=a$에서 가속도는 음수이다.



401

①은 옳다.

1초 후 전진에서 후진으로 운동 방향이 바뀐다.

②도 옳다.

8초 동안 $t=1, 2, 3, 5, 6, 7$일 때의 6번 운동 방향이 바뀐다.

③은 옳지 않다.

출발 후 양의 방향으로 움직이다가 4초까지는 1초, 2초, 3초에서 방향을 바꾼다.

④도 옳다.

출발 후 5초 후의 위치와 7초 후의 위치는 -2로 같다.

⑤도 옳다.

$x(t)$의 그래프가 $t=2$일 때, 극값을 가지므로 출발 후 2초 후의 속력은 0이다. 출발 후 4초 후의 속도는 $x(t)$의 그래프의 $t=4$일 때의 접선의 기울기이고 음수이므로 속도의 절댓값인 속력은 양수이다.

즉, 출발 후 4초 후의 속력이 출발 후 2초 후의 속력보다 크다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 정답_ ③

402

ㄱ은 옳다.

운동 방향을 바꾸는 지점은 속도가 음에서 양으로 또는 양에서 음으로 부호를 바꾸는 지점이다. 주어진 그래프에서 $t=3$, $t=5$일 때 속도의 부호가 바뀌므로 점 P는 출발한 후 3초일 때와 5초일 때 두 번 운동 방향을 바꾼다.

ㄴ은 옳지 않다.

점 P는 1초와 2초 사이에서 일정한 속도로 움직였다.

ㄷ도 옳지 않다.

점 P는 출발 후 $t=3$일 때 처음으로 운동 방향을 바꾸고 3초부터 5초까지는 원점을 향하여 다시 돌아오고 있다. 따라서 점 P가 처음으로 운동 방향을 바꾼 후 원점에 가장 가까울 때는 $t=5$일 때이다.

ㄹ도 옳다.

2초와 3초 사이에서는 속도의 그래프가 일정한 기울기로 감소하는 직선이므로 가속도는 음의 값으로 일정하다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 정답_ ③

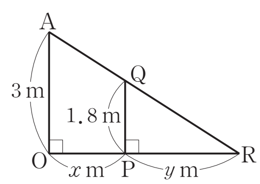
403

$l'=2t+2$이므로 $t=2$에서의 고무줄의 길이의 변화율은

$l'=2\cdot 2+2=6$ 정답_ ④

404

t분 후 사람이 움직인 거리를 x m, 사람의 그림자의 길이를 y m라고 하면 오른쪽 그림에서



$\triangle$OAR$\backsim\triangle$PQR이므로

$3 : 1.8=(x+y) : y$

$3y=1.8x+1.8y$ $\therefore y=\dfrac{3}{2}x$ ……㉠

사람이 80 m/분의 속력으로 걸어가므로 $x=80t$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{3}{2}\cdot 80t=120t$

따라서 그림자 길이의 증가율은

$y'=120$ (m/분) 정답_ ⑤

405

제일 먼저 생긴 원의 t초 후의 반지름의 길이는 $\dfrac{1}{2}t$ m이므로

원의 넓이를 S m^{2}라고 하면

$S=\pi\left(\frac{1}{2}t\right)^2=\frac{\pi}{4}t^2 \qquad \therefore S'=\frac{\pi}{2}t$

따라서 돌을 던진 지 6초 후 가장 바깥쪽의 원의 넓이의 변화율은

$\frac{\pi}{2}\cdot 6=3\pi$(m^2/초) 정답_ ③

406

t초 후의 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각 $(10+3t)$ cm, $(30-2t)$ cm이므로 직사각형의 넓이를 S cm^{2}라고 하면

$S=(10+3t)(30-2t)$

$\therefore S'=3(30-2t)-2(10+3t)=70-12t$

직사각형이 정사각형이 되는 시각은

$10+3t=30-2t \qquad \therefore t=4$

따라서 $t=4$일 때의 넓이의 변화율은

$S'=70-12\cdot 4=22$(cm^2/초) 정답_ ④

407

t초 후의 풍선의 반지름의 길이는 $(2+t)$ cm이므로 부피를 V cm^{3}라고 하면

$V=\frac{4}{3}\pi(2+t)^3$

$\therefore V'=\frac{4}{3}\pi\cdot 3(2+t)^2\cdot 1=4\pi(2+t)^2$

풍선의 반지름의 길이가 6 cm가 되는 시각은

$2+t=6 \qquad \therefore t=4$

따라서 $t=4$일 때의 부피의 변화율은

$V'=4\pi(2+4)^2=144\pi$(cm^3/초) 정답_ ⑤

408

t초 후의 정사각기둥의 밑면의 한 변의 길이는 $(t+2)$ cm이고 높이는 $(10-t)$ cm이므로 정사각기둥의 부피를 V cm^{3}라고 하면

$V=(t+2)^2(10-t)$

$\therefore V'=2(t+2)(10-t)-(t+2)^2$

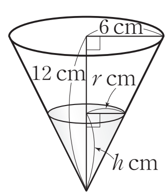
$\qquad =-3t^2+12t+36$

따라서 $t=5$일 때의 정사각기둥의 부피의 변화율은

$V=-3\cdot 5^2+12\cdot 5+36=21$(cm^3/초) 정답_ ④

409

t초 후의 수면의 반지름의 길이를 r cm, 높이를 h cm라고 하면 오른쪽 그림에서



$r:h=6:12$

$6h=12r \qquad \therefore r=\frac{1}{2}h$

수면의 높이가 매초 2 cm의 속도로 올라가므로 t초일 때 수면의 높이는 $h=2t$

$\therefore r=\frac{1}{2}\cdot 2t=t$

t초 후의 물의 부피를 V cm^{3}라고 하면

$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi t^2\cdot 2t=\frac{2}{3}\pi t^3$

$\therefore V'=2\pi t^2$

따라서 $t=4$일 때의 부피의 변화율은

$V'=2\pi\cdot 4^2=32\pi$(cm^3/초) 정답_ ②

410

곡선 $y=-x^3+1$과 직선 $y=-3x+k$가 접하려면 방정식 $-x^3+1=-3x+k$, 즉 $x^3-3x-1+k=0$이 한 실근과 중근을 가져야 한다. ❶

$f(x)=x^3-3x-1+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$k+1$	↘	$k-3$	↗

삼차방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 중근을 가지려면 (극댓값)×(극솟값)=0이어야 하므로 $f(-1)f(1)=0$

$(k+1)(k-3)=0 \qquad \therefore k=-1$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-1+3=2$ ❷

정답_ 2

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 조건을 만족시키기 위한 방정식의 근의 형태 파악하기	50%
❷	k의 값의 합 구하기	50%

411

$f(x)=x^3-2x-5$로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3-2a-5)$라고 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=3a^2-2$

접선의 방정식은 $y-(a^3-2a-5)=(3a^2-2)(x-a)$

$\therefore y=(3a^2-2)x-2a^3-5$ ······㉠

직선 ㉠이 점 $(2,\ k)$를 지나므로

$k=2(3a^2-2)-2a^3-5$

$\therefore 2a^3-6a^2+9+k=0$ ······㉡

점 $(2,\ k)$에서 곡선 $y=f(x)$에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있으려면 a에 대한 방정식 ㉡이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. ❶

$g(a)=2a^3-6a^2+9+k$로 놓으면

$g'(a)=6a^2-12a=6a(a-2)$

$g'(a)=0$에서 $a=0$ 또는 $a=2$

a	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(a)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(a)$	↗	$k+9$	↘	$k+1$	↗

삼차방정식 $g(a)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

(극댓값)×(극솟값)<0이어야 하므로 $g(0)g(2)<0$

$(k+9)(k+1)<0$ $\therefore -9<k<-1$

따라서 정수 k는 $-8, -7, -6, \cdots, -2$로 7개이다. ❷

정답_ 7

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 조건을 만족시키기 위한 방정식의 근의 형태 파악하기	50%
❷	정수 k의 개수 구하기	50%

412

$y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$이어야 한다. ❶

$f(x)>g(x)$에서 $f(x)-g(x)>0$

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=x^4-4x-(-x^2+2x-a)=x^4+x^2-6x+a$ ❷

$h'(x)=4x^3+2x-6=2(x-1)(2x^2+2x+3)$

이때, $2x^2+2x+3=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0$이므로

$h'(x)=0$에서 $x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$a-4$	↗

모든 실수 x에 대하여 $h(x)>0$이려면 $a-4>0$ $\therefore a>4$

따라서 자연수 a의 최솟값은 5이다. ❸

정답_ 5

단계	채점 기준	비율
❶	함수 $f(x)$의 그래프가 $g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있기 위한 조건 파악하기	20%
❷	$f(x)-g(x)$를 x에 대한 함수로 나타내기	20%
❸	a의 최솟값 구하기	60%

413

점 P의 시각 t에서의 속도를 v라고 하면 $v=x'=4t^3-24t+k$

점 P의 운동 방향이 출발한 후 두 번만 바뀌어야 하므로 방정식 $v=4t^3-24t+k=0$은 $t>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. ❶

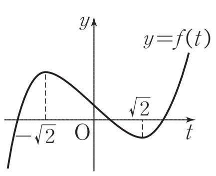
$f(t)=4t^3-24t+k$로 놓으면

$f'(t)=12t^2-24=12(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})$

$f'(t)=0$에서 $t=-\sqrt{2}$ 또는 $t=\sqrt{2}$

t	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗	$k+16\sqrt{2}$	↘	$k-16\sqrt{2}$	↗

삼차방정식 $f(t)=0$이 $t>0$에서 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=f(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



(i) (극댓값)×(극솟값)<0에서 $f(-\sqrt{2})f(\sqrt{2})<0$

$(k+16\sqrt{2})(k-16\sqrt{2})<0$

$\therefore -16\sqrt{2}<k<16\sqrt{2}$ ······㉠

(ii) (y절편)>0에서 $f(0)=k>0$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $0<k<16\sqrt{2}$ ❷

$\sqrt{2}=1.4142$로 계산하면 $0<k<22.6272$

따라서 정수 k의 최댓값은 22이다. ❸

정답_ 22

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 조건을 만족시키기 위한 방정식의 근의 형태 파악하기	30%
❷	k의 값의 범위 구하기	50%
❸	k의 최댓값 구하기	20%

414

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_x, v_y라고 하면

$v_x=x'=2t-2, v_y=y'=2t-4$ ❶

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 속도의 부호가 다르므로 $v_xv_y<0$에서

$(2t-2)(2t-4)<0, (t-1)(t-2)<0$ $\therefore 1<t<2$

따라서 $\alpha=1, \beta=2$이므로 ❷

$t=\alpha\beta=2$에서

$x=2^2-2\cdot2=0, y=2^2-4\cdot2=-4$

이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는 4이다. ❸

정답_ 4

단계	채점 기준	비율
❶	두 점 P, Q의 속도를 t에 대한 함수로 나타내기	20%
❷	α, β의 값 구하기	60%
❸	두 점 P, Q 사이의 거리 구하기	20%

415

$f(t)=t^2+at+b$에서 $f'(t)=2t+a$

$\lim_{t\to1}\frac{f(t)}{t-1}=3$에서 $t\to1$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$

이어야 한다. 즉, $\lim_{t\to1}f(t)=0$에서 $f(1)=0$

$\therefore \lim_{t\to1}\frac{f(t)}{t-1}=\lim_{t\to1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=f'(1)=3$ ❶

$f(1)=0, f'(1)=3$이므로 $1+a+b=0, 2+a=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=-2$ ❷

$f(t)=t^2+t-2, f'(t)=2t+1$이므로 $t=2$에서의 점 P의 위치와 속도는 각각

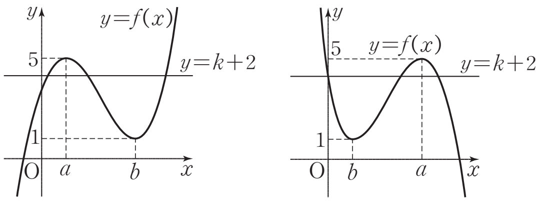
$f(2)=4+2-2=4, f'(2)=4+1=5$ ❸

정답_ 위치: 4, 속도: 5

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(1)$의 값 구하기	40%
❷	a, b의 값 구하기	30%
❸	점 P의 위치와 속도 구하기	30%

416

삼차함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값 5, $x=b$에서 극솟값 1을 가진다고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x)-2=k$에서 $f(x)=k+2$ ……㉠

㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k+2$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$1<k+2<5$ $\therefore -1<k<3$

따라서 정수 k의 최댓값은 2, 최솟값은 0이므로 그 합은

$2+0=2$

정답_②

417

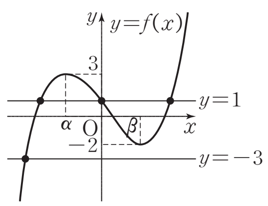
주어진 그래프와 $f(\alpha)=3$, $f(\beta)=-2$로부터 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-2	↗

$\{f(x)\}^2+2f(x)=3$에서 $\{f(x)\}^2+2f(x)-3=0$

$\{f(x)+3\}\{f(x)-1\}=0$ $\therefore f(x)=-3$ 또는 $f(x)=1$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)=-3$의 실근은 1개이고, $f(x)=1$의 실근은 3개이다.



따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

정답_④

418

$x<a$에서 $f'(x)>g'(x)$이므로

$h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$

$a<x<b$에서 $f'(x)<g'(x)$이므로

$h'(x)=f'(x)-g'(x)<0$

$x>b$에서 $f'(x)>g'(x)$이므로

$h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$

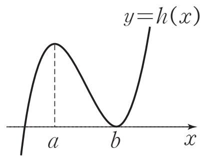
x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ은 옳다.

함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ도 옳다.

$h(b)=0$이면 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄷ도 옳다.

함수 $h(x)$는 닫힌 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고 열린 구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해

$$\frac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(\gamma)$$

를 만족시키는 γ가 열린 구간 $(\alpha,\ \beta)$에 존재한다.

이때, 열린 구간 $(0,\ b)$의 모든 실수 x에 대하여 $h'(x)<5$이므로 $\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(\gamma)<5$

$h(\beta)-h(\alpha)<5(\beta-\alpha)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_⑤

419

ㄱ은 옳지 않다.

$a=b=c$이면 $f'(x)=(x-a)^3$

$f'(x)=0$에서 $x=a$

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

위의 표에서 $f(a)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 실근을 갖지 않는다.

ㄴ은 옳다.

$a=b\neq c\,(a<c)$이면 $f'(x)=(x-a)^2(x-c)$

$f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=c$

x	$\cdots$	a	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

위의 표에서 $f(a)<0$이면 $f(c)<0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

($a>c$일 때도 같은 방법으로 하면 옳음을 보일 수 있다.)

ㄷ도 옳다.

$a<b<c$이고 $f(b)<0$일 때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

위의 표에서 $f(b)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_⑤

420

$x^{n+1}-(n+1)x>n(n-7)$에서

$x^{n+1}-(n+1)x-n(n-7)>0$

$f(x)=x^{n+1}-(n+1)x-n(n-7)$로 놓으면

$f'(x)=(n+1)x^{n}-(n+1)=(n+1)(x^{n}-1)$

이때, $x>1$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 $x>1$에서 증가한다.

따라서 $x>1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이려면

$f(1)=1-(n+1)-n(n-7)=-n^2+6n\geq 0$

$n^2-6n\leq 0,\ n(n-6)\leq 0 \qquad \therefore 0\leq n\leq 6$

따라서 자연수 n은 1, 2, 3, 4, 5, 6으로 6개이다. 정답_ ④

421

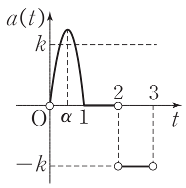
$0<t\leq 1$에서 $v'(t)$는 증가하다가 감소한다.

$t=\alpha\ (0<\alpha<1)$에서 $v'(t)$의 값이 최대라고 하면 주어진 그림에서 $v'(\alpha)>k$

$1\leq t\leq 2$에서 $v(t)=k$이므로 $\quad v'(t)=0$

$2<t<3$에서 $v(t)=-kt+3k$이므로

$v'(t)=-k$



따라서 $a(t)$를 나타내는 그래프의 개형은 ②이다. 정답_ ②

보충 설명

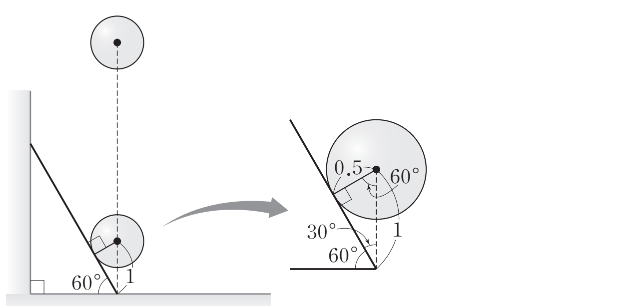
$v(t)$의 그래프가 원점과 점 $(1,\ k)$를 잇는 직선과 열린구간 $(0,\ 1)$에서 한 점에서 만나므로 $y=v(t)$의 그래프에 접하는 기울기가 k인 접선은 2개이다.

두 접선과 $y=v(t)$의 그래프의 접점의 x좌표를 각각 a, b라고 하면 $a<t<b$에서 $v'(t)>k$이다.

따라서 $t=\alpha\ (0<\alpha<1)$에서 $v'(t)$의 값이 최대라고 하면 $v'(\alpha)>k$인 α가 존재한다.

422

공의 반지름의 길이가 0.5 m이므로 다음 그림에서 공이 경사면과 충돌하는 순간, 공의 중심의 높이는 1 m이다.



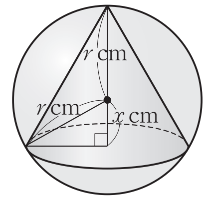
$h(t)=1$일 때의 시각 t를 구하면

$h(t)=21-5t^2=1,\ 5t^2=20 \qquad \therefore t=2\ (\because t>0)$

$h'(t)=-10t$이므로 공이 경사면과 처음으로 충돌하는 순간, 즉 $t=2$일 때의 공의 속도는 $\quad h'(2)=-20$(m/초) 정답_ ①

423

구의 반지름의 길이를 r cm, 구의 중심에서 원뿔의 밑면까지의 거리를 x cm라고 하면 원뿔의 밑면의 반지름의 길이는 $\sqrt{r^2-x^2}$ cm, 원뿔의 높이는 $(r+x)$ cm이므로 x의 값에 따른 원뿔의 부피를 $V(x)$ cm^{3}라고 하면



$$V(x)=\frac{1}{3}\pi(\sqrt{r^2-x^2})^2(r+x)$$
$$=\frac{\pi}{3}(r^2-x^2)(r+x)$$
$$\therefore V'(x)=\frac{\pi}{3}\{-2x(r+x)+(r^2-x^2)\}$$
$$=-\frac{\pi}{3}(3x^2+2rx-r^2)$$
$$=-\frac{\pi}{3}(x+r)(3x-r)$$

$V'(x)=0$에서 $\quad x=\frac{r}{3}\ (\because 0<x<r,\ r>0)$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{r}{3}$	$\cdots$	(r)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	최대	↘	

따라서 원뿔의 부피는 $x=\frac{r}{3}$일 때 최대이므로 최댓값은

$$V\left(\frac{r}{3}\right)=\frac{\pi}{3}\left(r^2-\frac{r^2}{9}\right)\left(r+\frac{r}{3}\right)=\frac{32\pi}{81}r^3(\text{cm}^3)$$

t초 후의 구의 반지름의 길이는 $r=(3+t)$ cm이므로 t초 후의 원뿔의 부피를 $W(t)$ cm^{3}라고 하면

$$W(t)=\frac{32\pi}{81}(3+t)^3$$
$$\therefore W'(t)=\frac{32\pi}{27}(3+t)^2$$

따라서 구의 반지름의 길이가 9 cm가 되는 순간, 즉 $t=6$일 때의 원뿔의 부피의 증가율은

$$W'(6)=\frac{32\pi}{27}(3+6)^2=96\pi(\text{cm}^3/\text{초})$$ 정답_ ⑤

III 적분

07 부정적분

424

(1) $f(x)=(x^2-3x+C)'=2x-3$

(2) $f(x)=(2x^3-3x^2+4x+C)'=6x^2-6x+4$

정답_ (1) $f(x)=2x-3$ (2) $f(x)=6x^2-6x+4$

425

$\int(x+3)f(x)dx=2x^3-54x+C$에서

$(x+3)f(x)=(2x^3-54x+C)'$

$=6x^2-54=6(x+3)(x-3)$

따라서 $f(x)=6(x-3)$이므로

$f(4)=6(4-3)=6$ 정답_ ③

426

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-\frac{f(2-h)-f(2)}{h}\right\}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\right\}$

$=2f'(2)$

$f(x)=\int(x^2-x+6)dx$에서 $f'(x)=x^2-x+6$

따라서 $f'(2)=4-2+6=8$이므로

(주어진 식)$=2f'(2)=2\cdot 8=16$ 정답_ ⑤

427

함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나가 $2x^3-\frac{a}{2}x^2+x$이므로

$\int f(x)dx=2x^3-\frac{a}{2}x^2+x+C$ (C는 적분상수)로 놓을 수 있다.

$\therefore f(x)=\left(2x^3-\frac{a}{2}x^2+x+C\right)'=6x^2-ax+1$

$f'(x)=12x-a$이고 $f'(2)=3$이므로

$24-a=3$ $\therefore a=21$

따라서 $f(x)=6x^2-21x+1$이므로

$f(2)=24-42+1=-17$ 정답_ ⑤

428

$\int f(x)dx=x^3-4x^2+4x+C$에서

$f(x)=(x^3-4x^2+4x+C)'=3x^2-8x+4$

이때, $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$을 만족시키는 상수 α, β의 합은 이차방정식 $f(x)=0$, 즉 $3x^2-8x+4=0$의 두 근의 합과 같으므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=\frac{8}{3}$ 정답_ ④

429

$\frac{d}{dx}\int(2x^2+ax-1)dx=bx^2+3x+c$에서

$2x^2+ax-1=bx^2+3x+c$

위의 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$b=2$, $a=3$, $c=-1$

$\therefore abc=3\cdot 2\cdot(-1)=-6$ 정답_ ②

430

$\int\left\{\frac{d}{dx}(2x^2-3x)\right\}dx=2x^2-3x+C$ (C는 적분상수)이므로

$f(x)=2x^2-3x+C$

이때, $f(1)=0$이므로 $2-3+C=0$ $\therefore C=1$

따라서 $f(x)=2x^2-3x+1$이므로

$f(2)=8-6+1=3$ 정답_ ④

431

$\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-5x+4)\right\}dx=x^2-5x+C$ (C는 적분상수)

방정식 $f(x)=0$은 $x^2-5x+C=0$으로 놓을 수 있다.

이때 주어진 조건에서 $x^2-5x+C=0$의 모든 근의 곱이 -2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$C=-2$

따라서 $f(x)=x^2-5x-2$이므로

$f(1)=1-5-2=-6$ 정답_ ①

432

$f(x)=\int dx+2\int x\,dx+3\int x^2dx+\cdots+n\int x^{n-1}dx$

$=x+2\cdot\frac{1}{2}x^2+3\cdot\frac{1}{3}x^3+\cdots+n\cdot\frac{1}{n}x^n+C$

$=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+C$ (단, C는 적분상수이다.)

이때, $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^n$이므로

$f(1)=n$ 정답_ ②

433

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(ax+2)dx$

$\therefore f(x)=\frac{a}{2}x^2+2x+C$ (단, C는 적분상수이다.)

이때, $f(1)=2$이므로 $\frac{a}{2}+2+C=2$ $\quad\therefore C=-\frac{a}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{a}{2}x^2+2x-\frac{a}{2}$

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $\frac{a}{2}x^2+2x-\frac{a}{2}=0$의 모든 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\dfrac{-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}=-1$ 정답_ ②

434

$$f(x)=\int\left(\frac{1}{2}x-2\right)^3dx$$
$$=2\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x-2\right)^4+C$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-2\right)^4+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수이다.)}$$

이때, $f(2)=\frac{3}{2}$이므로 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot2-2\right)^4+C=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-2\right)^4+1$이므로

$f(0)=\frac{1}{2}(0-2)^4+1=9$ 정답_ ⑤

435

$$f(x)=\int(x+1)(x^2-x+1)dx-\frac{1}{4}\int x(2x-1)^2dx$$
$$=\int(x+1)(x^2-x+1)dx-\int\frac{1}{4}x(2x-1)^2dx$$
$$=\int\left\{(x+1)(x^2-x+1)-\frac{1}{4}x(2x-1)^2\right\}dx$$
$$=\int\left\{(x^3+1)-\left(x^3-x^2+\frac{1}{4}x\right)\right\}dx$$
$$=\int\left(x^2-\frac{1}{4}x+1\right)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{8}x^2+x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수이다.)}$$

이때, $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{8}x^2+x$이므로

$24f(1)=24\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+1\right)=29$ 정답_ ②

436

$$f(x)=\int\frac{6x^2+x-2}{2x-1}dx$$
$$=\int\frac{(2x-1)(3x+2)}{2x-1}dx$$
$$=\int(3x+2)dx$$
$$=\frac{3}{2}x^2+2x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수이다.)}$$

이때, $f(1)=4$이므로 $\frac{3}{2}+2+C=4$ $\quad\therefore C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+2x+\frac{1}{2}$이므로

$f(-1)=\frac{3}{2}-2+\frac{1}{2}=0$ 정답_ ③

437

$$f(x)=\int\frac{x^3-2x}{x-1}dx+\int\frac{2x-1}{x-1}dx$$
$$=\int\frac{x^3-1}{x-1}dx$$
$$=\int\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}dx$$
$$=\int(x^2+x+1)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수이다.)}$$

이때, $f(1)=2$이므로

$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1+C=2$ $\quad\therefore C=\frac{1}{6}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{6}$이므로

$f(0)=\frac{1}{6}$ 정답_ ④

438

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 극댓값, $x=4$일 때 극솟값을 갖는다.

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int 3x(x-4)dx$$
$$=\int(3x^2-12x)dx=x^3-6x^2+C$$

(단, C는 적분상수이다.)

이때, 극댓값이 5이므로

$f(0)=C=5$ $\quad\therefore C=5$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+5$이므로 극솟값은

$f(4)=64-96+5=-27$ 정답_ ④

439

$$f(x)=\int(6x^2+4)dx$$
$$=2x^3+4x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수이다.)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때, $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 6)$을 지나므로

$f(0)=C=6$

따라서 $f(x)=2x^3+4x+6$이므로

$f(1)=2+4+6=12$ 정답_ 12

440

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 x^2에 정비례하므로 $f'(x)=ax^2$ (a는 상수)로 놓으면

$f(x)=\int ax^2dx=\frac{1}{3}ax^3+C$ (단, C는 적분상수이다.)

곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(1,\ -3)$, $(-2,\ 6)$을 지나므로

$f(1)=\frac{1}{3}a+C=-3$, $f(-2)=-\frac{8}{3}a+C=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $C=-2$

따라서 $f(x)=-x^3-2$이므로 $f(0)=-2$ 정답_ ①

441

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $6x^2+2x+3$이므로 $f'(x)=6x^2+2x+3$

$\therefore\ f(x)=\int(6x^2+2x+3)dx$

$=2x^3+x^2+3x+C$ (단, C는 적분상수이다.)

이때, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(-2,\ 3)$을 지나므로

$f(-2)=-16+4-6+C=3$ $\quad\therefore C=21$

$\therefore\ f(x)=2x^3+x^2+3x+21$

$f'(1)=6+2+3=11$, $f(1)=2+1+3+21=27$이므로 $x=1$인 점에서의 접선의 방정식은

$y-27=11(x-1)$ $\quad\therefore y=11x+16$

따라서 $a=11$, $b=16$이므로

$a-b=11-16=-5$ 정답_ ⑤

442

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $2x+1$이므로 $f'(x)=2x+1$

$\therefore\ f(x)=\int(2x+1)dx=x^2+x+C$ (단, C는 적분상수이다.)

이때, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$f(2)=6+C=1$ $\quad\therefore C=-5$

$\therefore\ f(x)=x^2+x-5$

$\mathrm{P}(\alpha,\ 0)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ 0)$이라고 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}$ ……㉠

이때, α, β는 방정식 $x^2+x-5=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-5$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\sqrt{(-1)^2-4\cdot(-5)}=\sqrt{21}$ 정답_ $\sqrt{21}$

443

$f'(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차함수이고, $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 2이므로

$f'(x)=2x(x-2)=2x^2-4x$

$\therefore\ f(x)=\int(2x^2-4x)dx$

$=\frac{2}{3}x^3-2x^2+C$ (단, C는 적분상수이다.)

$f'(x)=0$에서 $2x(x-2)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	C	↘	$C-\frac{8}{3}$	↗

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $M=C$를 갖고, $x=2$에서 극솟값 $m=C-\frac{8}{3}$을 가지므로

$M-m=C-\left(C-\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{3}$ 정답_ ④

444

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 1, 3이므로

$f'(x)=a(x-1)(x-3)$ $(a<0)$

으로 놓을 수 있다.

$\therefore\ f(x)=\int a(x-1)(x-3)dx$

$=a\int(x^2-4x+3)dx$

$=a\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right)+C$ (단, C는 적분상수이다.)

$f'(x)=0$에서 $a(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	$\frac{4}{3}a+C$	↗	C	↘

$f(x)$의 극댓값이 1, 극솟값이 -3이므로

$C=1$, $\frac{4}{3}a+C=-3$ $\quad\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=-x^3+6x^2-9x+1$이므로

$f(2)=-8+24-18+1=-1$ 정답_ ②

445

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $-2x+4$이므로 $f'(x)=-2x+4$

$\therefore\ f(x)=\int(-2x+4)\ dx$

$=-x^2+4x+C$

$=-(x-2)^2+4+C$ (단, C는 적분상수이다.)

이때, 함수 $f(x)$의 최댓값이 6이므로

$4+C=6$ $\quad\therefore C=2$

따라서 $f(x)=-x^2+4x+2$이므로

$f(0)=2$이다. 정답_ ③

446

$F(x)=xf(x)-4x^3-4x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)+xf'(x)-12x^2-8x$

이때, $F'(x)=f(x)$이므로

$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^2-8x$

$xf'(x)=12x^2+8x \qquad \therefore f'(x)=12x+8$

$\therefore f(x)=\int(12x+8)dx$

$=6x^2+8x+C$ (단, C는 적분상수이다.)

한편, $f(1)=10$이므로 $6+8+C=10 \qquad \therefore C=-4$

따라서 $f(x)=6x^2+8x-4$이므로 방정식 $f(x)=0$, 즉 $6x^2+8x-4=0$의 두 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$

정답_ ②

447

$\int f(x)dx=xf(x)+2x^3-2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+6x^2-4x$

$\therefore f'(x)=-6x+4$

$f(x)=\int(-6x+4)dx$

$=-3x^2+4x+C$ (단, C는 적분상수이다.)

이때, $f(1)=4$이므로 $1+C=4 \qquad \therefore C=3$

따라서 $f(x)=-3x^2+4x+3$이므로

$f(2)=-12+8+3=-1$

정답_ ②

448

$F(x)$는 $f(x)=4x-4$의 부정적분이므로

$F(x)=\int f(x)dx=\int(4x-4)dx$

$=2x^2-4x+C$ (단, C는 적분상수이다.)

$F(x)\ge0$에서 $2x^2-4x+C\ge0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $2x^2-4x+C=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=4-2C\le0 \qquad \therefore C\ge2$

이때, $F(0)=C\ge2$이므로 주어진 값 중 $F(0)$의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

정답_ ①

449

$f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$의 양변에 $x=0, y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$

$f(0)=0$, $f'(0)=6$이므로

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=6$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-xh-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-xh}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-x=6-x\end{aligned}$$

$\therefore f(x)=\int(6-x)dx=6x-\frac{1}{2}x^2+C$

(단, C는 적분상수이다.)

이때, $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=6x-\frac{1}{2}x^2$이므로

$f(2)=12-2=10$

정답_ ⑤

450

$\Delta y=(ax+1)\Delta x-(\Delta x)^2$에서 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=ax+1-\Delta x$이므로

$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=ax+1$

$\therefore f(x)=\int(ax+1)dx$

$=\frac{1}{2}ax^2+x+C$ (단, C는 적분상수이다.)

이때, $f(0)=1$, $f(1)=0$이므로

$C=1$, $\frac{1}{2}a+1+C=0 \qquad \therefore a=-4$

따라서 $f(x)=-2x^2+x+1$이므로

$f(-1)=-2-1+1=-2$

정답_ ②

451

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로 $f'(x)=\begin{cases}k & (x<-1)\\4x-1 & (x>-1)\end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases}kx+C_1 & (x\le-1)\\2x^2-x+C_2 & (x>-1)\end{cases}$ (단, C_1, C_2는 적분상수이다.)

이때, $f(-2)=1$이므로 $-2k+C_1=1$

$\therefore C_1=2k+1$

또한, $f(0)=2$이므로 $C_2=2$

한편, 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1+}(2x^2-x+2)=\lim_{x\to-1-}(kx+2k+1)=f(-1)$

$2+1+2=-k+2k+1 \qquad \therefore k=4$

$\therefore C_1=8+1=9$

따라서 $f(x)=\begin{cases}4x+9 & (x\le-1)\\2x^2-x+2 & (x>-1)\end{cases}$이므로

$f(-3)=-12+9=-3$

정답_ -3

452

주어진 그래프에서 $f'(x)=\begin{cases} -3x^2\ (x\le1) \\ 2x-5(x>1) \end{cases}$ 이므로

$f(x)=\begin{cases} -x^3+C_1\ \ (x\le1) \\ x^2-5x+C_2(x>1) \end{cases}$ (단, C_1, C_2는 적분상수이다.)

이때, $f(2)=1$이므로 $4-10+C_2=1$ $\therefore C_2=7$

또, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1+}(x^2-5x+7)=\lim\limits_{x\to1-}(-x^3+C_1)=f(1)$

$1-5+7=-1+C_1$ $\therefore C_1=4$

따라서 $f(x)=\begin{cases} -x^3+4\quad(x\le1) \\ x^2-5x+7\ (x>1) \end{cases}$ 이므로

$f(-2)=8+4=12$ 정답_ ②

453

$f'(x)=4x^2+4x+1$이므로

$f(x)=\int(4x^2+4x+1)dx$

$=\frac{4}{3}x^3+2x^2+x+C_1$ (단, C_1은 적분상수이다.)

이때, $f(1)=2$이므로 $\frac{4}{3}+2+1+C_1=2$ $\therefore C_1=-\frac{7}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{4}{3}x^3+2x^2+x-\frac{7}{3}$이므로

$F(x)=\int\left(\frac{4}{3}x^3+2x^2+x-\frac{7}{3}\right)dx$

$=\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{3}x+C_2$ (단, C_2는 적분상수이다.)

이때, $F(1)=2$이므로 $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{7}{3}+C_2=2$

$\therefore C_2=\frac{17}{6}$

따라서 $F(x)=\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{3}x+\frac{17}{6}$이므로

$6F(0)=6\cdot\frac{17}{6}=17$ 정답_ ④

454

조건 (가)에서 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2x+1$이므로

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int(2x+1)dx$

$\therefore f(x)+g(x)=x^2+x+C_1$ (단, C_1은 적분상수이다.)

이때, $f(0)=1,\ g(0)=-2$이므로

$f(0)+g(0)=1+(-2)=C_1$ $\therefore C_1=-1$

$\therefore f(x)+g(x)=x^2+x-1$ ······㉠

······························ ❶

조건 (나)에서 $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2-4x+1$이므로

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int(3x^2-4x+1)dx$

$\therefore f(x)g(x)=x^3-2x^2+x+C_2$ (단, C_2는 적분상수이다.)

이때, $f(0)g(0)=1\cdot(-2)=C_2$이므로 $C_2=-2$

$\therefore f(x)g(x)=x^3-2x^2+x-2=(x-2)(x^2+1)$ ······㉡

······························ ❷

㉠, ㉡에서 $\begin{cases} f(x)=x-2 \\ g(x)=x^2+1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)=x^2+1 \\ g(x)=x-2 \end{cases}$

그런데 $f(0)=1,\ g(0)=-2$이므로

$f(x)=x^2+1,\ g(x)=x-2$

$\therefore f(1)=1+1=2$ ······························ ❸

정답_ 2

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)+g(x)$의 식 구하기	30%
❷	$f(x)g(x)$의 식 구하기	30%
❸	$f(1)$의 값 구하기	40%

455

$f'(x)=x^2+4x-5$에서

$f(x)=\int(x^2+4x-5)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+2x^2-5x+C$ (단, C는 적분상수이다.) ·········· ❶

$f(3)=13$이므로 $9+18-15+C=13$ $\therefore C=1$ ·········· ❷

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2-5x+1$이므로 $f(x)=0$에서

$\frac{1}{3}x^3+2x^2-5x+1=0$ $\therefore x^3+6x^2-15x+3=0$

위의 방정식의 세 근을 α, β, γ라고 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha\beta\gamma=-\frac{3}{1}=-3$ ······························ ❸

정답_ -3

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)$ 구하기	30%
❷	적분상수 C의 값 구하기	30%
❸	방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱 구하기	40%

456

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $3x^2-12$이므로

$f'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때, $f(x)=\int(3x^2-12)dx=x^3-12x+C$ (C는 적분상수)

이고 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 극솟값 3을 가지므로

$f(2)=8-24+C=3$ $\therefore C=19$ ······························ ❶

따라서 $f(x)=x^3-12x+19$이고 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 극댓값을 가지므로 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(-2)=-8+24+19=35$ ······ ❷

정답_ 35

단계	채점 기준	비율
❶	적분상수 C의 값 구하기	60%
❷	$f(x)$의 극댓값 구하기	40%

457

$f(x+y)=f(x)+f(y)-2xy-2$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-2 \qquad \therefore f(0)=2$

$f(0)=2$, $f'(0)=1$이므로

$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-2}{h}=1$ ······ ❶

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-2xh-2-f(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-2xh-2}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-2}{h}-2x\\ &=1-2x \end{aligned}$$ ······ ❷

$f(x)=\int(1-2x)dx=x-x^2+C$ (단, C는 적분상수이다.)

이때, $f(0)=2$이므로 $C=2$

$\therefore f(x)=-x^2+x+2$ ······ ❸

$f(x)=0$에서 $-x^2+x+2=0 \qquad \therefore x^2-x-2=0$

위의 방정식의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=1, \alpha\beta=-2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1+4=5$ ······ ❹

정답_ 5

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(0)$의 값 구하기	20%
❷	$f'(x)$ 구하기	30%
❸	$f(x)$ 구하기	30%
❹	$\alpha^2+\beta^2$의 값 구하기	20%

458

$f'(x)=x+|x-1|=\begin{cases} 2x-1 & (x\ge 1) \\ 1 & (x<1) \end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases} x^2-x+C_1 & (x\ge 1) \\ x+C_2 & (x<1) \end{cases}$ (단, C_1, C_2는 적분상수이다.)

······ ❶

(i) $f(0)=0$이므로 $C_2=0$

(ii) $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 1+}(x^2-x+C_1)=\lim_{x\to 1-}x=f(1)$

$1-1+C_1=1$

$\therefore C_1=1$ ······ ❷

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^2-x+1 & (x\ge 1) \\ x & (x<1) \end{cases}$이므로

$f(2)=4-2+1=3$ ······ ❸

정답_ 3

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)$를 구간별로 나타내기	40%
❷	각 구간별 적분상수 구하기	40%
❸	$f(2)$의 값 구하기	20%

459

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\cdot 2\\ &=2f'(x)=6x^2-8x \end{aligned}$$

$\therefore f'(x)=3x^2-4x$ ······ ❶

$f(x)=\int(3x^2-4x)dx$

$=x^3-2x^2+C$ (단, C는 적분상수이다.) ······ ❷

$f(x)=0$에서 $x^3-2x^2+C=0$ ······㉠

㉠의 세 근의 곱이 3이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$-C=3 \qquad \therefore C=-3$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2-3$이므로

$f(1)=1-2-3=-4$ ······ ❸

정답_ -4

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)$ 구하기	40%
❷	$f(x)$ 구하기	20%
❸	$f(1)$의 값 구하기	40%

460

ㄱ은 옳지 않다.

(반례) $f(x)=0$, $g(x)=1$일 때,

$\int f(x)g(x)dx=\int 0dx=C$ (단, C는 적분상수이다.)

$\left\{\int f(x)dx\right\}\left\{\int g(x)dx\right\}$

$=\left(\int 0dx\right)\left(\int 1dx\right)$

$=C_1(x+C_2)$ (단, C_1, C_2는 적분상수이다.)

$\therefore \int f(x)g(x)dx \ne \left\{\int f(x)dx\right\}\left\{\int g(x)dx\right\}$

ㄴ도 옳지 않다.

$\int f(x)dx$는 x에 대한 식이고, $\int f(t)dt$는 t에 대한 식이므로 $\int f(x)dx \ne \int f(t)dt$

ㄷ은 옳다.

$\int f(x)dx=\int g(x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=\frac{d}{dx}\left\{\int g(x)dx\right\}$$

$\therefore\ f(x)=g(x)$

따라서 옳은 것은 ㄷ이다. 정답_ ②

461

$f(x)=\int(x-2)(x+2)(x^2+4)dx$

$=\int(x^4-16)dx$

$=\frac{1}{5}x^5-16x+C$ (단, C는 적분상수이다.)

이때, $f(0)=\frac{4}{5}$이므로 $C=\frac{4}{5}$

$f(x)=\frac{1}{5}x^5-16x+\frac{4}{5}$이므로

$f(1)=\frac{1}{5}-16+\frac{4}{5}=-15$

$f'(x)=x^4-16$이므로 $f'(1)=1-16=-15$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{xf(x)-f(1)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{xf(x)-xf(1)+xf(1)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{x\{f(x)-f(1)\}+f(1)(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\right]$$

$$=\lim_{x\to1}\left[\left\{x\cdot\frac{f(x)-f(1)}{x-1}+f(1)\right\}\cdot\frac{1}{x+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\{f'(1)+f(1)\}=\frac{1}{2}\{(-15)+(-15)\}=-15$$

정답_ ④

462

$f'(x)=6x-12$

$F(x)=\int(3x^2-12x+1)dx$

$=x^3-6x^2+x+C$ (단, C는 적분상수이다.)

이때, $F(x)$가 $f'(x)$로 나누어떨어지므로

$F(x)=(6x-12)Q(x)$ ($Q(x)$는 몫)

로 놓으면 $F(2)=0$이다.

즉, $F(2)=8-24+2+C=0$에서 $C=14$

$\therefore\ F(x)=x^3-6x^2+x+14$

한편, 방정식 $F(x)=0$의 세 실근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta+\gamma=6,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1,\ \alpha\beta\gamma=-14$이므로

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=6^2-2\cdot1=34$

$\therefore\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$=6(34-1)+3\cdot(-14)=156$ 정답_ 156

463

함수 $f'(x)$는 삼차함수이고

$f'(-\sqrt{2})=f'(0)=f'(\sqrt{2})=0$이므로

$f'(x)=kx(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$=kx^3-2kx$ (k는 $k>0$인 상수)

로 놓을 수 있다.

$f(x)=\int(kx^3-2kx)dx$

$=\frac{k}{4}x^4-kx^2+C$ (단, C는 적분상수이다.)

이때, $f(0)=1$이므로 $f(0)=C=1$

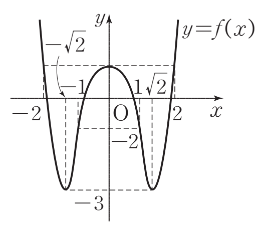
$f(x)=\frac{k}{4}x^4-kx^2+1$에서 $f(\sqrt{2})=-3$이므로

$f(\sqrt{2})=k-2k+1=-3$ $\therefore\ k=4$

$\therefore f(x)=x^4-4x^2+1$

x		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-3	↗	1	↘	-3	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



$f(0)=1>0$,

$f(-2)=f(2)=1>0$,

$f(-1)=f(1)=-2<0$이므로

$f(m)f(m+1)<0$을 만족시키는 정수 m은 $-2, -1, 0, 1$이다.

따라서 정수 m의 값의 합은

$(-2)+(-1)+0+1=-2$ 정답_ ①

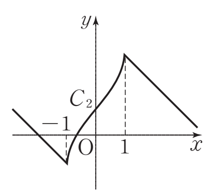
464

함수 $y=f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로

$$f'(x)=\begin{cases}-1 & (x<-1)\\ x^2 & (-1<x<1)\\ -1 & (x>1)\end{cases}$$ 에서

$$f(x)=\begin{cases}-x+C_1 & (x<-1)\\ \frac{1}{3}x^3+C_2 & (-1\le x\le 1)\\ -x+C_3 & (x>1)\end{cases}$$ (단, C_1, C_2, C_3은 적분상수이다.)

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ은 옳다.

함수 $y=f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ은 옳지 않다.

y축에 대하여 대칭이 아니므로 $f(x)=f(-x)$라고 할 수 없다.

ㄷ도 옳다.

$f(1)>f(0)$이므로 $f(0)=0$이면 $f(1)>0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_ ④

08 정적분

465

$\int_1^4 (t-2)(4t-2)dt$

$=\int_1^4 (4t^2-10t+4)dt=\left[\frac{4}{3}t^3-5t^2+4t\right]_1^4$

$=\left(\frac{256}{3}-80+16\right)-\left(\frac{4}{3}-5+4\right)=21$ 정답_①

466

$\int_0^1 \left(\frac{x^4}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$=\int_0^1 \frac{x^4-1}{x^2+1}dx=\int_0^1 \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1}dx$

$=\int_0^1 (x^2-1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$ 정답_②

467

$\int_0^1 (ax^2+1)dx=\left[\frac{a}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{a}{3}+1=6$

$\therefore a=15$ 정답_⑤

468

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (6x^2+2ax)dx=\left[2x^3+ax^2\right]_0^1=2+a$

$f(1)=6+2a$

$\int_0^1 f(x)dx=f(1)$이므로 $2+a=6+2a$ $\therefore a=-4$

정답_①

469

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (ax+b)dx$

$=\left[\frac{1}{2}ax^2+bx\right]_0^1=\frac{1}{2}a+b=1$ ……㉠

$\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 (ax^2+bx)dx$

$=\left[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2\right]_0^1=\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b=2$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=18, b=-8$

$\therefore a+b=18+(-8)=10$ 정답_③

470

$y=4x^3-12x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하면

$y-k=4x^3-12x^2$, $y=4x^3-12x^2+k$

$\therefore f(x)=4x^3-12x^2+k$

$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3 (4x^3-12x^2+k)dx$

$=\left[x^4-4x^3+kx\right]_0^3$

$=81-108+3k$

$=-27+3k=0$

$\therefore k=9$ 정답_9

471

$\int_1^2 (3x^2+2ax+2)dx=\left[x^3+ax^2+2x\right]_1^2$

$=(8+4a+4)-(1+a+2)$

$=3a+9$

$3a+9>6$에서 $3a>-3$ $\therefore a>-1$

따라서 정수 a의 최솟값은 0이다. 정답_③

472

$\int_0^2 f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^2=f(2)-f(0)$

$=0-2=-2$ 정답_①

473

$\int_{-1}^2 (x^2+1)dx-2\int_{-1}^2 (x-x^2)dx$

$=\int_{-1}^2 \{(x^2+1)-2(x-x^2)\}dx$

$=\int_{-1}^2 (3x^2-2x+1)dx=\left[x^3-x^2+x\right]_{-1}^2$

$=(8-4+2)-(-1-1-1)=9$ 정답_②

474

$\int_0^6 \frac{x^3}{x-2}dx-\int_0^6 \frac{8}{x-2}dx$

$=\int_0^6 \frac{x^3-8}{x-2}dx=\int_0^6 \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}dx$

$=\int_0^6 (x^2+2x+4)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+4x\right]_0^6$

$=(72+36+24)-0=132$ 정답_②

475

$\int_0^a \{f(x)+g(x)\}dx+\int_0^a \{f(x)-g(x)\}dx$

$=2\int_0^a f(x)dx$

즉, $7+3=2\int_0^a f(x)dx$ $\therefore \int_0^a f(x)dx=5$

또,

$\int_0^a \{f(x)+g(x)\}dx-\int_0^a \{f(x)-g(x)\}dx$

$=2\int_0^a g(x)dx$

즉, $7-3=2\int_0^a g(x)dx$ $\therefore \int_0^a g(x)dx=2$

$\therefore \int_0^a \{3f(x)+g(x)\}dx = 3\int_0^a f(x)dx + \int_0^a g(x)dx$
$= 3\cdot5+2=17$ 정답_ 17

476

$\int_2^4 (x+1)(x^2-x+1)dx + \int_4^3 (x^3+1)dx$
$= \int_2^4 (x^3+1)dx + \int_4^3 (x^3+1)dx$
$= \int_2^3 (x^3+1)dx = \left[\frac{1}{4}x^4+x\right]_2^3$
$= \left(\frac{81}{4}+3\right) - (4+2) = \frac{69}{4}$ 정답_ ③

477

$\int_0^a (2x-3)dx + \int_a^{2a} (2x-3)dx = \int_0^{2a} (2x-3)dx$
$= \left[x^2-3x\right]_0^{2a} = 4a^2-6a$
즉, $4a^2-6a=4$, $2a^2-3a-2=0$, $(2a+1)(a-2)=0$
$\therefore a=2$ ($\because a>0$) 정답_ ④

478

$\int_1^4 f(x)dx - \int_2^4 f(x)dx + \int_{-2}^1 f(x)dx$
$= \int_{-2}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx + \int_4^2 f(x)dx$
$= \int_{-2}^2 f(x)dx = \int_{-2}^2 (5x^4+2x)dx = \left[x^5+x^2\right]_{-2}^2$
$= (32+4)-(-32+4)=64$ 정답_ ⑤

479

$\int_{-2}^0 f(x)dx = \int_{-2}^1 f(x)dx + \int_1^{10} f(x)dx - \int_0^{10} f(x)dx$
$= 8+12-16=4$
$\therefore \int_{-2}^0 \{f(x)-4x^3\}dx = \int_{-2}^0 f(x)dx - \int_{-2}^0 4x^3dx$
$= 4 - \left[x^4\right]_{-2}^0$
$= 4-(-16)=20$ 정답_ 20

480

$\int_1^{-2} (3x^2+2x)dx + \int_{-2}^0 (3t^2+2t)dt$
$= \int_1^{-2} (3x^2+2x)dx + \int_{-2}^0 (3x^2+2x)dx$
$= \int_1^0 (3x^2+2x)dx = \left[x^3+x^2\right]_1^0$
$= 0-(1+1)=-2$ 정답_ ①

481

$\int_{-2}^{-1} (x^3-2x+1)dx + \int_{-1}^0 (y^3-2y+1)dy$
$+ \int_0^1 (z^3-2z+1)dz$
$= \int_{-2}^{-1} (x^3-2x+1)dx + \int_{-1}^0 (x^3-2x+1)dx$
$+ \int_0^1 (x^3-2x+1)dx$
$= \int_{-2}^1 (x^3-2x+1)dx = \left[\frac{1}{4}x^4-x^2+x\right]_{-2}^1$
$= \left(\frac{1}{4}-1+1\right) - (4-4-2) = \frac{9}{4}$ 정답_ ③

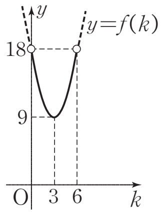
482

$\int_{-2}^1 (|x|+x+1)^2dx$
$= \int_{-2}^0 (-x+x+1)^2dx + \int_0^1 (x+x+1)^2dx$
$= \int_{-2}^0 1\,dx + \int_0^1 (4x^2+4x+1)dx$
$= \left[x\right]_{-2}^0 + \left[\frac{4}{3}x^3+2x^2+x\right]_0^1$
$= 2+\left(\frac{4}{3}+2+1\right) = \frac{19}{3}$ 정답_ ⑤

483

$0<k<6$이므로
$f(k) = \int_0^6 |x-k|dx = \int_0^k (-x+k)dx + \int_k^6 (x-k)dx$
$= \left[-\frac{1}{2}x^2+kx\right]_0^k + \left[\frac{1}{2}x^2-kx\right]_k^6$
$= \left(-\frac{1}{2}k^2+k^2\right) + \left\{(18-6k) - \left(\frac{1}{2}k^2-k^2\right)\right\}$
$= k^2-6k+18 = (k-3)^2+9$

$0<k<6$에서 함수 $f(k)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(k)$의 최솟값은 $f(3)=9$



정답_ ③

484

$\int_0^2 f'(x)dx = \left[f(x)\right]_0^2 = f(2)-f(0)$이므로
$\int_0^2 2|x-1|dx = f(2)-f(0) = f(2)-1$ ($\because f(0)=1$)
$\therefore f(2) = 1+\int_0^2 2|x-1|dx$
$= 1+\int_0^1 (2-2x)dx + \int_1^2 (2x-2)dx$
$= 1+\left[2x-x^2\right]_0^1 + \left[x^2-2x\right]_1^2$
$= 1+(2-1)+\{(4-4)-(1-2)\}=3$ 정답_ ③

485

주어진 그래프에서

$0\le x<1$일 때, $f'(x)>0$

$1<x<3$일 때 $f'(x)<0$이므로

$\int_0^3 |f'(x)|dx$

$=\int_0^1 f'(x)dx+\int_1^3 \{-f'(x)\}dx$

$=\int_0^1 f'(x)dx-\int_1^3 f'(x)dx$

$=\Big[f(x)\Big]_0^1-\Big[f(x)\Big]_1^3$

$=\{f(1)-f(0)\}-\{f(3)-f(1)\}$

$=2f(1)-f(0)-f(3)$

$=2\cdot1-(-3)-(-3)=8$

정답_ ③

486

$\int_1^5 f(x)dx$

$=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^5 f(x)dx$

$=\int_1^2 (-x+3)dx+\int_2^5 (3x-5)dx$

$=\Big[-\frac{1}{2}x^2+3x\Big]_1^2+\Big[\frac{3}{2}x^2-5x\Big]_2^5$

$=\frac{3}{2}+\frac{33}{2}=18$

정답_ ④

487

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하므로 $x=1$에서도 미분가능하다.

$g(x)=3x^2+2ax$, $h(x)=2x+b$로 놓으면

(i) $x=1$에서 연속이므로 $g(1)=h(1)$

$3+2a=2+b \qquad \therefore 2a-b=-1$ ……㉠

(ii) $x=1$에서 미분계수가 존재하므로 $g'(1)=h'(1)$

이때, $g'(x)=6x+2a$, $h'(x)=2$이므로

$6+2a=2 \qquad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=-3$

$\therefore f(x)=\begin{cases}3x^2-4x & (x<1)\\ 2x-3 & (x\ge1)\end{cases}$

$\therefore \int_{-1}^2 f(x)dx=\int_{-1}^1 (3x^2-4x)dx+\int_1^2 (2x-3)dx$

$=\Big[x^3-2x^2\Big]_{-1}^1+\Big[x^2-3x\Big]_1^2$

$=(1-2)-(-1-2)+(4-6)-(1-3)$

$=2$

정답_ ②

488

주어진 그래프에서

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} & (x<1)\\ -x+2 & (x\ge1)\end{cases}$

이므로

$\int_0^2 xf(x)dx$

$=\int_0^1 xf(x)dx+\int_1^2 xf(x)dx$

$=\int_0^1 x\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx+\int_1^2 x(-x+2)dx$

$=\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx+\int_1^2 (-x^2+2x)dx$

$=\Big[\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2\Big]_0^1+\Big[-\frac{1}{3}x^3+x^2\Big]_1^2$

$=\frac{5}{12}+\frac{2}{3}=\frac{13}{12}$

정답_ ③

489

$\frac{1}{2}\le x<1$일 때, $[x]=0$

$1\le x\le\frac{3}{2}$일 때, $[x]=1$

$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} [x](x-1)dx$

$=\int_{\frac{1}{2}}^{1} [x](x-1)dx+\int_1^{\frac{3}{2}} [x](x-1)dx$

$=\int_{\frac{1}{2}}^{1} 0\cdot(x-1)dx+\int_1^{\frac{3}{2}} 1\cdot(x-1)dx$

$=0+\int_1^{\frac{3}{2}} (x-1)dx$

$=\Big[\frac{1}{2}x^2-x\Big]_1^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{9}{8}-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{8}$

정답_ ①

490

$\int_{-1}^0 (2x^3-6x^2-3x+2)dx+\int_0^1 (2t^3-6t^2-3t+2)dt$

$=\int_{-1}^0 (2x^3-6x^2-3x+2)dx+\int_0^1 (2x^3-6x^2-3x+2)dx$

$=\int_{-1}^1 (2x^3-6x^2-3x+2)dx$

$=\int_{-1}^1 (2x^3-3x)dx+\int_{-1}^1 (-6x^2+2)dx$

$=0+2\int_0^1 (-6x^2+2)dx$

$=2\Big[-2x^3+2x\Big]_0^1=2(-2+2)=0$

정답_ ③

491

$\int_{-a}^a (3x^2+2x)dx=2\int_0^a 3x^2dx=2\Big[x^3\Big]_0^a=2a^3=\frac{1}{4}$

$a^3=\frac{1}{8} \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore\ 20a=20\cdot\frac{1}{2}=10$ 정답_ 10

492

$f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

$\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx=6$

$\therefore\ \int_{-5}^{5}f(x)dx$

$=2\int_{0}^{5}f(x)dx=2\left\{\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{5}f(x)dx\right\}$

$=2(6+9)=30$ 정답_ ③

493

(i) $f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로

$\int_{-2}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{2}f(x)dx=2$

(ii) $g(-x)=-g(x)$에서 $g(x)$는 기함수이므로

$\int_{-2}^{0}g(x)dx=-\int_{0}^{2}g(x)dx=-3$

$\therefore\ \int_{-2}^{0}\{f(x)+g(x)\}dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx+\int_{-2}^{0}g(x)dx$

$=2+(-3)=-1$ 정답_ ②

494

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$는 우함수이다. 따라서 $x^3f(x)$, $xf(x)$는 기함수이다.

$\therefore\ \int_{-1}^{1}(x^3-x+1)f(x)dx$

$=\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx-\int_{-1}^{1}xf(x)dx+\int_{-1}^{1}f(x)dx$

$=0-0+\int_{-1}^{1}f(x)dx=5$ 정답_ 5

495

$f(x)=f(x+3)$에서 $f(x)$는 주기가 3인 주기함수이므로

$\int_{-4}^{-1}f(x)dx=\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{2}^{5}f(x)dx=2$

$\therefore\ \int_{-4}^{5}f(x)dx=\int_{-4}^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{5}f(x)dx$

$=3\cdot2=6$ 정답_ 6

496

$f(x)=f(x+4)$에서 $f(x)$는 주기가 4인 주기함수이므로

$\int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{1+4n}^{2+4n}f(x)dx$ (단, n은 정수이다.)

이때, $2009=1+4\cdot502$, $2010=2+4\cdot502$이므로

$\int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{2009}^{2010}f(x)dx$ 정답_ ③

497

$-1\le x\le1$일 때, $f(x)=1-x^2$이므로

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=2\int_{0}^{1}(1-x^2)dx$

$=2\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=2\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$

$f(x+2)=f(x)$에서 $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{1}^{3}f(x)dx=\int_{3}^{5}f(x)dx=\frac{4}{3}$

$\therefore\ \int_{1}^{5}f(x)dx=\int_{1}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{5}f(x)dx$

$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$ 정답_ ④

498

$\int_{0}^{2}f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$f(x)=2x+k$

$\int_{0}^{2}f(t)dt=\int_{0}^{2}(2t+k)dt=\left[t^2+kt\right]_0^2=4+2k=k$

$\therefore\ k=-4$

따라서 $f(x)=2x-4$이므로

$f(2)=4-4=0$ 정답_ ①

499

$\int_{1}^{2}f(x)dx=a$ (a는 상수)로 놓으면

$f(x)=\frac{12}{7}x^2-2ax+a^2$이므로

$\int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{1}^{2}\left(\frac{12}{7}x^2-2ax+a^2\right)dx$

$=\left[\frac{4}{7}x^3-ax^2+a^2x\right]_1^2=4-3a+a^2=a$

$a^2-4a+4=0$, $(a-2)^2=0$ $\therefore\ a=2$

$\therefore\ 5\int_{1}^{2}f(x)dx=5a=5\cdot2=10$ 정답_ ①

500

$f(x)=3x^2+\int_{0}^{1}(2x+1)f(t)$에서

$f(x)=3x^2+(2x+1)\int_{0}^{1}f(t)dt$

$\int_{0}^{1}f(t)dt=a$ (a는 상수)로 놓으면

$f(x)=3x^2+2ax+a$이므로

$\int_{0}^{1}f(t)dt=\int_{0}^{1}(3t^2+2at+a)dt$

$=\left[t^3+at^2+at\right]_0^1=2a+1=a$

$\therefore\ a=-1$

따라서 $f(x)=3x^2-2x-1$이므로 $f(x)<g(x)$에서

$3x^2-2x-1<x+5$, $3x^2-3x-6<0$

$3(x+1)(x-2)<0$ $\quad\therefore -1<x<2$

따라서 정수 x는 $0, 1$로 2개이다. 정답_ ③

501

$f(x)=\int_1^x (4t^3-t^2+3)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=4x^3-x^2+3$

$\therefore f'(1)=4-1+3=6$

또, $f(1)=\int_1^1 (4t^3-t^2+3)dt=0$이므로

$f'(1)+f(1)=6+0=6$ 정답_ ③

502

$\int_{-1}^x f(t)dt=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=x^2-x-2$

$f(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 모든 점의 x좌표는 방정식 $f(x)=0$의 근과 같으므로 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 곱은 $\quad -2$ 정답_ ①

503

$\int_1^x f(t)dt=x^3+2ax^2-ax$ ······㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+2a-a$ $\quad\therefore a=-1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+4ax-a=3x^2-4x+1$

$\therefore f(2)=12-8+1=5$ 정답_ ①

504

$\int_a^x f(t)dt=2x^3-5x^2+2x$ ······㉠

㉠의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=2a^3-5a^2+2a$, $a(2a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=2$

그런데 a는 0이 아닌 정수이므로 $\quad a=2$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x^2-10x+2$

$\therefore f(a)=f(2)=24-20+2=6$ 정답_ ②

505

$\int_1^x f(t)dt=xf(x)-3x^4+2x^2$ ······㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=f(1)-3+2$ $\quad\therefore f(1)=1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^3+4x$

$xf'(x)=12x^3-4x$ $\quad\therefore f'(x)=12x^2-4$

$f(x)=\int(12x^2-4)dx$

$=4x^3-4x+C$ (단, C는 적분상수이다.) ······㉡

이때, $f(1)=1$이므로 $\;f(1)=4-4+C=1$ $\quad\therefore C=1$

$f(x)=4x^3-4x+1$에서 $\;f(0)=C=1$ 정답_ ①

506

$x^2f(x)=4x^5+x^4+2\int_1^x tf(t)dt$ ······㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $\;f(1)=4+1=5$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)+x^2f'(x)=20x^4+4x^3+2xf(x)$

$x^2f'(x)=20x^4+4x^3$ $\quad\therefore f'(x)=20x^2+4x$

$\therefore f(x)=\int(20x^2+4x)dx$

$=\frac{20}{3}x^3+2x^2+C$ (단, C는 적분상수이다.)

이때, $f(1)=5$이므로 $\;\frac{20}{3}+2+C=5$ $\quad\therefore C=-\frac{11}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{20}{3}x^3+2x^2-\frac{11}{3}$이므로

$3f(0)=3\cdot\left(-\frac{11}{3}\right)=-11$ 정답_ ①

507

$\int_0^x (x-t)f(t)dt=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2$에서

$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=x^2+\frac{1}{2}x$

$\therefore \int_0^x f(t)dt=x^2+\frac{1}{2}x$

위의 식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x+\frac{1}{2}$ $\quad\therefore f(3)=6+\frac{1}{2}=\frac{13}{2}$ 정답_ ④

508

$\int_0^x (x-t)f(t)dt=\frac{1}{6}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$에서

$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\frac{1}{6}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\frac{2}{3}x^3+2x^2+x$

$\therefore \int_0^x f(t)dt=\frac{2}{3}x^3+2x^2+x$

위의 식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x^2+4x+1=2(x+1)^2-1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

정답_ ③

509

$\int_{-2}^{x}(x-t)f(t)dt=x^3+ax^2-4$의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$0=-8+4a-4 \qquad \therefore a=3$

$\int_{-2}^{x}(x-t)f(t)dt=x^3+3x^2-4$에서

$x\int_{-2}^{x}f(t)dt-\int_{-2}^{x}tf(t)dt=x^3+3x^2-4$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{-2}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2+6x$

$\therefore \int_{-2}^{x}f(t)dt=3x^2+6x$

위의 식의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x+6$

$f(2)=12+6=18=b$

$\therefore b-a=18-3=15$

정답_ ⑤

510

$G(x)=\int_{0}^{x}(x-t)f'(t)dt$

$=x\int_{0}^{x}f'(t)dt-\int_{0}^{x}tf'(t)dt$

$G'(x)=\int_{0}^{x}f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)$

$=\int_{0}^{x}f'(t)dt=\Big[f(t)\Big]_{0}^{x}=f(x)-f(0)$

$f(0)=2,\ f(1)=5$이므로 $G'(1)=f(1)-f(0)=5-2=3$

정답_ ④

511

$f(x)=\int_{0}^{x}(6t^2-6t-12)dt$에서

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x-2)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 극솟값은

$f(2)=\int_{0}^{2}(6t^2-6t-12)dt$

$=\Big[2t^3-3t^2-12t\Big]_{0}^{2}$

$=16-12-24=-20$

따라서 $a=2,\ b=-20$이므로

$ab=2\cdot(-20)=-40$

정답_ ①

512

주어진 그래프에서 $f(x)=a(x-1)(x-4)\ (a>0)$로 놓을 수 있다.

$g(x)=\int_{x}^{x+1}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x+1)-f(x)$

$=ax(x-3)-a(x-1)(x-4)=2a(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=2$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗

$a>0$이므로 $g(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이다.

따라서 $g(x)$의 최솟값은 $g(2)$이다.

정답_ ②

513

$f(x)=\int_{x}^{x+1}|t|dt$에서 $f'(x)=|x+1|-|x|$

$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{2h}\cdot 2$

$=2f'(3)$

$=2(4-3)=2$

정답_ ②

514

$f(x)=x^3-3x^2-3x-1$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 하면

$\lim_{x\to -1}\frac{1}{x^2-1}\int_{-1}^{x}f(t)dt$

$=\lim_{x\to -1}\frac{F(x)-F(-1)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to -1}\left\{\frac{F(x)-F(-1)}{x-(-1)}\cdot\frac{1}{x-1}\right\}$

$=-\frac{1}{2}F'(-1)=-\frac{1}{2}f(-1)$

$=-\frac{1}{2}(-1-3+3-1)=1$

정답_ ⑤

515

$f(x)=x^2+3x-2$로 놓고 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_{2}^{x}(t^2+3t-2)dt$

$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x^2-4}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{(x+2)(x-2)}$

$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}\right\}$

$=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4}f(2)$

$=\frac{1}{4}(4+6-2)=2$

정답_ 2

516

$\{f(t)\}^2f'(t)$의 부정적분 중 하나를 $F(t)$라고 하면

$F'(t)=\{f(t)\}^2f'(t)$이고 $f(1)=2,\ f'(1)=3$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}\{f(t)\}^2f'(t)dt$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)\right\}$$

$$=2F'(1)=2\{f(1)\}^2f'(1)$$

$$=2\cdot2^2\cdot3=24$$

정답_ ④

517

$f(x)=2x^2-a$로 놓고 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_3^{3-2h}(2x^2-a)dx=\lim_{h\to0}\frac{F(3-2h)-F(3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{F(3-2h)-F(3)}{-2h}\cdot(-2)$$

$$=-2F'(3)=-2f(3)$$

$$=-2(18-a)=2$$

따라서 $18-a=-1$이므로 $a=19$

정답_ ⑤

518

$f(x)=|x-10|$으로 놓고 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_0^{10h}|x-10|dx=\lim_{h\to0}\frac{F(10h)-F(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{F(0+10h)-F(0)}{10h}\cdot10$$

$$=10F'(0)=10f(0)$$

$$=10\cdot10=100$$

정답_ ⑤

519

$f(x)=x^2+ax+1$로 놓고 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{2-h}^{2+2h}(x^2+ax+1)dx$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{F(2+2h)-F(2-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{F(2+2h)-F(2)+F(2)-F(2-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{F(2+2h)-F(2)}{2h}\cdot2+\frac{F(2-h)-F(2)}{-h}\right\}$$

$$=3F'(2)=3f(2)$$

$$=3(4+2a+1)=21$$

따라서 $4+2a+1=7$이므로 $a=1$

정답_ ⑤

520

$f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2+2h}\int_{1-h}^{1+2h}f(t)dt$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{F(1+2h)-F(1-h)}{h}\cdot\frac{1}{h+2}\right\}$$

$$=\lim_{h\to0}\left[\left\{\frac{F(1+2h)-F(1)}{2h}\cdot2+\frac{F(1-h)-F(1)}{-h}\right\}\cdot\frac{1}{h+2}\right]$$

$$=\{2F'(1)+F'(1)\}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3}{2}f(1)$$

$$f(1)=\int_0^1(3t-1)^3dt=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}(3t-1)^4\right]_0^1$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{1}{12}=\frac{5}{4}$$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{3}{2}f(1)=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}=\frac{15}{8}$

정답_ ⑤

521

$f(-1)-g(-1)=0,\ f(1)-g(1)=0,\ f(4)-g(4)=0$에서 삼차방정식 $f(x)-g(x)=0$의 세 근은 $x=-1, x=1, x=4$이므로

$f(x)-g(x)=a(x+1)(x-1)(x-4)$ (a는 상수)

로 놓을 수 있다.

이때, $f(0)-g(0)=4$에서 $4a=4$ $\quad\therefore a=1$ ······ ❶

따라서 $f(x)-g(x)=(x+1)(x-1)(x-4)$이므로

$$\int_{-1}^2f(x)dx-\int_{-1}^2g(x)dx$$

$$=\int_{-1}^2\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^2(x+1)(x-1)(x-4)dx$$

$$=\int_{-1}^2(x^3-4x^2-x+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+4x\right]_{-1}^2$$

$$=\left(4-\frac{32}{3}-2+8\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{4}{3}-\frac{1}{2}-4\right)$$

$=\frac{9}{4}$ ······ ❷

정답_ $\frac{9}{4}$

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값 구하기	50%
❷	주어진 정적분의 값 구하기	50%

522

$f(-x)=-f(x),\ g(-x)=-g(x)$이므로

$\therefore g(f(-x))=g(-f(x))=-g(f(x))$

따라서 $g(f(x))$는 $g(f(-x))=-g(f(x))$가 성립한다.

······ ❶

$g(f(x))$가 기함수이므로 $\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} g(f(x))dx=0$

$$\therefore \int_{\frac{a}{2}}^{a} g(f(x))dx$$

$$=\int_{-\frac{a}{2}}^{a} g(f(x))dx-\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} g(f(x))dx=\int_{-\frac{a}{2}}^{a} g(f(x))dx-0$$

$$=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{4}} g(f(x))dx+\int_{\frac{a}{4}}^{a} g(f(x))dx=A+B \cdots\cdots ❷$$

따라서 $a=1, b=1$이므로

$a^2+b^2=1^2+1^2=2$ ⋯⋯ ❸

정답_ 2

단계	채점 기준	비율
❶	$g(f(-x))=-g(f(x))$임을 보이기	30%
❷	$\int_{\frac{a}{2}}^{a} g(f(x))dx$를 A, B에 대한 식으로 나타내기	60%
❸	a^2+b^2의 값 구하기	10%

523

$f(2+x)=f(2-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다. 따라서

$\int_{1}^{2} f(x)dx=\int_{2}^{3} f(x)dx=4$ ⋯⋯ ❶

$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{3}^{5} f(x)dx=10$ ⋯⋯ ❷

$$\therefore \int_{-1}^{3} f(x)dx=\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{3} f(x)dx$$

$=10+4+4=18$ ⋯⋯ ❸

정답_ 18

단계	채점 기준	비율
❶	$\int_{2}^{3} f(x)dx$의 값 구하기	30%
❷	$\int_{-1}^{1} f(x)dx$의 값 구하기	30%
❸	$\int_{-1}^{3} f(x)dx$의 값 구하기	40%

524

$\int_{1}^{x} tf(t)dt=3x^4-2ax^2+3$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=3-2a+3 \quad \therefore a=3$ ⋯⋯ ❶

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하여 $a=3$을 대입하면

$xf(x)=12x^3-4ax=12x^3-12x$

$\therefore f(x)=12x^2-12$ ⋯⋯ ❷

$$\therefore \int_{1}^{3} f(t)dt=\int_{1}^{3}(12t^2-12)dt=\Big[4t^3-12t\Big]_{1}^{3}$$

$=(108-36)-(4-12)=80$ ⋯⋯ ❸

정답_ 80

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값 구하기	20%
❷	$f(x)$ 구하기	40%
❸	주어진 정적분의 값 구하기	40%

525

$f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면 나누어떨어지므로 $f(x)=(x-1)^2Q(x)$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=0, f'(1)=0$ ⋯⋯ ❶

$f(x)=x^2-ax+\int_{1}^{x} g(t)dt$ ⋯⋯ ㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=1-a$

$f(1)=0$이므로 $a=1$ ⋯⋯ ❷

㉢의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2x-a+g(x) \quad \therefore f'(1)=2-a+g(1)$

이때, $f'(1)=0, a=1$이므로 $0=2-1+g(1)$

따라서 다항식 $g(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$g(1)=-1$ ⋯⋯ ❸

정답_ -1

단계	채점 기준	비율
❶	$f(1), f'(1)$의 값 구하기	40%
❷	a의 값 구하기	30%
❸	$g(1)$의 값 구하기	30%

526

$f(x)=x^3-4x+a$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x^3} f(t)dt$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^3)-F(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x^3)-F(1)}{x^3-1}\cdot(x^2+x+1)\right\}$$

$=3F'(1)=3f(1)$ ⋯⋯ ❶

따라서 $3f(1)=9$이므로 $3(1-4+a)=9$

$\therefore a=6$ ⋯⋯ ❷

정답_ 6

단계	채점 기준	비율
❶	$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x^3} f(t)dt$ 간단히 하기	60%
❷	a의 값 구하기	40%

527

5차 이하의 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 주어진 등식이 성립하므로

(i) $f(x)=1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1} 1\,dx=\Big[x\Big]_{-1}^{1}=2$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=f(0)=f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=1$$

이므로 주어진 등식은 $2=a+b+a$

$\therefore 2a+b=2$ ……㉠

(ii) $f(x)=x^2$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=\frac{3}{5},\ f(0)=0$$

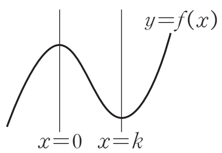
이므로 주어진 등식은 $\frac{2}{3}=\frac{3}{5}a+0+\frac{3}{5}a$ $\therefore a=\frac{5}{9}$

$a=\frac{5}{9}$를 ㉠에 대입하면 $b=\frac{8}{9}$ 정답_②

528

ㄱ은 옳다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고 $x=0$에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



즉, $0<x<k$에서 함수 $f(x)$는 감소하므로 $0<x<k$에서 $f'(x)<0$이다.

$$\therefore \int_0^k f'(x)dx<0$$

ㄴ도 옳다.

$1<t\le k$이면 구간 $[0,\ t]$에서 함수 $f(x)$는 감소하므로 $f'(x)\le 0$이다.

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^t |f'(x)|dx&=\int_0^t\{-f'(x)\}dx\\&=\Big[-f(x)\Big]_0^t\\&=-f(t)+f(0)\end{aligned}$$

이것을 조건 (나)에 대입하면

$-f(t)+f(0)=f(t)+f(0)$에서 $f(t)=0$

그런데 함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 1보다 큰 모든 실수 t에 대하여 $f(t)=0$이 될 수는 없다.

즉, $0<k<t$이고 t는 1보다 큰 실수이므로 $0<k\le 1$이 성립한다.

ㄷ도 옳다.

ㄴ에서 $0<k<t$이므로 $0\le x\le k$에서 $f'(x)\le 0$, $k<x\le t$에서 $f'(x)>0$이다. 즉,

$$\begin{aligned}\int_0^t |f'(x)|dx&=\int_0^k\{-f'(x)\}dx+\int_k^t f'(x)dx\\&=\Big[-f(x)\Big]_0^k+\Big[f(x)\Big]_k^t\\&=-f(k)+f(0)+f(t)-f(k)\\&=f(t)+f(0)-2f(k)\end{aligned}$$

이것을 조건 (나)에 대입하면

$f(t)+f(0)-2f(k)=f(t)+f(0)$에서 $f(k)=0$

이때, 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 극솟값을 가지므로 함수 $f(x)$의 극솟값은 0이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_⑤

529

$f(-x)=-f(x), g(-x)=g(x)$이므로

$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$이므로 함수 $h(x)$는 원점에 대하여 대칭인 함수이다.

그런데 함수 $h(x)$는 두 다항함수 $f(x), g(x)$의 곱으로 다항함수이다. 이때, 함수 $h(x)$가 원점에 대하여 대칭이 되려면 $h(x)=a_1x+a_3x^3+\cdots$ (a_1, a_3, $\cdots$은 상수)과 같이 홀수 차수의 항들의 합으로만 나타나야 한다.

즉, $h'(x)=a_1+3a_3x^2+\cdots$이고, $xh'(x)=a_1x+3a_3x^3+\cdots$이므로 함수 $h'(x)$는 y축에 대하여 대칭인 함수이고 함수 $xh'(x)$는 원점에 대하여 대칭인 함수이다. 즉,

$$\int_{-a}^{a}h'(x)dx=2\int_0^a h'(x)dx,$$

$$\int_{-a}^{a}xh'(x)dx=0 \text{ (단, } a\text{는 상수이다.)}$$

한편, 모든 실수 x에 대하여 함수 $h(x)$가 $h(-x)=-h(x)$를 만족시키므로 함수 $h(x)$의 그래프는 원점을 지난다.

따라서 $h(0)=0$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx&=\int_{-3}^{3}xh'(x)dx+\int_{-3}^{3}5h'(x)dx\\&=0+2\int_0^3 5h'(x)dx\\&=10\int_0^3 h'(x)dx=10\Big[h(x)\Big]_0^3\\&=10\{h(3)-h(0)\}=10\end{aligned}$$

$\therefore h(3)=1$ 정답_①

530

(나)에서 $\int_0^x f(t)dt=\frac{x^2}{9}\int_0^a f(t)dt$ ……㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=\frac{2x}{9}\int_0^a f(t)dt$

이때, $\int_0^a f(x)dx=k$(k는 상수)로 놓으면 $f(x)=\frac{2}{9}kx$

(가)에서 $\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1\frac{2}{9}kt\,dt=\left[\frac{1}{9}kt^2\right]_0^1=\frac{1}{9}k=1$

$\therefore k=9$ $\therefore f(x)=2x$ ……㉡

㉠의 양변에 $x=a$를 대입하면

$$\int_0^a f(t)dt=\frac{a^2}{9}\int_0^a f(t)dt$$

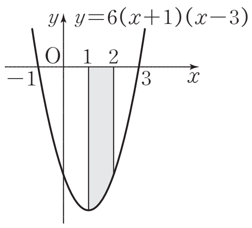
$\frac{a^2}{9}=1, a^2=9$ $\therefore a=3$ ($\because a>0$) ……㉢

㉡, ㉢에서 $f(a)=f(3)=2\cdot 3=6$ 정답_②

09 정적분의 활용

531

$y=6(x+1)(x-3)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



$-\int_1^2 6(x+1)(x-3)dx$

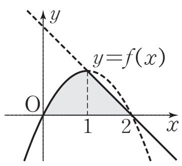
$=-\int_1^2 (6x^2-12x-18)dx$

$=-\Big[2x^3-6x^2-18x\Big]_1^2=22$

정답_ ②

532

$f(x)=\begin{cases} -x^2+2x & (x\le 1) \\ -x+2 & (x\ge 1) \end{cases}$의 그래프가



오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는

$\int_0^1 (-x^2+2x)dx+\int_1^2 (-x+2)dx$

$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+x^2\Big]_0^1+\Big[-\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_1^2$

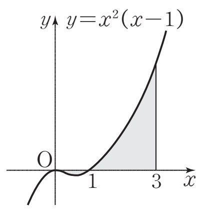
$=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$

따라서 $p=6, q=7$이므로 $p+q=6+7=13$

정답_ ③

533

$y=x^2(x-1)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이 S는



$S=-\int_0^1 (x^3-x^2)dx+\int_1^3 (x^3-x^2)dx$

$=-\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1+\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\Big]_1^3$

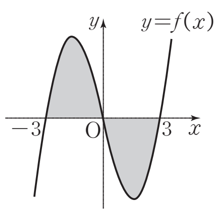
$=\frac{1}{12}+\frac{34}{3}=\frac{137}{12}$

$\therefore 12S=12\cdot\frac{137}{12}=137$

정답_ ④

534

$f(x)=x^3-9x=x(x+3)(x-3)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



$2\int_{-3}^0 (x^3-9x)dx=2\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2\Big]_{-3}^0$

$=-2\cdot\left(-\frac{81}{4}\right)$

$=\frac{81}{2}$

정답_ ⑤

535

$f(x)=\int(x^2-1)dx=\frac{1}{3}x^3-x+C$ (단, C는 적분상수이다.)

이때, $f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$

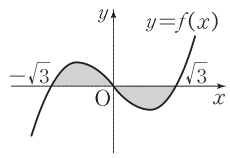
함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x=0$에서 $x^3-3x=0$

$x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$

$\therefore x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



$2\int_{-\sqrt{3}}^0 \left(\frac{1}{3}x^3-x\right)dx$

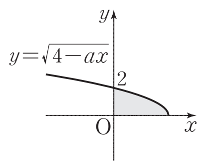
$=2\Big[\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{2}x^2\Big]_{-\sqrt{3}}^0$

$=2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$

정답_ ④

536

$y=\sqrt{4-ax}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$y=\sqrt{4-ax}$에서 $y^2=4-ax$

$\therefore x=\frac{4-y^2}{a}$

이때, 색칠한 부분의 넓이가 $\frac{1}{3}$이므로

$\int_0^2 \frac{4-y^2}{a}dy=\frac{1}{a}\int_0^2 (4-y^2)dy$

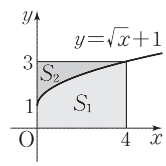
$=\frac{1}{a}\Big[4y-\frac{1}{3}y^3\Big]_0^2=\frac{16}{3a}=\frac{1}{3}$

$\therefore a=16$

정답_ ③

537

$y=\sqrt{x}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 구하는 넓이는 S_1이므로 직사각형의 넓이에서 S_2를 빼면 된다.



$y=\sqrt{x}+1$에서 $y-1=\sqrt{x}$

$\therefore x=(y-1)^2$

$\therefore S_2=\int_1^3 (y-1)^2dy=\Big[\frac{1}{3}(y-1)^3\Big]_1^3=\frac{8}{3}$

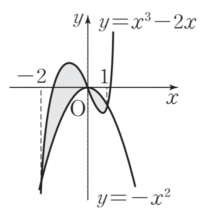
따라서 구하는 넓이는

$S_1=3\cdot 4-S_2=12-\frac{8}{3}=\frac{28}{3}$

정답_ ③

538

두 곡선 $y=x^3-2x, y=-x^2$의 교점의 x좌표는 $x^3-2x=-x^2$에서



$x^3+x^2-2x=0, x(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{0}\{(x^3-2x)-(-x^2)\}dx+\int_{0}^{1}\{-x^2-(x^3-2x)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3-x^2+2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}=\frac{37}{12}$$

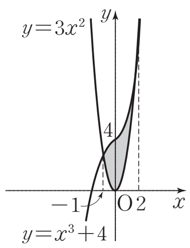
정답_ ④

539

$f(x)=x^3+4$에서 $f'(x)=3x^2$

두 함수 $f(x)=x^3+4$, $f'(x)=3x^2$의 그래프의 교점의 x좌표는 $x^3+4=3x^2$에서 $x^3-3x^2+4=0$

$(x+1)(x-2)^2=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=2$



$$S=\int_{-1}^{2}(x^3+4-3x^2)dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-1}^{2}$$
$$=\frac{27}{4}$$

따라서 $p=4, q=27$이므로

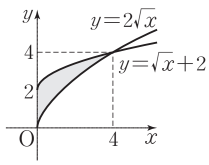
$p+q=4+27=31$

정답_ 31

540

$\sqrt{x}+2=2\sqrt{x}$에서 $\sqrt{x}=2$ $\quad\therefore x=4$

따라서 두 곡선 $y=\sqrt{x}+2$, $y=2\sqrt{x}$와 y축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림과 같다.



$y=\sqrt{x}+2, y=2\sqrt{x}$에서

$x=(y-2)^2, x=\frac{1}{4}y^2$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{4}\frac{1}{4}y^2dy-\int_{2}^{4}(y-2)^2dy$$
$$=\left[\frac{1}{12}y^3\right]_{0}^{4}-\left[\frac{1}{3}(y-2)^3\right]_{2}^{4}=\frac{8}{3}$$

정답_ ④

541

$y=x^3$에서 $y'=3x^2$

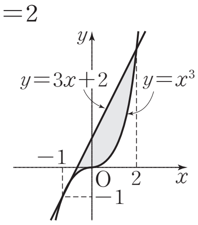
점 $(-1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 3이므로 접선의 방정식은

$y+1=3(x+1)$ $\quad\therefore y=3x+2$

$x^3=3x+2$에서 $x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_{-1}^{2}(3x+2-x^3)dx$$
$$=\left[\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{2}$$
$$=\frac{27}{4}$$

정답_ ①

542

$y=x^2-4x+3$에서

$y'=2x-4$

(i) 점 $(0,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 -4이므로 접선의 방정식은

$y-3=-4(x-0)$ $\quad\therefore y=-4x+3$

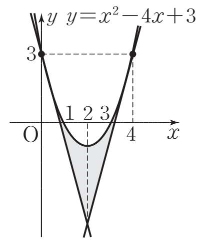
(ii) 점 $(4,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 4이므로 접선의 방정식은

$y-3=4(x-4)$ $\quad\therefore y=4x-13$

$4x-13=-4x+3$에서

$8x=16$ $\quad\therefore x=2$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분은 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는



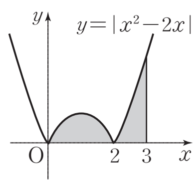
$$2\int_{0}^{2}\{(x^2-4x+3)-(-4x+3)\}dx$$
$$=2\int_{0}^{2}x^2dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{16}{3}$$

정답_ ⑤

543

$$y=|x^2-2x|=\begin{cases}x^2-2x & (x<0\text{ 또는 }x>2)\\-x^2+2x & (0\le x\le 2)\end{cases}$$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx+\int_{2}^{3}(x^2-2x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{2}^{3}$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

정답_ ②

544

$y=|x|=\begin{cases}x & (x\ge 0)\\-x & (x<0)\end{cases}$이므로 두 함수 $y=|x|, y=-x^2+2$의 그래프의 교점의 x좌표는

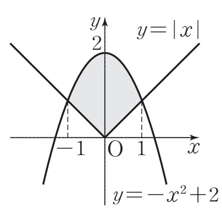
(i) $x\ge 0$일 때, $x=-x^2+2$에서 $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=1\ (\because x\ge 0)$

(ii) $x<0$일 때, $-x=-x^2+2$에서 $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$ $\quad\therefore x=-1\ (\because x<0)$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분은 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

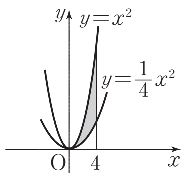


$$2\int_{0}^{1}(-x^2+2-x)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{7}{3}$$

정답_ ④

545

$n=4$이므로 구하는 넓이는 구간 $[0,\ 4]$에서 두 곡선 $y=x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



$\therefore \int_0^4\left(x^2-\frac{1}{4}x^2\right)dx=\int_0^4\frac{3}{4}x^2dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^3\right]_0^4=16$

정답_ ②

546

주어진 그림에서 A, B의 넓이가 서로 같으므로

$\int_{-1}^{k}(2x^2-2)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-2x\right]_{-1}^{k}$

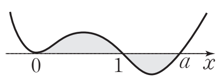
$=\frac{2}{3}k^3-2k-\frac{4}{3}=0$

$(k+1)^2(k-2)=0 \qquad \therefore k=2\ (\because k>1)$

정답_ ④

547

곡선 $f(x)=x^2(x-1)(x-a)$와 x축으로 둘러싸인 두 부분은 오른쪽 그림과 같다.



이때, 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로

$\int_0^a x^2(x-1)(x-a)dx$

$=\int_0^a\{x^4-(a+1)x^3+ax^2\}dx$

$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}(a+1)x^4+\frac{1}{3}ax^3\right]_0^a$

$=-\frac{1}{20}a^5+\frac{1}{12}a^4=0$

$3a^5-5a^4=0,\ a^4(3a-5)=0 \qquad \therefore a=\frac{5}{3}\ (\because a>1)$

따라서 $f(x)=x^2(x-1)\left(x-\frac{5}{3}\right)$이므로

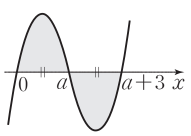
$f(-1)=1\cdot(-2)\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{16}{3}$

정답_ ③

548

곡선 $y=x(x-a)(x-a-3)$의 x절편은 $0, a, a+3$이고, $a>0$이므로 $\quad 0<a<a+3$

이 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 같으려면 x절편의 간격이 같아야 하므로



$a-0=(a+3)-a \qquad \therefore a=3$

정답_ ③

다른 풀이

곡선 $y=x(x-a)(x-a-3)$과 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같으므로

$\int_0^{a+3}x(x-a)(x-a-3)dx$

$=\int_0^{a+3}\{x^3-(2a+3)x^2+a(a+3)x\}dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(2a+3)x^3+\frac{1}{2}a(a+3)x^2\right]_0^{a+3}$

$=\frac{1}{4}(a+3)^4-\frac{1}{3}(2a+3)(a+3)^3+\frac{1}{2}a(a+3)^3$

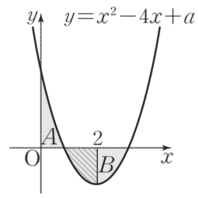
$=\frac{1}{12}(a+3)^3\{3(a+3)-4(2a+3)+6a\}$

$=\frac{1}{12}(a+3)^3(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

549

$y=x^2-4x+a$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고, A, B의 넓이의 비가 $1:2$이므로 오른쪽 그림에서 빗금친 부분의 넓이는 A의 넓이와 같다.



따라서 $y=x^2-4x+a$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같으므로

$\int_0^2(x^2-4x+a)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+ax\right]_0^2=-\frac{16}{3}+2a=0$

$\therefore a=\frac{8}{3}$

정답_ ③

550

S_1+S_2의 값은 곡선 $y=-x^2+4$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이이므로

$\int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx=2\int_0^2(-x^2+4)dx$

$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^2$

$=\frac{32}{3}$

이때, $S_1:S_2=1:3$이므로 $\quad S_1=\frac{32}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{8}{3}$

두 곡선 $y=x^2+2a$, $y=-x^2+4$의 교점의 x좌표는

$x^2+2a=-x^2+4$에서

$2x^2=4-2a \qquad \therefore x=\pm\sqrt{2-a}$

$S_1=\int_{-\sqrt{2-a}}^{\sqrt{2-a}}\{(-x^2+4)-(x^2+2a)\}dx$

$=\int_{-\sqrt{2-a}}^{\sqrt{2-a}}(-2x^2+4-2a)dx$

$=2\int_0^{\sqrt{2-a}}(-2x^2+4-2a)dx$

$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+(4-2a)x\right]_0^{\sqrt{2-a}}$

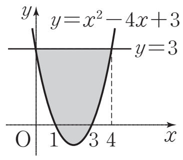
$=\frac{8}{3}(\sqrt{2-a})^3=\frac{8}{3}$

$(\sqrt{2-a})^3=1 \qquad \therefore a=1$

정답_ 1

551

포물선 $y=x^2-4x+3$과 직선 $y=3$의 교점의 x좌표를 구하면



$x^2-4x+3=3$

$x^2-4x=0$, $x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

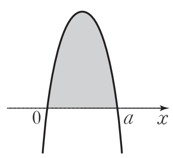
따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^4 \{3-(x^2-4x+3)\}dx=\int_0^4 (-x^2+4x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$$

정답_ ③

552

포물선과 x축의 교점의 x좌표는



$x(a-x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=a$

포물선과 x축의 교점의 x좌표가 0, a이므로 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 36이려면

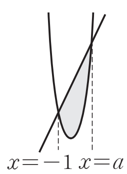
$$\int_0^a \{x(a-x)\}dx=\int_0^a (ax-x^2)dx=\left[\frac{a}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{6}a^3=36$$

$a^3=216$ $\quad\therefore a=6$

정답_ ②

553

포물선과 직선의 교점의 x좌표는



$x^2+x-a=ax$에서

$x^2-(a-1)x-a=0$

$(x+1)(x-a)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=a$

포물선과 직선의 교점의 x좌표가 -1, a이므로

포물선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\dfrac{32}{3}$이려면

$$\int_{-1}^a \{ax-(x^2+x-a)\}dx=\int_{-1}^a \{-x^2+(a-1)x+a\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a-1}{2}x^2+ax\right]_{-1}^a$$
$$=\frac{1}{6}(a+1)^3=\frac{32}{3}$$

$(a+1)^3=64$, $a+1=4$ $\quad\therefore a=3$

정답_ ①

554

포물선과 두 직선의 교점의 x좌표가 각각 $a-3$, $a+3$이므로 두 점 A, B의 좌표는

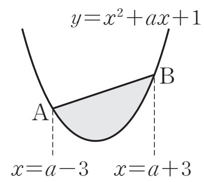
A$(a-3,\ 2a^2-9a+10)$, B$(a+3,\ 2a^2+9a+10)$

이고 직선 AB는

$$y-(2a^2-9a+10)=\frac{18}{6}a\{x-(a-3)\}$$

$\therefore y=3ax-a^2+10$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{a-3}^{a+3} \{3ax-a^2+10-(x^2+ax+1)\}dx$$
$$=\int_{a-3}^{a+3} (-x^2+2ax-a^2+9)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+ax^2-(a^2-9)x\right]_{a-3}^{a+3}$$
$$=36$$

정답_ ④

다른 풀이

포물선의 이차항의 계수가 1이고, 포물선과 직선 AB의 교점의 x좌표가 $a-3$, $a+3$이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{6}\{(a+3)-(a-3)\}^3=\frac{1}{6}\cdot 6^3=36$$

555

$y=x^2+1$에서 $\quad y'=2x$

점 P$(a,\ a^2+1)$에서의 접선의 기울기는 $2a$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2+1)=2a(x-a)$ $\quad\therefore y=2ax-a^2+1$

포물선 $y=x^2$과 직선 $y=2ax-a^2+1$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2=2ax-a^2+1$에서 $\quad x^2-2ax+(a-1)(a+1)=0$

$\{x-(a-1)\}\{x-(a+1)\}=0$ $\quad\therefore x=a-1$ 또는 $x=a+1$

포물선과 직선의 교점의 x좌표가 $a-1$, $a+1$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{a-1}^{a+1} (2ax-a^2+1-x^2)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+ax^2-(a^2-1)x\right]_{a-1}^{a+1}$$
$$=\frac{4}{3}$$

정답_ ④

556

$x^2+2=ax+3$에서 $\quad x^2-ax-1=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 ㉠의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라고 하면 포물선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=-1$

$\therefore \beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{a^2+4}$

$\therefore \dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\dfrac{1}{6}(\sqrt{a^2+4})^3$

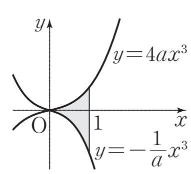
따라서 구하는 최솟값은 $a=0$일 때

$$\frac{1}{6}(\sqrt{4})^3=\frac{1}{6}\cdot 2^3=\frac{4}{3}$$

정답_ ④

557

오른쪽 그림에서 두 곡선 $y=4ax^3$, $y=-\dfrac{1}{a}x^3$과 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는



$$\int_0^1\left\{4ax^3-\left(-\frac{1}{a}x^3\right)\right\}dx$$
$$=\left(4a+\frac{1}{a}\right)\int_0^1 x^3dx=\left(4a+\frac{1}{a}\right)\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{4}\left(4a+\frac{1}{a}\right)=a+\frac{1}{4a}$$

$a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

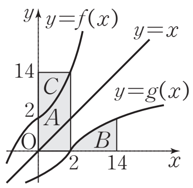
$$a+\frac{1}{4a}\ge 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{4a}}=2\sqrt{\frac{1}{4}}=1$$

$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{1}{4a}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $a=\frac{1}{4a}$, 즉 $a=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 1을 갖는다. 정답_ ②

558

함수 $f(x)=x^3+2x+2$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



오른쪽 그림에서 $A=\int_0^2 f(x)dx$,

$B=\int_2^{14} g(x)dx$이고, $B=C$이므로

$$\int_0^2 f(x)dx+\int_2^{14} g(x)dx$$
$$=A+B=A+C$$
$$=2\cdot14=28$$

정답_ ⑤

559

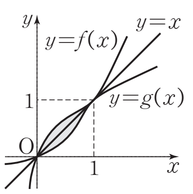
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=x^3-2x^2+2x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x^3-2x^2+2x=x$에서 $x^3-2x^2+x=0$

$x(x-1)^2=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는



$$2\int_0^1\{(x^3-2x^2+2x)-x\}dx$$
$$=2\int_0^1(x^3-2x^2+x)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=2\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

정답_ ①

560

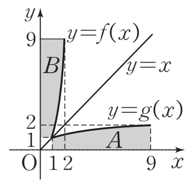
$f(x)=y$일 때, $x=g(y)$이므로 $y=1$, $y=9$일 때, x의 값을 각각 구하면

$x^3+x-1=1$에서 $(x-1)(x^2+x+2)=0$ $\therefore x=1$

$x^3+x-1=9$에서 $(x-2)(x^2+2x+5)=0$ $\therefore x=2$

즉, 함수 $f(x)$의 그래프는 두 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ 9)$를 지나므로 함수 $g(x)$의 그래프는 두 점 $(1,\ 1)$, $(9,\ 2)$를 지난다.

함수 $f(x)$와 역함수 $g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



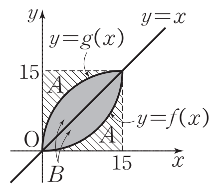
따라서 $A=B$이므로

$$\int_1^9 g(x)dx$$
$$=2\times9-1\times1-\int_1^2(x^3+x-1)dx$$
$$=17-\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2$$
$$=17-\frac{17}{4}=\frac{51}{4}$$

정답_ ③

561

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



오른쪽 그림과 같이 빗금 친 부분과 색칠한 부분의 넓이의 $\frac{1}{2}$을 각각 A, B라고 하면

(i) 빗금 친 부분과 어두운 부분의 넓이의 비가 $2:3$이므로

$A:B=2:3$ $\therefore 3A=2B$ ……㉠

(ii) 정사각형의 넓이는 $15^2=225$이므로

$2A+2B=225$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $A=45$, $B=\frac{135}{2}$

$$\therefore \int_0^{15} f(x)dx=A=45$$

정답_ ④

562

$t=1$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^2 v(t)dt=\int_1^2(3t^2-4t)dt=\left[t^3-2t^2\right]_1^2=1$$

정답_ ④

563

지면에서 똑바로 위로 던진 물체가 6초 후에 지면에 도착하였으므로 위치는 0 m이다.

즉, $\int_0^6(v_0-10t)dt=0$이므로

$$\left[v_0t-5t^2\right]_0^6=6v_0-180=0$$

$\therefore v_0=30$(m/초)

물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0 m/초이므로

$30-10t=0$에서 $t=3$

따라서 물체는 3초 후에 최고 높이에 도달하므로 물체의 최고 높이는

$$0+\int_0^3(30-10t)dt=\left[30t-5t^2\right]_0^3=45\text{(m)}$$

정답_ ③

564

두 점 P, Q가 시각 $t=a$에서 처음으로 다시 만났으므로 $t=a$에서의 위치가 같다.

즉, $0+\int_0^a f(t)dt=0+\int_0^a g(t)dt$이므로

$\int_0^a (t^2-2t)dt=\int_0^a 2tdt$

$\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_0^a=\left[t^2\right]_0^a$

$\frac{1}{3}a^3-a^2=a^2,\ a^3-6a^2=0$

$a^2(a-6)=0 \qquad \therefore a=6\ (a>0)$ 정답_ 6

565

처음에 지면에 정지해 있었으므로 $t=45$일 때의 열기구의 높이는

$$(\text{처음 높이})+\int_0^{45} v(t)dt=0+\int_0^{30} tdt+\int_{30}^{45}(90-2t)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{30}+\left[90t-t^2\right]_{30}^{45}$$
$$=450+225=675(\text{m})$$

정답_ ③

566

3 km를 달리는 데 걸린 시간을 x분이라고 하면

$$\int_0^x v(t)dt=\int_0^x\left(\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{2}t\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{4}t^2\right]_0^x$$
$$=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{4}x^2$$
$$=3$$

$x^3+x^2-12=0$

$(x-2)(x^2+3x+6)=0$

$\therefore x=2(\text{분})\ (\because x^2+3x+6>0)$

즉, 3 km를 달리는 데 2분이 걸리므로 그 이후로는 2분일 때의 속력 $v(2)=\frac{3}{4}\cdot 2^2+\frac{1}{2}\cdot 2=4(\text{km/분})$을 유지하며 일정하게 달린다.

따라서 나머지 3분 동안 열차가 달린 거리는 $4\times 3=12(\text{km})$이므로 5분 동안 열차가 달린 총 거리는 $3+12=15(\text{km})$ 정답_ ③

567

시각 $t=0$에서 시각 $t=6$까지 점 P가 움직인 거리는 함수 $v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$$\int_0^6 |v(t)|dt=\int_0^4 v(t)dt+\int_4^6\{-v(t)\}dt$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot(1+2)\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1$$
$$=\frac{11}{2}$$

정답_ ⑤

568

원점을 출발하였으므로 물체가 다시 원점을 통과하는 것은 위치의 변화량이 0일 때이다. 그런데

$$\int_0^{12} v(t)dt=\int_0^6 v(t)dt+\int_6^{12} v(t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4=0$$

이므로 $t=0$에서 $t=12$까지 점 P의 위치의 변화량이 0이다.

따라서 물체가 다시 원점을 통과하는 것은 12초 후이다.

정답_ ③

569

ㄱ은 옳지 않다.

1초 동안 $v(t)=0$인 적은 없다.

ㄴ은 옳다.

$t=4$와 $t=6$에서 속도의 부호가 바뀌므로 운동 방향이 바뀐다.

즉, 점 P는 움직이는 동안 방향을 2번 바꿨다.

ㄷ도 옳지 않다.

$t=4$일 때 점 P의 위치는

$\int_0^4 v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot(2+4)\cdot 2=6$

이므로 원점이 아니다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다. 정답_ ②

570

ㄱ은 옳다.

$t=0$에서 $t=100$까지 속도가 양수이므로 로켓은 상승하고, $t=100$에서 $t=200$까지 속도가 음수이므로 로켓은 하강한다.

즉, 로켓은 $t=100$일 때부터 떨어지기 시작한다.

ㄴ은 옳지 않다.

최고 높이는 상승하는 동안의 위치의 변화량이다. 그런데 $t=0$에서 $t=100$까지 속도의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{1}{2}\cdot 100\cdot 1000=50000$이므로 최고 높이는 50000이다.

ㄷ도 옳다.

최고점에 도달했을 때에는 $t=100$일 때이고, 최저점에 도달했을 때에는 $t=200$일 때이므로 속력은 0으로 같다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_ ④

571

곡선 $y=x^2$을 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=x^2 \qquad \therefore y=-x^2$ ······ ㉠

······ ❶

㉠을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 26만큼 평행이동하면

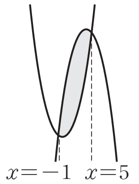
$y-26=-(x-4)^2 \qquad \therefore g(x)=-x^2+8x+10$ ······ ❷

두 곡선 $y=x^2$, $g(x)=-x^2+8x+10$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2=-x^2+8x+10$, $2(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$ ······ ❸

오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_{-1}^{5}\{(-x^2+8x+10)-x^2\}dx$$

$$=\int_{-1}^{5}(-2x^2+8x+10)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2+10x\right]_{-1}^{5}=72$$ ······ ❹

정답_ 72

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 곡선을 대칭이동한 곡선 구하기	20%
❷	대칭이동한 곡선을 평행이동한 곡선 구하기	20%
❸	두 곡선 $y=x^2$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표 구하기	20%
❹	두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이 구하기	40%

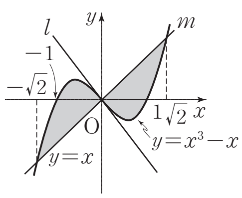
572

$f(x)=x^3-x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-1$ $\quad\therefore f'(0)=-1$

따라서 점 O에서의 접선 l에 수직인 직선 m의 방정식은 $y=x$이다.

······ ❶



이때, 직선 m과 곡선 $y=x^3-x$의 교점의 x좌표는 $x=x^3-x$에서

$x^3-2x=0$, $x(x^2-2)=0$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$ ······ ❷

따라서 구하는 넓이는

$$2\int_{0}^{\sqrt{2}}\{x-(x^3-x)\}dx=2\int_{0}^{\sqrt{2}}(-x^3+2x)dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_{0}^{\sqrt{2}}=2\cdot1=2$$ ······ ❸

정답_ 2

단계	채점 기준	비율
❶	직선 m의 방정식 구하기	20%
❷	직선 m과 곡선의 교점의 x좌표 구하기	40%
❸	직선 m과 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이 구하기	40%

573

$f(x)=ax^2-bx$에서 $\quad f'(x)=2ax-b$

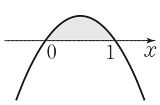
$f(x)=ax^2-bx$가 $x=\frac{1}{2}$에서 극대이므로 $a<0$이고

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=a-b=0$ $\quad\therefore a=b$ ······ ❶

$f(x)=ax^2-ax$의 그래프의 x절편은 $ax^2-ax=0$에서

$ax(x-1)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=1$ ······ ❷

이차항의 계수가 a이고, 이 그래프의 x절편이 0, 1이므로 오른쪽 그림에서 이 그래프와 x축



으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{1}{6}$이 되려면

$\frac{|a|}{6}(1-0)^3=\frac{1}{6}$, $|a|=1$

$\therefore a=-1$ ($\because a<0$)

따라서 $a=-1$, $b=-1$이므로

$a+b=(-1)+(-1)=-2$ ······ ❸

정답_ -2

단계	채점 기준	비율
❶	a, b 사이의 관계식 구하기	30%
❷	함수 $f(x)$의 그래프의 x절편 구하기	20%
❸	$a+b$의 값 구하기	50%

574

기울기가 m이고 점 A$(1, 2)$를 지나는 직선 l의 방정식은

$y-2=m(x-1)$ $\quad\therefore y=mx-m+2$ ······ ❶

$x^2-3x=mx-m+2$에서

$x^2-(m+3)x+m-2=0$ ······ ㉠

이차방정식 ㉠의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라고 하면 포물선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이 $S(m)$은

$S(m)=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ ······ ❷

이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=m+3$, $\alpha\beta=m-2$

$\therefore \beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{(m+3)^2-4(m-2)}$

$=\sqrt{m^2+2m+17}=\sqrt{(m+1)^2+16}$

따라서 $S(m)=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\{\sqrt{(m+1)^2+16}\}^3$ ······ ❸

구하는 최솟값은 $m=-1$일 때

$\frac{1}{6}(\sqrt{16})^3=\frac{1}{6}\cdot4^3=\frac{32}{3}$ ······ ❹

정답_ $\frac{32}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	기울기가 m이고 점 $(1, 2)$를 지나는 직선의 방정식 구하기	10%
❷	공식을 이용하여 $S(m)$을 α, β에 대한 식으로 나타내기	30%
❸	$S(m)$을 m에 대한 식으로 나타내기	30%
❹	$S(m)$의 최솟값 구하기	30%

575

두 함수 $y=x^2-2x$ $(x\ge0)$와 $x=y^2-2y$ $(y\ge0)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x^2-2x=x$에서 $\quad x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$ ······ ❶

이때, 두 곡선 $y=x^2-2x$ $(x\ge0)$와 $x=y^2-2y$ $(y\ge0)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 직선 $y=x$와 곡선 $y=x^2-2x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$2\int_0^3\{x-(x^2-2x)\}dx=2\int_0^3(-x^2+3x)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$
$$=2\cdot\frac{9}{2}=9 \cdots\cdots ❷$$

정답_ 9

단계	채점 기준	비율
❶	곡선과 직선의 교점의 x좌표 구하기	40%
❷	두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이 구하기	60%

576

가속도를 $a(t)$라고 하면 처음 속도가 v_0이므로 시각 t에서의 속도는

$$(\text{처음 속도})+\int_0^t a(t)dt=v_0+\int_0^t(-9.8)dt$$
$$=v_0-9.8t(\text{m/초}) \cdots\cdots ❶$$

처음 높이는 지면이므로 $t=2$에서의 높이는

$$(\text{처음 높이})+\int_0^2 v(t)dt=0+\int_0^2(v_0-9.8t)dt$$
$$=\left[v_0t-4.9t^2\right]_0^2$$
$$=2v_0-19.6(\text{m}) \cdots\cdots ❷$$

$t=2$에서 높이가 5 m가 되어야 하므로

$2v_0-19.6=5$, $2v_0=24.6$

$\therefore v_0=12.3(\text{m/초})$ ❸

정답_ 12.3 m/초

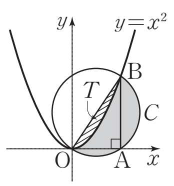
단계	채점 기준	비율
❶	시각 t에서의 속도 구하기	40%
❷	$t=2$에서의 높이 구하기	40%
❸	처음 속도 구하기	20%

577

$$S_1=\int_{-a}^0 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^0=\frac{1}{3}a^3$$
$$S_2=3\cdot9-a\cdot a^2-\int_a^3 x^2dx=27-a^3-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^3$$
$$=27-a^3-\frac{1}{3}(27-a^3)=18-\frac{2}{3}a^3$$
$$\therefore 2S_1+S_2=\frac{2}{3}a^3+\left(18-\frac{2}{3}a^3\right)=18$$

정답_ ⑤

578



점 O, A$(t,\ 0)$, B$(t,\ t^2)$은 원 C 위의 점이고 $\angle$OAB$=90^\circ$이므로 $\overline{\text{OB}}$는 원의 지름이다.

즉, $\overline{\text{OB}}$의 중점이 원 C의 중심이다.

$\overline{\text{OB}}=\sqrt{(t-0)^2+(t^2-0)^2}=\sqrt{t^4+t^2}$

이므로 원 C의 반지름의 길이는 $\dfrac{\sqrt{t^4+t^2}}{2}$이다.

이때, 직선 OB와 곡선 $y=x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 T라고 하면 T는 직각삼각형 OAB의 넓이에서 곡선 $y=x^2$과 x축 및 직선 $x=t$로 둘러싸인 부분의 넓이를 빼면 되므로

$$T=\triangle\text{OAB}-\int_0^t x^2dx$$
$$=\frac{1}{2}\times t\times t^2-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^t$$
$$=\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{3}t^3=\frac{1}{6}t^3$$

따라서 $S(t)$는 반원의 넓이에서 T를 빼면 되므로

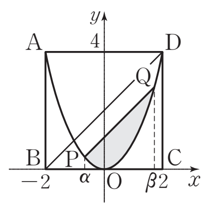
$$S(t)=\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{\sqrt{t^4+t^2}}{2}\right)^2-\frac{1}{6}t^3=\frac{t^4+t^2}{8}\pi-\frac{1}{6}t^3$$
$$S'(t)=\frac{1}{8}(4t^3+2t)\pi-\frac{1}{2}t^2=\frac{1}{4}(2t^3+t)\pi-\frac{1}{2}t^2$$
$$S'(1)=\frac{1}{4}\cdot3\pi-\frac{1}{2}\cdot1=\frac{3\pi-2}{4}$$

따라서 $p=3$, $q=-2$이므로

$p^2+q^2=3^2+(-2)^2=13$

정답_ 13

579



오른쪽 그림과 같이 $\overline{\text{BC}}$를 지나는 직선을 x축, $\overline{\text{BC}}$의 중점을 지나고 $\overline{\text{BC}}$에 수직인 직선을 y축으로 정하자.

포물선의 방정식을 $y=ax^2\ (a\neq0)$으로 놓으면 점 D$(2,\ 4)$를 지나므로 $4=a\cdot2^2$

에서 $a=1$ $\quad\therefore y=x^2$

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라고 하면 $\overline{\text{PQ}}=3\sqrt{2}$이고, 직선 PQ가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45°이므로

$$\beta-\alpha=\overline{\text{PQ}}\cos45^\circ=3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=3$$

따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\cdot3^3=\frac{9}{2}$$

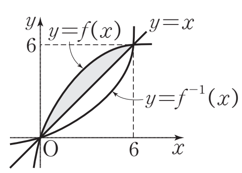
정답_ ④

580

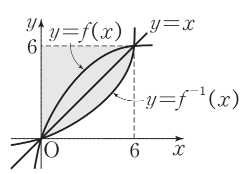
함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

(i) $\int_0^6\{f(x)-x\}dx=6$은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$ 사이의 넓이이므로 [그림 1]의 색칠한 부분의 넓이와 같다.

(ii) $\int_0^6\{6-f^{-1}(x)\}dx$는 직선 $y=6$과 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 사이의 넓이이므로 [그림 2]의 색칠한 부분의 넓이와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

$$\therefore\int_0^6\{6-f^{-1}(x)\}dx=\frac{1}{2}\cdot6\cdot6+6=24$$

정답_ ④

581

두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^1 \{(-x^4+x)-(x^4-x^3)\}dx$$
$$=\int_0^1 (-2x^4+x^3+x)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=-\frac{2}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{7}{20}$$

이때, 두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 곡선 $y=ax(1-x)$에 의해 이등분되므로 두 곡선 $y=-x^4+x$, $y=ax(1-x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1 \{(-x^4+x)-ax(1-x)\}dx$$
$$=\int_0^1 \{-x^4+ax^2+(-a+1)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{a}{3}x^3+\frac{1}{2}(-a+1)x^2\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{5}+\frac{a}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{a}{6}+\frac{3}{10}=\frac{7}{40}$$

$\therefore a=\frac{3}{4}$

정답_ ④

582

시속 72 km를 초속으로 바꾸면

$$72(\text{km/시})=72\times\frac{1000}{3600}(\text{m/초})=20(\text{m/초})$$

브레이크를 작동하는 순간부터 매초 4 m/초씩 속력이 감소하므로 t초 후의 차의 속력은

$v(t)=20-4t(\text{m/초})$

$v(t)=20-4t=0$에서 $t=5$이므로 자동차가 정지하는 시각은 브레이크를 작동한 뒤 5초 후이다.

따라서 구하는 거리 s는 $t=0$에서 $t=5$까지 움직인 거리이므로

$$s=\int_0^5 v(t)dt=\int_0^5 (20-4t)dt$$
$$=\left[20t-2t^2\right]_0^5=50(\text{m})$$

정답_ ①

583

ㄱ은 옳다.

'가' 지점에서 '나' 지점까지의 거리를 s라고 하면 A와 C의 평균 속도는 $\frac{(\text{위치의 변화량})}{(\text{걸린 시간})}=\frac{s}{40}$로 같다.

ㄴ도 옳다.

속도의 그래프에서 가속도는 접선의 기울기이다.

B의 그래프에서 접선의 기울기가 0인 순간은 한 번, C의 그래프에서 접선의 기울기가 0인 순간은 세 번 있다.

ㄷ도 옳다.

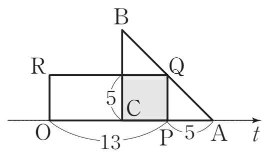
A, B, C 속도의 그래프와 t축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_0^t |v|dt=\int_0^t v\,dt$이므로 위치의 변화량을 나타낸다. 그런데 A, B, C 모두 '가' 지점에서 출발하여 '나' 지점에 도착했으므로 위치의 변화량은 모두 같다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

584

직사각형 OPQR와 겹쳐지는 부분이 최초로 직사각형이 되는 것은 오른쪽 그림과 같이 점 Q가 삼각형의 빗변 위에 있을 때이다.



이때, 점 A의 위치는 18이므로 이때까지 걸린 시간을 x라고 하면

$$\int_0^x v(t)dt=\int_0^x (3t^2-2t)dt$$
$$=\left[t^3-t^2\right]_0^x=x^3-x^2=18$$

$x^3-x^2-18=0$, $(x-3)(x^2+2x+6)=0$

$\therefore x=3$

따라서 구하는 t의 값은 3이다.

정답_ ④

MEMO