풍산자
필수유형

미적분 정답과 풀이

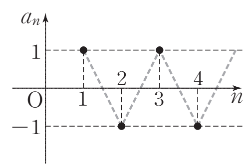
I 수열의 극한

01 수열의 극한

001

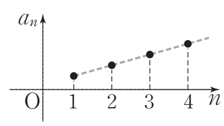
ㄱ은 발산한다.

$n=1, 2, 3, \cdots$에 대하여 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같이 진동하므로 수열 $\{a_n\}$은 발산한다.



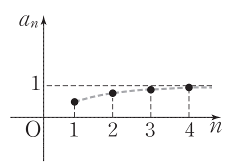
ㄴ도 발산한다.

$n=1, 2, 3, \cdots$에 대하여 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 수열 $\{a_n\}$은 발산한다.



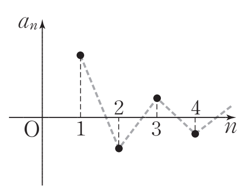
ㄷ은 수렴한다.

$n=1, 2, 3, \cdots$에 대하여 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 수열 $\{a_n\}$은 1로 수렴한다.



ㄹ도 수렴한다.

$n=1, 2, 3, \cdots$에 대하여 a_n의 값을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 수열 $\{a_n\}$은 0으로 수렴한다.



따라서 수렴하는 것은 ㄷ, ㄹ이다. 정답_ ④

002

(1) n이 한없이 커지면 $2n-1$의 값도 한없이 커지므로 수열 $\{2n-1\}$은 양의 무한대로 발산한다.

(2) n이 한없이 커지면 $-n^2$의 값은 한없이 작아지므로 수열 $\{-n^2\}$은 음의 무한대로 발산한다.

(3) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 대입하면 수열 $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$은

$-1,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots$이므로 0에 한없이 가까워진다.

따라서 수열 $\left\{1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$은 1에 한없이 가까워지므로 극한값 1을 갖는다. 정답_ (1) 발산 (2) 발산 (3) 수렴, 극한값 : 1

003

①은 수렴한다.

$(-1)^n+(-1)^{n+1}=(-1)^n-(-1)^n=0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\{(-1)^n+(-1)^{n+1}\}=0$

②도 수렴한다.

n이 한없이 커지면 $\dfrac{(-1)^n}{2^n}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^n}=0$

③은 발산한다.

n이 한없이 커지면 $-\dfrac{n^2}{3}+2$는 한없이 작아지므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{n^2}{3}+2\right)=-\infty$

④도 수렴한다.

$n=1, 2, 3, \cdots$을 대입하면 수열 $\left\{\dfrac{4n+1}{n}\right\}$은 $5, \dfrac{9}{2}, \dfrac{13}{3}, \dfrac{17}{4}$, $\cdots$이므로 4에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+1}{n}=4$

⑤도 수렴한다.

n이 자연수이면 $\left[n+\dfrac{1}{2}\right]=[n+0.5]=n$이므로

$$\frac{\left[n+\frac{1}{2}\right]}{n+\frac{1}{2}}=\frac{n}{n+\frac{1}{2}}$$

$n=1, 2, 3, \cdots$을 대입하면 수열 $\left\{\dfrac{n}{n+\frac{1}{2}}\right\}$은 $\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{6}{7}, \cdots$이므로 1에 한없이 가까워진다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\left[n+\frac{1}{2}\right]}{n+\frac{1}{2}}=1$$

따라서 발산하는 것은 ③이다. 정답_ ③

004

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+1}{3n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{2}{n^2}}=\frac{8}{3}$$

정답_ ②

005

주어진 식의 분모, 분자를 n^4으로 나누면

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(4+\frac{5}{n}\right)\left(6+\frac{7}{n}\right)}{\left(4-\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{2}{n}\right)\left(2-\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{4}{n}\right)}$$

$$=\frac{(1+0)(2+0)(4+0)(6+0)}{(4-0)(3-0)(2-0)(1-0)}$$

$$=\frac{48}{24}=2$$

정답_ ②

006

$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2+\sum\limits_{k=1}^{n}k$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$
$$\therefore \text{(주어진 식)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}{n\cdot\frac{n(n+1)}{2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+2)}{3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{4}{n}}{3}=\frac{2}{3}$$

정답_②

007

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$$
$$=4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$
$$=\frac{n\{2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\}}{3}$$
$$=\frac{4n^3-n}{3}$$
$$\therefore \text{(주어진 식)}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3}{\frac{4n^3-n}{3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{24n^2}{4n^2-1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{24}{4-\frac{1}{n^2}}=6$$

정답_③

008

주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$$a_n=\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\frac{n+1}{2n}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 극한값은 $\frac{1}{2}$이다.

정답_②

009

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}$$
$$=\frac{n+1}{2}$$
$$\therefore \text{(주어진 식)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+12n}{n^2+2n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{12}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=4$$

정답_⑤

010

$$\frac{1+a_n}{a_n}=n^2+2\text{에서}\quad n^2a_n+2a_n=1+a_n$$
$$(n^2+1)a_n=1\qquad \therefore a_n=\frac{1}{n^2+1}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}n^2a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}=1$$

정답_①

다른 풀이

$\lim_{n\to\infty}n^2a_n=\alpha$ (α는 상수)라고 하면

$$\frac{1+a_n}{a_n}=n^2+2\text{에서}\quad \frac{1}{a_n}+1=n^2+2$$

양변에 n^2으로 나누면

$$\frac{1}{n^2a_n}+\frac{1}{n^2}=1+\frac{2}{n^2}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2a_n}+\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)$$
$$\frac{1}{\alpha}=1\qquad \therefore \alpha=1$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}n^2a_n=\alpha=1$$

011

$$a_n=1-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}\text{이므로}$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_2a_3a_4\cdots a_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1\cdot3}{2\cdot2}\times\frac{2\cdot4}{3\cdot3}\times\frac{3\cdot5}{4\cdot4}\times\cdots\times\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$$

정답_②

012

주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면

$$a_n=\log_2(n+1)-\log_2(2n+1)=\log_2\frac{n+1}{2n+1}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n+1}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}$$
$$=\log_2\frac{1}{2}=-1$$

따라서 구하는 극한값은 -1이다.

정답_②

013

분모의 최고차항인 n으로 분모, 분자를 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{9n^2+3}+\sqrt{n^2-7}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{9+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{n^2}}}$$
$$=\frac{2}{3+1}=\frac{1}{2}$$

정답_③

014

$$\lim_{n\to\infty}\{\log_2(\sqrt{4n-1}+\sqrt{4n+1})-\log_2\sqrt{n}\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{\sqrt{4n-1}+\sqrt{4n+1}}{\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{\sqrt{4-\frac{1}{n}}+\sqrt{4+\frac{1}{n}}}{1}$$
$$=\log_2\frac{2+2}{1}=\log_2 4=2$$

정답_②

015

두 점 $P(n,\ 3n^2)$, $Q(n+1,\ 3(n+1)^2)$ 사이의 거리 a_n은

$$a_n=\sqrt{(n+1-n)^2+\{3(n+1)^2-3n^2\}^2}$$
$$=\sqrt{1+(6n+3)^2}=\sqrt{36n^2+36n+10}$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{36n^2+36n+10}}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{36+\frac{36}{n}+\frac{10}{n^2}}$$
$$=\sqrt{36}=6$$

정답_④

016

$S_n=n\cdot 3^n$에서

(i) $n\geq 2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}=n\cdot 3^n-(n-1)\cdot 3^{n-1}$$
$$=3n\cdot 3^{n-1}-(n-1)\cdot 3^{n-1}=(2n+1)\cdot 3^{n-1}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=3$

이때, $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=(2n+1)\cdot 3^{n-1}\ (n\geq 1)$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 3^n}{(2n+1)\cdot 3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2+\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}$$

정답_③

017

$S_n=3n^2-4n$에서

(i) $n\geq 2$일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(3n^2-4n)-\{3(n-1)^2-4(n-1)\}$$
$$=6n-7\qquad\cdots\cdots ㉠$$

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=3\cdot 1^2-4\cdot 1=-1$

이때, $a_1=-1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=6n-7\ (n\geq 1)$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{(5n+2)a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-4n}{(5n+2)(6n-7)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-4n}{30n^2-23n-14}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{4}{n}}{30-\frac{23}{n}-\frac{14}{n^2}}$$
$$=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$$

정답_①

018

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+5}{\sqrt{4n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{an+b+\frac{5}{n}}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}$$

이때, $a\neq 0$이면 발산하므로 $a=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{5}{n}}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}=\frac{b}{2}=7\text{이므로}\quad b=14$$

$\therefore\ a+b=0+14=14$

정답_③

019

(i) $a\neq 0,\ b=0$이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-6n+6}{bn^2+3n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-6n+6}{3n-3}=\infty(\text{또는 }-\infty)$$

(ii) $a=0,\ b=0$이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-6n+6}{bn^2+3n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{-6n+6}{3n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{-6+\frac{6}{n}}{3-\frac{3}{n}}=-2$$

(iii) $a=0,\ b\neq 0$이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-6n+6}{bn^2+3n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{-6n+6}{bn^2+3n-3}=0$$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의해 $a\neq 0,\ b\neq 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-6n+6}{bn^2+3n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{a-\frac{6}{n}+\frac{6}{n^2}}{b+\frac{3}{n}-\frac{3}{n^2}}=\frac{a}{b}=2$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{bn-a}{an+b}=\lim_{n\to\infty}\frac{b-\frac{a}{n}}{a+\frac{b}{n}}=\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$$

정답_③

020

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-8n}-2n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2-8n}-2n)(\sqrt{4n^2-8n}+2n)}{\sqrt{4n^2-8n}+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-8n}{\sqrt{4n^2-8n}+2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-8}{\sqrt{4-\frac{8}{n}}+2}$$

$$= \frac{-8}{2+2} = -2$$

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3})$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{3}{n}}}$$

$$= \frac{6}{1+1} = 3$$

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n})}{(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n})(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n})}{4n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}\right)}{4}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(1+1)}{4} = 1$$

정답_(1) -2 (2) 3 (3) 1

021

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 6, 공차가 2이므로

$$S_n = \frac{n\{2\cdot 6+(n-1)\cdot 2\}}{2} = \frac{n(2n+10)}{2} = n^2+5n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} (\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})(\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n})}{\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}-S_n}{\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\{(n+1)^2+5(n+1)\}-(n^2+5n)}{\sqrt{(n+1)^2+5(n+1)}+\sqrt{n^2+5n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+6}{\sqrt{n^2+7n+6}+\sqrt{n^2+5n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{6}{n}}{\sqrt{1+\frac{7}{n}+\frac{6}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{n}}}$$

$$= \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

정답_①

022

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\alpha^2}-\sqrt{n+\beta^2}}{\sqrt{4n+\alpha}-\sqrt{4n+\beta}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+\alpha^2}-\sqrt{n+\beta^2})(\sqrt{n+\alpha^2}+\sqrt{n+\beta^2})(\sqrt{4n+\alpha}+\sqrt{4n+\beta})}{(\sqrt{4n+\alpha}-\sqrt{4n+\beta})(\sqrt{4n+\alpha}+\sqrt{4n+\beta})(\sqrt{n+\alpha^2}+\sqrt{n+\beta^2})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha^2-\beta^2)(\sqrt{4n+\alpha}+\sqrt{4n+\beta})}{(\alpha-\beta)(\sqrt{n+\alpha^2}+\sqrt{n+\beta^2})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{(\alpha+\beta)\cdot\frac{\sqrt{4+\frac{\alpha}{n}}+\sqrt{4+\frac{\beta}{n}}}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n}}+\sqrt{1+\frac{\beta^2}{n}}}\right\}$$

$$= 1\cdot\frac{2+2}{1+1} = 2$$

정답_④

023

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{kn+1}}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{kn+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{kn+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{k+\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{k}(1+1)}{2} = \sqrt{k}$$

따라서 $\sqrt{k}=5$이므로 $k=25$

정답_⑤

024

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a}\left\{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{20}-\frac{1}{n^{20}}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a}\left\{\left(\frac{n^2+1}{n}\right)^{20}-\frac{1}{n^{20}}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a}\left\{\frac{(n^2+1)^{20}}{n^{20}}-\frac{1}{n^{20}}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{n^a}\cdot\frac{(n^2+1)^{20}-1}{n^{20}}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)^{20}-1}{n^{a+20}}$$

분자의 차수가 40이고 수렴하므로 분모의 차수가 40 이상이어야 한다.

즉, $a+20\ge 40$ $\quad\therefore a\ge 20$

따라서 자연수 a의 최솟값은 20이다.

정답_④

025

$k\le 0$이면 $\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(n+3)(4n-1)}-kn\}=\infty$이므로 $k>0$

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \{\sqrt{(n+3)(4n-1)}-kn\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\{\sqrt{(n+3)(4n-1)}-kn\}\{\sqrt{(n+3)(4n-1)}+kn\}}{\sqrt{(n+3)(4n-1)}+kn}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(4-k^2)n^2+11n-3}{\sqrt{4n^2+11n-3}+kn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4-k^2)n+11-\frac{3}{n}}{\sqrt{4+\frac{11}{n}-\frac{3}{n^2}}+k}$$

이때, 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로

$4-k^2=0, k^2=4 \quad \therefore k=2\ (\because k>0)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{11-\frac{3}{n}}{\sqrt{4+\frac{11}{n}-\frac{3}{n^2}}+2}$$

$$=\frac{11}{2+2}=\frac{11}{4}$$

정답_ $\frac{11}{4}$

026

$f(x)=n$에서 $(x-3)^2=n, x-3=\pm\sqrt{n}$

$\therefore x=3\pm\sqrt{n}$

즉, $h(n)=|\alpha-\beta|=|(3+\sqrt{n})-(3-\sqrt{n})|=2\sqrt{n}$이므로

$h(n+1)=2\sqrt{n+1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\{h(n+1)-h(n)\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{2}{1+1}=1$$

정답_ ②

027

$x^2-2nx+n=0$의 두 근은 $x=n\pm\sqrt{n^2-n}$

이 중에서 작지 않은 근은 $a_n=n+\sqrt{n^2-n}$

이때, $(n-1)^2\le n^2-n<n^2$이므로

$n-1\le\sqrt{n^2-n}<n$

따라서 $\sqrt{n^2-n}$의 정수부분은 $n-1$이므로 a_n의 정수부분은

$f(n)=n+(n-1)=2n-1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\{a_n-f(n)\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{(n+\sqrt{n^2-n})-(2n-1)\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2-n}-(n-1)\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{n^2-n}-(n-1)\}\{\sqrt{n^2-n}+(n-1)\}}{\sqrt{n^2-n}+(n-1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\sqrt{n^2-n}+n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1-\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

정답_ ①

028

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty}b_n=\beta\,(\alpha, \beta$는 상수$)$라고 하면

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=5$에서 $\alpha-\beta=5$

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=3$에서 $\alpha\beta=3$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)=\lim_{n\to\infty}a_n^2+\lim_{n\to\infty}b_n^2$$

$$=\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$$

$$=5^2+2\cdot3=31$$

정답_ ④

029

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n-2}{a_n+3b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n-2}{\lim_{n\to\infty}a_n+3\lim_{n\to\infty}b_n}$$

$$=\frac{3\alpha-2}{3+3\alpha}=2$$

$3\alpha-2=6+6\alpha \quad \therefore \alpha=-\frac{8}{3}$

정답_ ②

030

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(10n+1)b_n}{a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n^2+1)b_n}{(n+1)a_n}\cdot\frac{(n+1)(10n+1)}{n^2+1}\right\}$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}(n^2+1)b_n}{\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{10n^2+11n+1}{n^2+1}$$

$$=\frac{7}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{10+\frac{11}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{7}{2}\cdot10=35$$

정답_ 35

031

$\frac{na_n}{2n^2+1}=b_n$으로 놓으면 $a_n=\frac{(2n^2+1)b_n}{n}$

또한, $\lim_{n\to\infty}b_n=3$이므로 $\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=3$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n(a_n+a_{n+1})}{n^2+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{na_n}{n^2+1}+\frac{na_{n+1}}{n^2+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\cdot\frac{(2n^2+1)b_n}{n}}{n^2+1}+\frac{n\cdot\frac{\{2(n+1)^2+1\}b_{n+1}}{n+1}}{n^2+1}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2n^2+1}{n^2+1}\cdot b_n+\frac{n(2n^2+4n+3)}{(n+1)(n^2+1)}\cdot b_{n+1}\right\}$$

$$=2\cdot3+2\cdot3=12$$

정답_ ④

032

ㄱ은 옳다.

$a_n<b_n$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$

ㄴ은 옳지 않다.

(반례) $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{2}{n}$이면 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 수렴하고, 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=0$이다.

ㄷ도 옳지 않다.

(반례) $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, $\cdots$

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, $\cdots$

이면 $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=0$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n\neq0$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n\neq0$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 정답_ ①

033

$4n^2-3n-2<a_n<4n^2+n+2$에서

$$\frac{4n^2-3n-2}{2n^2+3n+4}<\frac{a_n}{2n^2+3n+4}<\frac{4n^2+n+2}{2n^2+3n+4}$$

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3n-2}{2n^2+3n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+n+2}{2n^2+3n+4}=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n^2+3n+4}=2$ 정답_ ②

034

$(n-3)(4n^2+1)<2n^2a_n<2n^2(2n+3)$에서

$$\frac{(n-3)(4n^2+1)}{2n^3}<\frac{a_n}{n}<\frac{2n+3}{n}$$

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(n-3)(4n^2+1)}{2n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n}=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$ 정답_ ④

035

ㄱ은 옳지 않다.

(반례) $a_n=\frac{n}{4n+2}$이면 $\frac{-n}{2n-1}<a_n<\frac{n}{2n+1}$이지만

$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{4}$

ㄴ은 옳다.

$\frac{-n}{2n-1}<a_n<\frac{n}{2n+1}$에서 $\frac{-1}{2n-1}<\frac{a_n}{n}<\frac{1}{2n+1}$

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$

ㄷ도 옳다.

$\frac{-n}{2n-1}<a_n<\frac{n}{2n+1}$에서

$$\frac{-n^2}{(n^2+1)(2n-1)}<\frac{na_n}{n^2+1}<\frac{n^2}{(n^2+1)(2n+1)}$$

이때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{(n^2+1)(2n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n^2+1)(2n+1)}=0$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2+1}=0$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

036

① 수열 $\left\{\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right\}$은 공비가 $-\frac{2}{\sqrt{3}}$이고, $-\frac{2}{\sqrt{3}}<-1$이므로 발산(진동)한다.

② 수열 $\left\{\left(\log\frac{1}{10}\right)^n\right\}$은 $\left(\log\frac{1}{10}\right)^n=(-1)^n$에서 공비가 -1이므로 발산(진동)한다.

③ 수열 $\{1.01^n\}$은 공비가 1.01이고, $1.01>1$이므로 양의 무한대로 발산한다.

④ 수열 $\left\{\frac{-5^n}{9\cdot4^n}\right\}$은 $\frac{-5^n}{9\cdot4^n}=-\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^n$에서 공비가 $\frac{5}{4}$이고, $\frac{5}{4}>1$이므로 음의 무한대로 발산한다.

⑤ 수열 $\{(\sqrt{2}-1)^n\}$은 공비가 $\sqrt{2}-1$이고, $-1<\sqrt{2}-1<1$이므로 0으로 수렴한다.

따라서 수렴하는 것은 ⑤이다. 정답_ ⑤

037

등비수열 $\left\{\left(\frac{3x-5}{6}\right)^n\right\}$은 공비가 $\frac{3x-5}{6}$이므로 수렴하려면

$-1<\frac{3x-5}{6}\leq1$, $-6<3x-5\leq6$, $-1<3x\leq11$

$\therefore -\frac{1}{3}<x\leq\frac{11}{3}$

위의 범위 안의 정수 x는 0, 1, 2, 3으로 4개이다. 정답_ ④

038

등비수열 $\{(x^2-5x+7)^n\}$의 공비는 x^2-5x+7이고, 0이 아닌 값에 수렴하려면 공비가 1이어야 하므로

$x^2-5x+7=1$, $x^2-5x+6=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 구하는 모든 실수 x의 값의 곱은 6이다. 정답_ ③

039

등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하므로

$-1<r\leq1$ $\cdots\cdots$ ㉠

ㄱ. 수열 $\{r^{2n}\}$은 공비가 r^2이고, ㉠에서 $0\leq r^2\leq1$이므로 항상 수렴한다.

ㄴ. 수열 $\{(-r)^n\}$은 항상 수렴하지는 않는다.

(반례) $r=1$이면 수열 $\{r^n\}$은 수렴하지만 $(-r)^n=(-1)^n$이므로 수열 $\{(-r)^n\}$은 발산(진동)한다.

ㄷ. 수열 $\left\{\left(\frac{1-r}{2}\right)^n\right\}$은 공비가 $\frac{1-r}{2}$이고, ㉠에서

$-1\leq-r<1$, $0\leq1-r<2$, $0\leq\frac{1-r}{2}<1$

이므로 항상 수렴한다.

따라서 수렴하는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_③

040

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5\cdot3^{n+1}}{3^n}-\frac{2^{n+1}}{3^n}}{\frac{3^n}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{5\cdot3-2\cdot0}{1+0}=15$$

정답_⑤

041

$a_n=5\cdot5^{n-1}=5^n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-7}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-7}{5^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5-7\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1}=5$$

정답_⑤

042

$a_n=3\cdot2^{n-1}, b_n=5\cdot6^{n-1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\log_{a_n}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\log b_n}{\log a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log 5\cdot6^{n-1}}{\log 3\cdot2^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\log5+n\log6-\log6}{\log3+n\log2-\log2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\log5}{n}+\log6-\frac{\log6}{n}}{\frac{\log3}{n}+\log2-\frac{\log2}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\log6}{\log2}=\log_2 6$$

$$=1+\log_2 3$$

정답_⑤

043

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(9+\frac{1}{3^n}\right)\left(a+\frac{1}{2^n}\right)=45$에서

$\lim_{n\to\infty}\left(9+\frac{1}{3^n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{1}{2^n}\right)=45$

$9\cdot a=45 \qquad \therefore a=5$

정답_⑤

044

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{a\cdot3^n-3^{n-1}}=\frac{3}{a-\frac{1}{3}}=\frac{9}{3a-1}=6$$

$6(3a-1)=9 \qquad \therefore a=\frac{5}{6}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{5a^n+4}{2a^n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n+4}{2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n+7}=\frac{4}{7}$$

정답_②

045

$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{3}{4}$에 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 차례로 대입하면

$\frac{a_2}{a_1}\le\frac{3}{4}$

$\frac{a_3}{a_2}\le\frac{3}{4}$

$\frac{a_4}{a_3}\le\frac{3}{4}$

$\vdots$

$\frac{a_n}{a_{n-1}}\le\frac{3}{4}$

변끼리 곱하면

$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\le\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

$\frac{a_n}{a_1}\le\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \qquad \therefore a_n\le a_1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

이때, $a_n>0$이므로 $0<a_n\le a_1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

그런데 $\lim_{n\to\infty}a_1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n-1}+8-3a_n}{6a_n-4^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n-1}+8}{-4^n+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+\frac{8}{4^n}}{-1+\frac{2}{4^n}}=-\frac{1}{2}$$

정답_①

046

주어진 그래프에서 $f(2)=4$

직선 $y=g(x)$가 원점과 점 $(3,\ 3)$을 지나므로

$g(x)=x \qquad \therefore g(2)=2$

$$h(2)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(2)\}^{n+1}+5\{g(2)\}^n}{\{f(2)\}^n+\{g(2)\}^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+5\cdot2^n}{4^n+2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+5\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{4}\right)^n}=4$$

주어진 그래프에서 $f(3)=3, g(3)=3$이므로

$$h(3)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(3)\}^{n+1}+5\{g(3)\}^n}{\{f(3)\}^n+\{g(3)\}^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5\cdot3^n}{3^n+3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8\cdot3^n}{2\cdot3^n}=4$$

$\therefore h(2)+h(3)=4+4=8$

정답_③

047

ㄱ은 옳지 않다.

$|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}-r+2}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{r^{n-1}}+\frac{2}{r^n}}{1+\frac{1}{r^n}}$$

$$=\frac{\frac{1}{r}-0+0}{1+0}=\frac{1}{r}$$

그러므로 극한값은 $\frac{1}{r}$로 존재한다.

ㄴ은 옳다.

$r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}-r+2}{r^n+1}=\frac{1-1+2}{1+1}=1$

그러므로 극한값은 1이다.

ㄷ도 옳다.

$|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}-r+2}{r^n+1}=\frac{0-r+2}{0+1}=2-r$$

그러므로 극한값은 $2-r$이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ④

048

(i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^{2n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n-1}+2}{r^{2n}+1}=\frac{0+2}{0+1}=2$$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n-1}+2}{r^{2n}+1}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}$

(iii) $r=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n-1}+2}{r^{2n}+1}=\frac{-1+2}{1+1}=\frac{1}{2}$

(iv) $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^{2n}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n-1}+2}{r^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r}+\frac{2}{r^{2n}}}{1+\frac{1}{r^{2n}}}=\frac{\frac{1}{r}+0}{1+0}=\frac{1}{r}$$

그러므로 $r=-3$일 때, 극한값은 $-\frac{1}{3}$이다.

따라서 (i)~(iv)에 의해 극한값이 될 수 없는 것은 ⑤ 3이다.

정답_ ⑤

049

(i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{r^n-2010}=\frac{0}{0-2010}=0 \qquad \therefore a=0$$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{r^n-2010}=\frac{1}{1-2010}=-\frac{1}{2009}$

$$\therefore a=-\frac{1}{2009}$$

(iii) $r=-1$일 때

n이 홀수이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{r^n-2010}=\frac{1}{-1-2010}=-\frac{1}{2011}$

n이 짝수이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{r^n-2010}=\frac{-1}{1-2010}=\frac{1}{2009}$

이때, $-\frac{1}{2011}\neq\frac{1}{2009}$이므로 상수 a의 값은 존재하지 않는다.

(iv) $|r|>1$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{r^n-2010}=\lim_{n\to\infty}\frac{r}{1-\frac{2010}{r^n}}=\frac{r}{1-0}=r$$

그러므로 $r=-2010$일 때 $a=-2010$이고, $r=2010$일 때 $a=2010$이다.

따라서 (i)~(iv)에 의해 상수 a의 값이 될 수 없는 것은 ④ $\frac{1}{2009}$이다.

정답_ ④

050

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+5}{x^n+2}$에서

$$f(-2)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{n+1}+5}{(-2)^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2+\frac{5}{(-2)^n}}{1+\frac{2}{(-2)^n}}$$

$$=\frac{-2+0}{1+0}=-2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+5}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+2}=\frac{0+5}{0+2}=\frac{5}{2}$$

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{n+1}+5}{1^n+2}=\frac{1+5}{1+2}=2$$

$$\therefore f(-2)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)=-2+\frac{5}{2}+2=\frac{5}{2}$$

정답_ ②

051

(i) $0<x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+1}{x^n+x}=\frac{0+1}{0+x}=\frac{1}{x}$$

(ii) $x=1$일 때

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+1}{x^n+x}=\frac{1+1}{1+1}=1$$

(iii) $x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+1}{x^n+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{1}{x^n}}{1+\frac{x}{x^n}}=\frac{x+0}{1+0}=x$$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의해 함수 $f(x)$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ③이다.

정답_ ③

052

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = x$ (x는 상수)라고 하면 $a_{n+1}=\sqrt{2a_n+3}$에서

$x=\sqrt{2x+3}$, $x^2=2x+3$, $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$ $\quad \therefore x=-1$ 또는 $x=3$

그런데 주어진 수열의 모든 항은 양수이므로 극한값도 양수이다.

$\therefore x=3$

정답_ ③

053

n째 날의 최고 높이를 a_n m라고 하면 같은 날 밤에 $\frac{1}{4}a_n$ m만큼 내려온 후 다음날 낮에 다시 2 m를 올라가므로

$a_{n+1}=a_n-\frac{1}{4}a_n+2 \quad \therefore a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+2$

이때, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = x$ (x는 상수)라고 하면

$x=\frac{3}{4}x+2 \quad \therefore x=8$ (m)

따라서 최고 높이는 8 m에 한없이 가까워진다.

정답_ ②

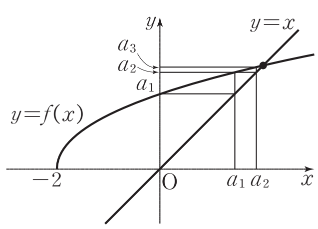
054

주어진 그래프를 이용하여

$a_1=f(0), a_2=f(a_1)$,

$a_3=f(a_2), \cdots$

의 값을 추정해 나가면 오른쪽 그림과 같으므로 수열 $\{a_n\}$은 두 그래프의 교점의 x좌표($=y$좌표)에 가까워진다.



$\sqrt{x+2}=x$에서

$x+2=x^2$, $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=2$

이때, $x>0$이므로 $\quad x=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=2$

정답_ ⑤

055

$n^2<n^2+1<(n+1)^2$ 이므로

$\sqrt{n^2}<\sqrt{n^2+1}<\sqrt{(n+1)^2}$

$\therefore n<\sqrt{n^2+1}<n+1$

$\sqrt{n^2+1}$의 정수부분은 $\quad a_n=n$, 소수부분은 $\quad b_n=\sqrt{n^2+1}-n$ ❶

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}$$

$$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2} \text{ ❷}$$

정답_ $\frac{1}{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	a_n, b_n의 식 구하기	40%
❷	$\lim_{n\to\infty} a_nb_n$의 값 구하기	60%

056

$\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=2$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{b_n}{a_n}\right)=0$

이므로 $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=2$ ❶

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2b_n+1}{3a_n-b_n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2\cdot\frac{b_n}{a_n}+\frac{1}{a_n}}{3-\frac{b_n}{a_n}-\frac{1}{a_n}}$$

$$=\frac{1+2\cdot2+0}{3-2-0}=5 \text{ ❷}$$

정답_ 5

단계	채점 기준	비율
❶	$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값 구하기	60%
❷	$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2b_n+1}{3a_n-b_n-1}$의 값 구하기	40%

057

곡선 $y=x^2-(n+1)x+a_n$은 x축과 만나므로 이차방정식 $x^2-(n+1)x+a_n=0$의 판별식을 D_1이라고 하면

$D_1=\{-(n+1)\}^2-4a_n\geq0$, $n^2+2n+1-4a_n\geq0$

$\therefore a_n\leq\frac{n^2+2n+1}{4}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또, 곡선 $y=x^2-nx+a_n$은 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2-nx+a_n=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$D_2=(-n)^2-4a_n<0$

$\therefore a_n>\frac{n^2}{4}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{n^2}{4}<a_n\leq\frac{n^2+2n+1}{4}$ ❶

$\frac{n^2}{4n^2}<\frac{a_n}{n^2}\leq\frac{n^2+2n+1}{4n^2}$

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2}=\frac{1}{4}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{4}$ ❷

정답_ $\frac{1}{4}$

단계	채점 기준	비율
❶	a_n의 범위를 n에 대한 부등식으로 나타내기	50%
❷	$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값 구하기	50%

058

등비수열 $\{x^{2n}\}$은 공비가 x^2이므로 수렴하려면

$-1<x^2\le 1 \quad \therefore -1\le x\le 1$ ⋯⋯ ㉠

⋯ ❶

등비수열 $\{(x+1)(x-1)^{n-1}\}$은 첫째항이 $x+1$, 공비가 $x-1$이므로 수렴하려면

$x+1=0$ 또는 $-1<x-1\le 1$

$\therefore x=-1$ 또는 $0<x\le 2$ ⋯⋯ ㉡

⋯ ❷

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x는 $-1, 1$이므로 그 합은 0이다. ⋯ ❸

정답_ 0

단계	채점 기준	비율
❶	수열 $\{x^{2n}\}$이 수렴할 조건 구하기	30%
❷	수열 $\{(x+1)(x-1)^{n-1}\}$이 수렴할 조건 구하기	40%
❸	정수 x의 값의 합 구하기	30%

059

점 P_n은 직선 $x=4^n$과 곡선 $y=\sqrt{x}$가 만나는 점이므로

$y=\sqrt{4^n}=\sqrt{(2^n)^2}=2^n$

$\therefore P_n(4^n, 2^n)$

또, 점 P_{n+1}은 직선 $x=4^{n+1}$과 곡선 $y=\sqrt{x}$가 만나는 점이므로

$y=\sqrt{4^{n+1}}=\sqrt{(2^2)^{n+1}}=\sqrt{(2^{n+1})^2}=2^{n+1}$

$\therefore P_{n+1}(4^{n+1}, 2^{n+1})$ ⋯ ❶

$$\begin{aligned}L_n&=\overline{P_nP_{n+1}}\\&=\sqrt{(4^{n+1}-4^n)^2+(2^{n+1}-2^n)^2}\\&=\sqrt{4^{2n}(4-1)^2+2^{2n}(2-1)^2}\\&=\sqrt{9\cdot16^n+4^n}\end{aligned}$$ ⋯⋯ ㉠

㉠에 n 대신 $n+1$을 대입하면

$L_{n+1}=\sqrt{9\cdot16^{n+1}+4^{n+1}}$ ⋯ ❷

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{9\cdot16^{n+1}+4^{n+1}}}{\sqrt{9\cdot16^n+4^n}}\right)^2\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{9\cdot16^{n+1}+4^{n+1}}{9\cdot16^n+4^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{9\cdot16+4\cdot\left(\frac{4}{16}\right)^n}{9+\left(\frac{4}{16}\right)^n}\\&=\frac{9\cdot16}{9}=16\end{aligned}$$ ⋯ ❸

정답_ 16

단계	채점 기준	비율
❶	두 점 P_n, P_{n+1}의 좌표 구하기	30%
❷	L_n, L_{n+1}의 식 구하기	30%
❸	$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2$의 값 구하기	40%

060

점 $P_{n+2}(x_{n+2})$는 선분 P_nP_{n+1}을 $1:2$로 내분하는 점이므로

$$x_{n+2}=\frac{1\cdot x_{n+1}+2\cdot x_n}{1+2}=\frac{1}{3}x_{n+1}+\frac{2}{3}x_n$$

$$\therefore x_{n+2}-x_{n+1}=-\frac{2}{3}(x_{n+1}-x_n)$$

$x_{n+1}-x_n=b_n$으로 놓으면

$$b_{n+1}=-\frac{2}{3}b_n$$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 공비가 $-\frac{2}{3}$인 등비수열이고,

$b_1=x_2-x_1=90-0=90$이므로

$$b_n=90\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$x_{n+1}-x_n=90\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ⋯ ❶

$\therefore x_{n+1}=x_n+90\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 n 대신 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}x_2&=x_1+90\\x_3&=x_2+90\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\\x_4&=x_3+90\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2\\&\ \ \vdots\\+\ \ x_n&=x_{n-1}+90\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}\\\hline x_n&=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}90\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_n&=0+\sum_{k=1}^{n-1}90\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1}\\&=\frac{90\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}\\&=54-54\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\end{aligned}$$ ⋯ ❷

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}x_n&=\lim_{n\to\infty}\left\{54-54\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}\\&=54-0=54\end{aligned}$$ ⋯ ❸

정답_ 54

단계	채점 기준	비율
❶	수열 $\{x_{n+1}-x_n\}$의 일반항 구하기	50%
❷	수열 $\{x_n\}$의 일반항 구하기	40%
❸	$\lim_{n\to\infty}x_n$의 값 구하기	10%

061

ㄱ은 옳다.

$a=0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^{k+1}+bn^k-1}{3n^2-2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn^k-1}{3n^2-2n-1}=-2$

위의 등식이 성립하려면

$k=2,\ \frac{b}{3}=-2 \qquad \therefore k=2,\ b=-6$

$\therefore b+k=-4$

ㄴ은 옳지 않다.

$b>0$일때 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^{k+1}+bn^k-1}{3n^2-2n-1}=-2$가 성립하려면

$k+1=2,\ \frac{a}{3}=-2$

$\therefore k=1, a=-6$

$\therefore a+k=-5$

ㄷ도 옳지 않다.

(반례) $a=-6,\ b=-1,\ k=1$이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^{k+1}+bn^k-1}{3n^2-2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-6n^2-n-1}{3n^2-2n-1}=-2$$

이지만 $abk=6>0$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 정답_ ①

062

$\sum_{k=1}^{n}(2+a_k)=\sum_{k=1}^{n}2+\sum_{k=1}^{n}a_k$

$=2n+S_n$

$\sum_{k=1}^{n}(2k+a_k)=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}a_k$

$=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+S_n$

$=n^2+n+S_n$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(2+a_k)}{\sum_{k=1}^{n}(2k+a_k)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+S_n}{n^2+n+S_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{S_n}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{S_n}{n^2}}$$

$$=\frac{0+\frac{1}{2}}{1+0+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3} \quad \Leftarrow \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{1}{2}$$

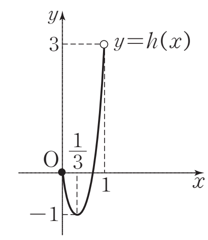
정답_ ④

063

$\log t$의 소수부분인 $g(t)$의 범위는 $0\le g(t)<1$이므로

$f(t)=9n\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2-n$

$=n\left[9\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2-1\right]$



$g(t)=x,\ h(x)=9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-1$이라고 하면 $0\le x<1$에서 이차함수 $h(x)$의 범위는 $-1\le h(x)<3$이다.

$f(t)=nh(x)$에서

$-n\le nh(x)<3n$이므로

$-n\le f(t)<3n \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때, $\log t$의 정수부분인 $f(t)$는 정수이므로 ㉠에 의해 가능한 정수 $f(t)$의 값은

$f(t)=-n, -n+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, 3n-1$

즉, 서로 다른 모든 $f(t)$의 합은

$a_n=(-n)+(-n+1)+\cdots+(-1)+0+1+\cdots$

$\quad+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n-1)$

$=(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n-1)$

$=\frac{(2n-1)\{(n+1)+(3n-1)\}}{2}$

$=4n^2-2n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{2}{n}}{1}=4$$

정답_ ①

064

직각삼각형 AOC_n에서 $\overline{OA}=48,\ \overline{OC_n}=n$이므로

$\overline{AC_n}=\sqrt{n^2+48^2}$

$\triangle AB_1D_n \backsim \triangle AB_nC_n$에서 $\overline{AB_1}:\overline{B_1D_n}=\overline{AB_n}:\overline{B_nC_n}$이므로

$1:\overline{B_1D_n}=n:48,\ n\overline{B_1D_n}=48 \qquad \therefore \overline{B_1D_n}=\frac{48}{n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{AC_n}-\overline{OC_n}}{\overline{B_1D_n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+48^2}-n}{\frac{48}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+48^2}-n)}{48}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+48^2}-n)(\sqrt{n^2+48^2}+n)}{48(\sqrt{n^2+48^2}+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{48n}{\sqrt{n^2+48^2}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{48}{\sqrt{1+\frac{48^2}{n^2}}+1}$$

$$=\frac{48}{1+1}=24$$

정답_ ④

065

$(2n)^2<4n^2+3n<(2n+1)^2$이므로

$\sqrt{(2n)^2}<\sqrt{4n^2+3n}<\sqrt{(2n+1)^2}$

$\therefore 2n<\sqrt{4n^2+3n}<2n+1$

즉, $[a_n]=[\sqrt{4n^2+3n}]=2n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-[a_n])$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+3n}-2n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+3n}-2n)(\sqrt{4n^2+3n}+2n)}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+2}$$
$$=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}$$

따라서 $a=4$, $b=3$이므로

$a+b=4+3=7$ 정답_ 7

066

ㄱ은 극한값이 존재한다.

$-1\le(-1)^n\le1$이므로

$$\frac{-1}{n-1}\le\frac{(-1)^n}{n-1}\le\frac{1}{n-1}$$
$$\therefore \frac{-\sqrt{n}}{n-1}\le\frac{(-1)^n\cdot\sqrt{n}}{n-1}\le\frac{\sqrt{n}}{n-1}$$

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{-\sqrt{n}}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sqrt{n}}{n-1}=0$$

ㄴ은 극한값이 존재하지 않는다.

(i) n이 홀수일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\cdot2n}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n-1}=-2$$

(ii) n이 짝수일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\cdot2n}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n-1}=2$$

이때, $-2\ne2$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\cdot2n}{n-1}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ도 극한값이 존재한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\cdot(-1)^{n-1}\cdot n}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n-1}\cdot n}{n-1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n-1}=-1$$

따라서 극한값이 존재하도록 하는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

067

ㄱ은 상수 α의 값이 항상 존재하는 것은 아니다.

(반례) $a_n=-2^n$이면 $3^na_n=-6^n<2^n$을 만족시키지만

$\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$이다.

ㄴ은 상수 α의 값이 항상 존재한다.

$\frac{|a_n|}{100}<\left(\frac{9}{10}\right)^n$에서 $-100\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n<a_n<100\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n$

이때,

$\lim_{n\to\infty}\left\{-100\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n\right\}=\lim_{n\to\infty}100\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ $\therefore \alpha=0$

ㄷ도 상수 α의 값이 항상 존재한다.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{n}{n+1}<a_n<\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n+1}{n}$에서

$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{n}{n+1}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n+1}{n}\right\}=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=1$ $\therefore \alpha=1$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$인 상수 α의 값이 항상 존재하도록 하는 것은 ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ④

068

$6^n=2^n\cdot3^n$에서

$$T(n)=(1+2+\cdots+2^n)(1+3+\cdots+3^n)$$
$$=\frac{1\cdot(2^{n+1}-1)}{2-1}\cdot\frac{1\cdot(3^{n+1}-1)}{3-1}$$
$$=(2^{n+1}-1)\left(\frac{3^{n+1}-1}{2}\right)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{6^n}{T(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2^n\cdot3^n}{(2^{n+1}-1)(3^{n+1}-1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(2-\frac{1}{2^n}\right)\left(3-\frac{1}{3^n}\right)}$$
$$=\frac{2}{(2-0)(3-0)}=\frac{1}{3}$$

정답_ ②

069

x^n을 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$(a, b는 상수)라고 하면

$x^n=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$

$=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$

위의 식의 양변에 $x=1$과 $x=2$를 차례로 대입하면

$1=a+b$, $2^n=2a+b$

두 식을 연립하여 풀면

$a=2^n-1$, $b=2-2^n$

$\therefore R(x)=(2^n-1)x+(2-2^n)$

$R(0)=2-2^n$, $R(-1)=3-2\cdot2^n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R(-1)}{R(0)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-2\cdot 2^n}{2-2^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2^n}-2}{\frac{2}{2^n}-1}$$
$$=\frac{0-2}{0-1}=2$$

정답_ 2

070

원 O_n이 직선 AB와 점 P_n에서 접하므로 직선 AB와 직선 O_nQ_n은 서로 수직이다.

또, 직선 l과 직선 BC가 평행하므로

$\angle Q_nAB=\angle ABC=60°$

두 직각삼각형 AP_nO_n과 AP_nQ_n은 합동이므로

$\overline{Q_nO_n}=2\overline{P_nO_n}=2\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

직각삼각형 AP_nO_n에서 $\angle AO_nP_n=30°$이므로

$\overline{AP_n}=\overline{P_nO_n}\tan 30°=\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

즉, $\overline{BP_n}=\overline{AB}-\overline{AP_n}=4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

삼각형 BO_nQ_n의 넓이 S_n은

$$S_n=\frac{1}{2}\times\overline{Q_nO_n}\times\overline{BP_n}$$
$$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\left\{4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$
$$=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left\{4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}2^nS_n=\lim_{n\to\infty}2\sqrt{3}\left\{4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=8\sqrt{3}$$

따라서 $k=8\sqrt{3}$이므로

$k^2=(8\sqrt{3})^2=192$

정답_ 192

071

n년 후 A사, B사의 고객 수를 각각 a_n, b_n이라고 하자. 해마다 A사 고객의 6 %는 B사로, B사 고객의 2 %는 A사로 옮겨가므로 $(n+1)$년 후의 A사의 고객 수는

$a_{n+1}=0.94a_n+0.02b_n$

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=0.94\lim_{n\to\infty}a_n+0.02\lim_{n\to\infty}b_n$

이때, 오랜 세월이 흐른 후 각 회사의 고객 수가 일정해지므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 상수)라고 하면

$\alpha=0.94\alpha+0.02\beta$

$0.06\alpha=0.02\beta$

$3\alpha=\beta$

$\therefore \alpha : \beta=1 : 3$

정답_ 1 : 3

02 급수

072

(1) 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{3}{4}$이다.

(2) 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=-\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$$
$$=-\{(\sqrt{1}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})\}$$
$$=-(1-\sqrt{n+1})=\sqrt{n+1}-1$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(3) 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k+1}{k}$$
$$=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\cdots+\log\frac{n+1}{n}$$
$$=\log\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)$$
$$=\log(n+1)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log(n+1)=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

정답_ (1) 수렴, $\frac{3}{4}$ (2) 발산 (3) 발산

073

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

정답_ ⑤

074

주어진 급수의 제n항을 a_n이라고 하면

$$a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$\therefore$ (주어진 식)$=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$

정답_ ④

075

$x^2-4x+n^2+n=0$에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha_n+\beta_n=4,\ \alpha_n\beta_n=n^2+n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2+n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n(n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}4\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}4\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}4\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=4$$

정답_ 4

076

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

$a_4=a_1+3d,\ a_2=a_1+d$

$a_4-a_2=(a_1+3d)-(a_1+d)=2d=4 \qquad \therefore d=2$

$a_1=4$이므로 $\quad a_n=4+(n-1)\cdot 2=2n+2$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{na_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(2n+2)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

정답_ ①

077

$$\sum_{k=2}^{n}\log_2\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\log_2\frac{k^2-1}{k^2}$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\log_2\frac{(k-1)(k+1)}{k\cdot k}$$

$$=\log_2\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}+\log_2\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}+\log_2\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}+\cdots+\log_2\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}$$

$$=\log_2\left\{\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\times\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\times\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\times\cdots\times\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}\right\}$$

$$=\log_2\frac{n+1}{2n}$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\log_2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\log_2\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n+1}{2n}$$

$$=\log_2\frac{1}{2}=-1$$

정답_ ②

078

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log_2 a_k$$

$$=\log_2 a_1+\log_2 a_2+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_n$$

$$=\log_2(a_1a_2a_3\cdots a_n)$$

$$=\log_2\frac{8n}{n+8}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\log_2 a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{8n}{n+8}$$

$$=\log_2 8=3$$

정답_ ⑤

079

(1) 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$S_1=1,\ S_2=0,\ S_3=1,\ S_4=0,\ \cdots$

따라서 수열 $\{S_n\}$이 발산(진동)하므로 주어진 급수는 발산한다.

(2) 주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$S_n=(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)=0+0+\cdots+0=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty} 0=0$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 0이다.

정답_ (1) 발산 (2) 수렴, 0

080

급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

ㄱ. $S_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$

그러므로 주어진 급수는 $\frac{1}{2}$로 수렴한다.

ㄴ. $S_1=\frac{1}{2},\ S_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ S_3=\frac{1}{2},\ S_4=\frac{1}{2}-\frac{1}{4},\ S_5=\frac{1}{2},$

$S_6=\frac{1}{2}-\frac{1}{5},\ \cdots$

$\therefore S_{2n-1}=\frac{1}{2},\ S_{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1}=\frac{1}{2},\ \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$

그러므로 주어진 급수는 $\frac{1}{2}$로 수렴한다.

ㄷ. $S_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{n+2}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{n+1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

그러므로 주어진 급수는 $-\frac{1}{2}$로 수렴한다.

ㄹ. $S_1=\frac{1}{2},\ S_2=\frac{1}{2}-\frac{2}{3},\ S_3=\frac{1}{2},\ S_4=\frac{1}{2}-\frac{3}{4},\ S_5=\frac{1}{2},$

$S_6=\frac{1}{2}-\frac{4}{5},\ \cdots$

$\therefore S_{2n-1}=\frac{1}{2},\ S_{2n}=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{n+2}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{n+1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

그러므로 주어진 급수는 발산한다.

따라서 수렴하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 3개이다. 정답_ ②

081

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{8}{k^2+2k}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{8}{k(k+2)}$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}4\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=4\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=4\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$

$=\lim\limits_{n\to\infty}4\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=4\left(1+\frac{1}{2}\right)=6$ 정답_ ③

082

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{2n^2+2}=\frac{1}{2}$

이때, $a_1=S_1=\frac{1+3}{2+2}=1$이므로

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n-a_1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$ 정답_ ④

083

(i) $n\ge 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+2n)-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=2n+1\ (n\ge 2)$ ……㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2+2\cdot 1=3$

이때, $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n+1\ (n\ge 1)$

$a_n=2n+1$에서 $a_{n+1}=2(n+1)+1=2n+3$이므로

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a_na_{n+1}}$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{3}$ 정답_ ①

084

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ne 0$이면 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산함을 이용한다.

(1) $a_n=\frac{n}{2n+1}$으로 놓으면

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}\neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(2) $a_n=\dfrac{(2n+1)(3n+1)}{(4n-1)(5n-1)}$로 놓으면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n+1)}{(4n-1)(5n-1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{1}{n}\right)}{\left(4-\frac{1}{n}\right)\left(5-\frac{1}{n}\right)}\\&=\frac{2\cdot3}{4\cdot5}=\frac{3}{10}\neq 0\end{aligned}$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

정답_(1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

085

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$이 수렴하므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-3n-1}{2a_n+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}-3-\frac{1}{n}}{2\cdot\frac{a_n}{n}+2+\frac{1}{n}}=\frac{0-3-0}{2\cdot0+2+0}=-\frac{3}{2}$$

정답_②

086

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(4a_n-\frac{1}{5}\right)=3$에서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(4a_n-\frac{1}{5}\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(4a_n-\frac{1}{5}\right)=0$$

이때, $4a_n-\frac{1}{5}=b_n$이라고 하면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n=0$이고

$a_n=\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{20}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{20}\right)=\frac{1}{20}$$

정답_⑤

다른 풀이

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(4a_n-\frac{1}{5}\right)=0$에서 $\displaystyle 4\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}=0$

$\displaystyle 4\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{5}$ $\quad\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{20}$

087

주어진 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left\{a_n-\frac{2+4+6+\cdots+2n}{(2n)^2}\right\}=0$$

이때,

$$\begin{aligned}2+4+6+\cdots+2n&=2(1+2+3+\cdots+n)\\&=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n^2+n\end{aligned}$$

이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n^2+n}{4n^2}\right)=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{4}$$

정답_③

088

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n=1$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} S_{n+1}=1,\ \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_{n-1}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3S_{n+1}+2a_n}{S_n-a_{n-1}}=\frac{3\cdot1+2\cdot0}{1-0}=3$$

정답_③

089

ㄱ은 옳다.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$$

ㄴ도 옳다.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (α는 상수)라고 하면 $b_n=2+\frac{1}{n}-a_n$이므로

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}-a_n\right)=2-\alpha$$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 $2-\alpha$에 수렴한다.

ㄷ은 옳지 않다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

이때, ㄴ에 의해 수열 $\{a_n\}$이 0으로 수렴한다면

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n=2\neq0$이므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 발산한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_②

090

(1) $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}&=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\&=2\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5^n}-\frac{1}{2^n}\right)&=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\&=2\cdot\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\\&=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=4\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-1)^n}{6^n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\\&=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{-\frac{1}{6}}{1-\left(-\frac{1}{6}\right)}=\frac{6}{7}\end{aligned}$$

정답_(1) 2 (2) $-\frac{1}{2}$ (3) 4 (4) $\frac{6}{7}$

091

$3a_n-2b_n=c_n$으로 놓으면 $3a_n=2b_n+c_n$

$\therefore a_n=\frac{2}{3}b_n+\frac{1}{3}c_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=-2$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n=10$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}b_n+\frac{1}{3}c_n\right)=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty} b_n+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$
$$=\frac{2}{3}\cdot(-2)+\frac{1}{3}\cdot 10=2$$

정답_ ②

092

ㄱ은 옳다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\beta$ (α, β는 상수)라고 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n+b_n)-a_n\}=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)-\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\beta-\alpha$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 수렴한다.

ㄴ도 옳다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_nb_n=0$

ㄷ은 옳지 않다.

(반례) $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, $\cdots$

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, $\cdots$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$이 0으로 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$이지만

$\lim_{n\to\infty} b_n\neq 0$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ②

093

ㄱ은 옳지 않다.

(반례) $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=-\frac{1}{n}$일 때, $a_n>b_n$이지만

$\lim_{n\to\infty} a_n=0$, $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이므로 $\alpha=\beta$

ㄴ은 옳다.

$a_n>b_n$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\beta$이면

$$\alpha-\beta=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$$
$$=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots>0$$

$\therefore \alpha>\beta$

ㄷ은 옳지 않다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\beta$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=0$이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

정답_ ②

094

$a_n=\sqrt{2^{-n}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$에서

$$a_{2n-1}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1}=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sqrt{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

정답_ ②

095

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라고 하면 $r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{3}$이므로

$a_n=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

따라서 $(a_n)^2=\left\{3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}^2=9\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2=\frac{9}{1-\frac{1}{9}}=\frac{81}{8}$$

정답_ ①

096

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}+(-3)^{n+1}}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-3)^n\cdot(-3)}{5^n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^n-3\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n-3\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}-3\cdot\frac{-\frac{3}{5}}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}$$
$$=\frac{41}{8}$$

정답_ ①

097

$$1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3^2}+1\cdot\frac{1}{3^4}+2\cdot\frac{1}{3^5}+1\cdot\frac{1}{3^7}+2\cdot\frac{1}{3^8}+\cdots$$
$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^7}+\cdots\right)+2\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3^8}+\cdots\right)$$
$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3^3}}+2\cdot\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3^3}}=\frac{15}{26}$$

정답_ ④

098

주어진 급수는 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{1}{3}x$인 등비급수이므로 합은

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}x\right)}=6,\ 6\left(1+\frac{x}{3}\right)=1 \qquad \therefore x=-\frac{5}{2}$$

정답_ ②

099

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(-1<r<1)$라고 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=1$에서 $\frac{a}{1-r}=1$ ······ ㉠

또한, 수열 $\{a_n^2\}$의 첫째항은 a^2, 공비는 r^2이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=3$에서 $\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{a}{1-r}\cdot\frac{a}{1+r}$ ······ ㉡

$=\frac{a}{1+r}=3$ ($\because$ ㉠)

㉠÷㉡을 하면 $\frac{1+r}{1-r}=\frac{1}{3}$

$3(1+r)=1-r$, $4r=-2$ $\quad\therefore r=-\frac{1}{2}$

$r=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{a}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=1 \quad \therefore a=\frac{3}{2}$

따라서 수열 $\{a_n^3\}$의 첫째항은 $a^3=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}$, 공비는

$r^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3=\frac{\frac{27}{8}}{1-\left(-\frac{1}{8}\right)}=3$ 정답_ 3

100

$a_1=1, a_2=0, a_3=1, a_4=0, a_5=1, \cdots$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{5^n}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^5}+\cdots$

$=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{5}{24}$ 정답_ ②

101

9^1의 일의 자리의 숫자는 $a_1=9$

$9\times9=81$이므로 9^2의 일의 자리의 숫자는 $a_2=1$

$1\times9=9$이므로 9^3의 일의 자리의 숫자는 $a_3=9$

$9\times9=81$이므로 9^4의 일의 자리의 숫자는 $a_4=1$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 9, 1이 차례로 반복되는 수열이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\frac{a_4}{2^4}+\frac{a_5}{2^5}+\frac{a_6}{2^6}+\cdots$

$=\frac{9}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{9}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{9}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\cdots$

$=\left(\frac{9}{2}+\frac{9}{2^3}+\frac{9}{2^5}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots\right)$

$=\frac{\frac{9}{2}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{19}{3}$

따라서 $p=3$, $q=19$이므로 $p+q=22$ 정답_ ②

102

주어진 급수가 수렴하려면 $x=0$ 또는 $-1<\frac{x-2}{2}<1$, 즉

$0<x<4$이어야 한다.

$\therefore 0\le x<4$

위의 범위 안의 정수 x는 0, 1, 2, 3으로 4개이다. 정답_ ④

103

등비수열 $\left\{\left(\frac{r-2}{3}\right)^{2n}\right\}$의 공비는 $\left(\frac{r-2}{3}\right)^2$이므로 이 등비수열

이 수렴하려면 $-1<\left(\frac{r-2}{3}\right)^2\le1$

그런데 $\left(\frac{r-2}{3}\right)^2\ge0$이므로 $0\le\left(\frac{r-2}{3}\right)^2\le1$

$-1\le\frac{r-2}{3}\le1$, $-3\le r-2\le3$

$\therefore -1\le r\le5$ ······ ㉠

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r+5}{9}\right)^{2n}$의 공비는 $\left(\frac{r+5}{9}\right)^2$이므로 이 등비급수

가 수렴하려면 $-1<\left(\frac{r+5}{9}\right)^2<1$

그런데 $\left(\frac{r+5}{9}\right)^2\ge0$이므로 $0\le\left(\frac{r+5}{9}\right)^2<1$

$-1<\frac{r+5}{9}<1$, $-9<r+5<9$

$\therefore -14<r<4$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $-1\le r<4$

위의 범위 안의 정수 r는 -1, 0, 1, 2, 3으로 5개이다.

정답_ ⑤

104

$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하므로 $|r|<1$, 즉 $-1<r<1$ ······ ㉠

㉠에서 $|r^2|<1$, $|-r|<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$은 반드시

수렴한다.

따라서 ①, ②, ③은 반드시 수렴한다.

㉠에서 $-1<r<1$, $-2<r-1<0$

$\therefore -1<\frac{r-1}{2}<0$

따라서 ④도 반드시 수렴한다.

㉠에서 $-1<r<1$, $-\frac{1}{2}<\frac{r}{2}<\frac{1}{2}$

$\therefore -\frac{3}{2}<\frac{r}{2}-1<-\frac{1}{2}$

따라서 ⑤는 반드시 수렴하지는 않는다. 정답_ ⑤

105

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$의 합이 -1이므로

$\frac{a}{1-r}=-1 \quad \therefore a=r-1$

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$이 수렴하고, $a\neq 0$이므로

$-1<r<1, \ -2<r-1<0$

$\therefore -2<a<0$

따라서 상수 a의 값이 될 수 있는 것은 ③이다. 정답_③

106

주어진 급수는 첫째항이 1, 공비가 $x+1$인 등비급수이고, 수렴하므로

$-1<x+1<1 \quad \therefore -2<x<0$

이때, 주어진 등비급수의 합은

$f(x)=\frac{1}{1-(x+1)}=-\frac{1}{x}$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 ③이다. 정답_③

107

$2a_{n+1}=7a_n \ (n\geq 1)$에서 $a_{n+1}=\frac{7}{2}a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=1$이고 공비가 $\frac{7}{2}$인 등비수열이다.

따라서 $a_n=1\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{7}{2}\right)^{n-1}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}10\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}=\frac{10}{1-\frac{2}{7}}=14$ 정답_④

108

$a_{n+1}=a_n+n+1$의 양변에 n 대신 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2=a_1+2 \\ & a_3=a_2+3 \\ & a_4=a_3+4 \\ & \quad\vdots \\ +) & a_n=a_{n-1}+n \\ \hline & a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1) \end{array}$$

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$

$=1+\frac{(n-1)n}{2}+(n-1)$

$=\frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$ 정답_②

109

(i) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ……㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2\left(1-\frac{1}{2}\right)=1$

이때, $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \ (n\geq 1)$

$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$에서 $a_{2n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$ 정답_④

110

주어진 급수의 합을 S로 놓으면

$S=1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\frac{5}{3^4}+\cdots$ ……㉠

양변에 $\frac{1}{3}$을 곱하면

$\frac{1}{3}S=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots$ ……㉡

㉠−㉡을 하면

$\frac{2}{3}S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots$

$=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$

$\therefore S=\frac{9}{4}$ 정답_④

111

$a_na_{n+1}=\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ……㉠

$a_{n+1}a_{n+2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면

$\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} \quad \therefore \frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{1}{4}$ ……㉢

한편, $a_1a_2=1\cdot a_2=\frac{1}{4}$이므로 $a_2=\frac{1}{4}$

㉢에 의해

$\dfrac{a_4}{a_2}=\dfrac{a_4}{\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{4}$이므로 $a_4=\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$

$\dfrac{a_6}{a_4}=\dfrac{a_6}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{1}{4}$이므로 $a_6=\left(\dfrac{1}{4}\right)^3$

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{4}$, 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{3}$$

정답_④

112

부채꼴 OA_nA_{n+1}은 반지름의 길이가 1, 호의 길이가

$\overset{\frown}{A_nA_{n+1}}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$이므로

$S_n=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2^{n-1}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{2}$, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

정답_①

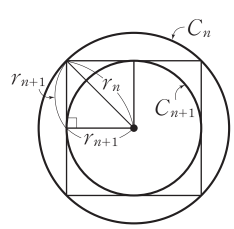
참고

반지름의 길이가 r, 호의 길이가 l인 부채꼴의 넓이 S는

$S=\dfrac{1}{2}rl$

113

원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라고 하면 오른쪽 그림에서



${r_{n+1}}^2+{r_{n+1}}^2={r_n}^2$

$\sqrt{2}r_{n+1}=r_n$

$\therefore r_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}r_n$

원 C_n의 둘레의 길이는 $l_n=2\pi r_n$이므로

$l_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}l_n$

한편, 원 C_1의 넓이가 4π이므로 $r_1=2$

$\therefore l_1=4\pi$

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 4π, 공비가 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\dfrac{4\pi}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=4(2+\sqrt{2})\pi$$

정답_⑤

114

선분 A_1A_2의 길이는 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 대각선의 길이에서 점 C_1을 중심으로 하는 사분원의 반지름 A_2C_1의 길이를 빼면 된다.

즉, $\overline{A_1A_2}=\overline{A_1C_1}-\overline{A_2C_1}=\sqrt{2}-1$

이때, 두 삼각형 $A_1E_1A_2$, $C_1F_1C_2$의 넓이의 합은 대각선의 길이가 $\overline{A_1A_2}=\sqrt{2}-1$인 정사각형의 넓이와 같으므로

$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{A_1A_2}^2=\dfrac{1}{2}\cdot(\sqrt{2}-1)^2=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$

정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 대각선 A_1C_1의 길이는 $\sqrt{2}$이고 그림 R_2에 새로 그려진 정사각형의 대각선 A_2C_2의 길이는 선분 A_1C_1의 길이에서 두 선분 A_1A_2, C_1C_2의 길이를 빼면 되므로

$\overline{A_2C_2}=\overline{A_1C_1}-\overline{A_1A_2}-\overline{C_1C_2}$

$=\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}-1)$

$=2-\sqrt{2}$

한편, 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 그림 R_2에 새로 그려진 정사각형은 닮음이므로 닮음비는

$\overline{A_1C_1}:\overline{A_2C_2}=\sqrt{2}:(2-\sqrt{2})=1:(\sqrt{2}-1)$

따라서 넓이의 비는 $1^2:(\sqrt{2}-1)^2=1:(3-2\sqrt{2})$이므로 S_n은 첫째항이 $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$이고 공비가 $3-2\sqrt{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\frac{3-2\sqrt{2}}{2}}{1-(3-2\sqrt{2})}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{4(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$$

정답_③

115

공이 정지할 때까지 움직인 거리의 총합을 l m라고 하면

$l=10+2\left\{10\cdot\dfrac{1}{2}+10\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+10\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\cdots\right\}$

$=10+2\cdot\dfrac{10\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$

$=10+20=30$ (m)

정답_②

116

중심각의 크기가 $\dfrac{1}{3}$배씩 작아지므로 중심각의 크기는 바로 전 중심각의 크기의 $\dfrac{2}{3}$배가 된다. 이때, 부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로 그네가 움직일 때 만들어지는 호의 길이는 공비가 $\dfrac{2}{3}$인 등비수열을 이룬다.

이때, $\overset{\frown}{P_1P_2}=5\cdot\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{3}\pi$이므로 그네가 정지할 때까지 움직인 거리의 총합을 l m라고 하면

$l=\dfrac{5}{3}\pi+\dfrac{5}{3}\pi\cdot\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{3}\pi\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{5}{3}\pi\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^3+\cdots$

$=\dfrac{\frac{5}{3}\pi}{1-\frac{2}{3}}=5\pi$ (m)

정답_⑤

117

점 P_n이 점 (x, y)에 한없이 가까워진다고 하면

$x=\overline{OP_1}-\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}-\overline{P_6P_7}+\cdots$

$=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^4-\left(\frac{1}{3}\right)^6+\cdots$

$=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{9}\right)}=\frac{9}{10}$

$y=\overline{P_1P_2}-\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}-\overline{P_7P_8}+\cdots$

$=\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^5-\left(\frac{1}{3}\right)^7+\cdots$

$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{9}\right)}=\frac{3}{10}$

따라서 점 P_n은 점 $\left(\frac{9}{10}, \frac{3}{10}\right)$에 한없이 가까워진다. 정답_④

118

점 P가 점 (a, b)에 한없이 가까워지므로

$a=\overline{OP_1}\cos 45^\circ+\overline{P_1P_2}\cos 45^\circ+\overline{P_2P_3}\cos 45^\circ$
$+\overline{P_3P_4}\cos 45^\circ+\cdots$

$=3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2^3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cdots$

$=\frac{3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3\sqrt{2}$

$b=\overline{OP_1}\sin 45^\circ-\overline{P_1P_2}\sin 45^\circ+\overline{P_2P_3}\sin 45^\circ$
$-\overline{P_3P_4}\sin 45^\circ+\cdots$

$=3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{2^3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cdots$

$=\frac{3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{2}$

$\therefore ab=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=6$ 정답_②

119

직선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)$과 이차함수 $y=3x(x-1)$의 그래프의 교점의 x좌표는

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)=3x(x-1)$에서

$(x-1)\left\{3x-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

즉, 두 교점 중 점 A의 x좌표가 1이므로 점 P_n의 x좌표는 $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이다.

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)$에 $x=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$을 대입하면

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right\}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

따라서 점 P_n의 y좌표가 $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$\overline{P_nH_n}=|\text{점 } P_n\text{의 } y\text{좌표}|$

$=\left|\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right|$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\overline{P_nH_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{14}{9}$ 정답_②

120

(i) 10 t의 종이로부터 첫 번째로 수거하여 재생산하는 종이의 양을 a_1 t이라고 하면

$a_1=10\cdot\frac{80}{100}\cdot\frac{75}{100}=10\cdot\frac{3}{5}$

(ii) a_1 t의 종이로부터 두 번째로 수거하여 재생산하는 종이의 양을 a_2 t이라고 하면

$a_2=a_1\cdot\frac{80}{100}\cdot\frac{75}{100}=10\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2$

(iii) a_2 t의 종이로부터 세 번째로 수거하여 재생산하는 종이의 양을 a_3 t이라고 하면

$a_3=a_2\cdot\frac{80}{100}\cdot\frac{75}{100}=10\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3$

⋮

따라서 10 t의 종이로부터 재생산되는 종이의 양의 합은

$a_1+a_2+a_3+\cdots=10\cdot\frac{3}{5}+10\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2+10\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3+\cdots$

$=\frac{10\cdot\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}=15\ (\mathrm{t})$ 정답_③

121

$a_1=0.\dot{2}=\frac{2}{9}$, $a_3=0.00\dot{8}=\frac{8}{900}$이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라고 하면

$a_3=a_1r^2=\frac{2}{9}r^2=\frac{8}{900}$

$r^2=\frac{1}{25}$ $\quad\therefore r=\frac{1}{5}\ (\because r>0)$

따라서 $a_n=\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{18}$ 정답_④

122

$\frac{124}{999}=0.\dot{1}2\dot{4}=0.124124124\cdots$이므로 수열 $\{a_n\}$의 각 항은

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=4,\ a_4=1,\ a_5=2,\ a_6=4,\ \cdots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{2}{2^5}+\frac{4}{2^6}+\cdots$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}+\cdots\right)+\left(\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^5}+\frac{2}{2^8}+\cdots\right)$$

$$+\left(\frac{4}{2^3}+\frac{4}{2^6}+\frac{4}{2^9}+\cdots\right)+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^3}}+\frac{\frac{2}{2^2}}{1-\frac{1}{2^3}}+\frac{\frac{4}{2^3}}{1-\frac{1}{2^3}}=\frac{12}{7}$$

정답_ ⑤

123

다항식 $f(x)=a_nx^2+2a_nx+1$을 $x-n$으로 나눈 나머지가 10이므로 나머지정리에 의해

$f(n)=a_nn^2+2a_nn+1=10,\ n(n+2)a_n=9$

$\therefore a_n=\frac{9}{n(n+2)}$ ······ ❶

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{9}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$=\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$ ······ ❷

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$=\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{27}{4}$ ······ ❸

정답_ $\frac{27}{4}$

단계	채점 기준	비율
❶	수열 $\{a_n\}$의 일반항 구하기	40%
❷	$\sum_{k=1}^{n}a_k$의 값 구하기	30%
❸	$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 합 구하기	30%

124

조건 (가)의 $\frac{2n^3+3}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$에서

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3}{\frac{2n^3+3n^2+n}{6}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12n^3+18}{2n^3+3n^2+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12+\frac{18}{n^3}}{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=6$$

······ ❶

$\therefore 6\le\lim_{n\to\infty}a_n\le 2\lim_{n\to\infty}b_n$ ······ ㉠

조건 (나)에서 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-3)$이 2에 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(b_n-3)=0\quad \therefore \lim_{n\to\infty}b_n=3$ ······ ㉡

······ ❷

따라서 ㉠, ㉡에 의해 $\lim_{n\to\infty}a_n=6$

······ ❸

정답_ 6

단계	채점 기준	비율
❶	$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$의 값 구하기	50%
❷	$\lim_{n\to\infty}b_n$의 값 구하기	30%
❸	$\lim_{n\to\infty}a_n$의 값 구하기	20%

125

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 r_1, r_2라고 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-r_1}=2$에서 $r_1=\frac{1}{2}$ ······ ❶

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{1}{1-r_2}=3$에서 $r_2=\frac{2}{3}$ ······ ❷

이때, 수열 $\{a_nb_n\}$의 첫째항은 $1\cdot1=1$이고 공비는

$r_1r_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$이다. ······ ❸

$$\therefore 15\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$$

$$=15\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}2a_nb_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\right)$$

$$=15\left\{\frac{1^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}+2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1^2}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right\}$$

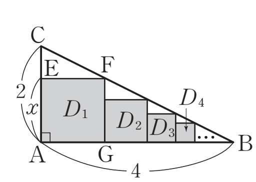
$=92$ ······ ❹

정답_ 92

단계	채점 기준	비율
❶	수열 $\{a_n\}$의 공비 구하기	20%
❷	수열 $\{b_n\}$의 공비 구하기	20%
❸	수열 $\{a_nb_n\}$의 첫째항과 공비 구하기	20%
❹	$15\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$의 합 구하기	40%

126

오른쪽 그림에서 정사각형 D_1의 한 변의 길이를 x라고 하면 두 직각삼각형 ABC와 EFC는 서로 닮음이므로 $\overline{CA}:\overline{CE}=\overline{AB}:\overline{EF}$에서



$2:(2-x)=4:x,\ 2x=4(2-x)$

$6x=8 \qquad \therefore\ x=\frac{4}{3}$ ······························· ❶

두 정사각형 D_1, D_2의 닮음비는 $\overline{\mathrm{CA}}:\overline{\mathrm{FG}}=2:\frac{4}{3}=3:2$이므로 두 정사각형 D_1, D_2의 넓이의 비는

$3^2:2^2=9:4=1:\frac{4}{9}$ ······························· ❷

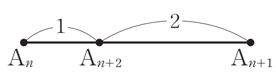
따라서 모든 정사각형의 넓이의 합은 첫째항이 $\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$, 공비가 $\frac{4}{9}$인 등비급수의 합이므로

$$\frac{\frac{16}{9}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{16}{5}$$ ······························· ❸

정답_ $\frac{16}{5}$

단계	채점 기준	비율
❶	정사각형 D_1의 한 변의 길이 구하기	40%
❷	두 정사각형 D_1, D_2의 넓이의 비 구하기	30%
❸	모든 정사각형의 넓이의 합 구하기	30%

127



오른쪽 그림에서 점 A_{n+2}는 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$을 $1:2$로 내분하는 점이므로 $\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}$ ······························· ❶

반원의 호의 길이는 반지름의 길이에 정비례하므로

$l_{n+1}=\frac{2}{3}l_n$ ······························· ❷

한편, $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}=2$이므로 $\quad l_1=\frac{1}{2}\cdot(2\pi\cdot1)=\pi$ ······························· ❸

수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 π, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\pi}{1-\frac{2}{3}}=3\pi$$ ······························· ❹

정답_ 3π

단계	채점 기준	비율
❶	$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}}$와 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}$ 사이의 관계식 구하기	30%
❷	l_{n+1}과 l_n 사이의 관계식 구하기	20%
❸	l_1의 값 구하기	20%
❹	$\sum_{n=1}^{\infty}l_n$의 값 구하기	30%

128

$0.\dot{a}=\frac{a}{9}$, $0.0\dot{b}=\frac{b}{90}$, $0.00\dot{c}=\frac{c}{900}$가 이 순서로 등비수열을 이루므로 $\left(\frac{b}{90}\right)^2=\frac{a}{9}\cdot\frac{c}{900} \qquad \therefore\ b^2=ac$ ······························· ❶

따라서 a, b, c도 이 순서로 등비수열을 이룬다.

$1<a<b<c<9$인 세 정수 a, b, c가 등비수열을 이루려면

$a=2$, $b=4$, $c=8$

$\therefore\ a+b+c=14$ ······························· ❷

정답_ 14

단계	채점 기준	비율
❶	a, b, c 사이의 관계식 구하기	60%
❷	$a+b+c$의 값 구하기	40%

129

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a_1, 공비를 r라고 하면

$a_n=a_1r^{n-1} \qquad \therefore\ a_{2n}=a_1r^{2n-1}=a_1r\cdot(r^2)^{n-1}$

따라서 등비수열 $\{a_{2n}\}$의 공비는 r^2이다.

ㄱ은 옳다.

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\quad -1<r<1$

이때, 등비수열 $\{a_{2n}\}$의 공비는 r^2이고, $0\le r^2<1$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$도 수렴한다.

ㄴ도 옳다.

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 발산하면 $\quad |r|\ge1$

이때, 등비수열 $\{a_{2n}\}$의 공비는 r^2이고 $r^2\ge1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$도 발산한다.

ㄷ은 옳지 않다.

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\quad \lim_{n\to\infty}a_n=0$

이때, $\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{1}{2}\right)=0+\frac{1}{2}\ne0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{1}{2}\right)$은 발산한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ③

130

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$에서 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_n$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)\end{aligned}$$

이때, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=5$, $\cdots$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+2}=\infty \qquad \therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+2}}=0$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)=\frac{1}{2}$

정답_ ①

131

$x-3y+3=0$에서 $y=\frac{1}{3}x+1$이므로 이 직선 위에 있는 점에 대하여 y좌표가 자연수이려면 x좌표는 3의 배수이어야 한다.

따라서 $x=3n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 놓으면 $y=n+1$이므로

$a_n=3n,\ b_n=n+1$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_nb_n}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_kb_k}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k(k+1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

정답_ ③

132

$\cos^2x+\cos^2x\sin x+\cos^2x\sin^2x+\cdots=\frac{3}{2}$에서 좌변은 첫째항이 $\cos^2x$, 공비가 $\sin x$인 등비급수이고, $\frac{\pi}{2}<x<\pi$에서 $0<\sin x<1$이므로

$$\begin{aligned}&\cos^2x+\cos^2x\sin x+\cos^2x\sin^2x+\cdots\\&=\frac{\cos^2x}{1-\sin x}=\frac{1-\sin^2x}{1-\sin x}\\&=\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x}=1+\sin x=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

즉, $\sin x=\frac{1}{2}$

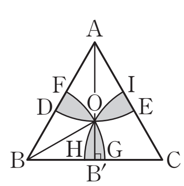
이때 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$이므로 $x=\frac{5}{6}\pi$

정답_ $\frac{5}{6}\pi$

133

점 O는 정삼각형 ABC의 외심이므로 무게중심이다. 이때, 정삼각형 ABC의 높이가

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot6=3\sqrt{3}$이므로



R_1

$\overline{\text{BO}}=\frac{2}{3}\cdot3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

또, 점 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 B′이라고 하면

$\overline{\text{OB}'}=\frac{1}{3}\cdot3\sqrt{3}=\sqrt{3},\ \overline{\text{BB}'}=\frac{1}{2}\,\overline{\text{BC}}=\frac{1}{2}\cdot6=3$

이때, 그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1은 부채꼴 OBG의 넓이에서 직각삼각형 OBB′의 넓이를 뺀 것의 6배이고

$\angle\text{OBG}=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\begin{aligned}S_1&=6\left\{\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot3\cdot\sqrt{3}\right\}\\&=6\pi-9\sqrt{3}\end{aligned}$$

한편, $\overline{\text{HC}}=\overline{\text{BO}}=2\sqrt{3}$이므로

$\overline{\text{BH}}=\overline{\text{BC}}-\overline{\text{HC}}=6-2\sqrt{3}$

즉, 두 정삼각형 ABC와 DBH의 닮음비는

$\overline{\text{BC}}:\overline{\text{BH}}=6:(6-2\sqrt{3})=1:\frac{3-\sqrt{3}}{3}$이므로

넓이의 비는 $1^2:\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2=1:\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$

이때,  모양의 개수가 3배씩 늘어나므로 S_n은 첫째항이 $6\pi-9\sqrt{3}$, 공비가 $3\cdot\frac{4-2\sqrt{3}}{3}=4-2\sqrt{3}$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합이다.

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}S_n&=\frac{6\pi-9\sqrt{3}}{1-(4-2\sqrt{3})}=\frac{3(2\pi-3\sqrt{3})}{2\sqrt{3}-3}\\&=(2\pi-3\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)\end{aligned}$$

정답_ ③

134

$\text{A}(0,\ 0), \text{B}(5,\ 0), \text{P}(x,\ y)$이므로 $\overline{\text{AP}}:\overline{\text{PB}}=1:n$에서

$\sqrt{x^2+y^2}:\sqrt{(x-5)^2+y^2}=1:n$

$n\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-5)^2+y^2}$

$n^2(x^2+y^2)=(x-5)^2+y^2$

$(n^2-1)x^2+(n^2-1)y^2+10x=25$

$x^2+y^2+\frac{10}{n^2-1}x=\frac{25}{n^2-1}$

$\left(x+\frac{5}{n^2-1}\right)^2+y^2=\frac{25}{n^2-1}+\frac{25}{(n^2-1)^2}$

$\left(x+\frac{5}{n^2-1}\right)^2+y^2=\left(\frac{5n}{n^2-1}\right)^2$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 $\left(-\frac{5}{n^2-1},\ 0\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{5n}{n^2-1}$인 원이다.

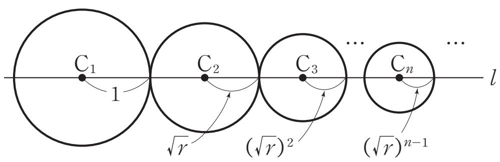
$\overline{\text{PQ}}$의 최댓값 $M(n)=2\times(\text{반지름의 길이})=\frac{10n}{n^2-1}$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{10M(n)}{n}&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{100n}{n(n^2-1)}\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{100}{(n-1)(n+1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{100}{(k-1)(k+1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=2}^{\infty}50\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}50\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}50\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=50\cdot\frac{3}{2}=75\end{aligned}$$

정답_ 75

135

$S_1=\pi$이므로 원 C_1의 반지름의 길이는 1이다.
원 C_{n+1}의 넓이는 원 C_n의 넓이의 r배이므로 원 C_{n+1}의 반지름의 길이는 원 C_n의 반지름의 길이의 $\sqrt{r}$배이다.



$\lim_{n\to\infty}\overline{C_1C_n}$이 수렴하므로

$0<\sqrt{r}<1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(\sqrt{r})^{n-1}=0$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}\overline{C_1C_n}&=\lim_{n\to\infty}\{1+2\sqrt{r}+2(\sqrt{r})^2+2(\sqrt{r})^3\\&\quad+\cdots+2(\sqrt{r})^{n-1}-(\sqrt{r})^{n-1}\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2\sqrt{r}\{1-(\sqrt{r})^{n-1}\}}{1-\sqrt{r}}-(\sqrt{r})^{n-1}\right]\\&=1+\frac{2\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty}\overline{C_1C_n}=5$에서

$1+\dfrac{2\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}=5,\ \dfrac{2\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}=4$

$2\sqrt{r}=4-4\sqrt{r},\ \sqrt{r}=\dfrac{2}{3} \qquad \therefore r=\dfrac{4}{9}$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 π, 공비가 $\dfrac{4}{9}$인 등비수열이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\pi}{1-\frac{4}{9}}=\frac{9}{5}\pi$

정답_②

136

휘발유를 주유할 때마다 $\dfrac{50}{1000}=0.05$의 비율로 적립금을 주므로 40000원 어치의 휘발유를 주유하면

$40000\times0.05=2000$ (원)의 적립금을 받는다. 그런데 2000원의 적립금으로 휘발유를 주유하면 $2000\times0.05=100$ (원)의 적립금을 받는다. 다시 100원의 적립금으로 휘발유를 주유하면 $100\times0.05=5$ (원)의 적립금을 받는다. 이와 같은 과정을 한없이 반복할 수 있으므로 구하는 적립금의 실제 가치는

$2000+2000\times0.05+2000\times0.05^2+\cdots$

$=\dfrac{2000}{1-0.05}=\dfrac{2000}{0.95}$

$=2105.\times\times\times$ (원)

따라서 이 값에 가장 가까운 것은 ②이다.

정답_②

137

나열된 모든 수의 합을 S라고 하면

$S=9+2\times0.9+3\times0.09+4\times0.009+\cdots$ ⋯⋯㉠

위의 식의 양변에 0.1을 곱하면

$0.1S=0.9+2\times0.09+3\times0.009+\cdots$ ⋯⋯㉡

㉠−㉡을 하면

$$\begin{aligned}0.9S&=9+0.9+0.09+0.009+\cdots\\&=\frac{9}{1-0.1}=\frac{9}{0.9}=10\end{aligned}$$

$\therefore S=\dfrac{10}{0.9}=\dfrac{100}{9}$

정답_③

다른 풀이

나열된 모든 수의 합은

$$\begin{aligned}&(9+0.9+0.09+0.009+0.0009+\cdots)\\&+(0.9+0.09+0.009+0.0009+\cdots)\\&+(0.09+0.009+0.0009+\cdots)\\&+(0.009+0.0009+\cdots)+\cdots\\&=\frac{9}{1-0.1}+\frac{0.9}{1-0.1}+\frac{0.09}{1-0.1}+\frac{0.009}{1-0.1}+\cdots\\&=10+1+0.1+0.01+\cdots\\&=\frac{10}{1-0.1}=\frac{100}{9}\end{aligned}$$

138

$a_1=0.\dot{1}=\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{10-1}$

$a_2=0.\dot{1}\dot{0}=\dfrac{10}{99}=\dfrac{10}{100-1}=\dfrac{10}{10^2-1}$

$a_3=0.\dot{1}0\dot{0}=\dfrac{100}{999}=\dfrac{100}{1000-1}=\dfrac{10^2}{10^3-1}$

$\vdots$

$\therefore a_n=\dfrac{10^{n-1}}{10^n-1}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{10^{n-1}}{10^n-1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10^n}}=\frac{1}{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore &\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\\&=-\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}\\&=-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\\&=-(9-10)=1\end{aligned}$$

정답_②

II 미분법

03 지수함수와 로그함수의 미분

139

(1) $\lim_{x\to -1}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x+2^x\right\}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}+2^{-1}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{2^{x+1}-3^x}{4^x}=\frac{2^1-3^0}{4^0}=\frac{2-1}{1}=1$

(3) $\lim_{x\to -\infty}4^x=0$이므로 $\lim_{x\to -\infty}\frac{4^x+1}{4^x-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1$

(4) $\lim_{x\to\infty}\frac{5^x}{3^x-5^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^x-1}=\frac{1}{0-1}=-1$

정답_(1) 2 (2) 1 (3) −1 (4) −1

140

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a\cdot 3^{x+1}+2^x}{3^x-2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a\cdot 3+\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x}=3a=18$$

$\therefore a=6$

정답_①

141

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{x+2}+3^{x+3}}{2^x-3^x}=\lim_{t\to\infty}\frac{2^{-t+2}+3^{-t+3}}{2^{-t}-3^{-t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{4}{2^t}+\frac{27}{3^t}}{\frac{1}{2^t}-\frac{1}{3^t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4+27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^t}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^t}=\frac{4+0}{1-0}=4$$

정답_④

142

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{3-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{3-2^t}{1+2^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^t+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$x\to0-$일 때 $t\to-\infty$이므로

$$\lim_{x\to0-}\frac{3-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{3-2^t}{1+2^t}=\frac{3-0}{1+0}=3$$

$$\therefore \lim_{x\to0+}\frac{3-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}+\lim_{x\to0-}\frac{3-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}=-1+3=2$$

정답_②

143

(1) $\lim_{x\to5}\log_3(3x-6)=\log_3(3\cdot5-6)=\log_3 3^2=2$

(2) $\lim_{x\to3}\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=\log_{\frac{1}{2}}(3+1)=\log_{2^{-1}}2^2=-2$

(3) $\lim_{x\to\infty}\log x=\infty$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\log x}=0$

(4) $\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{2x+1}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}=\log_2\frac{2+0}{1+0}$

$=\log_2 2=1$

정답_(1) 2 (2) −2 (3) 0 (4) 1

144

(1) $x-2=t$로 놓으면 $x\to2+$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to2+}\log_2(x-2)=\lim_{t\to0+}\log_2 t=-\infty$

(2) $3-x=t$로 놓으면 $x\to3-$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to3-}\log_{\frac{1}{2}}(3-x)=\lim_{t\to0+}\log_{\frac{1}{2}}t=\infty$

정답_(1) −∞ (2) ∞

145

$\lim_{x\to\infty}\{\log_5(ax-3)-\log_5(x+4)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_5\frac{ax-3}{x+4}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_5\frac{a-\frac{3}{x}}{1+\frac{4}{x}}$

$=\log_5 a=2$

$\therefore a=5^2=25$

정답_④

146

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_2(2x+3)}{\log_2(4x+5)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log_2 x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\log_2 x\left(4+\frac{5}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\log_2 x+\log_2\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\log_2 x+\log_2\left(4+\frac{5}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\log_2\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\log_2 x}}{1+\frac{\log_2\left(4+\frac{5}{x}\right)}{\log_2 x}}$$

$$=\frac{1+0}{1+0}=1$$

정답_④

147

$0<2<\pi$이므로 $\frac{2}{\pi}<1$ $\quad\therefore \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2x}=0$

$\therefore \lim_{x\to\infty}(\pi^{2x}+2^{2x})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left[\pi^{2x}\left\{1+\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2x}\right\}\right]^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}(\pi^{2x})^{\frac{1}{x}}\left\{1+\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2x}\right\}^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\pi^2\left\{1+\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2x}\right\}^{\frac{1}{x}}$$
$$=\pi^2\cdot 1=\pi^2$$
정답_⑤

148

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log_8(3^x+4^x)=\lim_{x\to\infty}\log_8(3^x+4^x)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log_8\left[4^x\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^x+1\right\}\right]^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log_8 4\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}$$
$$=\log_8 4=\log_{2^3}2^2=\frac{2}{3}$$
정답_②

149

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to 0+$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to 0+}\{(0.3)^{\frac{1}{x}}-(0.2)^{\frac{1}{x}}\}^x=\lim_{t\to\infty}\{(0.3)^t-(0.2)^t\}^{\frac{1}{t}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left[(0.3)^t\left\{1-\left(\frac{0.2}{0.3}\right)^t\right\}\right]^{\frac{1}{t}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}0.3\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^t\right\}^{\frac{1}{t}}$$
$$=0.3\cdot 1=0.3$$
정답_②

150

(1) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0}\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\}^2=e^2$

(2) $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{5}{x}}=\lim_{x\to 0}\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^{10}=e^{10}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right\}^3=e^3$

(4) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right\}^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$

정답_(1) e^2 (2) e^{10} (3) e^3 (4) $\sqrt[3]{e}$

151

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)\left(1-\frac{1}{4x}\right)\right\}^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x\left(1-\frac{1}{4x}\right)^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\left(1-\frac{1}{4x}\right)^{-4x}\right\}^{-\frac{1}{4}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{4x}\right)^{-4x}\right\}^{-\frac{1}{4}}$$
$$=e^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{4}}=e^{\frac{1}{4}}$$
정답_①

152

$x-2=t$로 놓으면 $x\to 2$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 2}(x-1)^{\frac{2}{2-x}}=\lim_{t\to 0}(2+t-1)^{\frac{2}{2-(2+t)}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{2}{t}}$$
$$=\lim_{t\to 0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$
정답_①

153

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a+a}{x-a}\right)^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x-a}\right)^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{a}}\right\}^{\frac{ax}{x-a}}$$
$$=e^a$$

이때 $e^a=\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}$에서 $a=\frac{1}{2}$
정답_②

154

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+2}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$
정답_③

155

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_3(5+x)-\log_3 5}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\log_3\frac{5+x}{5}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\log_3\left(1+\frac{x}{5}\right)}{\frac{x}{5}}\cdot\frac{1}{5}\right\}$$
$$=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5\ln 3}$$
정답_⑤

156

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\ln\frac{1+2x}{1+x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\{\ln(1+2x)-\ln(1+x)\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+2x)}{2x}-\frac{\ln(1+x)}{2x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+2x)}{2x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\right\}$$
$$=1-\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$
정답_②

157

$x-1=t$로 놓으면 $x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^3-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{(t+1)^3-1}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t^3+3t^2+3t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2+3t+3}$$

$$=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

정답_①

158

$x-2=t$로 놓으면 $x\to 2$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{\log_3(x-1)}{x-2}=\lim_{t\to 0}\frac{\log_3(2+t-1)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\log_3(1+t)}{t}$$

$$=\frac{1}{\ln 3}$$

정답_④

159

$$\lim_{x\to\infty}x\{\ln(x+2)-\ln x\}=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$$

$\frac{2}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{t\to 0}\left\{\frac{2}{t}\cdot\ln(1+t)\right\}=2\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=2\cdot 1=2$$

정답_③

160

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x\left\{\log_3\left(3+\frac{1}{x}\right)-1\right\}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{\log_3(3+t)-1\}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{\log_3(3+t)-\log_3 3\}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\log_3\frac{3+t}{3}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\log_3\left(1+\frac{t}{3}\right)}{\frac{t}{3}}\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3\ln 3}$$

정답_①

161

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+6x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(2\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}+6\right)$$

$$=2\cdot 1+6=8$$

정답_8

162

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{3x}{e^{3x}-1}\cdot\frac{1}{3}\right)=1\cdot 1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

정답_④

163

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{8x}-1}{\ln(1+4x)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^{8x}-1}{8x}\cdot\frac{4x}{\ln(1+4x)}\cdot\frac{8}{4}\right\}$$

$$=1\cdot 1\cdot 2=2$$

정답_⑤

164

$x-1=t$로 놓으면 $x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1-\ln(2x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1-\ln(1+2t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{e^t-1}{t}-\frac{\ln(1+2t)}{2t}\cdot 2\right\}$$

$$=1-1\cdot 2=-1$$

정답_②

165

$$\lim_{x\to 0}\frac{4^x-2^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1+1-2^x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4^x-1}{x}-\frac{2^x-1}{x}\right)$$

$$=\ln 4-\ln 2=\ln\frac{4}{2}=\ln 2$$

정답_④

166

$a>0,\ a\neq 1$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+6)^x-a^x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(a+6)^x-1+1-a^x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{(a+6)^x-1}{x}-\frac{a^x-1}{x}\right\}$$

$$=\ln(a+6)-\ln a=\ln\frac{a+6}{a}=\ln 3$$

즉, $\frac{a+6}{a}=3$에서 $a+6=3a$

$\therefore a=3$

정답_②

167

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ln(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{\ln(1-x)}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{-\ln(1-x)}{-x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{-1}=4$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-4$$

정답_①

168

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ln(1-2x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)}{e^x-1}\cdot\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{-2x}{\ln(1-2x)}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=3\cdot 1\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$$

정답_ ①

169

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\ln\left\{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^2}$$

$$=\frac{24}{\ln e^2}=\frac{24}{2}=12$$

정답_ 12

170

극한값이 존재하고, $x\to 1$일 때 (분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}(ax+b)=0$에서 $a+b=0$ $\quad\therefore b=-a$

이때, $x-1=t$로 놓으면 $x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{ax-a}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{a(x-1)}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{at}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}\cdot\frac{1}{a}=1\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}=\frac{1}{4}$$

$\therefore a=4$

이때 $b=-a=-4$

$\therefore ab=4\cdot(-4)=-16$

정답_ ①

171

극한값이 존재하고, $x\to a$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to a}\ln(9x-10a+b)=0$에서

$\ln(b-a)=0$, $b-a=1$

$\therefore b=a+1$ ……㉠

$\lim_{x\to a}\frac{\ln(9x-10a+b)}{x-a}$에 ㉠을 대입하면

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln(9x-10a+a+1)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\ln(9x-9a+1)}{x-a}$$

이때, $x-a=t$로 놓으면 $x\to a$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln(9x-9a+1)}{x-a}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(9t+1)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(9t+1)}{9t}\cdot 9$$

$$=1\cdot 9=9$$

$a^2=9$이므로 $a=3$ ($\because a>0$)

㉠에서 $b=a+1=3+1=4$

$\therefore a+b=3+4=7$

정답_ ⑤

172

극한값이 존재하고, $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}(\sqrt{ax+b}-2)=0$에서

$\sqrt{b}-2=0$ $\quad\therefore b=4$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{e^x-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+4}-2}{e^x-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{ax+4}-2)(\sqrt{ax+4}+2)}{(e^x-1)(\sqrt{ax+4}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{(e^x-1)(\sqrt{ax+4}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{a}{\sqrt{ax+4}+2}\right)$$

$$=1\cdot\frac{a}{2+2}=\frac{a}{4}=3$$

$\therefore a=12$

$\therefore a+b=12+4=16$

정답_ ③

173

$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\ln t=\frac{1}{2}(e-1)\ln t$이므로

$$\lim_{t\to 1+}\frac{S(t)}{t-1}=\lim_{t\to 1+}\frac{\frac{1}{2}(e-1)\ln t}{t-1}=\frac{e-1}{2}\lim_{t\to 1+}\frac{\ln t}{t-1}$$

$t-1=z$로 놓으면 $t\to 1+$일 때 $z\to 0+$이므로

$$\frac{e-1}{2}\lim_{t\to 1+}\frac{\ln t}{t-1}=\frac{e-1}{2}\lim_{z\to 0+}\frac{\ln(1+z)}{z}$$

$$=\frac{e-1}{2}\cdot 1=\frac{e-1}{2}$$

정답_ ②

174

두 점 A, B는 직선 $x=t$와 곡선 $f(x)=2^x$, $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이 만나는 점이므로 두 점 A, B의 x좌표는 모두 t이다.

$\therefore$ $A(t,\ 2^t)$, $B\left(t,\ \left(\frac{1}{2}\right)^t\right)$

또, 점 H는 점 A에서 y축에 내린 수선의 발이므로 점 H의 좌표는 $(0,\ 2^t)$이다.

따라서 $\overline{AH}=t$이고, $\overline{AB}=2^t-\left(\frac{1}{2}\right)^t$이므로

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}}=\lim_{t\to 0+}\frac{2^t-\left(\frac{1}{2}\right)^t}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{2^t-1+1-\left(\frac{1}{2}\right)^t}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\left\{\frac{2^t-1}{t}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^t-1}{t}\right\}$$

$$=\ln 2-\ln\frac{1}{2}=\ln 4=2\ln 2$$

정답_①

175

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이어야 하므로 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{x(e^x+1)}=a$

$$\therefore a=\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{x(e^x+1)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\cdot\frac{4}{e^x+1}\right)$$

$$=1\cdot\frac{4}{1+1}=2$$

정답_③

176

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이어야 하므로 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{ax}=b$

$b=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{ax}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\frac{3}{a}=1\cdot\frac{3}{a}=\frac{3}{a}$이므로

$ab=3$

정답_④

177

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이어야 하므로

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+2x)}{x}=b$ ……㉠

㉠에서 극한값이 존재하고 $x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\ln(a+2x)=0$에서 $\ln a=0$

$\therefore a=1$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$b=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot 2=1\cdot 2=2$

$\therefore a+b=1+2=3$

정답_③

178

$f(x)=e^x+x^2-3x$에서 $f'(x)=e^x+2x-3$

$\therefore f'(0)=1+0-3=-2$

정답_④

179

$f(x)=x\ln x$에서 $f'(x)=\ln x+1$

$\therefore f'(e)=\ln e+1=2$

정답_⑤

180

$f(x)=5^{x-1}$에서 $f'(x)=5^{x-1}\ln 5$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-2h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\frac{f(2-2h)-f(2)}{-2h}\cdot 2\right\}$$

$$=f'(2)+2f'(2)=3f'(2)$$

$$=3\cdot 5\ln 5=15\ln 5$$

정답_⑤

181

$f(x)=\log_3 x$에서 $f'(x)=\frac{1}{x\ln 3}$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(3+h)-f(3)}{h}+\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}\right\}$$

$$=f'(3)+f'(3)=2f'(3)$$

$$=2\cdot\frac{1}{3\ln 3}=\frac{2}{3\ln 3}$$

정답_②

182

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$에서 $b+1=\frac{a}{e}$ ……㉠

$f'(1)$이 존재해야 하므로 $f'(x)=\begin{cases}-ae^{-x} & (x<1)\\ b & (x>1)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to 1+}b=\lim_{x\to 1-}(-ae^{-x})$ $\therefore b=-\frac{a}{e}$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{e}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$

$\therefore a-b=\frac{e}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{e+1}{2}$

정답_②

183

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$에서 $\ln a=be^2$ ……㉠

$f'(1)$이 존재해야 하므로 $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (x>1)\\ be^{x+1} & (x<1)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to 1+}\frac{1}{x}=\lim_{x\to 1-}be^{x+1}$ $\therefore 1=be^2$ ……㉡

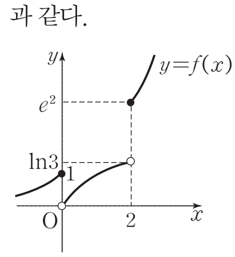
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=e$, $b=\frac{1}{e^2}$

$\therefore a^2b=e^2\cdot\frac{1}{e^2}=1$

정답_④

184

함수 $f(x)=\begin{cases}e^x & (x\le 0,\ x\ge 2)\\ \ln(x+1) & (0<x<2)\end{cases}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



……❶

$\lim_{x\to 2+} f(g(x)) = \lim_{p\to 2+} f(p) = e^2$ ❷

$\lim_{x\to 0+} g(f(x)) = \lim_{q\to 0+} g(q) = 2$ ❸

$\therefore \lim_{x\to 2+} f(g(x)) + \lim_{x\to 0+} g(f(x)) = e^2+2$ ❹

정답_ e^2+2

단계	채점 기준	비율
❶	함수 $f(x)$의 그래프 그리기	30%
❷	$\lim_{x\to 2+} f(g(x))$의 값 구하기	30%
❸	$\lim_{x\to 0+} g(f(x))$의 값 구하기	30%
❹	$\lim_{x\to 2+} f(g(x)) + \lim_{x\to 0+} g(f(x))$의 값 구하기	10%

185

$\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$에서 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to -\infty$일 때 $t\to 0$이므로

$\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ ❶

$\lim_{x\to \infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to \infty}\left[\left\{1+\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}^{-x}\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ ❷

$\therefore \lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x + \lim_{x\to \infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e+\frac{1}{e}$ ❸

정답_ $e+\frac{1}{e}$

단계	채점 기준	비율
❶	$\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$의 값 구하기	40%
❷	$\lim_{x\to \infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$의 값 구하기	40%
❸	$\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x + \lim_{x\to \infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$의 값 구하기	20%

186

(i) $x>0$일 때, 주어진 부등식의 각 변을 x로 나누면

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{e^{3x}-1}{3x}$$

이때, $\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to 0+}\frac{e^{3x}-1}{3x}=1$이므로

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=1$ ❶

(ii) $-1<x<0$일 때, 주어진 부등식의 각 변을 x로 나누면

$$\frac{e^{3x}-1}{3x} \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{\ln(1+x)}{x}$$

이때, $\lim_{x\to 0-}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to 0-}\frac{e^{3x}-1}{3x}=1$이므로

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x}=1$ ❷

(i), (ii)에 의해 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ ❸

$4x=t$로 놓으면 $x\to 0$일 때 $t\to 0$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{f(4x)}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{\frac{t}{4}} = \lim_{t\to 0}\frac{4f(t)}{t} = 4\cdot 1 = 4$ ❹

정답_ 4

단계	채점 기준	비율
❶	$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}$의 값 구하기	30%
❷	$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x}$의 값 구하기	30%
❸	$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$의 값 구하기	10%
❹	$\lim_{x\to 0}\frac{f(4x)}{x}$의 값 구하기	30%

187

$y=\log_2(x+5)$에서 x와 y를 바꾸면

$x=\log_2(y+5)$, $y+5=2^x$ $\quad\therefore y=2^x-5$

$\therefore g(x)=2^x-5$ ❶

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x-4)}{g(x)+4} = \lim_{x\to 0}\frac{\log_2(x+1)}{2^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\log_2(x+1)}{x}}{\frac{2^x-1}{x}} = \frac{\frac{1}{\ln 2}}{\ln 2} = \frac{1}{(\ln 2)^2}$$ ❷

정답_ $\frac{1}{(\ln 2)^2}$

단계	채점 기준	비율
❶	$g(x)$ 구하기	40%
❷	$\lim_{x\to 0}\frac{f(x-4)}{g(x)+4}$의 값 구하기	60%

188

$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$이어야 하므로

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}+a}{x}=b$ ······㉠

㉠에서 극한값이 존재하고 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}(e^{5x}+a)=0$에서 $1+a=0$

$\therefore a=-1$ ······㉡

❶

㉡을 ㉠에 대입하면

$b=\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{5x}\cdot 5 = 1\cdot 5 = 5$ ❷

$\therefore a+b=-1+5=4$ ❸

정답_ 4

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값 구하기	40%
❷	b의 값 구하기	40%
❸	$a+b$의 값 구하기	20%

189

$x\neq 2$일 때, $f(x)=\dfrac{e^x-e^2}{e^2(x-2)}=\dfrac{e^{x-2}-1}{x-2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=2$에서 연속이어야 한다. 즉, $f(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{x-2}-1}{x-2}$ ❶

$g(x)=e^{x-2}$으로 놓으면 $g(2)=e^{2-2}=e^0=1$이므로

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{x-2}-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$

$g'(x)=e^{x-2}$이므로 $f(2)=g'(2)=1$ ❷

정답_1

단계	채점 기준	비율
❶	$f(2)$의 값을 극한을 이용한 식으로 나타내기	40%
❷	$f(2)$의 값 구하기	60%

190

ㄱ은 옳다.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot x\right)$

$=1\cdot 0=0$

ㄴ은 옳다.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{f(x)}=1$에서 $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{e^x-1}{x}\cdot\dfrac{x}{f(x)}\right\}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)}=1$ $\quad\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)}=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{3^x-1}{x}\cdot\dfrac{x}{f(x)}\right\}=\ln 3\cdot 1=\ln 3$

ㄷ은 옳지 않다.

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$이면

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{e^{f(x)}-1}{f(x)}\cdot\dfrac{f(x)}{x}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

$f(x)=|x|$이면 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$이지만

$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{|x|}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{|x|}{x}=-1$이므로 극한값은 존재하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_③

참고

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$이면

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{e^{f(x)}-1}{f(x)}\cdot\dfrac{f(x)}{x}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

따라서 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$이면 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$의 극한값이 존재하는지는 알 수 없다.

191

$S_n=\dfrac{2}{1\cdot 3}+\dfrac{2}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$=1-\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{2n}{2n+1}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{S_n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

정답_②

192

$\dfrac{1}{n}=t$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $t\to 0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{2}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2^t-1}{t}=\ln 2$

정답_②

193

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\{1+f(2x)\}}{x}=10$에서 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}\ln\{1+f(2x)\}=0$ $\quad\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(2x)=0$

$t=f(2x)$로 놓으면 $x\to 0$일 때 $t\to 0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\{1+f(2x)\}}{f(2x)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$에서 $x=2y$로 놓으면

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(2y)}{2y}$

$=\lim\limits_{y\to 0}\left[\dfrac{f(2y)}{\ln\{1+f(2y)\}}\cdot\dfrac{\ln\{1+f(2y)\}}{y}\cdot\dfrac{1}{2}\right]$

$=1\cdot 10\cdot\dfrac{1}{2}=5$

정답_⑤

194

$\mathrm{A}(a,\ \ln(a+1))$, $\mathrm{B}(2a,\ \ln(2a+1))$이므로

$\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\overline{\mathrm{OA}}}{\overline{\mathrm{OB}}}=\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\sqrt{a^2+\{\ln(a+1)\}^2}}{\sqrt{4a^2+\{\ln(2a+1)\}^2}}$

$=\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\left\{\dfrac{\ln(a+1)}{a}\right\}^2}}{\sqrt{4+\left\{\dfrac{\ln(2a+1)}{2a}\cdot 2\right\}^2}}$

$=\dfrac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{4+4}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$

정답_③

195

$f(x)=2^x+5^x$으로 놓으면 $f(1)=7$이므로

$X=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x+5^x-7}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

한편, $f'(x)=2^x\ln 2+5^x\ln 5$이므로

$X=f'(1)=2\ln 2+5\ln 5=\ln(2^2\cdot 5^5)=\ln 12500$

$\therefore e^X=e^{\ln 12500}=12500$

정답_⑤

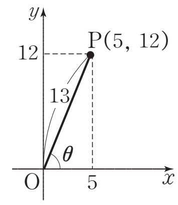
04 삼각함수의 미분

196

점 $P(5, 12)$에 대하여

$x=5, y=12$,

$r=\overline{OP}=\sqrt{5^2+12^2}=13$



(1) $\csc\theta=\dfrac{r}{y}=\dfrac{13}{12}$

(2) $\sec\theta=\dfrac{r}{x}=\dfrac{13}{5}$

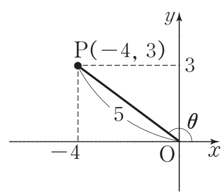
(3) $\cot\theta=\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{12}$

정답_(1) $\dfrac{13}{12}$ (2) $\dfrac{13}{5}$ (3) $\dfrac{5}{12}$

197

$\overline{OP}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$이므로

$\csc\theta=\dfrac{5}{3}, \sec\theta=-\dfrac{5}{4}$



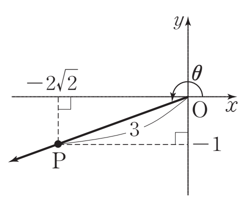
$\therefore 3\csc\theta-8\sec\theta$

$=3\cdot\dfrac{5}{3}-8\cdot\left(-\dfrac{5}{4}\right)=15$

정답_⑤

198

θ가 제3사분면의 각이고 $\sin\theta=-\dfrac{1}{3}$이므로 θ의 동경은 오른쪽 그림에서 반직선 OP와 같다.



이때, $\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$이므로

$\cot\theta=2\sqrt{2}, \sec\theta=-\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$

$\therefore \cot\theta+\sec\theta=2\sqrt{2}+\left(-\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\right)=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$

정답_⑤

199

$\sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{8}$

$\therefore \sec\theta-\csc\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

$=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}}=-\dfrac{4}{3}$

정답_①

200

(1) $\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)$

$=\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\sin 45^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)$

$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(3) $\tan\dfrac{5}{12}\pi=\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)$

$=\dfrac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$

$=\dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$

정답_(1) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (2) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (3) $2+\sqrt{3}$

201

(1) $\sin 85^\circ\cos 25^\circ-\cos 85^\circ\sin 25^\circ=\sin(85^\circ-25^\circ)$

$=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos 35^\circ\cos 10^\circ-\sin 35^\circ\sin 10^\circ=\cos(35^\circ+10^\circ)$

$=\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\dfrac{\tan 70^\circ-\tan 40^\circ}{1+\tan 70^\circ\tan 40^\circ}=\tan(70^\circ-40^\circ)=\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

정답_(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

202

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\theta$

$=2\left(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\theta$

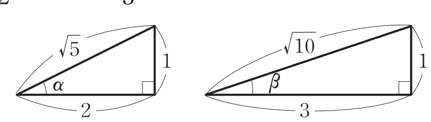
$=2\left(\sin\theta\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\cos\theta\cdot\dfrac{1}{2}\right)+\cos\theta$

$=\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=1$

정답_③

203

$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\tan\beta=\dfrac{1}{3}$이고 α, β는 예각이므로 아래 그림에서



$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}, \cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{10}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$$=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ 정답_①

204

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha>0$, $\sin\beta>0$이므로

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{11}{14}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{3}}{14}\right)^2}=\frac{13}{14}$$

$$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{14}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{14}-\frac{11}{14}\cdot\frac{13}{14}$$

$$=-\frac{98}{196}=-\frac{1}{2}$$

이때, $0<\alpha+\beta<\pi$이므로 $\alpha+\beta=\frac{2}{3}\pi$ 정답_④

205

$\sin x+\sin y=1$의 양변을 제곱하면

$\sin^2 x+\sin^2 y+2\sin x\sin y=1$ ⋯⋯ ㉠

$\cos x+\cos y=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\cos^2 x+\cos^2 y+2\cos x\cos y=\frac{1}{4}$ ⋯⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면 $2+2(\sin x\sin y+\cos x\cos y)=\frac{5}{4}$

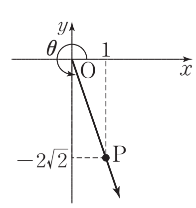
$\therefore \cos x\cos y+\sin x\sin y=-\frac{3}{8}$

$\therefore \cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y=-\frac{3}{8}$ 정답_②

206

θ가 제4사분면의 각이고 $\cos\theta=\frac{1}{3}$이므로

θ의 동경은 오른쪽 그림의 반직선 OP와 같다. 이때, $\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$이므로



$$\tan\theta=\frac{-2\sqrt{2}}{1}=-2\sqrt{2}$$

$$\therefore \tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}$$

$$=\frac{1+(-2\sqrt{2})}{1-1\cdot(-2\sqrt{2})}=\frac{4\sqrt{2}-9}{7}$$

$\therefore a=4$ 정답_④

207

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$에서 $\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{\pi}{4}=1$이므로

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$$

$\therefore \tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta$

$\therefore (1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)$

$=1+\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta$

$=1+(1-\tan\alpha\tan\beta)+\tan\alpha\tan\beta=2$ 정답_②

208

직선 $x-y-1=0$, 즉 $y=x-1$의 기울기는 1이고 직선 $ax-y+1=0$, 즉 $y=ax+1$의 기울기는 a $(a>1)$이므로 이 두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라고 하면

$\tan\alpha=1$, $\tan\beta=a$

따라서 두 직선이 이루는 예각의 크기 θ에 대하여

$\tan\theta=\frac{1}{6}$이고 $a>1$이므로 $\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$이다.

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{a-1}{1+a}=\frac{1}{6}$$이므로

$6a-6=1+a$, $5a=7$ $\therefore a=\frac{7}{5}$ 정답_④

209

이차방정식 $4x^2-2\sqrt{6}x+1=0$의 두 근이 $\sin\alpha$, $\sin\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의해

$$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{\sqrt{6}}{2},\ \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{4}$$

$\therefore \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta$

$=(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)-\sin^2\alpha\sin^2\beta$

$=1-\{(\sin\alpha+\sin\beta)^2-2\sin\alpha\sin\beta\}$

$=1-\left\{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{4}\right\}=0$ 정답_0

210

$f^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)=\alpha$, $f^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)=\beta$라고 하면

$f(\alpha)=\frac{3}{5}$, $f(\beta)=\frac{4}{5}$

$\therefore \cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$

$0<\alpha<\pi$, $0<\beta<\pi$에서 $\sin\alpha>0$, $\sin\beta>0$이므로

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

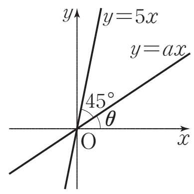
$$\therefore f\left(f^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)+f^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)=\cos(\alpha+\beta)$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=0$$ 정답_③

211

직선 $y=ax$와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $\tan\theta=a$



직선 $y=5x$와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기는 $\theta+45^\circ$이므로

$\tan(\theta+45^\circ)=5$

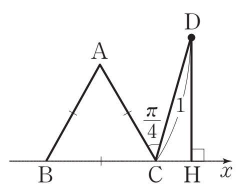
$\tan(\theta+45^\circ)=\dfrac{\tan\theta+\tan 45^\circ}{1-\tan\theta\tan 45^\circ}=5$에서

$\dfrac{a+1}{1-a}=5,\ a+1=5-5a \qquad \therefore a=\dfrac{2}{3}$

정답_ $\dfrac{2}{3}$

212

점 D에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 D와 직선 BC 사이의 거리는 선분 DH의 길이와 같다.



이때, 직각삼각형 DCH에서 $\overline{CD}=1$이므로

$\overline{DH}=\overline{CD}\sin(\angle DCH)=\sin(\angle DCH)$

$=\sin\left(\pi-\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

따라서 점 D와 직선 BC 사이의 거리는 $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$이다.

정답_ ⑤

다른 풀이

$\overline{DH}=\sin\left(\pi-\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\sin\dfrac{2\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\dfrac{2\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

213

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

$\angle CAB=\alpha$라고 하면 $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}},\ \cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

삼각형 ACD는 직각이등변삼각형이므로 $\angle DAC=45^\circ$

$\therefore \cos\theta=\cos(45^\circ+\alpha)$

$=\cos 45^\circ\cos\alpha-\sin 45^\circ\sin\alpha$

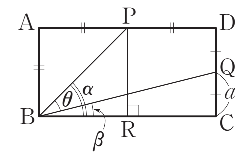
$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{10}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$=\dfrac{2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

정답_ $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

214

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 R라 하고 $\overline{QC}=a$, $\angle PBR=\alpha$, $\angle QBC=\beta$라고 하면



$\tan\alpha=\dfrac{\overline{PR}}{\overline{BR}}=\dfrac{2a}{2a}=1$

$\tan\beta=\dfrac{\overline{QC}}{\overline{BC}}=\dfrac{a}{4a}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{1-\frac{1}{4}}{1+1\cdot\frac{1}{4}}=\dfrac{3}{5}$

정답_ ③

215

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta\right)$

$=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{3}$

에서 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{6}$

이때 $0<\theta<\pi$에서 $\dfrac{\pi}{6}<\theta+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{7}{6}\pi$

$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$이므로 $\theta+\dfrac{\pi}{6}$는 제2사분면의 각이다. 즉

$\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)<0$

$\therefore \cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{6}\right)^2}$

$=-\sqrt{\dfrac{35}{36}}=-\dfrac{\sqrt{35}}{6}$

정답_ ①

216

$\sqrt{6}\sin x-\sqrt{2}\cos x-2=2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x\right)-2$

$=2\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-2=0$

$\therefore \sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

이때, $0\le x\le 2\pi$에서 $-\dfrac{\pi}{6}\le x-\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{11}{6}\pi$이므로

$x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{4}\pi \qquad \therefore x=\dfrac{5}{12}\pi$ 또는 $x=\dfrac{11}{12}\pi$

주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$\dfrac{5}{12}\pi+\dfrac{11}{12}\pi=\dfrac{16}{12}\pi=\dfrac{4}{3}\pi$

따라서 $p=3,\ q=4$이므로

$p+q=3+4=7$

정답_ 7

217

$g(x)=t$라고 하면

$t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

이므로 $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)$

$=t^2+2t-2$

$=(t+1)^2-3\ (-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2})$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=\sqrt{2}$일 때 최댓값 $f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$,

$t=-1$일 때 최솟값 $f(-1)=-3$을 가지므로 합성함수

$(f\circ g)(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$2\sqrt{2}+(-3)=2\sqrt{2}-3$ 정답_③

218

$f(x)=a\sin x+\sqrt{13}\cos x=\sqrt{a^2+13}\sin(x+\alpha)$

$\left(\text{단}, \sin\alpha=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{a^2+13}}, \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+13}}\right)$

함수 $f(x)$의 최댓값이 7이므로 $\sqrt{a^2+13}=7$에서

$a^2+13=49, a^2=36$

$\therefore a=6\ (a>0)$ 정답_③

219

$f(x)=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$

$\left(\text{단}, \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

함수 $f(x)$의 최댓값이 $\sqrt{14}$이므로

$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{14}\quad\therefore a^2+b^2=14$ ……㉠

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$에서 $a\sin\frac{\pi}{4}+b\cos\frac{\pi}{4}=2$

$\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}b=2\quad\therefore a+b=2\sqrt{2}$ ……㉡

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$(2\sqrt{2})^2=14+2ab\quad\therefore ab=-3$

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=14-2\cdot(-3)=20$

이때, $a>b$이므로 $a-b=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ 정답_⑤

220

$y=\cos x+2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\cos x+2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=\cos x+2\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\cdot\frac{1}{2}\right)$

$=\sqrt{3}\sin x+2\cos x$

$=\sqrt{7}\sin(x+\alpha)\ \left(\text{단}, \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{7}}, \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $\sqrt{7}$, 최솟값은 $-\sqrt{7}$이므로

$M=\sqrt{7}, m=-\sqrt{7}$

$\therefore M-m=\sqrt{7}-(-\sqrt{7})=2\sqrt{7}$ 정답_②

221

$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+4\cos x$

$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)+4\cos x$

$=\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+4\cos x$

$=\sin x+3\cos x$

$=\sqrt{10}\sin(x+\alpha)\ \left(\text{단}, \sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}, \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\sqrt{10}$이므로 $m=-\sqrt{10}$

이때, $\sin(x+\alpha)=-1$, 즉 $x+\alpha=\frac{3}{2}\pi$이므로

$x=\frac{3}{2}\pi-\alpha\quad\therefore\theta=\frac{3}{2}\pi-\alpha$

$\therefore m\tan\theta=-\sqrt{10}\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$

$=-\sqrt{10}\cdot\frac{1}{\tan\alpha}=-\sqrt{10}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

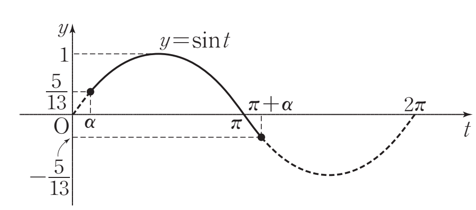
$=-\sqrt{10}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{10}}}{\frac{3}{\sqrt{10}}}=-\frac{\sqrt{10}}{3}$ 정답_④

222

$f(x)=12\sin x+5\cos x=13\left(\sin x\cdot\frac{12}{13}+\cos x\cdot\frac{5}{13}\right)$

$=13\sin(x+\alpha)\ \left(\text{단}, \sin\alpha=\frac{5}{13}, \cos\alpha=\frac{12}{13}\right)$

이때, $x+\alpha=t$로 놓으면 $0\le x\le\pi$에서 $\alpha\le t\le\pi+\alpha$이고, 이 범위에서 $y=\sin t$의 그래프는 아래 그림과 같으므로 $y=\sin t$의 최댓값과 최솟값은 각각 $1, -\frac{5}{13}$이다.



따라서 $M=13\cdot1=13, m=13\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)=-5$이므로

$M-m=13-(-5)=18$ 정답_18

223

$\angle APB=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle PAB=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\overline{AP}=2\cos\theta, \overline{BP}=2\sin\theta$

$\therefore 4\overline{AP}+\overline{BP}=8\cos\theta+2\sin\theta$

$=\sqrt{68}\left(\sin\theta\cdot\frac{2}{\sqrt{68}}+\cos\theta\cdot\frac{8}{\sqrt{68}}\right)$

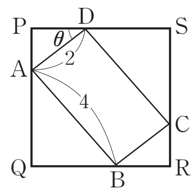
$=2\sqrt{17}\sin(\theta+\alpha)$

$\left(\text{단}, \sin\alpha=\frac{8}{\sqrt{68}}=\frac{4}{\sqrt{17}}, \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{68}}=\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

따라서 $4\overline{AP}+\overline{BP}$의 최댓값은 $2\sqrt{17}$이다. 정답_③

224

사각형 ABCD와 PQRS는 직사각형이므로



$\angle PAD=\angle CDS=\frac{\pi}{2}-\theta$, $\angle QAB=\theta$

$\overline{PS}=\overline{PD}+\overline{SD}$

$=2\cos\theta+4\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=2\cos\theta+4\sin\theta$

$\overline{PQ}=\overline{PA}+\overline{QA}$

$=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+4\cos\theta$

$=2\sin\theta+4\cos\theta$

사각형 PQRS의 둘레의 길이를 l이라고 하면

$l=2(\overline{PS}+\overline{PQ})=2\{(2\cos\theta+4\sin\theta)+(2\sin\theta+4\cos\theta)\}$

$=12(\sin\theta+\cos\theta)=12\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=12\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

따라서 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$, 즉 $\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$일 때 l이 최대가 되므로

구하는 θ의 값은 $\theta=\frac{\pi}{4}$

정답_ ①

225

(1) $\lim_{x\to0}\frac{x}{\cos x}=\frac{0}{\cos 0}=\frac{0}{1}=0$

(2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}=\frac{\tan\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}$

(3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)$

$=1+\sin\frac{\pi}{2}=1+1=2$

(4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1-\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

정답_ (1) 0 (2) $\frac{4}{\pi}$ (3) 2 (4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

226

$\lim_{x\to\frac{3}{4}\pi}\frac{1-\tan^2 x}{\sin x+\cos x}$

$=\lim_{x\to\frac{3}{4}\pi}\frac{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\sin x+\cos x}=\lim_{x\to\frac{3}{4}\pi}\frac{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\sin x+\cos x}$

$=\lim_{x\to\frac{3}{4}\pi}\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)\cos^2 x}$

$=\lim_{x\to\frac{3}{4}\pi}\frac{\cos x-\sin x}{\cos^2 x}$

$=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=-2\sqrt{2}$

정답_ ②

227

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 8x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 8x}{8x}\cdot\frac{8}{2}=1\cdot4=4$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{9x}{\tan 3x}=\lim_{x\to0}\frac{3x}{\tan 3x}\cdot\frac{9}{3}=1\cdot3=3$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x^\circ}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{180}x}\cdot\frac{\pi}{180}$

$=1\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{180}$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan x^\circ}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan\frac{\pi}{180}x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\pi}{180}x}{\tan\frac{\pi}{180}x}\cdot\frac{1}{\frac{\pi}{180}}$

$=1\cdot\frac{180}{\pi}=\frac{180}{\pi}$

정답_ (1) 4 (2) 3 (3) $\frac{\pi}{180}$ (4) $\frac{180}{\pi}$

228

$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x^3+x^2+3x)}{5x^3+4x^2+2x}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(2x^3+x^2+3x)}{2x^3+x^2+3x}\cdot\frac{2x^3+x^2+3x}{5x^3+4x^2+2x}\right\}$

$=1\cdot\lim_{x\to0}\frac{x(2x^2+x+3)}{x(5x^2+4x+2)}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2+x+3}{5x^2+4x+2}$

$=\frac{0+0+3}{0+0+2}=\frac{3}{2}$

정답_ ③

229

$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x-\sin x}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{x}-\frac{\sin x}{x}\right)$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$$
$$=2\cdot1-1=1$$
정답_④

230

$$\lim_{x\to0}\frac{\sec x-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos x}-\cos x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos x}\right\}$$
$$=1^2\cdot1=1$$
정답_①

231

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x-\sin 8x}{\sin 6x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 5x}{x}-\frac{\sin 8x}{x}}{\frac{\sin 6x}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot5-\frac{\sin 8x}{8x}\cdot8}{\frac{\sin 6x}{6x}\cdot6}$$
$$=\frac{1\cdot5-1\cdot8}{1\cdot6}=-\frac{1}{2}$$
정답_②

232

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(2x^2+x)}{\sin(x^2+2x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan(2x^2+x)}{2x^2+x}\cdot\frac{x^2+2x}{\sin(x^2+2x)}\cdot\frac{2x^2+x}{x^2+2x}\right\}$$
$$=1\cdot1\cdot\lim_{x\to0}\frac{x(2x+1)}{x(x+2)}=\lim_{x\to0}\frac{2x+1}{x+2}$$
$$=\frac{0+1}{0+2}=\frac{1}{2}$$
정답_②

233

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2\sin 2x)}{x\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(2\sin 2x)}{2\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{4}{\cos x}\right\}$$
$$=1\cdot1\cdot\frac{4}{1}=4$$
정답_④

234

$$\lim_{x\to0}\frac{6x}{\tan x+\tan 2x+\tan 3x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{6}{\frac{\tan x}{x}+\frac{\tan 2x}{x}+\frac{\tan 3x}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{6}{\frac{\tan x}{x}+\frac{\tan 2x}{2x}\cdot2+\frac{\tan 3x}{3x}\cdot3}$$
$$=\frac{6}{1+1\cdot2+1\cdot3}=1$$
정답_①

235

(1) $$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2(1+\cos x)\right\}$$
$$=1^2\cdot(1+1)=2$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right)$$
$$=1\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$
정답_(1) 2 (2) $\frac{1}{2}$

236

$$\lim_{\theta\to0}\left(\frac{2}{\sin^2\theta}-\frac{1}{1-\cos\theta}\right)$$
$$=\lim_{\theta\to0}\left\{\frac{2}{\sin^2\theta}-\frac{1+\cos\theta}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}\right\}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{2}{\sin^2\theta}-\frac{1+\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{1}{1+\cos\theta}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$
정답_②

237

$$\lim_{x\to0}\frac{3\cos^2 x-2\cos x-1}{x\sin x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(3\cos x+1)}{x\sin x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x\sin x(\cos x+1)}\cdot(3\cos x+1)\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{-\sin^2 x}{x\sin x(\cos x+1)}\cdot(3\cos x+1)\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{-1\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x+1}\cdot(3\cos x+1)\right\}$$
$$=-1\cdot1\cdot\frac{1}{1+1}\cdot(3\cdot1+1)=-2$$
정답_①

238

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos kx}{\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos kx)(1+\cos kx)}{\sin^2 x(1+\cos kx)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 kx}{\sin^2 x(1+\cos kx)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin kx}{kx}\right)^2\cdot\frac{k^2}{1+\cos kx}\right\}$$
$$=1^2\cdot1^2\cdot\frac{k^2}{1+1}=\frac{k^2}{2}=2$$

따라서 $k^2=4$이고, k가 양수이므로 $k=2$ 　　정답_ ②

239

$$\lim_{x\to0}x^2f(x)$$
$$=\lim_{x\to0}f(x)\left\{\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{x^2}{1-\cos\frac{x}{2}}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\frac{x^2\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}{\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{x^2}{1-\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot4\cdot\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot4\cdot2=4$$

정답_ 4

240

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{\sin\pi(1+t)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi+\pi t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin\pi t}{t}=\lim_{t\to0}\left(-1\cdot\frac{\sin\pi t}{\pi t}\cdot\pi\right)$$
$$=-1\cdot1\cdot\pi=-\pi$$

정답_ ①

241

$x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x=\lim_{t\to0}t\tan\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\lim_{t\to0}t\left(\frac{1}{-\tan t}\right)$$
$$=\lim_{t\to0}\left(-\frac{t\cos t}{\sin t}\right)$$
$$=\lim_{t\to0}\left(-1\cdot\frac{t}{\sin t}\cdot\cos t\right)$$
$$=-1\cdot1\cdot1=-1$$

정답_ ②

242

$x+\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\to-\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{(2x+\pi)\cos x}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{1+\sin\left(-\frac{\pi}{2}+t\right)}{\left\{2\left(-\frac{\pi}{2}+t\right)+\pi\right\}\cos\left(-\frac{\pi}{2}+t\right)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{2t\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{2t\sin t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{2t\sin t(1+\cos t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2 t}{2t\sin t(1+\cos t)}=\lim_{t\to0}\left\{\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{2(1+\cos t)}\right\}$$
$$=1\cdot\frac{1}{2(1+1)}=\frac{1}{4}$$

정답_ ①

243

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left\{\cos\frac{\pi}{2}(1+t)\right\}}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)\right\}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(-\sin\frac{\pi}{2}t\right)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{\sin\left(-\sin\frac{\pi}{2}t\right)}{-\sin\frac{\pi}{2}t}\cdot\frac{-\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$$
$$=1\cdot(-1)\cdot\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

정답_ ②

244

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\cdot\frac{1}{2}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$x+\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $x\to-\frac{\pi}{6}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x+\cos x}{2x+\frac{\pi}{3}}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{2\sin t}{2t}=\frac{2}{2}\cdot1=1$$

정답_ ①

245

$\frac{1}{2x+1}=t$로 놓으면 $x=\frac{1-t}{2t}$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x\tan\frac{1}{2x+1}=\lim_{t\to0}\left(\frac{1-t}{2}\cdot\frac{\tan t}{t}\right)$$
$$=\frac{1-0}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$$

정답_ ④

246

ㄱ은 옳다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin x=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

ㄴ도 옳다.

모든 실수 x에 대하여 $-1\le\sin x\le 1$이므로

$x>0$일 때 $-\frac{1}{x}\le\frac{1}{x}\sin x\le\frac{1}{x}$

이때, $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=0$

ㄷ도 옳다.

$x\ne 0$인 모든 실수 x에 대하여 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1$이므로

$|x|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|$ $\quad\therefore -|x|\le x\sin\frac{1}{x}\le|x|$

이때, $\lim_{x\to 0}(-|x|)=\lim_{x\to 0}|x|=0$이므로 $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

ㄹ도 옳다.

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ의 4개이다. 정답_ ⑤

247

(1) $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\sin^2\frac{2}{x}}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{t}\cdot\sin^2 2t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 2t}{t\ln(1+t)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left\{\left(\frac{\sin 2t}{2t}\right)^2\cdot\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot 4\right\}$$

$$=1^2\cdot 1\cdot 4=4$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1+2x)}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\log_2(1+2x)}{2x}\cdot\frac{4x}{\sin 4x}\cdot\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\ln 2}$$

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{\tan 6x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\cdot\frac{6x}{\tan 6x}\cdot\frac{4}{6}\right)$$

$$=1\cdot 1\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{5^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{5^x-1}{x}}=\frac{1}{\ln 5}$$

정답_ (1) 4 (2) $\frac{1}{2\ln 2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{1}{\ln 5}$

248

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left\{1+\left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)\right\}^{-\frac{\cos x}{\sin x}}\right]^{-1}$$

$$=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

정답_ $\frac{1}{e}$

249

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin x}+e^{x\sin 2x}-2}{x\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{\ln(1+x)}\cdot\frac{e^{x\sin x}+e^{x\sin 2x}-2}{x}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{\ln(1+x)}\cdot\left(\frac{e^{x\sin x}-1}{x}+\frac{e^{x\sin 2x}-1}{x}\right)\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x}{\ln(1+x)}\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{e^{x\sin x}-1}{x}+\frac{e^{x\sin 2x}-1}{x}\right)\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\left(\frac{e^{x\sin x}-1}{x}+\frac{e^{x\sin 2x}-1}{x}\right)\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{e^{x\sin x}-1}{x\sin x}\right)+\lim_{x\to 0}\left(2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{e^{x\sin 2x}-1}{x\sin 2x}\right)$$

$$=1\cdot 1+2\cdot 1\cdot 1=3$$

정답_ ③

250

삼각형 ABH에서 $\overline{BH}=\overline{AB}\cos\theta=2\cos\theta$

삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=\frac{\overline{AB}}{\cos\theta}=\frac{2}{\cos\theta}$

$\therefore \overline{CH}=\overline{BC}-\overline{BH}=\frac{2}{\cos\theta}-2\cos\theta$

$$=\frac{2(1-\cos^2\theta)}{\cos\theta}=\frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{CH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin^2\theta}{\theta^2\cos\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{2}{\cos\theta}\right\}$$

$$=1^2\cdot\frac{2}{1}=2$$

정답_ 2

251

삼각형 OAB는 직각이등변삼각형이므로

$\angle OAB=\angle OBA=\frac{\pi}{4}$

따라서 삼각형 AQH도 직각이등변삼각형이다.

직각삼각형 POH에서

$\overline{OH}=\overline{OP}\cos\theta=\cos\theta$ ($\because \overline{OP}=1$)

$\therefore \overline{AH}=\overline{OA}-\overline{OH}=1-\cos\theta$

$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AH}\cdot\overline{QH}=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)^2$이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^4}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{(1-\cos\theta)^2}{2\theta^4}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^4\theta}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^4\cdot\frac{1}{2(1+\cos\theta)^2}\right\}$$

$$=1^4\cdot\frac{1}{2(1+1)^2}=\frac{1}{8}$$

정답_ ①

252

극한값이 존재하고, $x \to a$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다. 즉, $\lim_{x \to a} b\cos x = 0$에서 $b\cos a = 0$

이때, 주어진 극한값이 0이 아니므로

$b \neq 0$에서 $\cos a = 0$ $\quad \therefore a = \frac{\pi}{2}$ $(0 < a < \pi)$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입한 후 $x - \frac{\pi}{2} = t$로 놓으면

$x \to \frac{\pi}{2}$일 때 $t \to 0$이므로

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{b\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{t \to 0} \frac{b\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{-b\sin t}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0}\left(-b \cdot \frac{\sin t}{t}\right) = -b = 1$$

$\therefore b = -1$ 정답_ ②

253

극한값이 존재하고, $x \to 0$일 때 (분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$이어야 한다. 즉, $\lim_{x \to 0}(\sqrt{ax+b}-1) = 0$에서

$\sqrt{b} - 1 = 0$ $\quad \therefore b = 1$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{ax+1}-1} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x(\sqrt{ax+1}+1)}{(\sqrt{ax+1}-1)(\sqrt{ax+1}+1)}$$

$$= \frac{\sin 3x(\sqrt{ax+1}+1)}{ax}$$

$$= \lim_{x \to 0}\left\{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3(\sqrt{ax+1}+1)}{a}\right\}$$

$$= 1 \cdot \frac{3(1+1)}{a} = \frac{6}{a} = 2$$

$\therefore a = 3$

$\therefore a + b = 3 + 1 = 4$ 정답_ ④

254

극한값이 존재하고, $x \to a$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to a}(3^x - 1) = 0$에서 $3^a - 1 = 0$, $3^a = 1$ $\quad \therefore a = 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{3^x - 1}{6\sin(x-a)} = \lim_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{6\sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{3^x - 1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \ln 3 = \frac{1}{6}\ln 3$$

$\therefore b = \frac{1}{6}$

$\therefore a + b = 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ 정답_ $\frac{1}{6}$

255

극한값이 존재하고, $x \to 0$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 0}(e^x - a) = 0$에서 $1 - a = 0$ $\quad \therefore a = 1$

$$b = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - a}{\tan 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\tan 2x}$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{2x}{\tan 2x} \cdot \frac{1}{2}\right) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$\therefore a + b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 정답_ ④

256

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos ax}{x^2} & (x \neq 0) \\ 18 & (x = 0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이어야 한다. 즉, $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$이므로

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos ax}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos ax)(1+\cos ax)}{x^2(1+\cos ax)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 ax}{x^2(1+\cos ax)}$$

$$= \lim_{x \to 0}\left\{\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2 \cdot \frac{a^2}{1+\cos ax}\right\}$$

$$= 1^2 \cdot \frac{a^2}{1+1} = \frac{a^2}{2} = 18$$

따라서 $a^2 = 36$이고, a가 양수이므로 $a = 6$ 정답_ ④

257

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$이어야 한다.

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sin 3x - a}{4x} = b$$

이때, 극한값이 존재하고, $x \to 0$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 0}(e^x - \sin 3x - a) = 0$에서

$1 - 0 - a = 0$ $\quad \therefore a = 1$

$$b = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sin 3x - a}{4x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sin 3x - 1}{4x}$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\frac{e^x - 1}{4x} - \frac{\sin 3x}{4x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{e^x - 1}{x}\right) - \lim_{x \to 0}\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{\sin 3x}{3x}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{3}{4} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

$\therefore a + b = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ 정답_ $\frac{1}{2}$

258

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다. 즉, $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

(i) $\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{2x+\tan x}{\sin x}$

$=\lim_{x\to0-}\left(\frac{2x}{\sin x}+\frac{\tan x}{\sin x}\right)$

$=\lim_{x\to0-}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot2+\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right)$

$=1\cdot2+1\cdot1=3$

(ii) $\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+3x)}{bx}$

$=\lim_{x\to0+}\left\{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot\frac{3}{b}\right\}$

$=1\cdot\frac{3}{b}=\frac{3}{b}$

(iii) $f(0)=a$

(i), (ii), (iii)에서 $a=\frac{3}{b}=3$ $\quad\therefore a=3, b=1$

$\therefore a+b=3+1=4$

정답_ ②

259

(1) $y'=2\cos x-3\sin x$

(2) $y'=\sin x+x\cos x$

(3) $y'=e^x\cos x+e^x(-\sin x)=e^x(\cos x-\sin x)$

(4) $y'=3^{3x-2}\cdot\ln3\cdot3\cos x+3^{3x-2}(-\sin x)$

$=3^{3x-2}(3\ln3\cdot\cos x-\sin x)$

정답_ (1) $y'=2\cos x-3\sin x$ (2) $y'=\sin x+x\cos x$
(3) $y'=e^x(\cos x-\sin x)$ (4) $y'=3^{3x-2}(3\ln3\cdot\cos x-\sin x)$

260

$f(x)=\sin x\cos x$에서

$f'(x)=\cos x\cos x+\sin x\cdot(-\sin x)$

$=\cos^2x-\sin^2x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$

정답_ $-\frac{1}{2}$

261

$f(x)=\sin x+a\cos x$에서

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+a\cos\frac{\pi}{2}=1$이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$

이때, $f'(x)=\cos x-a\sin x$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}-a\sin\frac{\pi}{2}=-a=3$

$\therefore a=-3$

즉, $f(x)=\sin x-3\cos x$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}-3\cos\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt2}{2}-3\cdot\frac{\sqrt2}{2}=-\sqrt2$

정답_ ②

262

$g(x)=\sin x$로 놓으면 $g'(x)=\cos x$

$f(x)=x\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

$=x\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$=xg'(x)=x\cos x$

$f'(x)=\cos x-x\sin x$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=0-\frac{\pi}{2}\cdot1=-\frac{\pi}{2}$

정답_ $-\frac{\pi}{2}$

263

$f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to0-}(ax+b)=\lim_{x\to0+}\sin x=f(0)$ $\quad\therefore b=0$

$f'(0)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases}a & (-1<x<0)\\ \cos x & (0<x<1)\end{cases}$ 에서

$\lim_{x\to0-}a=\lim_{x\to0+}\cos x$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore a-b=1-0=1$

정답_ 1

264

$f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to0-}(-x^2+ax+b)=\lim_{x\to0+}\cos x=f(0)$ $\quad\therefore b=1$

$f'(0)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases}-2x+a & (x<0)\\ -\sin x & (x>0)\end{cases}$ 에서

$\lim_{x\to0-}(-2x+a)=\lim_{x\to0+}(-\sin x)$ $\quad\therefore a=0$

$\therefore a+b=0+1=1$

정답_ ①

265

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}<\beta<\pi$에서 $\cos\alpha>0, \cos\beta<0$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt5}$ ······ ❶

$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2}=-\frac{3}{\sqrt{10}}$ ······ ❷

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{1}{\sqrt5}\cdot\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)+\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}$

$=-\frac{\sqrt2}{10}$ ······ ❸

정답_ $-\frac{\sqrt2}{10}$

단계	채점 기준	비율
❶	$\cos\alpha$의 값 구하기	30%
❷	$\cos\beta$의 값 구하기	30%
❸	$\sin(\alpha+\beta)$의 값 구하기	40%

266

$3x-5y+20=0$에서 $y=\frac{3}{5}x+4$

$ax-y-6=0$에서 $y=ax-6$

두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라고 하면

$\tan\alpha=\frac{3}{5}, \tan\beta=a$ ❶

두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$$\tan\frac{\pi}{4}=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$1=\left|\frac{\frac{3}{5}-a}{1+\frac{3}{5}\cdot a}\right|, \frac{\frac{3}{5}-a}{1+\frac{3}{5}a}=\pm1$$

$\frac{3}{5}-a=1+\frac{3}{5}a$ 또는 $\frac{3}{5}-a=-1-\frac{3}{5}a$

$\therefore a=-\frac{1}{4}$ 또는 $a=4$ ❷

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 곱은

$-\frac{1}{4}\cdot4=-1$ ❸

정답_ -1

단계	채점 기준	비율
❶	두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기 α, β에 대하여 $\tan\alpha$, $\tan\beta$의 값 구하기	30%
❷	a의 값 구하기	50%
❸	모든 a의 값의 곱 구하기	20%

267

$\overline{PR}/\!/\overline{AC}$이고 점 P는 선분 AB를 4 : 1로 내분하는 점이므로

$\overline{PR}=\frac{1}{5}\overline{AC}=\frac{1}{5}\cdot3=\frac{3}{5}, \overline{RC}=\frac{4}{5}\overline{BC}=\frac{4}{5}\cdot1=\frac{4}{5}$

직각삼각형 PRC에서

$$\tan\alpha=\frac{\overline{RC}}{\overline{PR}}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$$ ❶

또, $\overline{QS}/\!/\overline{BC}$이고 점 Q는 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점이므로

$\overline{QS}=\frac{2}{5}\overline{BC}=\frac{2}{5}\cdot1=\frac{2}{5}, \overline{SC}=\frac{3}{5}\overline{AC}=\frac{3}{5}\cdot3=\frac{9}{5}$

직각삼각형 QCS에서

$$\tan\beta=\frac{\overline{SC}}{\overline{QS}}=\frac{\frac{9}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{9}{2}$$ ❷

$$\therefore \tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{\frac{9}{2}-\frac{4}{3}}{1+\frac{9}{2}\cdot\frac{4}{3}}=\frac{19}{42}$$ ❸

따라서 $p=42, q=19$이므로

$p+q=42+19=61$ ❹

정답_ 61

단계	채점 기준	비율
❶	$\tan\alpha$의 값 구하기	30%
❷	$\tan\beta$의 값 구하기	30%
❸	$\tan(\beta-\alpha)$의 값 구하기	30%
❹	$p+q$의 값 구하기	10%

268

극한값이 존재하고, $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉, $\lim_{x\to0}\sin(ax+b)=0$에서 $\sin b=0$

이때, $0\le b\le\frac{\pi}{2}$이므로 $b=0$ ······㉠

❶

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\tan x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{x}{\tan x}\cdot a\right)=1\cdot1\cdot a=a=2$$ ❷

따라서 $a=2$이므로

$b-a=0-2=-2$ ❸

정답_ -2

단계	채점 기준	비율
❶	b의 값 구하기	40%
❷	a의 값 구하기	50%
❸	$b-a$의 값 구하기	10%

269

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)(1+\cos x^2)}{(1-\cos x^2)(1+\cos x^2)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\sin^2x^2}(1+\cos^2x^2)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{(x^2)^2}\cdot\frac{(x^2)^2}{(\sin x^2)^2}\cdot(1+\cos^2x^2)$$

$$=\left\{\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^4}\right\}\cdot\left\{\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2}{\sin x^2}\right)^2\cdot(1+\cos^2x^2)\right\}$$

$$=\left(\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^4}\right)\cdot1\cdot(1+1)=2\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^4}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^4}$$ ❶

$2\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^4}=4$이므로 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^4}=2$

따라서 $p=4, q=2$이므로 ❷

$p+q=4+2=6$ ❸

정답_ 6

단계	채점 기준	비율
❶	$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x^2}$를 간단히 나타내기	60%
❷	p, q의 값 구하기	30%
❸	$p+q$의 값 구하기	10%

270

$f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x \to 0-} e^x = \lim_{x \to 0+} (a\cos x + b\sin x) = f(0)$

$\therefore a=1$ ······························ ❶

$f'(0)$이 존재하므로

$f'(x) = \begin{cases} e^x & (x<0) \\ -a\sin x + b\cos x & (x>0) \end{cases}$ 에서

$\lim_{x \to 0-} e^x = \lim_{x \to 0+} (-a\sin x + b\cos x)$

$\therefore b=1$ ······························ ❷

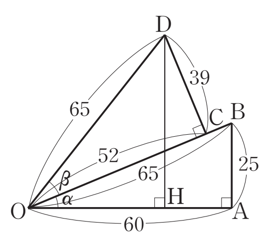
$\therefore a+b=1+1=2$ ······························ ❸

정답_ 2

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값 구하기	40%
❷	b의 값 구하기	40%
❸	$a+b$의 값 구하기	20%

271

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 OAB에서 $\angle AOB=\alpha$라고 하면



$\sin\alpha = \frac{25}{65} = \frac{5}{13}$

$\cos\alpha = \frac{60}{65} = \frac{12}{13}$

또, 직각삼각형 OCD에서

$\angle COD=\beta$라고 하면 $\sin\beta = \frac{39}{65} = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{52}{65} = \frac{4}{5}$

$\therefore \overline{DH} = \overline{OD}\sin(\alpha+\beta)$

$= \overline{OD}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$

$= 65\left(\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{5} + \frac{12}{13}\cdot\frac{3}{5}\right) = 56$

정답_ 56

272

$\tan\theta_1 = 1$, $\tan\theta_2 = \frac{1}{2}$, $\tan\theta_p = \frac{1}{p}$, $\tan\theta_q = \frac{1}{q}$이므로

$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \tan(\theta_p - \theta_q)$에서

$\frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2} = \frac{\tan\theta_p - \tan\theta_q}{1+\tan\theta_p\tan\theta_q}$

$\frac{1-\frac{1}{2}}{1+1\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{1+\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{q}}$ $\quad\therefore (p-3)(q+3) = -10$

이때, p, q는 자연수이고 $1<p<q$이므로

$p-3=-1$, $q+3=10$ $\quad\therefore p=2$, $q=7$

$\therefore p+q=2+7=9$

정답_ 9

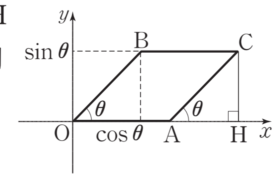
273

사각형 OACB가 평행사변형이므로 $\overline{BC}=\overline{OA}=1$이고,

점 $B(\cos\theta, \sin\theta)$이므로

$f(\theta) = \overline{OA}\cdot$(점 B의 y좌표)$=1\cdot\sin\theta=\sin\theta$

점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 평행사변형의 성질에 의해



$\angle CAH = \angle BOA = \theta$

$\overline{AH} = \overline{AC}\cos\theta = \overline{OB}\cos\theta$

$=$(점 B의 x좌표)$=\cos\theta$

즉, 점 C의 x좌표는 $\overline{OA}+\overline{AH}=1+\cos\theta$이고, y좌표는 $\sin\theta$이다.

$g(\theta) = \overline{OC}^2 = (1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta$

$= 1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta = 2+2\cos\theta$

$f(\theta)+g(\theta) = \sin\theta + 2\cos\theta + 2$

$= \sqrt{5}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \cos\theta\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+2$

$= \sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)+2$

$\left(\text{단, } \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

이때, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\alpha<\theta+\alpha<\frac{\pi}{2}+\alpha$에서

$\sin\alpha < \sin(\theta+\alpha) < \sin\frac{\pi}{2}$, $\frac{2}{\sqrt{5}} < \sin(\theta+\alpha) < 1$

$2 < \sqrt{5}\sin(\theta+\alpha) \le \sqrt{5}$

$\therefore 4 < \sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)+2 \le 2+\sqrt{5}$

따라서 $f(\theta)+g(\theta)$의 최댓값은 $2+\sqrt{5}$이다.

정답_ $2+\sqrt{5}$

274

$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x + \cos y = \sqrt{3} \end{cases}$ 에서 $\begin{cases} \sin y = 1 - \sin x & \cdots\cdots ㉠ \\ \cos y = \sqrt{3} - \cos x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$이므로 ㉠, ㉡을 대입하면

$(1-\sin x)^2 + (\sqrt{3}-\cos x)^2 = 1$

$1-2\sin x+\sin^2 x+3-2\sqrt{3}\cos x+\cos^2 x=1$

$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$

$2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2$ $\quad\therefore \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$

이때 $0 \le x < 2\pi$에서 $\frac{\pi}{3} \le x+\frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$이므로

$x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore x=\frac{\pi}{6}$

$x=\frac{\pi}{6}$를 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$\sin y = \frac{1}{2}$, $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore y=\frac{\pi}{6}$ $(\because 0 \le y < 2\pi)$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{\pi}{6}$이므로

$\tan(\alpha+\beta) = \tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

정답_ ⑤

275

$\tan^{-1}\frac{x}{2} = h$로 놓으면 $\tan h = \frac{x}{2}$ $\quad\therefore x = 2\tan h$

이때, $x \to 0$일 때 $h \to 0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan^{-1}\frac{x}{2}}{x}=\lim_{h\to0}\left(\frac{h}{\tan h}\cdot\frac{1}{2}\right)=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

정답_ ②

276

ㄱ은 옳다.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=1\cdot1=1$$

ㄴ도 옳다.

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_2(1+2x)}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{f(x)\ln2}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot\frac{2}{\ln2}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}\cdot\frac{\ln(1+x)}{f(x)}\right\}$$
$$=1\cdot\frac{2}{\ln2}\cdot1\cdot1=\frac{2}{\ln2}\ \left(\because \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{f(x)}=1\right)$$

ㄷ은 옳지 않다.

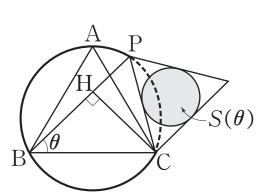
$$\sum_{k=1}^{10}\lim_{x\to0}\frac{e^{f(kx)}-e^{f(x)}}{\sin(f(5x))}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\lim_{x\to0}\frac{e^{kx}-e^{x}}{\sin5x}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\lim_{x\to0}\frac{e^{kx}-1+1-e^{x}}{\sin5x}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{e^{kx}-1}{x}-\frac{e^{x}-1}{x}\right)\cdot\frac{x}{\sin5x}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{e^{kx}-1}{kx}\cdot k-\frac{e^{x}-1}{x}\right)\cdot\frac{5x}{\sin5x}\cdot\frac{1}{5}\right\}$$
$$=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{10}(k-1)=\frac{1}{5}\left(\frac{10\cdot11}{2}-10\right)=9$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ③

277

삼각형 ABC가 정삼각형이므로 원주각의 성질에 의해



$\angle\mathrm{BPC}=\angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}$

이때, $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{3}$이므로 삼각형 PBC의 꼭짓점 C에서 선분 BP에 내린 수선의 발을 H라고 하면

직각삼각형 HBC에서 $\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{BC}}\sin\theta=\sqrt{3}\sin\theta$

또, 직각삼각형 HCP에서

$$\overline{\mathrm{PC}}=\frac{\overline{\mathrm{CH}}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sin\theta$$

선분 PC를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이를 A라 하면

$$A=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\overline{\mathrm{PC}}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2\sin\theta)^2=\sqrt{3}\sin^2\theta \quad\cdots\cdots ㉠$$

한편, 선분 PC를 한 변으로 하는 정삼각형에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라고 하면

$$A=3\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{PC}}\cdot r\right)=3\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot2\sin\theta\cdot r\right)=3r\sin\theta \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\sqrt{3}\sin^2\theta=3r\sin\theta$이므로

$r=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\ (\because \sin\theta>0)$

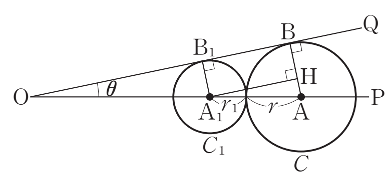
즉, $S(\theta)=\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)^2=\frac{1}{3}\pi\sin^2\theta$이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{3}\pi\sin^2\theta}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\pi\cdot1^2=\frac{1}{3}\pi$$

따라서 $a=\frac{1}{3}$이므로 $30a=30\cdot\frac{1}{3}=10$

정답_ 10

278



위의 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=r$, $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=r_1$이라 하고, 점 $\mathrm{A_1}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{\mathrm{AA_1}}=r+r_1$, $\overline{\mathrm{AH}}=r-r_1$

$\angle\mathrm{AA_1H}=\angle\mathrm{POQ}=\theta$이므로 삼각형 $\mathrm{AA_1H}$에서

$\sin\theta=\frac{r-r_1}{r+r_1}$, $(r+r_1)\sin\theta=r-r_1$

$r\sin\theta+r_1\sin\theta=r-r_1$, $r(1-\sin\theta)=r_1(1+\sin\theta)$

$\frac{r}{r_1}=\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$ $\quad\therefore \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{A_1B_1}}}=\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{A_1B_1}}}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{1-\sin\theta+2\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(1+\frac{2\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(1+\frac{2\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)^{\frac{1-\sin\theta}{2\sin\theta}}\right\}^{\frac{2}{1-\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}}$$
$$=e^{2\cdot1}=e^2$$

정답_ ④

279

극한값이 존재하고, $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이므로

(분자) $\to0$이어야 한다. 즉, $\lim_{x\to1}\sin(\cos ax)=0$에서

$\sin(\cos a)=0$, $\cos a=0$

$$\therefore a=\frac{\pi}{2}\ \left(\because 0\le a\le\frac{2}{3}\pi\right) \quad\cdots\cdots ㉠$$

㉠을 주어진 식에 대입한 후 $x-1=t$로 놓으면

$x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)\right\}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(-\sin\frac{\pi}{2}t\right)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{-\sin\left(\sin\frac{\pi}{2}t\right)}{\sin\frac{\pi}{2}t}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$=-1\cdot1\cdot\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

따라서 $b=-\frac{\pi}{2}$이므로 $a-b=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$

정답_ π

280

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이어야 하므로

$$a=\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{2x+\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin4x}{4x}\cdot4}{2+\frac{\sin x}{x}}=\frac{1\cdot4}{2+1}=\frac{4}{3}$$

또, 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim_{x\to0}g(x)=(0)$이어야 하므로

$$a=\lim_{x\to0}\frac{\tan bx}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan bx}{bx}\cdot b=1\cdot b=b$$

$\therefore a=b=\frac{4}{3}$

$\therefore a+b=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

정답_ ④

281

$\frac{g'(x)}{f'(x)}+\frac{f'(x)}{g'(x)}=2$에서 $f'(x)g'(x)\neq0$이므로

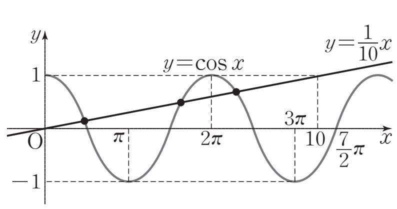
$\{f'(x)\}^2-2f'(x)g'(x)+\{g'(x)\}^2=0$

$\{f'(x)-g'(x)\}^2=0 \qquad \therefore f'(x)-g'(x)=0$

$f(x)-g(x)=\sin x-\frac{1}{20}x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-g'(x)=\cos x-\frac{1}{10}x \qquad \therefore \cos x-\frac{1}{10}x=0$

이 방정식의 근은 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=\frac{1}{10}x$의 교점이므로 다음 그림에서 양의 근의 개수는 3이다.



정답_ ③

05 여러 가지 미분법

282

(1) $y'=\frac{2(3x+1)-(2x-1)\cdot3}{(3x+1)^2}=\frac{5}{(3x+1)^2}$

(2) $y'=-\frac{(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2}=-\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}$

(3) $y'=-\frac{(e^x)'}{(e^x)^2}=-\frac{e^x}{e^{2x}}=-\frac{1}{e^x}$

(4) $y'=\frac{-\sin x(1-\cos x)-(1+\cos x)\cdot\sin x}{(1-\cos x)^2}$

$=-\frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}$

정답_ (1) $y'=\frac{5}{(3x+1)^2}$ (2) $y'=-\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}$
(3) $y'=-\frac{1}{e^x}$ (4) $y'=-\frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}$

283

$$f'(x)=\frac{(3x^2-2x)(x^2-1)-(x^3-x^2+1)\cdot2x}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$\therefore f'(\sqrt{2})=\frac{2(2-3)}{(2-1)^2}=-2$

정답_ ①

284

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

$\therefore f'(0)=\frac{1}{(1+1)^2}=\frac{1}{4}$

정답_ ②

285

$g'(x)=\frac{1\cdot\{f(x)+2\}-xf'(x)}{\{f(x)+2\}^2}$이고, $f(0)=1$이므로

$g'(0)=\frac{f(0)+2}{\{f(0)+2\}^2}=\frac{1+2}{(1+2)^2}=\frac{1}{3}$

정답_ ②

286

$$f'(x)=\frac{1\cdot(3x+1)-(x+k)\cdot3}{(3x+1)^2}=\frac{-3k+1}{(3x+1)^2}$$

이때, $f'(0)=7$이므로

$-3k+1=7 \qquad \therefore k=-2$

정답_ ①

287

$$f'(x)=\frac{a(x+1)-ax\cdot1}{(x+1)^2}=\frac{a}{(x+1)^2}$$

이때, $f'(1)=2$이므로 $\frac{a}{(1+1)^2}=2 \qquad \therefore a=8$

따라서 $f'(x)=\dfrac{8}{(x+1)^2}$이므로

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=\dfrac{8}{(2+1)^2}=\dfrac{8}{9}$ 정답_ ④

288

$f'(x)=\dfrac{\sec^2 x(1+\sec x)-\tan x\cdot\sec x\tan x}{(1+\sec x)^2}$

$=\dfrac{\sec x(\sec x+\sec^2 x-\tan^2 x)}{(1+\sec x)^2}$

$=\dfrac{\sec x(\sec x+1)}{(1+\sec x)^2}$ $(\because 1+\tan^2 x=\sec^2 x)$

$=\dfrac{\sec x}{1+\sec x}$

$\therefore f'(0)=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$ 정답_ ②

289

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이어야 하므로 $\lim\limits_{x\to 0-}(3\sin x+4\tan x)=\lim\limits_{x\to 0+}(x^2+ax+b)=f(0)$

$\therefore b=0$

또한, $f'(0)$이 존재해야 하므로

$f'(x)=\begin{cases}3\cos x+4\sec^2 x & (x<0)\\ 2x+a & (x>0)\end{cases}$

에서 $\lim\limits_{x\to 0-}(3\cos x+4\sec^2 x)=\lim\limits_{x\to 0+}(2x+a)$

$\therefore a=7$

$\therefore a+b=7+0=7$ 정답_ ④

290

(1) $y'=5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)'=5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$

(2) $y=\dfrac{1}{(3x-1)^7}=(3x-1)^{-7}$이므로

$y'=-7(3x-1)^{-8}(3x-1)'$

$=-7(3x-1)^{-8}\cdot 3=-\dfrac{21}{(3x-1)^8}$

(3) $y'=e^{2x-1}(2x-1)'=2e^{2x-1}$

(4) $y'=\{\cos(\cos x)\}(\cos x)'=\{\cos(\cos x)\}(-\sin x)$

$=(-\sin x)\{\cos(\cos x)\}$

정답_ (1) $y'=5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$ (2) $y'=\dfrac{21}{(3x-1)^8}$

(3) $y'=2e^{2x-1}$ (4) $y'=(-\sin x)\{\cos(\cos x)\}$

291

$f'(x)=5\left(\dfrac{4x-3}{2x-1}\right)^4\cdot\left(\dfrac{4x-3}{2x-1}\right)'$

$=5\left(\dfrac{4x-3}{2x-1}\right)^4\cdot\dfrac{4(2x-1)-(4x-3)\cdot 2}{(2x-1)^2}$

$=5\left(\dfrac{4x-3}{2x-1}\right)^4\cdot\dfrac{2}{(2x-1)^2}=\dfrac{10(4x-3)^4}{(2x-1)^6}$

$\therefore f'(1)=10$ 정답_ ⑤

292

$f(2x+1)=(x^2+1)^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(2x+1)\cdot 2=2(x^2+1)\cdot 2x$

$f'(2x+1)=2x(x^2+1)$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(3)=2\cdot 1\cdot(1^2+1)=4$ 정답_ ④

293

$g(x)=\{xf(x)\}^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=2\cdot xf(x)\cdot\{xf(x)\}'$

$=2xf(x)\{f(x)+xf'(x)\}$

이때, $f(1)=1$, $f'(1)=2$이므로

$g'(1)=2\cdot 1\cdot f(1)\cdot\{f(1)+1\cdot f'(1)\}$

$=2\cdot 1\cdot 1\cdot(1+1\cdot 2)=6$ 정답_ ②

294

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=x^2+2x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=2x+2$

이때, $g'(x)=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$이므로

$f'\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)\cdot\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=2x+2$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)\cdot 2=2$ $\therefore f'(0)=1$ 정답_ ④

295

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=4$에서 극한값이 존재하고, $x\to 1$일 때

(분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 1}\{f(x)-1\}=0$에서 $f(1)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=4$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-2}{x-1}=3$에서 극한값이 존재하고, $x\to 1$일 때

(분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 1}\{g(x)-2\}=0$에서 $g(1)=2$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=3$

$y'=g'(f(x))f'(x)$이므로 $y=(g\circ f)(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$g'(f(1))f'(1)=g'(1)f'(1)=3\cdot 4=12$ 정답_ ②

296

$f'(x)=3\sec^2 2x\cdot 2=6\sec^2 2x$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=6\sec^2\frac{\pi}{3}=6\cdot 2^2=24$ 정답_ 24

297

$h(x)=g(f(x))$라고 하면 $h(x)=g'(f(x))f'(x)$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}, g\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$이므로

$h\left(\frac{\pi}{4}\right)=g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{e}$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{g(f(x))-\sqrt{e}}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$$
$$=h'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=g'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=g'\left(\frac{1}{2}\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$f(x)=\sin^2 x$에서 $f'(x)=2\sin x\cos x$이고

$g(x)=e^x$에서 $g'(x)=e^x$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

$g'\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

따라서 구하는 극한값은

$g'\left(\frac{1}{2}\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{e}\cdot 1=\sqrt{e}$ 정답_ ④

298

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(\cos x)\cdot(-\sin x)=2\cos 2x+\sec^2 x$ ……㉠

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$을 만족시키는 x의 값은 $x=\frac{\pi}{3}$

㉠의 양변에 $x=\frac{\pi}{3}$를 대입하면

$f'\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\frac{2}{3}\pi+\sec^2\frac{\pi}{3}$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2^2,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)=3$

$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{3}$ 정답_ ①

299

(1) $y'=3\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x\ln 3}=\frac{3}{x}-\frac{1}{x\ln 3}$

(2) $y'=2x\cdot\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$

(3) $y'=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

(4) $y'=\dfrac{(x^2+1)'}{(x^2+1)\ln 3}=\dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 3}$

정답_ (1) $y'=\frac{3}{x}-\frac{1}{x\ln 3}$ (2) $y'=x(2\ln x+1)$

(3) $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$ (4) $y'=\frac{2x}{(x^2+1)\ln 3}$

300

$$f'(x)=\frac{\{(3x-1)^4\}'}{(3x-1)^4\ln 3}=\frac{4(3x-1)^3\cdot 3}{(3x-1)^4\ln 3}=\frac{12}{(3x-1)\ln 3}$$

$\therefore f'(1)=\frac{12}{2\ln 3}=\frac{6}{\ln 3}$ 정답_ ②

301

$$f'(x)=\frac{(\log_2 x)'}{\log_2 x}=\frac{\frac{1}{x\ln 2}}{\frac{\ln x}{\ln 2}}=\frac{1}{x\ln x}$$

$\therefore f'(e)=\frac{1}{e\ln e}=\frac{1}{e}$ 정답_ ②

302

$f(x)=x\ln ax+b$에서 $f(1)=4$이므로

$f(1)=\ln a+b=4$ ……㉠

$f'(x)=\ln ax+x\cdot\frac{a}{ax}=\ln ax+1$에서 $f'(1)=2$이므로

$f'(1)=\ln a+1=2, \ln a=1 \quad \therefore a=e$

$a=e$를 ㉠에 대입하면 $\ln e+b=4$

$1+b=4 \quad \therefore b=3$

따라서 $f(x)=x\ln ex+3$이므로

$f(e)=e\ln e^2+3=2e+3$ 정답_ ③

303

$f'(x)=\frac{(3x-a)'}{3x-a}=\frac{3}{3x-a}$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=2$에서 $f'(1)=2$이므로

$\frac{3}{3-a}=2, 3=6-2a, 2a=3 \quad \therefore a=\frac{3}{2}$ 정답_ ③

304

$$f'(x)=\frac{(\tan x+\sec x)'}{\tan x+\sec x}=\frac{\sec^2 x+\sec x\tan x}{\tan x+\sec x}$$
$$=\frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}=\sec x$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(2h)-f(0)}{h}-\frac{f(-h)-f(0)}{h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(2h)-f(0)}{2h}\cdot 2+\frac{f(-h)-f(0)}{-h}\right\}$$
$$=2f'(0)+f'(0)=3f'(0)=3\cdot 1=3$$ 정답_ ③

305

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{2^x+3^x}{a}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{2^x+3^x}{a}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2^x+3^x)-\ln a}{x}=b$$

에서 극한값이 존재하고, $x \to 0$일 때 (분모) $\to 0$이므로

(분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\{\ln(2^x+3^x)-\ln a\}=0$에서

$\ln 2-\ln a=0 \qquad \therefore a=2$

한편, $f(x)=\ln(2^x+3^x)$으로 놓으면

$f(0)=\ln(1+1)=\ln 2$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2^x+3^x)-\ln 2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

$f'(x)=\dfrac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{2^x+3^x}$이므로

$$f'(0)=\frac{\ln 2+\ln 3}{1+1}=\frac{\ln 6}{2} \qquad \therefore b=\frac{\ln 6}{2}$$

$\therefore ab=2\cdot\dfrac{\ln 6}{2}=\ln 6$ 정답_ ⑤

306

$f(x)=\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{9x})$으로 놓으면

$f(0)=\ln(1+1+\cdots+1)=\ln 9$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{9x}}{9}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{9x})-\ln 9}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

한편, $f'(x)=\dfrac{e^x+2e^{2x}+\cdots+9e^{9x}}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{9x}}$이므로

$f'(0)=\dfrac{1+2+\cdots+9}{1+1+\cdots+1}=\dfrac{45}{9}=5$ 정답_ ②

307

$f(x)=x^{\ln x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln x^{\ln x}=(\ln x)^2$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=2\ln x\cdot(\ln x)'=\frac{2\ln x}{x}$$

$\therefore \dfrac{f'(e)}{f(e)}=\dfrac{2\ln e}{e}=\dfrac{2}{e}$ 정답_ ③

308

$f(x)=(1+e^x)(1+e^{2x})(1+e^{3x})\cdots(1+e^{12x})$에서

$$\begin{aligned}\ln|f(x)|&=\ln|(1+e^x)(1+e^{2x})(1+e^{3x})\cdots(1+e^{12x})|\\&=\ln(1+e^x)+\ln(1+e^{2x})+\ln(1+e^{3x})\\&\quad+\cdots+\ln(1+e^{12x})\end{aligned}$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}+\frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}+\cdots+\frac{12e^{12x}}{1+e^{12x}}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f(x)}&=\frac{1}{1+1}+\frac{2}{1+1}+\frac{3}{1+1}+\cdots+\frac{12}{1+1}\\&=\frac{1}{2}(1+2+3+\cdots+12)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{12\cdot 13}{2}=39\end{aligned}$$

정답_ ⑤

309

$f(x)=\dfrac{x(x+2)^3}{(x+1)^4}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\begin{aligned}\ln|f(x)|&=\ln\left|\frac{x(x+2)^3}{(x+1)^4}\right|\\&=\ln|x|+3\ln|x+2|-4\ln|x+1|\end{aligned}$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)}&=\frac{1}{x}+\frac{3}{x+2}-\frac{4}{x+1}\\&=\frac{(x+2)(x+1)+3x(x+1)-4x(x+2)}{x(x+2)(x+1)}\\&=\frac{2-2x}{x(x+2)(x+1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x)&=f(x)\cdot\frac{2-2x}{x(x+2)(x+1)}\\&=\frac{x(x+2)^3}{(x+1)^4}\cdot\frac{2-2x}{x(x+2)(x+1)}\\&=\frac{(x+2)^2(2-2x)}{(x+1)^5}\end{aligned}$$

$\therefore f'(0)=8$ 정답_ ⑤

310

$f(x)=\dfrac{x^4}{(x+1)(x-3)^2}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\begin{aligned}\ln|f(x)|&=\ln\left|\frac{x^4}{(x+1)(x-3)^2}\right|\\&=4\ln|x|-\ln|x+1|-2\ln|x-3|\end{aligned}$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)}&=\frac{4}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x-3}\\&=\frac{4(x+1)(x-3)-x(x-3)-2x(x+1)}{x(x+1)(x-3)}\\&=\frac{x^2-7x-12}{x(x+1)(x-3)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x)&=f(x)\cdot\frac{x^2-7x-12}{x(x+1)(x-3)}\\&=\frac{x^4}{(x+1)(x-3)^2}\cdot\frac{x^2-7x-12}{x(x+1)(x-3)}\\&=\frac{x^3(x^2-7x-12)}{(x+1)^2(x-3)^3}\end{aligned}$$

$\therefore f'(0)=0$ 정답_ ③

311

$e^{f(x)}=\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln e^{f(x)}=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

$f(x)=\dfrac{1}{2}\{\ln(1-\sin x)-\ln(1+\sin x)\}$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-\cos x}{1-\sin x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{-\cos x(1+\sin x)-\cos x(1-\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2\cos x}{1-\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\cos^2 x}$$
$$=-\frac{1}{\cos x}$$

$\therefore f'\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=-\dfrac{1}{\cos\dfrac{2}{3}\pi}=2$ 정답_ ③

312

$f(\pi)=\pi^{\sin\pi}=1$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-1}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)$

$f(x)=x^{\sin x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln x^{\sin x}=\sin x\ln x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\cos x\ln x+\sin x\cdot\dfrac{1}{x}$

$\therefore f'(x)=f(x)\left(\cos x\ln x+\sin x\cdot\dfrac{1}{x}\right)$

$=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\sin x\cdot\dfrac{1}{x}\right)$

$\therefore f'(\pi)=\pi^{\sin\pi}\left(\cos\pi\ln\pi+\sin\pi\cdot\dfrac{1}{\pi}\right)$

$=\pi^0(-\ln\pi+0)=-\ln\pi$ 정답_ ②

313

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{2h}\cdot2$

$=2f'(3)$

$f(x)=3x^{-2}$에서

$f'(x)=3\cdot(-2)\cdot x^{-3}=-6x^{-3}$

$\therefore 2f'(3)=2\cdot(-6\cdot3^{-3})=-\dfrac{4}{9}$ 정답_ ③

314

$f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}+\cdots+\dfrac{9}{x^9}$

$=x^{-1}+2x^{-2}+3x^{-3}+\cdots+9x^{-9}$

이므로

$f'(x)=-x^{-2}-2^2x^{-3}-3^2x^{-4}-\cdots-9^2x^{-10}$

$\therefore f'(1)=-1-2^2-3^2-\cdots-9^2=-(1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2)$

$=-\dfrac{9\cdot10\cdot19}{6}=-285$ 정답_ -285

315

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}=\dfrac{1}{x^{\frac{3}{4}}}=x^{-\frac{3}{4}}$이므로

$f'(x)=-\dfrac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$

$\therefore f'(\sqrt[7]{16})=f'(2^{\frac{4}{7}})=-\dfrac{3}{4}(2^{\frac{4}{7}})^{-\frac{7}{4}}$

$=-\dfrac{3}{4}\cdot2^{-1}=-\dfrac{3}{8}$ 정답_ ③

316

$f'(x)=5(\sqrt{x^2-2}+x)^4\cdot(\sqrt{x^2-2}+x)'$

$=5(\sqrt{x^2-2}+x)^4\left(\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-2}}+1\right)$

$=5(\sqrt{x^2-2}+x)^4\cdot\dfrac{x+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2-2}}$

$=\dfrac{5(\sqrt{x^2-2}+x)^5}{\sqrt{x^2-2}}$

$\therefore 2f'(2)f'(-2)=2\cdot\dfrac{5(\sqrt{2}+2)^5}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{5(\sqrt{2}-2)^5}{\sqrt{2}}$

$=25\{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-2)\}^5$

$=-800$ 정답_ ①

317

$x=t^2+1,\ y=\dfrac{2}{3}t^3+10t-1$에서

$\dfrac{dx}{dt}=2t,\ \dfrac{dy}{dt}=2t^2+10$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{2t^2+10}{2t}=\dfrac{t^2+5}{t}$

따라서 $t=1$일 때의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$\dfrac{1+5}{1}=6$ 정답_ 6

318

$x=\dfrac{2t}{1+t^2},\ y=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$에서

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2(1+t^2)-2t\cdot2t}{(1+t^2)^2}=\dfrac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}$

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{-2t(1+t^2)-(1-t^2)\cdot2t}{(1+t^2)^2}=\dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{-4t}{2-2t^2}=\dfrac{2t}{t^2-1}$

$t=2$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$\frac{2\cdot 2}{2^2-1}=\frac{4}{3}$

따라서 $p=3, q=4$이므로 $p+q=3+4=7$ 정답_③

319

$x=t-\sin t, y=1-\cos t$에서

$\frac{dx}{dt}=1-\cos t, \frac{dy}{dt}=\sin t$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$

따라서 $t=\frac{\pi}{3}$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1-\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ 정답_⑤

320

$x=\cot 2\theta, y=-\cot\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)$에서

$\frac{dx}{d\theta}=(-\csc^2 2\theta)\cdot 2=-2\csc^2 2\theta$

$\frac{dy}{d\theta}=\csc^2\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)\cdot(-2)=-2\csc^2\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-2\csc^2\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)}{-2\csc^2 2\theta}$

$=\frac{\csc^2\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)}{\csc^2 2\theta}=\frac{1+\cot^2\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)}{1+\cot^2 2\theta}$

$=\frac{1+y^2}{1+x^2}$ 정답_④

321

$x=(t^2+1)e^t, y=e^{3t+2}$에서

$\frac{dx}{dt}=2t\cdot e^t+(t^2+1)e^t$

$=e^t(t^2+2t+1)$

$=e^t(t+1)^2$

$\frac{dy}{dt}=e^{3t+2}\cdot 3=3e^{3t+2}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3e^{3t+2}}{e^t(t+1)^2}=\frac{3e^{2t+2}}{(t+1)^2}$

따라서 $t=0$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$\frac{3e^{2\cdot 0+2}}{(0+1)^2}=3e^2$ 정답_⑤

322

$x=t+\frac{a}{t}, y=t-\frac{a}{t}$에서

$\frac{dx}{dt}=1-\frac{a}{t^2}, \frac{dy}{dt}=1+\frac{a}{t^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1+\frac{a}{t^2}}{1-\frac{a}{t^2}}=\frac{t^2+a}{t^2-a}$

$t=2$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값이 3이므로

$\frac{2^2+a}{2^2-a}=3, 4+a=12-3a$

$4a=8 \quad \therefore a=2$ 정답_②

323

$x=t^2+\frac{1}{t}, y=\sqrt{t}+\frac{1}{t}$에서

$\frac{dx}{dt}=2t-\frac{1}{t^2}=\frac{2t^3-1}{t^2}$

$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t}}-\frac{1}{t^2}=\frac{t\sqrt{t}-2}{2t^2}$

$\therefore \lim_{t\to 0}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t\sqrt{t}-2}{2t^2}}{\frac{2t^3-1}{t^2}}$

$=\lim_{t\to 0}\frac{t\sqrt{t}-2}{2(2t^3-1)}=\frac{0-2}{2(0-1)}=1$ 정답_①

324

$x=t+t^2+t^3+\cdots+t^n$에서

$\frac{dx}{dt}=1+2t+3t^2+\cdots+nt^{n-1}$

$y=t+\frac{3}{2}t^2+\frac{5}{3}t^3+\cdots+\frac{2n-1}{n}t^n$에서

$\frac{dy}{dt}=1+3t+5t^2+\cdots+(2n-1)t^{n-1}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1+3t+5t^2+\cdots+(2n-1)t^{n-1}}{1+2t+3t^2+\cdots+nt^{n-1}}$

$S(n)=\lim_{t\to 1}\frac{dy}{dx}$

$=\lim_{t\to 1}\frac{1+3t+5t^2+\cdots+(2n-1)t^{n-1}}{1+2t+3t^2+\cdots+nt^{n-1}}$

$=\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{1+2+3+\cdots+n}$

$=\frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2n}{n+1}$

$\therefore S(10)=\frac{2\cdot 10}{10+1}=\frac{20}{11}$ 정답_④

325

$x=t+1,\ y=-t^{-1}$에서

$\frac{dx}{dt}=1,\ \frac{dy}{dt}=-(-1)t^{-2}=\frac{1}{t^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{t^2}}{1}=\frac{1}{t^2}$

즉, 함수 $y=f(x)$에서 $\frac{dy}{dx}=f'(x)$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{t^2}=\frac{1}{(x-1)^2}$

$x=-1$이면 $t=-2$이므로 $y=-t^{-1}$에서

$f(-1)=-(-2)^{-1}=\frac{1}{2}$

이때, $g(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$에서

$g'(x)=f'(f(x))f'(x)$이므로

$g'(-1)=f'(f(-1))f'(-1)$

$=f'\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{(-1-1)^2}$

$=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}\cdot\frac{1}{4}=1$

정답_①

326

$x^2-3xy+y^2=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-3y-3x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0$

$(-3x+2y)\frac{dy}{dx}=-2x+3y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-2x+3y}{-3x+2y}=\frac{2x-3y}{3x-2y}$

정답_③

327

$e^{2x}\ln y=5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2e^{2x}\ln y+e^{2x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$

$e^{2x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=-2e^{2x}\ln y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-2y\ln y$

정답_①

328

$x=y^3+y-1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$1=(3y^2+1)\frac{dy}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{3y^2+1}$

$\therefore \lim_{y\to1}\frac{dy}{dx}=\lim_{y\to1}\frac{1}{3y^2+1}=\frac{1}{4}$

정답_④

329

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2}$에서

$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{y^{-\frac{1}{2}}}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=-\frac{\sqrt{xy}}{x}$

따라서 $x=1,\ y=4$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$-\frac{\sqrt{1\cdot4}}{1}=-2$

정답_②

330

$x^2+y^2+axy+b=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+2y\frac{dy}{dx}+ay+ax\frac{dy}{dx}=0$

$(ax+2y)\frac{dy}{dx}=-(2x+ay)$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+ay}{ax+2y}$

점 $(1,\ 2)$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값이 -3이므로 $x=1,\ y=2$를 대입하면

$-\frac{2+2a}{a+4}=-3,\ 2+2a=3a+12 \qquad \therefore a=-10$

또한, 주어진 곡선이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$1+4+2a+b=0$

$a=-10$을 대입하면 $\quad b=15$

$\therefore a+b=-10+15=5$

정답_⑤

331

$y^3=\ln(5-x^2)+xy-1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3y^2\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{5-x^2}+y+x\frac{dy}{dx}$

$(3y^2-x)\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{5-x^2}+y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{3y^2-x}\left(\frac{-2x}{5-x^2}+y\right)$

따라서 곡선 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$\frac{1}{3-2}\left(\frac{-4}{5-4}+1\right)=-3$

정답_③

332

$\sin xy=x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$y\cos xy+x\cos xy\frac{dy}{dx}=1$

$\cos xy\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=1$

$$y+x\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos xy},\ x\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos xy}-y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\cos xy}-\frac{y}{x}$$

따라서 곡선 위의 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{3}\right)$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{6}}-\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{\sqrt{3}}-\frac{2\pi}{3}=\frac{4\sqrt{3}-2\pi}{3}$$

정답_⑤

333

(1) $x=y^3+y^2+y$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=3y^2+2y+1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{3y^2+2y+1}$$

(2) $x=\sqrt{y^2+1}$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{2\sqrt{y^2+1}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{\sqrt{y^2+1}}{y}$$

정답_(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3y^2+2y+1}$ (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{y^2+1}}{y}$

334

$f(g(x))=x$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$

$$\therefore\ g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$g(a)=b$이므로 ㉠에 $x=a$를 대입하면

$$g'(a)=\frac{1}{f'(g(a))}=\frac{1}{f'(b)}$$

정답_②

335

$f(3)=1$에서 $g(1)=3$이고, $f'(3)=2$이므로

$$g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'(3)}=\frac{1}{2}$$

정답_②

336

$g(1)=k$라고 하면 $f(k)=1$에서

$k^3+k+1=1,\ k^3+k=0$

$k(k^2+1)=0 \qquad \therefore k=0\ (\because k^2>0)$

$\therefore g(1)=0$

$f(x)=x^3+x+1$에서 $f'(x)=3x^2+1$이므로

$$g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{3\cdot 0^2+1}=1$$

정답_⑤

337

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)+g(1)-g(1-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(1+h)-g(1)}{h}+\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}\right\}$$

$=g'(1)+g'(1)$

$=2g'(1)$

이때, $g(1)=a$라고 하면 $f(a)=1$이므로

$e^{a-1}=1$에서 $a=1$

$\therefore g(1)=1$

한편, $f(x)=e^{x-1}$에서 $f'(x)=e^{x-1}$이므로

$$2g'(1)=\frac{2}{f'(g(1))}=\frac{2}{f'(1)}=\frac{2}{e^{1-1}}=2$$

정답_②

338

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(f(x))=x$이고 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=1$

$$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 $f(x)=2\sin x+1=2$이므로

$\sin x=\frac{1}{2} \qquad \therefore x=\frac{\pi}{6}$

한편, $f'(x)=2\cos x$이므로 ㉠에 $x=\frac{\pi}{6}$를 대입하면

$$g'(2)=g'\left(f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

정답_③

339

$f(0)=\sqrt[3]{1}=1$이므로 $g(1)=0$

한편, $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x+1}$에서 양변을 세제곱하면

$\{f(x)\}^3=x^3+3x+1$

양변을 x에 대하여 미분하면

$3\{f(x)\}^2f'(x)=3x^2+3,\ \{f(x)\}^2f'(x)=x^2+1$

$x=0$을 대입하면 $\{f(0)\}^2f'(0)=1 \qquad \therefore f'(0)=1$

$$\therefore g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'(0)}=1$$

정답_⑤

340

$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-2}{x-1}=3$에서 극한값이 존재하고, $x \to 1$일 때

(분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{g(x)-2\}=0$에서 $g(1)=2$

이때, $f(2)=1$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{g(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=3$

$\therefore f'(2)=\frac{1}{g'(f(2))}=\frac{1}{g'(1)}=\frac{1}{3}$

정답_③

341

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=\frac{1}{5}$에서 극한값이 존재하고, $x\to1$일 때

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-3\}=0$에서 $f(1)=3$

이때, $g(3)=1$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{1}{5}$

$g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{\frac{1}{5}}=5$

$\therefore g(3)+g'(3)=1+5=6$

정답_⑤

342

$x=t+5,\ y=t^3-2t^2+t-9$에서

$\frac{dx}{dt}=1,\ \frac{dy}{dt}=3t^2-4t+1$

$\therefore \frac{dx}{dy}=\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}=\frac{1}{3t^2-4t+1}$

한편, $y=t^3-2t^2+t-9$에서 $y=3$일 때의 t의 값을 구하면

$3=t^3-2t^2+t-9,\ t^3-2t^2+t-12=0$

$(t-3)(t^2+t+4)=0 \qquad \therefore t=3\ (\because t^2+t+4>0)$

$\therefore g'(3)=\frac{1}{3\cdot3^2-4\cdot3+1}=\frac{1}{16}$

정답_⑤

343

(1) $y'=6x^2+8x-5$

$\therefore y''=12x+8$

(2) $y'=5(4x-3)^4\cdot4=20(4x-3)^4$

$\therefore y''=80(4x-3)^3\cdot4=320(4x-3)^3$

(3) $y=\sqrt{x+8}=(x+8)^{\frac{1}{2}}$이므로

$y'=\frac{1}{2}(x+8)^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore y''=-\frac{1}{4}(x+8)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4(x+8)\sqrt{x+8}}$

(4) $y'=e^{-2x}\cdot(-2)=-2e^{-2x}$

$\therefore y''=-2e^{-2x}\cdot(-2)=4e^{-2x}$

(5) $y'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$

$\therefore y''=\frac{1}{x}$

(6) $y'=\cos x+x(-\sin x)=-x\sin x+\cos x$

$\therefore y''=-\sin x-x\cos x-\sin x=-2\sin x-x\cos x$

정답_(1) $y''=12x+8$ (2) $y''=320(4x-3)^3$

(3) $y''=-\frac{1}{4(x+8)\sqrt{x+8}}$ (4) $y''=4e^{-2x}$

(5) $y''=\frac{1}{x}$ (6) $y''=-2\sin x-x\cos x$

344

$f'(x)=e^{ax+b}+axe^{ax+b}=(ax+1)e^{ax+b}$

$f''(x)=ae^{ax+b}+a(ax+1)e^{ax+b}=(a^2x+2a)e^{ax+b}$

$f'(0)=5$에서 $e^b=5$

$f''(0)=10$에서 $2ae^b=10a=10 \qquad \therefore a=1$

$\therefore a+e^b=1+5=6$

정답_⑤

345

$f'(x)=2e^{2x}\sin x+e^{2x}\cos x=e^{2x}(2\sin x+\cos x)$

$f''(x)=2e^{2x}(2\sin x+\cos x)+e^{2x}(2\cos x-\sin x)$

$=e^{2x}(4\sin x+2\cos x+2\cos x-\sin x)$

$=e^{2x}(3\sin x+4\cos x)$

방정식 $f''(x)=0$의 근이 α이므로

$f''(\alpha)=e^{2\alpha}(3\sin\alpha+4\cos\alpha)=0$

모든 실수 α에 대하여 $e^{2\alpha}>0$이므로

$3\sin\alpha+4\cos\alpha=0,\ 3\sin\alpha=-4\cos\alpha$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3} \qquad \therefore \tan\alpha=-\frac{4}{3}$

정답_①

346

$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$이므로

$f'(0)=0$

$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=f''(0)$

이때,

$f''(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+3}-x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}$

$=\frac{(x^2+3)-x^2}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$

$=\frac{3}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$

이므로 $f''(0)=\frac{3}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

정답_⑤

347

$f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\ln x+x$

$f''(x)=2\ln x+2x\cdot\frac{1}{x}+1=2\ln x+3$

$f(x)-f'(x)+f''(x)=5\ln x-x+3$에서

$x^2\ln x-(2x\ln x+x)+(2\ln x+3)=5\ln x-x+3$

$(x^2-2x-3)\ln x=0$

$(x+1)(x-3)\ln x=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=1$

그런데 $f(x)=x^2\ln x$에서 진수 조건에 의해 $x>0$이므로

$x=1$ 또는 $x=3$

따라서 주어진 등식이 성립하도록 하는 모든 x의 값의 합은

$1+3=4$ 정답_ ③

348

$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=0$이므로 $f''(a)=0$

$f(x)=\frac{3}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\frac{0\cdot(x^2+1)-3\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-6x}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=\frac{-6(x^2+1)^2-(-6x)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$

$=\frac{-6(x^2+1)+24x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{18x^2-6}{(x^2+1)^3}$

$f''(a)=\frac{18a^2-6}{(a^2+1)^3}=0$

$18a^2-6=0$ ($\because a^2+1>0$)

$a^2=\frac{1}{3}$ $\therefore a=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ($\because a>0$) 정답_ ②

349

조건 (나)의 $\lim_{x\to 1}\frac{f'(f(x))-1}{x-1}=3$에서 극한값이 존재하고,

$x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{f'(f(x))-1\}=0$이므로 $f'(f(1))=1$

$\lim_{x\to 1}\frac{f'(f(x))-1}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{f(x)-f(1)}\cdot\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right\}$

$=f''(f(1))f'(1)$

$=f''(2)\cdot 3=3$ ($\because$ 조건 (가)에서 $f(1)=2$, $f'(1)=3$)

$\therefore f''(2)=1$ 정답_ ①

350

$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ ❶

$f(1)=\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{2}$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)-2f(1)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{2}{x+1}\right\}$

$=f'(1)\cdot\frac{2}{1+1}=f'(1)$

$=\frac{1-1}{(1+1)^2}=0$ ❷

정답_ 0

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)$ 구하기	40%
❷	$\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)-1}{x^2-1}$의 값 구하기	60%

351

$g(t)=f(t^2+2t+2)$로 놓으면 $g(0)=f(2)$ ❶

$\lim_{t\to 0}\frac{f(t^2+2t+2)-f(2)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t}$

$=g'(0)$ ❷

$g'(x)=f'(x^2+2x+2)\cdot(2x+2)$이므로

$g'(0)=f'(2)\cdot 2=6$ $\therefore f'(2)=3$ ❸

정답_ 3

단계	채점 기준	비율
❶	$g(t)=f(t^2+2t+2)$로 놓고 $f(2)$의 값과 같은 것 찾기	20%
❷	주어진 극한이 $g'(0)$임을 알아내기	40%
❸	$f'(2)$의 값 구하기	40%

352

$x=\frac{2t}{1+t}$, $y=\frac{t^2}{1+t}$에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{2(1+t)-2t\cdot 1}{(1+t)^2}=\frac{2}{(1+t)^2}$

$\frac{dy}{dt}=\frac{2t(1+t)-t^2\cdot 1}{(1+t)^2}=\frac{t(t+2)}{(1+t)^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{t(t+2)}{(1+t)^2}}{\frac{2}{(1+t)^2}}=\frac{t(t+2)}{2}$ ❶

$\therefore \sum_{t=1}^{10}\frac{2F(t)}{t}=\sum_{t=1}^{10}\left\{\frac{2}{t}\cdot\frac{t(t+2)}{2}\right\}$

$=\sum_{t=1}^{10}(t+2)$

$=\frac{10\cdot 11}{2}+2\cdot 10=75$ ❷

정답_ 75

단계	채점 기준	비율
❶	$\frac{dy}{dx}$ 구하기	50%
❷	$\sum_{t=1}^{10}\frac{2F(t)}{t}$의 값 구하기	50%

353

주어진 곡선이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$4+2a+2+b=0 \qquad \therefore 2a+b=-6$ ······㉠

······························· ❶

$x^2+axy+2y^2+b=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+ay+ax\dfrac{dy}{dx}+4y\dfrac{dy}{dx}=0$

$(ax+4y)\dfrac{dy}{dx}=-(2x+ay)$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+ay}{ax+4y}$ ······ ❷

점 $(2,\ 1)$에서의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값이 $-\dfrac{3}{4}$이므로 $x=2, y=1$을 대입하면

$-\dfrac{4+a}{2a+4}=-\dfrac{3}{4}, 4a+16=6a+12 \qquad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$4+b=-6 \qquad \therefore b=-10$ ······ ❸

$\therefore a+b=2+(-10)=-8$ ······ ❹

정답_ -8

단계	채점 기준	비율
❶	a, b에 대한 관계식 구하기	30%
❷	$\dfrac{dy}{dx}$ 구하기	30%
❸	a, b의 값 구하기	30%
❹	$a+b$의 값 구하기	10%

354

$f(1)=\dfrac{2}{1+1}=1$이므로 $\quad g(1)=1$ ······ ❶

$f'(x)=\dfrac{2(x+1)-2x\cdot1}{(x+1)^2}=\dfrac{2}{(x+1)^2}$ ······ ❷

이때 $f'(1)=\dfrac{1}{2}$이므로

$g'(1)=\dfrac{1}{f'(g(1))}=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$ ······ ❸

정답_ 2

단계	채점 기준	비율
❶	$g(1)$의 값 구하기	20%
❷	$f'(x)$ 구하기	30%
❸	$g'(1)$의 값 구하기	50%

355

$y=e^x\sin 2x$에서

$y'=e^x\sin 2x+e^x\cdot2\cos 2x=e^x(\sin 2x+2\cos 2x)$ ······ ❶

$y''=e^x(\sin 2x+2\cos 2x)+e^x(2\cos 2x-4\sin 2x)$

$\quad =e^x(4\cos 2x-3\sin 2x)$ ······ ❷

$y''+ay'+by=0$에서

$e^x(4\cos 2x-3\sin 2x)+ae^x(\sin 2x+2\cos 2x)+be^x\sin 2x$

$=0$

$e^x\{(a+b-3)\sin 2x+(2a+4)\cos 2x\}=0$

위의 식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로

$a+b-3=0, 2a+4=0$

$\therefore a=-2, b=5$ ······ ❸

$\therefore ab=-2\cdot5=-10$ ······ ❹

정답_ -10

단계	채점 기준	비율
❶	y' 구하기	20%
❷	y'' 구하기	20%
❸	a, b의 값 구하기	50%
❹	ab의 값 구하기	10%

356

$f(x)$는 첫째항이 x, 공비가 x^2-1인 등비급수의 합이고,

$0<x^2<1$에서 $-1<x^2-1<0$이므로

$f(x)=\dfrac{x}{1-(x^2-1)}=\dfrac{x}{2-x^2}$

$f'(x)=\dfrac{1\cdot(2-x^2)-x(-2x)}{(2-x^2)^2}=\dfrac{x^2+2}{(2-x^2)^2}$

$\therefore f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\frac{1}{4}+2}{\left(2-\frac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\frac{9}{4}}{\frac{49}{16}}=\dfrac{36}{49}$

정답_ ⑤

357

$g(x)=2e^{-\ln(x^2+1)}=2e^{\ln(x^2+1)^{-1}}=2(x^2+1)^{-1}=\dfrac{2}{x^2+1}$

$x\neq1$일 때, $\quad f(x)=\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$

이때, $g'(x)=\dfrac{-4x}{(x^2+1)^2}$이므로

$f(1)=g'(1)=\dfrac{-4\cdot1}{(1+1)^2}=-1$

정답_ -1

358

$f(x)$를 이차식 $(x-1)^2$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지는 일차 이하의 다항식이다.

즉, $f(x)=(x-1)^2Q(x)+px+q$ (p, q는 상수) ······㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+p$ ······㉡

$(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(e^0)=f(1)=3$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=p+q=3$ ······㉢

$g'(x)=e^{\tan x}\sec^2 x$이므로 $\quad g'(0)=1$

또, $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로

$(f\circ g)'(0)=f'(g(0))g'(0)=f'(1)\cdot 1=f'(1)=2$

ⓛ의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=p \qquad \therefore p=2$

$p=2$를 ⓒ에 대입하면 $\quad q=1$

따라서 $R(x)=2x+1$이므로

$R(4)=2\cdot 4+1=9$ 정답_ 9

359

$f(x)=\tan 2x+\cos 2x$에서

$f'(x)=2\sec^2 2x-2\sin 2x$

$f(0)=1$이므로 $h(x)=g(f(x))$로 놓으면

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(f(x))-g(1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(f(x))-g(f(0))}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$$
$$=h'(0)=4$$

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$에서

$h'(0)=g'(f(0))f'(0)$

$4=g'(1)f'(0)$

이때, $f'(0)=2\sec^2 0-2\sin 0=2$이므로

$4=g'(1)\cdot 2 \qquad \therefore g'(1)=2$ 정답_ ②

360

$f(x)=\ln\{e^x+e^{3x}+e^{5x}+\cdots+e^{(2n-1)x}\}$,

$g(x)=\ln(e^{2x}+e^{4x}+e^{6x}+\cdots+e^{2nx})$으로 놓으면

$f(0)=\ln(1+1+1+\cdots+1)=\ln n$,

$g(0)=\ln(1+1+1+\cdots+1)=\ln n$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{3x}+e^{5x}+\cdots+e^{(2n-1)x}}{e^{2x}+e^{4x}+e^{6x}+\cdots+e^{2nx}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\{e^x+e^{3x}+e^{5x}+\cdots+e^{(2n-1)x}\}-\ln(e^{2x}+e^{4x}+e^{6x}+\cdots+e^{2nx})}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)+g(0)-g(x)}{x}\quad(\because f(0)=g(0))$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)-f(0)}{x}-\frac{g(x)-g(0)}{x}\right\}$$
$$=f'(0)-g'(0)$$

이때, $f'(x)=\dfrac{e^x+3e^{3x}+5e^{5x}+\cdots+(2n-1)e^{(2n-1)x}}{e^x+e^{3x}+e^{5x}+\cdots+e^{(2n-1)x}}$에서

$$f'(0)=\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{1+1+1+\cdots+1}=\frac{n^2}{n}=n$$

$g'(x)=\dfrac{2e^{2x}+4e^{4x}+6e^{6x}+\cdots+2ne^{2nx}}{e^{2x}+e^{4x}+e^{6x}+\cdots+e^{2nx}}$에서

$$g'(0)=\frac{2+4+6+\cdots+2n}{1+1+1+\cdots+1}=\frac{n(n+1)}{n}=n+1$$

$\therefore f'(0)-g'(0)=n-(n+1)=-1$ 정답_ ②

361

$g(x)=f(2^{\ln x})$으로 놓으면 $g(1)=f(2^{\ln 1})=f(1)$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(2^{\ln x})-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$
$$=g'(1)=\ln 2$$

$g'(x)=f'(2^{\ln x})(2^{\ln x})=f'(2^{\ln x})\cdot 2^{\ln x}\cdot\ln 2\cdot(\ln x)'$

$\qquad =f'(2^{\ln x})\cdot 2^{\ln x}\cdot\ln 2\cdot\dfrac{1}{x}$이므로

$g'(1)=f'(2^{\ln 1})\cdot 2^{\ln 1}\cdot\ln 2\cdot 1,\ \ln 2=f'(1)\cdot\ln 2$

$\therefore f'(1)=1$ 정답_ 1

362

$y=\dfrac{x^x}{\cos x}$으로 놓고 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|y|=\ln\left|\frac{x^x}{\cos x}\right|=x\ln x-\ln|\cos x|\ (\because x>0)$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{y'}{y}=\ln x+1+\dfrac{\sin x}{\cos x},\ y'=y(\ln x+1+\tan x)$

$\therefore y'=\dfrac{x^x}{\cos x}(\ln x+1+\tan x)$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$는

$f(x)=\ln x+1$ 정답_ ③

363

$x=e^t,\ y=(2t^2+nt+n)e^t$에서

$\dfrac{dx}{dt}=e^t,\ \dfrac{dy}{dt}=\{2t^2+(4+n)t+2n\}e^t$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\{2t^2+(4+n)t+2n\}e^t}{e^t}$$
$$=2t^2+(4+n)t+2n$$
$$=(t+2)(2t+n)$$

$\dfrac{dy}{dx}=0$에서 $\quad t=-2$ 또는 $t=-\dfrac{n}{2}$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

(i) $n=3$일 때

㉠에서 $\quad t=-2$ 또는 $t=-\dfrac{3}{2}$

즉, 함수 $y=f(x)$는 $x=a_3=e^{-\frac{3}{2}}$에서 최솟값

$b_3=\left\{2\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2+3\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)+3\right\}e^{-\frac{3}{2}}=3e^{-\frac{3}{2}}$을 갖는다.

(ii) $n=5$일 때

㉠에서 $\quad t=-2$ 또는 $t=-\dfrac{5}{2}$

즉, 함수 $y=f(x)$는 $x=a_5=e^{-2}$에서 최솟값

$b_5=\{2\cdot(-2)^2+5\cdot(-2)+5\}e^{-2}=3e^{-2}$을 갖는다.

(i), (ii)에서

$$c_3+c_5=\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_5}{a_5}=\frac{3e^{-\frac{3}{2}}}{e^{-\frac{3}{2}}}+\frac{3e^{-2}}{e^{-2}}$$
$$=3+3=6$$

정답_ 6

364

조건 (나)의 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)}=\frac{8}{9}$에서 극한값이 존재하고,

$x\longrightarrow3$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to3}\{f(x)-g(x)\}=0\quad\therefore f(3)=g(3)$

$g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 두 함수의 그래프는 $(3,\ 3)$에서 만난다.

$f(3)=g(3)=3$

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{\{f(x)-f(3)\}-\{g(x)-g(3)\}}{(x-3)g(x)}$$
$$=\lim_{x\to3}\left\{\frac{f(x)-f(3)}{x-3}-\frac{g(x)-g(3)}{x-3}\right\}\cdot\lim_{x\to3}\frac{1}{g(x)}$$
$$=\{f'(3)-g'(3)\}\lim_{x\to3}\frac{1}{g(x)}\quad(\because g(3)=3)$$
$$=\frac{f'(3)-g'(3)}{3}=\frac{8}{9}$$

이때, $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 $f(g(x))=x$에서

$f'(g(x))g'(x)=1$

$$\therefore g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(3)}$$

즉, $\dfrac{f'(3)-\dfrac{1}{f'(3)}}{3}=\dfrac{8}{9}$에서

$3\{f'(3)\}^2-8f'(3)-3=0,\ \{3f'(3)+1\}\{f'(3)-3\}=0$

$f'(3)=3$ 또는 $f'(3)=-\frac{1}{3}$

그런데 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고 역함수가 존재해야 하므로 $f'(x)\ge0$

$\therefore f'(3)=3$ $\cdots\cdots$㉠

이때, 조건 (가)에서 $g'(x)=\frac{1}{f'(x)}\le\frac{1}{3}$이므로

$f'(x)\ge3$

즉, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3이고 ㉠에 의해 $x=3$에서 최솟값 3을 갖는 이차함수이다.

$f'(x)=3(x-3)^2+3=3x^2-18x+30$에서

$f(x)=x^3-9x^2+30x+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(3)=3$이므로 $C=-33$

따라서 $f(x)=x^3-9x^2+30x-33$이므로

$f(1)=-11$

정답_ ①

365

$$\frac{d}{dx}(x^n\ln x)=nx^{n-1}\ln x+x^n\cdot\frac{1}{x}$$
$$=nx^{n-1}\ln x+x^{n-1}$$
$$\frac{d^2}{dx^2}(x^n\ln x)=\frac{d}{dx}(nx^{n-1}\ln x+x^{n-1})$$
$$=n(n-1)x^{n-2}\ln x+nx^{n-2}+(n-1)x^{n-2}$$
$$=x^{n-2}\{(n^2-n)\ln x+(2n-1)\}$$
$$a_n=\lim_{x\to1}\left\{\frac{d^2}{dx^2}(x^n\ln x)\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}[x^{n-2}\{(n^2-n)\ln x+(2n-1)\}]$$
$$=2n-1$$
$$\therefore\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2k-1)=2\cdot\frac{10\cdot11}{2}-10=100$$

정답_ 100

366

$f'(x)=ae^{ax}\cos x-e^{ax}\sin x$

$=e^{ax}(a\cos x-\sin x)$

$f''(x)=ae^{ax}(a\cos x-\sin x)+e^{ax}(-a\sin x-\cos x)$

$=e^{ax}(a^2\cos x-2a\sin x-\cos x)$

$f''(x)-2f'(x)+2f(x)=0$에서

$e^{ax}(a^2\cos x-2a\sin x-\cos x)-2e^{ax}(a\cos x-\sin x)$

$+2e^{ax}\cos x=0$

$e^{ax}(a^2\cos x-2a\cos x+\cos x-2a\sin x+2\sin x)=0$

모든 실수 x에 대하여 $e^{ax}>0$이므로

$a^2\cos x-2a\cos x+\cos x-2a\sin x+2\sin x=0$

$(a-1)^2\cos x-2(a-1)\sin x=0$

위의 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=1$

정답_ ②

367

$f(x)$가 10차식이므로

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{10}x^{10}$으로 놓으면

$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+10a_{10}x^9$

$f''(x)=2a_2+6a_3x+\cdots+90a_{10}x^8$

$f''(0)=2a_2$이므로 구하는 값은 $f(x)$의 이차항의 계수 a_2만 구하면 된다.

한편, $f(x)=(1+x)(1+2x)\cdots(1+10x)$의 이차항의 계수는 1부터 10까지 자연수 중에서 서로 다른 두 수의 곱을 모두 합한 것과 같으므로

$a_2=1\cdot2+1\cdot3+1\cdot4+\cdots+1\cdot10+2\cdot3+2\cdot4+\cdots+2\cdot10$
$+\cdots+9\cdot10$

$$=\frac{1}{2}\{(1+2+\cdots+10)^2-(1^2+2^2+\cdots+10^2)\}$$
$$=\frac{1}{2}(A^2-B)$$

$\therefore f''(0)=2a_2=A^2-B$

정답_ ④

368

(1) $y=\frac{2}{x^2+1}$에서 $y'=-\frac{4x}{(x^2+1)^2}$

곡선 위의 점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는

$-\frac{4}{(1+1)^2}=-\frac{4}{4}=-1$

(2) $y=4\sqrt{x}$에서 $y'=4\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{x}}$

곡선 위의 점 (4, 8)에서의 접선의 기울기는

$\frac{2}{\sqrt{4}}=\frac{2}{2}=1$

(3) $y=xe^x+1$에서 $y'=1\cdot e^x+xe^x=e^x(x+1)$

곡선 위의 점 (0, 1)에서의 접선의 기울기는

$e^0(0+1)=1$

(4) $y=\ln(x+1)$에서 $y'=\frac{1}{x+1}$

곡선 위의 점 (0, 0)에서의 접선의 기울기는

$\frac{1}{0+1}=1$ 정답_ (1) -1 (2) 1 (3) 1 (4) 1

369

$y=3^{2x-3}+1$에서 $y'=3^{2x-3}\cdot\ln 3\cdot 2=2\ln 3\cdot 3^{2x-3}$

따라서 곡선 위의 점 $\left(1, \frac{4}{3}\right)$에서의 접선의 기울기는

$2\ln 3\cdot 3^{2\cdot 1-3}=2\ln 3\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\ln 3$ 정답_ ②

370

$x=\frac{at}{1+t^2}$, $y=\frac{1-t^2}{1+t^2}$에서

$$\frac{dx}{dt}=\frac{a(1+t^2)-at\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-2t(1+t^2)-(1-t^2)\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{-4t}{(1+t^2)^2}}{\frac{a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}}=\frac{-4t}{a(1-t^2)}$$

$t=2$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로

$\frac{-4\cdot 2}{a(1-2^2)}=\frac{1}{3}$, $3a=24$ $\therefore a=8$ 정답_ ④

371

$y^2+yf(2x-1)+2=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2y\frac{dy}{dx}+f(2x-1)\frac{dy}{dx}+yf'(2x-1)\cdot 2=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2yf'(2x-1)}{2y+f(2x-1)}$$

점 (1, 2)가 곡선 $y^2+yf(2x-1)+2=0$ 위의 점이므로

$2^2+2f(2\cdot 1-1)+2=0$, $2f(1)=-6$ $\therefore f(1)=-3$

따라서 곡선 위의 점 (1, 2)에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{2\cdot 2f'(2\cdot 1-1)}{2\cdot 2+f(2\cdot 1-1)}=-\frac{4f'(1)}{4+f(1)}=-\frac{4\cdot 2}{4+(-3)}=-8$$

정답_ ②

372

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(6\pi, 2\pi)$에서의 접선의 기울기는

$g'(6\pi)$이다.

이때, $f'(x)=3+\cos x$이므로

$$g'(6\pi)=\frac{1}{f'(g(6\pi))}=\frac{1}{f'(2\pi)}=\frac{1}{3+\cos 2\pi}$$

$$=\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}$$

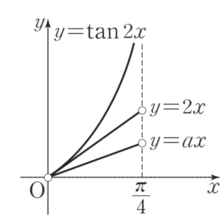
따라서 $p=4$, $q=1$이므로

$p+q=4+1=5$ 정답_ 5

373

$0<x<\frac{\pi}{4}$인 모든 x에 대하여 $\tan 2x>ax$ ……㉠

가 항상 성립하기 위해서는 $y=\tan 2x$의 그래프가 직선 $y=ax$ 보다 위쪽에 위치해야 한다.



$y=\tan 2x$에서 $y'=2\sec^2 2x$이므로

곡선 $y=\tan 2x$의 원점에서의 접선의 기울기는

$2\sec^2 0=2\cdot 1=2$

따라서 ㉠이 항상 성립하려면 $a\le 2$가 되어야 하므로 a의 최댓값은 2이다. 정답_ ④

374

$y=\sqrt{1+\sin\pi x}$에서 $y'=\frac{(1+\sin\pi x)'}{2\sqrt{1+\sin\pi x}}=\frac{\pi\cos\pi x}{2\sqrt{1+\sin\pi x}}$

곡선 위의 점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{\pi\cos\pi}{2\sqrt{1+\sin\pi}}=\frac{-\pi}{2\sqrt{1+0}}=-\frac{\pi}{2}$$

이므로 접선의 방정식은

$y-1=-\frac{\pi}{2}(x-1)$ $\therefore y=-\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}+1$

따라서 $a=-\frac{\pi}{2}$, $b=\frac{\pi}{2}+1$이므로

$a-b=-\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)=-\pi-1$ 정답_ ①

375

점 (a, a)가 곡선 $y=x\ln x$ 위의 점이므로

$a=a\ln a$에서 $\ln a=1$ $\therefore a=e$

$f(x)=x\ln x$에서 $f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$

곡선 위의 점 $(e,\ e)$에서의 접선의 기울기는

$f'(e)=\ln e+1=2$이므로 접선의 방정식은

$y-e=2(x-e)\qquad \therefore y=2x-e$

따라서 접선의 y절편은 $-e$이다. 정답_①

376

$y=5e^{x-1}$에서 $y'=5e^{x-1}$

곡선 $y=5e^{x-1}$ 위의 점 A의 좌표를 $(t,\ 5e^{t-1})$이라고 하면 점 A에서의 접선의 기울기는 $5e^{t-1}$이므로 접선의 방정식은

$y-5e^{t-1}=5e^{t-1}(x-t)$ ······㉠

이때, 접선 ㉠이 원점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$-5e^{t-1}=-5te^{t-1}$, $5e^{t-1}(t-1)=0$

$\therefore t=1\ (\because 5e^{t-1}>0)$

따라서 점 A의 좌표는 $(1,\ 5)$이므로 선분 OA의 길이는

$\overline{OA}=\sqrt{(1-0)^2+(5-0)^2}=\sqrt{26}$ 정답_⑤

377

$t=1$에 대응하는 점 $(x,\ y)$의 좌표는 $(1^3,\ 1-1^2)$, 즉 $(1,\ 0)$이다.

$x=t^3$, $y=t-t^2$에서

$\frac{dx}{dt}=3t^2$, $\frac{dy}{dt}=1-2t$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-2t}{3t^2}$$

$t=1$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$\frac{1-2\cdot1}{3\cdot1^2}=-\frac{1}{3}$

점 $(1,0)$을 지나고 접선의 기울기가 $-\frac{1}{3}$인 접선의 방정식은

$y-0=-\frac{1}{3}(x-1)\qquad \therefore y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$이므로

$f(4)=-\frac{1}{3}\cdot4+\frac{1}{3}=-1$ 정답_⑤

378

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0\qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

곡선 위의 점 (a,b)에서의 접선의 기울기는 $-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$이므로 접선의 방정식은

$y=-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}(x-a)+b=-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}x+\sqrt{ab}+b$

$=-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}x+\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$=-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}x+\sqrt{b}\ (\because \sqrt{a}+\sqrt{b}=1)$

이 접선의 x절편, y절편이 각각 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$이므로

$A(\sqrt{a},0)$, $B(0,\sqrt{b})$

즉, 삼각형 OAB는 밑변의 길이가 $\sqrt{a}$, 높이가 $\sqrt{b}$이므로 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\frac{1}{2}\sqrt{ab}$

산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge2\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}}$ (단, 등호는 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$일 때 성립한다.)

$\sqrt{ab}\le\frac{1}{4}\ (\because \sqrt{a}+\sqrt{b}=1)$

$\therefore \frac{1}{2}\sqrt{ab}\le\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

따라서 삼각형 OAB의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{8}$이다. 정답_⑤

379

$y=\frac{3}{1+x}$에서 $y'=-\frac{3}{(1+x)^2}$

곡선 위의 점 $(0,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$-\frac{3}{(1+0)^2}=-3$이므로 이 접선에 수직인 직선의 방정식은

$y-3=\frac{1}{3}(x-0)\qquad \therefore y=\frac{1}{3}x+3$ 정답_⑤

380

$y=e^{x-1}$에서 $y'=e^{x-1}$

곡선 위의 점 $(2,\ e)$에서의 접선의 기울기는 e이므로 이 접선에 수직인 직선의 방정식은

$y-e=-\frac{1}{e}(x-2)\qquad \therefore y=-\frac{1}{e}x+\frac{2}{e}+e$

따라서 y절편은 $\frac{2}{e}+e$이다. 정답_⑤

381

$y=\cos x$에서 $y'=-\sin x$

곡선 위의 점 $P(t,\ \cos t)$에서의 접선의 기울기는 $-\sin t$이므로 이 접선과 수직인 직선의 방정식은

$y-\cos t=\frac{1}{\sin t}(x-t)\qquad \therefore y=\frac{1}{\sin t}x-\frac{t}{\sin t}+\cos t$

따라서 $g(t)=-\frac{t}{\sin t}+\cos t$

$$\therefore \lim_{t\to0}g(t)=\lim_{t\to0}\left(-\frac{t}{\sin t}+\cos t\right)$$
$$=-1+1=0$$
정답_①

382

$x\sin y+y\sin x=\frac{\pi}{6}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\sin y+x\cos y\frac{dy}{dx}+\sin x\frac{dy}{dx}+y\cos x=0$

$(x\cos y+\sin x)\frac{dy}{dx}=-\sin y-y\cos x$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sin y+y\cos x}{x\cos y+\sin x}$

곡선 위의 점 $\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{6}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$-\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{6}}{\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{6}}=-\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{6}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\pi}{6}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}}=-1$$

이므로 점 $\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{6}\right)$를 지나고 접선에 수직인 직선의 방정식은

$y-\dfrac{\pi}{6}=1\cdot\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right) \qquad \therefore y=x$ 정답_③

383

$g(x)=2f(x)\ln x^2$에서 $g'(x)=2f'(x)\ln x^2+\dfrac{4f(x)}{x}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(e,\ -e)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(e,\ -4e)$에서의 접선이 서로 수직이므로

$f'(e)\cdot g'(e)=-1,\ f'(e)\left\{2f'(e)\ln e^2+\dfrac{4f(e)}{e}\right\}=-1$

이때, $f(e)=-e$이므로 $f'(e)\{4f'(e)-4\}=-1$

$4\{f'(e)\}^2-4f'(e)+1=0,\ \{2f'(e)-1\}^2=0$

$\therefore f'(e)=\dfrac{1}{2}$

$\therefore 10f'(e)=10\cdot\dfrac{1}{2}=5$ 정답_⑤

384

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45°이므로 접선의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$

$y=x\ln x-x$에서 $y'=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}-1=\ln x$

접점의 좌표를 $(a,\ a\ln a-a)$라고 하면 접선의 기울기가 1이므로

$\ln a=1 \qquad \therefore a=e$

따라서 접점의 좌표는 $(e,\ 0)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-0=x-e \qquad \therefore x-y-e=0$ 정답_②

385

직선 $x-3y=0$, 즉 $y=\dfrac{1}{3}x$의 기울기가 $\dfrac{1}{3}$이므로 이 직선과 수직인 접선의 기울기는 -3이다.

$y=\sin 3x$에서 $y'=3\cos 3x$

접점의 좌표를 $(a,\ \sin 3a)$라고 하면 접선의 기울기가 -3이므로

$3\cos 3a=-3 \qquad \therefore \cos 3a=-1$

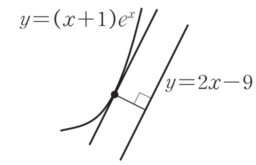
$0<a<\dfrac{\pi}{2}$에서 $0<3a<\dfrac{3}{2}\pi$이므로 $3a=\pi \qquad \therefore a=\dfrac{\pi}{3}$

이때, 접점의 좌표는 $\left(\dfrac{\pi}{3},\ 0\right)$이므로 접선의 방정식은

$y-0=-3\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right) \qquad \therefore y=-3x+\pi$

따라서 y절편은 π이다. 정답_④

386



곡선 $y=(x+1)e^x$ 위의 점과 직선 $y=2x-9$, 즉 $2x-y-9=0$ 사이의 거리의 최솟값은 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=2x-9$와 평행한 접선의 접점과 직선 $y=2x-9$ 사이의 거리와 같다.

$y=(x+1)e^x$에서 $y'=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$

접점의 좌표를 $(a,\ (a+1)e^a)$이라고 하면 접선의 기울기가 2이므로

$(a+2)e^a=2 \qquad \therefore a=0$

따라서 접점의 좌표는 $(0,\ 1)$이므로 구하는 거리의 최솟값은 점 $(0,\ 1)$과 직선 $2x-y-9=0$ 사이의 거리인

$\dfrac{|0-1-9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$ 정답_⑤

387

$x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t$에서

$\dfrac{dx}{dt}=-3\cos^2 t\sin t,\ \dfrac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{3\sin^2 t\cos t}{-3\cos^2 t\sin t}=-\tan t$

접선 l의 기울기가 $-\sqrt{3}$이므로

$-\tan t=-\sqrt{3} \qquad \therefore \tan t=\sqrt{3}$

$0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$이므로 $t=\dfrac{\pi}{3}$

접점의 좌표는 $\left(\cos^3\dfrac{\pi}{3},\ \sin^3\dfrac{\pi}{3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{1}{8},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)$이므로

접선 l의 방정식은

$y-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}=-\sqrt{3}\left(x-\dfrac{1}{8}\right)$

$\therefore y=-\sqrt{3}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(0-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2}=1$ 정답_1

388

$a\sqrt{x}+\sqrt{y}=b$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{a}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\dfrac{dy}{dx}=0,\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{a}{2\sqrt{x}}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-a\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

곡선 위의 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기가 -4이므로

$-a\sqrt{\dfrac{4}{1}}=-2a=-4 \qquad \therefore a=2$

점 $(1,\ 4)$가 곡선 $2\sqrt{x}+\sqrt{y}=b$ 위의 점이므로

$2+2=b \qquad \therefore b=4$

즉, 곡선 $2\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$ 위의 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$y-4=-4(x-1) \qquad \therefore 4x+y-8=0$

점 $(2,\ 4)$에서 직선 $4x+y-8=0$에 이르는 거리는

$$\frac{|4\cdot2+1\cdot4-8|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{4\sqrt{17}}{17}$$

따라서 $p=4, q=17$이므로

$p+q=4+17=21$ 정답_③

389

원 $x^2+y^2=e^{2t}$은 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 e^t인 원이다.

원점을 지나고 기울기가 $\tan(\sin t)$인 직선의 방정식은

$y=\tan(\sin t)x$ ……㉠

교점의 x좌표를 구하기 위하여 ㉠을 $x^2+y^2=e^{2t}$에 대입하면

$x^2+\{\tan(\sin t)x\}^2=e^{2t}, \{1+\tan^2(\sin t)\}x^2=e^{2t}$

$$x^2=\frac{e^{2t}}{1+\tan^2(\sin t)}=\frac{e^{2t}}{\sec^2(\sin t)}=e^{2t}\cos^2(\sin t)$$

$\therefore x=e^t\cos(\sin t)\ (\because x>0)$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$y=\tan(\sin t)\cdot e^t\cos(\sin t)=e^t\sin(\sin t)$

즉, 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(e^t\cos(\sin t), e^t\sin(\sin t))$

$$\frac{dx}{dt}=e^t\cos(\sin t)+e^t\{-\sin(\sin t)\}\cdot\cos t$$
$$=e^t\{\cos(\sin t)-\sin(\sin t)\cos t\}$$
$$\frac{dy}{dt}=e^t\sin(\sin t)+e^t\cos(\sin t)\cdot\cos t$$
$$=e^t\{\sin(\sin t)+\cos(\sin t)\cos t\}$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t\{\sin(\sin t)+\cos(\sin t)\cos t\}}{e^t\{\cos(\sin t)-\sin(\sin t)\cos t\}}$$

한편, $t=\pi$일 때 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}(e^\pi\cos(\sin\pi), e^\pi\sin(\sin\pi)) \qquad \therefore \mathrm{P}(e^\pi, 0)$

점 P에서의 접선의 기울기는

$$\frac{e^\pi\{\sin(\sin\pi)+\cos(\sin\pi)\cos\pi\}}{e^\pi\{\cos(\sin\pi)-\sin(\sin\pi)\cos\pi\}}=\frac{-1}{1}=-1$$

이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$y-0=-(x-e^\pi) \qquad \therefore y=-x+e^\pi$ ……㉢

직선 ㉢의 x절편, y절편은 각각 e^π, e^π이므로 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분은 밑변의 길이가 e^π, 높이가 e^π인 삼각형이다.

따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot e^\pi\cdot e^\pi=\frac{1}{2}e^{2\pi}$ 정답_④

390

$$y=\frac{\ln x}{x}\text{에서}\quad y'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

접점의 좌표를 $\left(a,\ \frac{\ln a}{a}\right)$라고 하면 접선의 방정식은

$$y-\frac{\ln a}{a}=\frac{1-\ln a}{a^2}(x-a)$$

이 직선이 원점을 지나므로 $-\frac{\ln a}{a}=\frac{1-\ln a}{a^2}\cdot(-a)$

$\ln a=1-\ln a, \ln a=\frac{1}{2} \qquad \therefore a=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

따라서 구하는 접점의 좌표는

$\left(\sqrt{e},\ \frac{\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}}\right) \qquad \therefore \left(\sqrt{e},\ \frac{1}{2\sqrt{e}}\right)$ 정답_④

391

$y=2\sqrt{x}+7$에서 $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$

접점의 좌표를 $(a,\ 2\sqrt{a}+7)$이라고 하면 접선의 방정식은

$$y-(2\sqrt{a}+7)=\frac{1}{\sqrt{a}}(x-a)$$
$$\therefore y=\frac{1}{\sqrt{a}}x+\sqrt{a}+7$$

이 직선이 점 $(-2,\ 7)$을 지나므로

$$7=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot(-2)+\sqrt{a}+7$$
$$\frac{2}{\sqrt{a}}=\sqrt{a} \qquad \therefore a=2$$
$$\therefore y=\frac{1}{\sqrt{2}}x+\sqrt{2}+7$$

이 직선이 점 $(1,\ k)$를 지나므로

$k=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot1+\sqrt{2}+7=\frac{3\sqrt{2}}{2}+7$ 정답_④

392

$y=xe^x$에서 $y'=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

접점의 좌표를 $(a,\ ae^a)$이라고 하면 접선의 방정식은

$y-ae^a=(a+1)e^a(x-a)$

이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$-ae^a=(a+1)e^a(1-a), -a=(a+1)(1-a)$

$\therefore a^2-a-1=0$ ……㉠

㉠의 두 근을 α, β라고 하면 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=1, \alpha\beta=-1$

접선의 기울기는 각각 $(\alpha+1)e^\alpha$, $(\beta+1)e^\beta$이므로

$m_1m_2=(\alpha+1)e^\alpha\cdot(\beta+1)e^\beta$

$=(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)e^{\alpha+\beta}$

$=(-1+1+1)e^1=e$ 정답_④

393

$y=\ln x+1$에서 $y'=\frac{1}{x}$

접점의 좌표를 $\mathrm{A}(a,\ \ln a+1)$이라고 하면 접선의 방정식은

$y-(\ln a+1)=\frac{1}{a}(x-a)$

이 직선이 원점 O를 지나므로

$-(\ln a+1)=\frac{1}{a}\cdot(-a), \ln a=0 \qquad \therefore a=1$

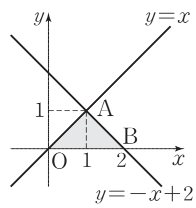
따라서 점 A의 좌표는 (1, 1)이므로 접선의 방정식은

$y-1=x-1 \qquad \therefore y=x$

한편, 점 A를 지나고 접선에 수직인 직선의 기울기는 -1이므로 직선의 방정식은

$y-1=-(x-1) \qquad \therefore y=-x+2$

따라서 점 B의 좌표는 (2, 0)이고, 오른쪽 그림에서 삼각형 OAB의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$

정답_ ③

394

$y=(2x+k)e^{-x}$에서

$y'=2\cdot e^{-x}+(2x+k)\cdot(-e^{-x})=-e^{-x}(2x+k-2)$

접점의 좌표를 $(t, (2t+k)e^{-t})$이라고 하면 접선의 방정식은

$y-(2t+k)e^{-t}=-e^{-t}(2t+k-2)(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-(2t+k)e^{-t}=-e^{-t}(2t+k-2)\cdot(-t)$

$e^{-t}(2t^2+kt+k)=0$

$\therefore 2t^2+kt+k=0 \ (\because e^{-t}>0)$ ……㉠

원점에서 곡선 $y=(2x+k)e^{-x}$에 적어도 한 개의 접선을 그을 수 있으려면 방정식 ㉠이 실근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라고 하면

$D=k^2-8k\geq 0, k(k-8)\geq 0$

$\therefore k\leq 0$ 또는 $k\geq 8$

따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 8이다. 정답_ 8

395

$f(x)=e^{x+3}$, $g(x)=ax+a$로 놓으면

$f'(x)=e^{x+3}$, $g'(x)=a$

곡선과 직선이 $x=t$에서 접한다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $e^{t+3}=at+a$ ……㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $e^{t+3}=a$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=at+a, at=0$

이때, $a=e^{t+3}>0$이므로 $t=0$

$t=0$을 ㉡에 대입하면 $a=e^3$ 정답_ ⑤

396

$f(x)=ax+\frac{b}{x}$, $g(x)=\ln x$로 놓으면

$f'(x)=a-\frac{b}{x^2}, g'(x)=\frac{1}{x}$

두 곡선이 점 $(e^2, 2)$에서 서로 접하므로

$f(e^2)=g(e^2)$에서 $ae^2+\frac{b}{e^2}=\ln e^2=2$ ……㉠

$f'(e^2)=g'(e^2)$에서

$a-\frac{b}{e^4}=\frac{1}{e^2}, ae^2-\frac{b}{e^2}=1$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{2e^2}, b=\frac{e^2}{2}$

$\therefore ab=\frac{3}{2e^2}\cdot\frac{e^2}{2}=\frac{3}{4}$ 정답_ ③

397

$y=e^x$에서 $y'=e^x$

곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(1, e)$에서의 접선의 기울기는 e이므로 접선의 방정식은

$y-e=e(x-1) \qquad \therefore y=ex$

이 직선이 곡선 $y=2\sqrt{x-k}$와 접하므로 $ex=2\sqrt{x-k}$

양변을 제곱하여 정리하면 $e^2x^2-4x+4k=0$

이 방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-e^2\cdot 4k=4-4e^2k=0 \qquad \therefore k=\frac{1}{e^2}$ 정답_ ②

398

$f(x)=a+\sin x$, $g(x)=\sin^2 x$로 놓으면

$f'(x)=\cos x$, $g'(x)=2\sin x\cos x$

두 곡선이 $x=t$에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

$f'(t)=g'(t)$에서 $\cos t=2\sin t\cos t, \cos t(2\sin t-1)=0$

$\therefore \cos t=0$ 또는 $\sin t=\frac{1}{2}$

그런데 $\sin^2 t+\cos^2 t=1$이므로

$\cos t=0$을 대입하면 $\sin^2 t=1 \qquad \therefore \sin t=\pm 1$

$\therefore \sin t=1$ 또는 $\sin t=-1$ 또는 $\sin t=\frac{1}{2}$ ……㉠

$f(t)=g(t)$에서 $a+\sin t=\sin^2 t$

$\therefore a=\sin^2 t-\sin t$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\sin t=1$일 때, $a=1-1=0$

$\sin t=-1$일 때, $a=1-(-1)=2$

$\sin t=\frac{1}{2}$일 때, $a=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 $0+2+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{4}$ 정답_ ④

399

(1) $a<b$인 임의의 두 양수 a, b에 대하여

$f(a)-f(b)=\frac{1}{a^2+1}-\frac{1}{b^2+1}=\frac{(b-a)(b+a)}{(a^2+1)(b^2+1)}>0$

$\therefore f(a)>f(b)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 감소한다.

(2) $e<a<b$인 임의의 두 양수 a, b에 대하여

$f(a)-f(b)=a\ln a-b\ln b<b\ln b-b\ln b=0$

$\therefore f(a)<f(b)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 (e, ∞)에서 증가한다.

정답_(1) 감소 (2) 증가

400

(1) $f'(x)=\cos x-2$

모든 실수 x에 대하여 $-1\le\cos x\le1$이므로

$-3\le\cos x-2\le-1$

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이므로 주어진 함수는 실수 전체에서 감소한다.

(2) $f'(x)=e^x-1$

$f'(x)>0$에서 $e^x>1 \quad \therefore x>0$

$f'(x)<0$에서 $e^x<1 \quad \therefore x<0$

따라서 함수 $f(x)$가 증가하는 구간은 $(0, \infty)$이고, 감소하는 구간은 $(-\infty, 0)$이다.

정답_(1) 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소

(2) 구간 $(-\infty, 0)$에서 감소, 구간 $(0, \infty)$에서 증가

401

$f(x)=\dfrac{x-\ln x}{x}$에서 진수의 조건에 의해 $x>0$

$$f'(x)=\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot x-(x-\ln x)\cdot 1}{x^2}=\frac{\ln x-1}{x^2}$$

$f'(x)>0$에서 $\ln x-1>0$ ($\because x^2>0$)

$\ln x>1 \quad \therefore x>e$

정답_⑤

402

$f(x)=e^{x+1}(x^2+3x+1)$에서

$f'(x)=e^{x+1}(x^2+3x+1)+e^{x+1}(2x+3)$

$=e^{x+1}(x^2+5x+4)$

$=e^{x+1}(x+1)(x+4)$

$f'(x)<0$에서 $(x+1)(x+4)<0$ ($\because e^{x+1}>0$)

$\therefore -4<x<-1$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-4, -1)$에서 감소하므로 $b-a$의 최댓값은 $-1-(-4)=3$이다.

정답_③

403

$f(x)=(1+\sin x)\cos x$에서

$f'(x)=\cos x\cos x+(1+\sin x)\cdot(-\sin x)$

$=\cos^2 x-\sin^2 x-\sin x$

$=(1-\sin^2 x)-\sin^2 x-\sin x$

$=-2\sin^2 x-\sin x+1$

$=-(\sin x+1)(2\sin x-1)$

$f'(x)<0$에서 $(\sin x+1)(2\sin x-1)>0$

$\therefore \sin x>\dfrac{1}{2}$ ($\because 0<x<\pi$에서 $\sin x>0$)

이때, $0<x<\pi$이므로 $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5}{6}\pi$

따라서 $a=\dfrac{\pi}{6}$, $b=\dfrac{5}{6}\pi$이므로

$a+b=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{5}{6}\pi=\pi$

정답_③

404

$f(x)=x+\sqrt{18-x^2}$에서 $18-x^2\ge0$이고 $x>0$이므로

$0<x\le3\sqrt{2}$

$$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{18-x^2}}=\frac{\sqrt{18-x^2}-x}{\sqrt{18-x^2}}$$

$f'(x)>0$에서 $\sqrt{18-x^2}>x$

양변을 제곱하면 $18-x^2>x^2$, $x^2-9<0$

$(x-3)(x+3)<0 \quad \therefore 0<x<3$ ($\because 0<x\le3\sqrt{2}$)

따라서 함수 $f(x)$가 증가하는 구간은 $(0, 3)$이므로 이 구간에 속하는 정수 x는 1, 2이고 그 합은

$1+2=3$

정답_3

405

$f(x)=(x-k)e^{x^2}$에서

$f'(x)=e^{x^2}+(x-k)e^{x^2}\cdot 2x$

$=(2x^2-2kx+1)e^{x^2}$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 한다.

모든 실수 x에 대하여 $e^{x^2}>0$이므로 $2x^2-2kx+1\ge0$

이차방정식 $2x^2-2kx+1=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-2\le0$, $(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})\le0$

$\therefore -\sqrt{2}\le k\le\sqrt{2}$

따라서 $\alpha=-\sqrt{2}$, $\beta=\sqrt{2}$이므로

$\alpha\beta=-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=-2$

정답_②

406

$f(x)=e^x(a+\cos x)$에서

$f'(x)=e^x(a+\cos x)+e^x(-\sin x)$

$=e^x(a+\cos x-\sin x)$

함수 $f(x)$가 실수 전체에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 한다. 모든 실수 x에 대하여 $e^x>0$이므로

$a+\cos x-\sin x\ge0 \quad \therefore \sin x-\cos x\le a$

$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$이므로

$-\sqrt{2}\le\sin x-\cos x\le\sqrt{2} \quad \therefore a\ge\sqrt{2}$

정답_⑤

407

$f(x)=-x-\ln(x^2+k)$에서 $x^2+k>0$이고

$f'(x)=-1-\dfrac{2x}{x^2+k}=\dfrac{-(x^2+2x+k)}{x^2+k}$

실수 전체에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

$x^2+k>0$이므로 $-(x^2+2x+k)\le 0$에서 $x^2+2x+k\ge 0$

이차방정식 $x^2+2x+k=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=1^2-k\le 0 \qquad \therefore k\ge 1$

따라서 상수 k의 최솟값은 1이다. 정답_①

408

$f(x)=ax+\ln(x^2+4)$에서

$f'(x)=a+\dfrac{2x}{x^2+4}=\dfrac{ax^2+2x+4a}{x^2+4}$

함수 $f(x)$가 실수 전체에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

모든 실수 x에 대하여 $x^2+4>0$이므로 $ax^2+2x+4a\ge 0$

(i) 이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 $a>0$

(ii) 이차방정식 $ax^2+2x+4a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=1-4a^2\le 0,\ 4a^2-1\ge 0$

$(2a+1)(2a-1)\ge 0$

$\therefore a\le -\dfrac{1}{2}$ 또는 $a\ge \dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $a\ge \dfrac{1}{2}$이므로 상수 a의 최솟값은 $\dfrac{1}{2}$이다. 정답_①

409

$f(x)=k^2\ln x+x^2-8x$에서

$f'(x)=\dfrac{k^2}{x}+2x-8=\dfrac{2x^2-8x+k^2}{x}$

$0<x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$를 만족시키려면 함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가해야 한다.

함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가하려면 $x>0$일 때 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

$x>0$이므로 $2x^2-8x+k^2\ge 0$

이차방정식 $2x^2-8x+k^2=0$의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=16-2k^2\le 0$

$(k+2\sqrt{2})(k-2\sqrt{2})\ge 0$

$\therefore k\le -2\sqrt{2}$ 또는 $k\ge 2\sqrt{2}$ 정답_⑤

410

(1) $f(x)=x\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-1 \qquad \therefore x=\dfrac{1}{e}$

$x=\dfrac{1}{e}$을 기준으로 $x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{e}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{e}$일 때 극솟값 $-\dfrac{1}{e}$을 갖는다.

(2) $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$에서 $f'(x)=\dfrac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\dfrac{1-x}{e^x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

$x=1$을 기준으로 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극댓값 $\dfrac{1}{e}$을 갖는다.

(3) $f(x)=x+2\cos x$에서 $f'(x)=1-2\sin x$

$f'(x)=0$에서 $1-2\sin x=0,\ \sin x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{6}\left(\because 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

$x=\dfrac{\pi}{6}$를 기준으로 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↗	$\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	↘	$\frac{\pi}{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{6}$일 때 극댓값 $\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$을 갖는다.

정답_(1) 극솟값: $-\frac{1}{e}$ (2) 극댓값: $\frac{1}{e}$ (3) 극댓값: $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

411

(1) $f(x)=\sin x+\cos x$에서

$f'(x)=\cos x-\sin x,\ f''(x)=-\sin x-\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\sin x$

양변을 $\cos x$로 나누면 $\tan x=1$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{4}\ (\because 0\le x\le\pi)$

이때, $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{4}-\cos\dfrac{\pi}{4}=-\sqrt{2}<0$이므로

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{4}$에서 극댓값

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$를 갖는다.

(2) $f(x)=x-\ln x$에서

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x},\ f''(x)=\dfrac{1}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\dfrac{1}{x}=1 \qquad \therefore x=1$

이때, $f''(1)=1>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $f(1)=1-\ln 1=1$을 갖는다.

정답_(1) 극댓값: $\sqrt{2}$ (2) 극솟값: 1

412

$f(x)=\dfrac{2ax-a}{x^2+2}$에서

$f'(x)=\dfrac{2a(x^2+2)-(2ax-a)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}$

$=\dfrac{-2ax^2+2ax+4a}{(x^2+2)^2}$

$=\dfrac{-2a(x+1)(x-2)}{(x^2+2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$ ($\because a>0$)

$x=-1, x=2$를 기준으로 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값, $x=2$에서 극댓값을 가지므로 $\alpha=2, \beta=-1$

$\therefore \alpha-\beta=2-(-1)=3$

정답_ ⑤

413

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{6-x}$에서 $x\geq 0, 6-x\geq 0$이므로 $0\leq x\leq 6$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{6-x}}=\dfrac{\sqrt{6-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{6-x}}$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{6-x}=\sqrt{x}$

양변을 제곱하면 $6-x=x$ $\therefore x=3$

$x=3$을 기준으로 $0\leq x\leq 6$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{6}$	$\nearrow$	$2\sqrt{3}$	$\searrow$	$\sqrt{6}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 극댓값 $2\sqrt{3}$을 가지므로

$a=3, b=2\sqrt{3}$

$\therefore \dfrac{b^2}{a}=\dfrac{(2\sqrt{3})^2}{3}=4$

정답_ ④

414

$f(x)=(x^2-8)e^{-x+1}$에서

$f'(x)=2xe^{-x+1}+(x^2-8)e^{-x+1}\cdot(-1)$

$=(-x^2+2x+8)e^{-x+1}$

$=-(x+2)(x-4)e^{-x+1}$

$f(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=4$

$x=-2, x=4$를 기준으로 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값, $x=4$에서 극댓값을 가지므로

$a=f(-2)=\{(-2)^2-8\}e^{-(-2)+1}=-4e^3$

$b=f(4)=(4^2-8)e^{-4+1}=8e^{-3}$

$\therefore ab=-4e^3\cdot 8e^{-3}=-32$

정답_ ②

415

$f(x)=e^x+4e^{-x}$에서

$f'(x)=e^x-4e^{-x}=\dfrac{e^{2x}-4}{e^x}=\dfrac{(e^x-2)(e^x+2)}{e^x}$

$f'(x)=0$에서 $e^x=2$ ($\because e^x>0$) $\therefore x=\ln 2$

$x=\ln 2$를 기준으로 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	$\cdots$	$\ln 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	4	$\nearrow$

따라서 $f(x)$는 $x=\ln 2$에서 극솟값 4를 가지므로

$a=\ln 2, b=4$

$\therefore e^{ab}=e^{4\ln 2}=e^{\ln 16}=16$

정답_ ④

416

$f(x)=x(\ln x)^2$에서 $x>0$

$f'(x)=(\ln x)^2+x\cdot 2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}=(\ln x+2)\ln x$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-2$ 또는 $\ln x=0$

$\therefore x=\dfrac{1}{e^2}$ 또는 $x=1$

$x=\dfrac{1}{e^2}, x=1$을 기준으로 $x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

따라서 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{e^2}$에서 극댓값 $\dfrac{4}{e^2}$를 갖는다.

정답_ ①

417

$f(x)=x-\sqrt{2}\sin x$에서 $f'(x)=1-\sqrt{2}\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{7}{4}\pi$ ($\because 0\leq x\leq 2\pi$)

$x=\dfrac{\pi}{4}, x=\dfrac{7}{4}\pi$를 기준으로 $0\leq x\leq 2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{\pi}{4}-1$	$\nearrow$	$\frac{7}{4}\pi+1$	$\searrow$	2π

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{4}$일 때 극솟값 $\dfrac{\pi}{4}-1$, $x=\dfrac{7}{4}\pi$일 때 극댓값 $\dfrac{7}{4}\pi+1$을 가지므로

$M=\frac{7}{4}\pi+1,\ m=\frac{\pi}{4}-1$

$\therefore \frac{M+m}{\pi}=\frac{2\pi}{\pi}=2$ 정답_ ④

418

$f(x)=2\sin x-\cos 2x$에서

$f'(x)=2\cos x+2\sin 2x=2\cos x+2\sin(x+x)$

$=2\cos x+4\sin x\cos x=2\cos x(2\sin x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ 또는 $\sin x=-\frac{1}{2}$

$0<x<\pi$에서 $\sin x>0$이므로 $x=\frac{\pi}{2}$

$x=\frac{\pi}{2}$를 기준으로 $0<x<\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	3	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$일 때 극댓값 3을 가지므로

$a=\frac{\pi}{2},\ b=3$

$\therefore 2ab=2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 3=3\pi$ 정답_ ③

419

$y=\ln x$에서 $y'=\frac{1}{x}$

즉, 점 $P(t, \ln t)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{t}$이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$ $\therefore y=\frac{1}{t}x-1+\ln t$

점 R는 이 접선과 x축이 만나는 점이므로 $y=0$을 대입하면

$0=\frac{1}{t}x-1+\ln t,\ \frac{1}{t}x=1-\ln t$ $\therefore x=t-t\ln t$

$\therefore r(t)=t-t\ln t$

또, 점 $Q(2t, \ln 2t)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2t}$이므로 점 Q에서의 접선의 방정식은

$y-\ln 2t=\frac{1}{2t}(x-2t)$ $\therefore y=\frac{1}{2t}x-1+\ln 2t$

점 S는 이 접선과 x축이 만나는 점이므로 $y=0$을 대입하면

$0=\frac{1}{2t}x-1+\ln 2t,\ \frac{1}{2t}x=1-\ln 2t$

$\therefore x=2t-2t\ln t$

$\therefore s(t)=2t-2t\ln 2t=2t-2t\ln 2-2t\ln t$

한편,

$f(t)=r(t)-s(t)$

$=(t-t\ln t)-(2t-2t\ln 2-2t\ln t)$

$=(2\ln 2-1)t+t\ln t$

이므로

$f'(t)=2\ln 2-1+\ln t+t\cdot\frac{1}{t}=2\ln 2+\ln t$

$f'(t)=0$에서 $t=\frac{1}{4}$

$t=\frac{1}{4}$을 기준으로 $t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(t)$는 $t=\frac{1}{4}$에서 극솟값

$f\left(\frac{1}{4}\right)=(2\ln 2-1)\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$을 갖는다. 정답_ ③

420

$f(x)=e^{-x}(\sin x+\cos x)$에서

$f'(x)=-e^{-x}(\sin x+\cos x)+e^{-x}(\cos x-\sin x)$

$=-2e^{-x}\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=0$

$\therefore x=k\pi$ (단, $k=1, 2, 3, \cdots$)

$x=k\pi$를 기준으로 $x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	π	$\cdots$	2π	$\cdots$	3π	$\cdots$	4π	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

위의 표에서 함수 $f(x)$가 $x=2m\pi$ $(m=1, 2, 3, \cdots)$일 때 극댓값을 가지므로

$f(2m\pi)=e^{-2m\pi}(\sin 2m\pi+\cos 2m\pi)=e^{-2m\pi}$

$a_n=e^{-2n\pi}$이므로 $\ln a_n=-2n\pi$

$\therefore \ln a_{99}-\ln a_{100}=-2\cdot 99\pi-(-2\cdot 100\pi)=2\pi$ 정답_ ④

421

$f(x)=e^{4x}-ae^{2x}$에서 $f'(x)=4e^{4x}-2ae^{2x}=2e^{2x}(2e^{2x}-a)$

$f'(x)=0$에서 $2e^{2x}-a=0,\ e^{2x}=\frac{a}{2},\ 2x=\ln\frac{a}{2}$

$\therefore x=\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}=\ln\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

함수 $f(x)$가 극솟값을 가지므로 $x=\ln\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$을 기준으로 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 위와 같다.

x	$\cdots$	$\ln\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

극솟값이 -4이므로

$f\left(\ln\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)=e^{4\ln\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}-ae^{2\ln\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}=e^{\ln\left(\frac{a}{2}\right)^{2}}-ae^{\ln\frac{a}{2}}$

$=\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}=-\frac{a^2}{4}=-4$

$a^2=16 \quad \therefore a=4\ (\because a>0)$ 정답_②

422

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x\ (a>0)$에서

$f'(x)=x-\frac{a}{x}=\frac{x^2-a}{x}$

$f'(x)=0$에서 $\frac{x^2-a}{x}=0, \frac{(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})}{x}=0$

$\therefore x=\sqrt{a}\ (\because x>0)$

함수 $f(x)$가 극솟값을 가지므로 $x=\sqrt{a}$를 기준으로 $x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

극솟값이 0이므로

$f(\sqrt{a})=\frac{1}{2}a-a\ln\sqrt{a}=a\left(\frac{1}{2}-\ln\sqrt{a}\right)=0$

$\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\ln a=\frac{1}{2} \quad \therefore a=e$ 정답_④

423

$f(x)=a\ln x^2+bx^2-2x$에서 $f'(x)=\frac{2a}{x}+2bx-2$

$x=-1, x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(-1)=0$에서 $-2a-2b-2=0$

$\therefore a+b=-1$ ······㉠

$f'(2)=0$에서 $a+4b-2=0$

$\therefore a+4b=2$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2, b=1$

$\therefore ab=-2\cdot 1=-2$ 정답_②

424

$f(x)=xe^{ax+b}$에서 $f'(x)=e^{ax+b}+axe^{ax+b}=e^{ax+b}(1+ax)$

$x=-1$에서 극솟값 $-\frac{1}{e^2}$을 가지므로

$f'(-1)=e^{-a+b}(1-a)=0$

$e^{-a+b}>0$이므로 $1-a=0 \quad \therefore a=1$

$f(-1)=-e^{-a+b}=-e^{-1+b}=-\frac{1}{e^2}=-e^{-2}$

$-1+b=-2 \quad \therefore b=-1$

$\therefore 2a+b=2\cdot 1+(-1)=1$ 정답_⑤

425

$f(x)=a\sin x-b\cos x$에서 $f'(x)=a\cos x+b\sin x$

$x=\frac{\pi}{6}$에서 극댓값 2를 가지므로

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$에서 $\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b=0$ ······㉠

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$에서 $\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b=2$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=-\sqrt{3}$

$\therefore ab=1\cdot(-\sqrt{3})=-\sqrt{3}$ 정답_③

426

$f(x)=\frac{ax^2+2x+b}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\frac{(2ax+2)(x^2+1)-(ax^2+2x+b)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{-2x^2+2(a-b)x+2}{(x^2+1)^2}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 5를 가지므로

$f'(1)=0$에서 $\frac{-2+2(a-b)+2}{4}=0$

$\therefore a-b=0$ ······㉠

$f(1)=5$에서 $\frac{a+2+b}{2}=5 \quad \therefore a+b=8$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4, b=4$

즉, $f'(x)=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x=-1, x=1$을 기준으로 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값을 가지므로

$c=-1$ 정답_②

427

$f(x)=e^{-x}(x^2+ax+a+1)$에서

$f'(x)=-e^{-x}(x^2+ax+a+1)+e^{-x}(2x+a)$

$=-e^{-x}\{x^2+(a-2)x+1\}$

모든 실수 x에 대하여 $-e^{-x}<0$이므로 함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $x^2+(a-2)x+1=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 따라서 판별식 D에 대하여

$D=(a-2)^2-4>0, a^2-4a>0$

$a(a-4)>0 \quad \therefore a<0$ 또는 $a>4$

따라서 구하는 자연수 a의 최솟값은 5이다. 정답_⑤

428

$f(x)=2\cos x+ax$에서 $f'(x)=-2\sin x+a$

모든 실수 x에 대하여 $-2\le -2\sin x\le 2$,

즉 $-2+a\le -2\sin x+a\le 2+a$이므로 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

즉, $-2+a\ge 0$에서 $a\ge 2$

따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 2이다. 정답_②

429

$f(x)=x-2a\ln x-\dfrac{2a}{x}$ 에서

$f'(x)=1-\dfrac{2a}{x}+\dfrac{2a}{x^2}=\dfrac{x^2-2ax+2a}{x^2}$

$x^2>0$이므로 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $x^2-2ax+2a=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

따라서 판별식 D에 대하여

$\dfrac{D}{4}=a^2-2a\le 0, a(a-2)\le 0$ $\quad\therefore 0\le a\le 2$

따라서 구하는 모든 정수 a의 값의 합은

$0+1+2=3$

정답_ ⑤

430

$f(x)=\ln x+\dfrac{a}{x}-x$에서

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}-1=\dfrac{-x^2+x-a}{x^2}$

함수 $f(x)$가 $x>0$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $-x^2+x-a=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $-x^2+x-a=0$의 두 근 α, β와 판별식 D에 대하여 $D=1-4a>0$에서 $a<\dfrac{1}{4}$이고, $\alpha+\beta=1>0, \alpha\beta=a>0$ 이므로

$0<a<\dfrac{1}{4}$

따라서 $k_1=0$, $k_2=\dfrac{1}{4}$이므로

$k_1+k_2=0+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$

정답_ ②

431

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-1}{h}=2$에서 극한값이 존재하고, $h\to 0$일 때 (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{h\to 0}\{f(1+h)-1\}=0$에서 $\quad\lim\limits_{h\to 0}f(1+h)=1$

이때, 함수 $f(x)$가 연속함수이므로 $\quad\lim\limits_{h\to 0}f(1+h)=f(1)=1$

$\therefore \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=2$

········ ❶

한편, 점 $A(1, a)$가 곡선 $f(x)\sqrt[3]{y}=1$ 위의 점이므로

$f(1)\sqrt[3]{a}=1, \sqrt[3]{a}=1$ $\quad\therefore a=1$ ········ ❷

$f(x)\sqrt[3]{y}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)\sqrt[3]{y}+f(x)\cdot\dfrac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3yf'(x)}{f(x)}$

점 A의 좌표는 $A(1, 1)$이므로 점 A에서의 접선의 기울기 m은

$m=-\dfrac{3\cdot 1\cdot f'(1)}{f(1)}=-\dfrac{3\cdot 1\cdot 2}{1}=-6$ ········ ❸

$\therefore a+m=1+(-6)=-5$ ········ ❹

정답_ -5

단계	채점 기준	비율
❶	$f(1)$, $f'(1)$의 값 구하기	30%
❷	a의 값 구하기	30%
❸	m의 값 구하기	30%
❹	$a+m$의 값 구하기	10%

432

$y=\ln x$에서 $\quad y'=\dfrac{1}{x}$

점 $(a, \ln a)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{a}$이므로 접선의 방정식은

$y-\ln a=\dfrac{1}{a}(x-a)$ $\quad\therefore y=\dfrac{1}{a}x-1+\ln a$ ······ ㉠

········ ❶

또한, 원 $x^2+y^2-2y=0$, 즉 $x^2+(y-1)^2=1$의 중심의 좌표는 $(0, 1)$이다.

따라서 직선 ㉠이 점 $(0, 1)$를 지날 때 이 원의 넓이를 이등분하므로 ········ ❷

$1=-1+\ln a, \ln a=2$

$\therefore a=e^2$ ········ ❸

정답_ e^2

단계	채점 기준	비율
❶	접선의 방정식 구하기	40%
❷	접선이 원의 넓이를 이등분하는 조건 구하기	30%
❸	a의 값 구하기	30%

433

$y=\cos 2x$에서 $\quad y'=-2\sin 2x$

곡선 위의 점 $T(t,\ \cos 2t)$에서의 접선의 기울기는 $-2\sin 2t$이므로 접선에 수직인 직선의 방정식은

$y-\cos 2t=\dfrac{1}{2\sin 2t}(x-t)$

$\therefore y=\dfrac{1}{2\sin 2t}x-\dfrac{t}{2\sin 2t}+\cos 2t$ ········ ❶

이 직선의 y절편 $f(t)$는 $\quad f(t)=-\dfrac{t}{2\sin 2t}+\cos 2t$ ········ ❷

$\therefore \lim\limits_{t\to 0}f(t)=\lim\limits_{t\to 0}\left(-\dfrac{t}{2\sin 2t}+\cos 2t\right)$

$=\lim\limits_{t\to 0}\left(-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2t}{\sin 2t}+\cos 2t\right)$

$=-\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{3}{4}$ ········ ❸

정답_ $\dfrac{3}{4}$

단계	채점 기준	비율
❶	접선에 수직인 직선의 방정식 구하기	50%
❷	$f(t)$ 구하기	10%
❸	$\lim_{t\to 0} f(t)$의 값 구하기	40%

434

$f(x)=a\sin x-\cos x-3x$에서

$f'(x)=a\cos x+\sin x-3$

$=\sqrt{a^2+1}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\sin x\right)-3$

$=\sqrt{a^2+1}\sin(x+\alpha)-3$

$\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}, \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)$ ········ ❶

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 $f'(x)\le 0$이어야 하므로

$\sqrt{a^2+1}\sin(x+\alpha)-3\le 0$ ········ ❷

이때, $\sqrt{a^2+1}\sin(x+\alpha)\le 3$이고 $-1\le\sin(x+\alpha)\le 1$이므로

$\sqrt{a^2+1}\le 3$

즉, $a^2+1\le 9$, $a^2\le 8$

$\therefore\ -2\sqrt{2}\le a\le 2\sqrt{2}$ ········ ❸

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 $-2, -1, 0, 1, 2$의 5개이다. ········ ❹

정답_ 5

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)$ 구하기	40%
❷	$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하는 조건 구하기	30%
❸	a의 값의 범위 구하기	20%
❹	정수 a의 개수 구하기	10%

435

$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$ 에서

$f'(x)=\frac{a(x^2+1)-(ax+b)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{-ax^2-2bx+a}{(x^2+1)^2}$ ········ ❶

$f(0)=-1$이므로 $b=-1$

$f'(0)=\sqrt{3}$이므로 $a=\sqrt{3}$ ········ ❷

즉, $f(x)=\frac{\sqrt{3}x-1}{x^2+1}$ 이고,

$f'(x)=\frac{-\sqrt{3}x^2+2x+\sqrt{3}}{(x^2+1)^2}=\frac{-(\sqrt{3}x+1)(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x=\sqrt{3}$을 기준으로 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

따라서 $f(x)$는 $x=\sqrt{3}$일 때 극댓값 $\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$일 때 극솟값 $-\frac{3}{2}$을 갖는다. ········ ❸

정답_ 극댓값: $\frac{1}{2}$, 극솟값: $-\frac{3}{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)$ 구하기	30%
❷	a, b의 값 구하기	30%
❸	극댓값과 극솟값 구하기	40%

436

$f(x)=a\sin x+b\cos x+x$에서

$f'(x)=a\cos x-b\sin x+1$ ········ ❶

함수 $f(x)$가 $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\pi$에서 극값을 가지므로

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b+1=0$ ······ ㉠

$f'(\pi)=-a+1=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=\sqrt{3}$ ········ ❷

즉, $g(x)=x+\sqrt{3}-\ln x$에서 $x>0$

$g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$ ········ ❸

$g'(x)=0$에서 $x=1$

$x=1$을 기준으로 $x>0$에서 함수 $g(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	$1+\sqrt{3}$	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$일 때 극솟값 $1+\sqrt{3}$을 갖는다. ······ ❹

정답_ $1+\sqrt{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)$ 구하기	20%
❷	a, b의 값 구하기	30%
❸	$g(x)$, $g'(x)$ 구하기	20%
❹	$g(x)$의 극솟값 구하기	30%

437

$y=4\ln x$에서 $y'=\frac{4}{x}$이므로 두 점 P, Q에서의 접선의 기울기는 각각 $\frac{4}{a}$, $\frac{4}{b}$이다.

두 점 P, Q에서의 두 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라고 하면 $\tan\alpha=\frac{4}{a}$, $\tan\beta=\frac{4}{b}$

두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면 $\theta=45°$이므로

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$에서

$\tan 45^\circ = \dfrac{\dfrac{4}{a}-\dfrac{4}{b}}{1+\dfrac{4}{a}\cdot\dfrac{4}{b}}$, $1=\dfrac{4b-4a}{ab+16}$

$ab+4a-4b+16=0$, $a(b+4)-4(b+4)+32=0$

$\therefore (a-4)(b+4)=-32$

이때, a, b는 정수이고 $1<a<b$에서

$a-4>-3$, $b+4>a+4>a-4$이므로

$\begin{cases} a-4=-2 \\ b+4=16 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a-4=-1 \\ b+4=32 \end{cases}$

$\therefore a=2, b=12$ 또는 $a=3, b=28$

정답_ $a=2$, $b=12$ 또는 $a=3$, $b=28$

438

함수 $g(x)=a^x$ $(a>1)$의 그래프가 y축과 만나는 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(0, 1)$이므로 점 B의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같은 1이다.

이때, 점 B의 x좌표를 b라고 하면 점 $\mathrm{B}(b, 1)$은 함수

$f(x)=\log_2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$의 그래프 위의 점이므로

$1=\log_2\left(b+\dfrac{1}{2}\right)$에서 $\quad b+\dfrac{1}{2}=2 \qquad \therefore b=\dfrac{3}{2}$

즉, 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}\left(\dfrac{3}{2},\ 1\right)$이다.

또한, 점 C의 x좌표는 점 B의 x좌표와 같으므로 $\dfrac{3}{2}$이고, 점 C의 y좌표를 c라고 하면 점 $\mathrm{C}\left(\dfrac{3}{2},\ c\right)$는 함수 $g(x)=a^x$의 그래프 위의 점이므로 $c=a^{\frac{3}{2}}$이다. 즉, 점 C의 좌표는 $\mathrm{C}\left(\dfrac{3}{2},\ a^{\frac{3}{2}}\right)$이다.

$g'(x)=a^x\ln a$이므로 점 $\mathrm{C}\left(\dfrac{3}{2},\ a^{\frac{3}{2}}\right)$에서의 접선의 기울기는

$g'\left(\dfrac{3}{2}\right)=a^{\frac{3}{2}}\ln a$

즉, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\mathrm{C}\left(\dfrac{3}{2},\ a^{\frac{3}{2}}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-a^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{2}}(\ln a)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$ ······㉠

이 직선이 x축과 만나는 점이 D이므로 ㉠에 $y=0$을 대입하면

$-a^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{2}}(\ln a)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$, $x-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{\ln a}$

$\therefore x=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{\ln a}$

즉, 점 D의 좌표는 $\mathrm{D}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{\ln a},\ 0\right)$이다.

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BD}}$에서 $\overline{\mathrm{AD}}^2=\overline{\mathrm{BD}}^2$이므로

$\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{\ln a}-0\right)^2+(0-1)^2=\left\{\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{\ln a}\right)-\dfrac{3}{2}\right\}^2+(0-1)^2$

$\dfrac{1}{\ln a}=\dfrac{3}{4}$, $\ln a=\dfrac{4}{3} \qquad \therefore a=e^{\frac{4}{3}}$

따라서 $g(x)=e^{\frac{4}{3}x}$이므로

$g(2)=e^{\frac{4}{3}\cdot 2}=e^{\frac{8}{3}}$

정답_ ③

439

$\displaystyle\lim_{t\to1}\frac{f(t)-1}{t-1}=2$에서 극한값이 존재하고, $t\to1$일 때

(분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{t\to1}\{f(t)-1\}=0$에서 $\quad f(1)=1$

$\displaystyle\therefore \lim_{t\to1}\frac{f(t)-1}{t-1}=\lim_{t\to1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=f'(1)=2$

또한, $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{g(1+2h)+2}{h}=3$에서 극한값이 존재하고, $h\to0$일 때 (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{h\to0}\{g(1+2h)+2\}=0$에서 $\quad g(1)=-2$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{g(1+2h)+2}{h}&=\lim_{h\to0}\frac{g(1+2h)-g(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{g(1+2h)-g(1)}{2h}\cdot2\\&=2g'(1)=3\end{aligned}$$

이므로 $\quad g'(1)=\dfrac{3}{2}$

한편, $t=1$에 대응하는 점을 A라고 하면 $\mathrm{A}(f(1),\ g(1))$이므로 $\mathrm{A}(1,\ -2)$

따라서 점 A에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{g'(1)}{f'(1)}=\dfrac{\frac{3}{2}}{2}=\dfrac{3}{4}$

정답_ $\dfrac{3}{4}$

440

$xy=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$y+x\dfrac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}=-\dfrac{1}{x^2}$

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ $(t>0)$로 놓으면 점 P에서의 접선의 기울기는 $-\dfrac{1}{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\dfrac{1}{t}=-\dfrac{1}{t^2}(x-t) \qquad \therefore y=-\dfrac{1}{t^2}x+\dfrac{2}{t}$

이 접선의 x절편, y절편은 각각 $2t$, $\dfrac{2}{t}$이므로 두 점 Q, R의 좌표는 각각 $\mathrm{Q}(2t,\ 0)$, $\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{2}{t}\right)$이다.

ㄱ은 옳다.

선분 QR의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{2t+0}{2},\ \dfrac{0+\frac{2}{t}}{2}\right)$, 즉 $\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$이므로 점 P는 선분 QR의 중점이다.

ㄴ도 옳다.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{QR}}&=\sqrt{(0-2t)^2+\left(\frac{2}{t}-0\right)^2}=\sqrt{4t^2+\frac{4}{t^2}}\\&\ge\sqrt{2\sqrt{4t^2\cdot\frac{4}{t^2}}}\\&=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\end{aligned}$$
$\left(\text{단, 등호는 } 4t^2=\dfrac{4}{t^2}\text{일 때 성립한다.}\right)$

ㄷ도 옳다.

삼각형 OQR의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2t\times\frac{2}{t}=2$

즉, t의 값에 관계없이 2로 일정하다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

441

ㄱ은 옳지 않다.

$h(3)=f(g(3))=f(1)=5$

ㄴ은 옳다.

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로 $x=2$를 대입하면

$h'(2)=f'(g(2))g'(2)$

이때, $g(2)=a$라고 하면 $2<a<3$이고 $h'(2)=f'(a)g'(2)$

즉, 주어진 그래프에서 $f'(a)<0$이고, $g'(2)<0$이므로

$h'(2)>0$ $\quad\therefore h(2)\geq 0$

ㄷ은 옳다.

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$에 대하여 $3<x<4$에서 함수 $g(x)$는 감소하므로 $g'(x)<0$

$3<x<4$에서 $0<g(x)<1$이고 함수 $f(x)$는 $0<x<1$에서 증가하므로 $f'(g(x))>0$

즉, 열린구간 $(3,\ 4)$에서 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)<0$이므로 $h(x)$는 감소한다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

442

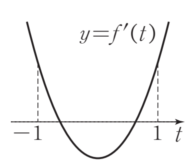
$y=\cos^3 x+a\cos^2 x+a\cos x$에서

$\cos x=t\ (-1<t<1)$로 놓으면 $y=t^3+at^2+at$

이때, $f(t)=t^3+at^2+at$로 놓으면

$f'(t)=3t^2+2at+a$

함수 $f(t)$가 $-1<t<1$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 오른쪽 그림과 같이 이차방정식 $f'(t)=0$이 $-1<t<1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로



(ⅰ) $3t^2+2at+a=0$의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a>0, a(a-3)>0$ $\quad\therefore a<0$ 또는 $a>3$

(ⅱ) $f'(-1)=3-a>0$에서 $a<3$ ……㉠

$f'(1)=3+3a>0$에서 $a>-1$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $-1<a<3$

(ⅲ) $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\frac{a}{3}$이므로

$-1<-\frac{a}{3}<1$에서 $-3<a<3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$-1<a<0$ 정답_ $-1<a<0$

07 도함수의 활용 (2)

443

(1) $y=-x^3+3x^2+1$에서

$y'=-3x^2+6x,\ y''=-6x+6=-6(x-1)$

$y''=0$에서 $x=1$

$x<1$일 때 $y''>0$, $x>1$일 때 $y''<0$이므로 주어진 곡선은 $x<1$일 때 아래로 볼록하고, $x>1$일 때 위로 볼록하다.

(2) $y=6\cos x-6x$에서

$y'=-6\sin x-6,\ y''=-6\cos x$

$y''=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0<x<\pi$)

$0<x<\frac{\pi}{2}$일 때 $y''<0$, $\frac{\pi}{2}<x<\pi$일 때 $y''>0$이므로 주어진 곡선은 $0<x<\frac{\pi}{2}$일 때 위로 볼록하고, $\frac{\pi}{2}<x<\pi$일 때 아래로 볼록하다.

(3) $y=xe^x+\frac{1}{2}x+2$에서

$y'=e^x+xe^x+\frac{1}{2}=(x+1)e^x+\frac{1}{2}$

$y''=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$

$y''=0$에서 $x=-2$

$x<-2$일 때 $y''<0$, $x>-2$일 때 $y''>0$이므로 주어진 곡선은 $x<-2$일 때 위로 볼록하고, $x>-2$일 때 아래로 볼록하다. 정답_ 풀이 참조

444

$y=x^2(\ln x-1)$에서

$y'=2x(\ln x-1)+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(2\ln x-1)$

$y''=2\ln x-1+x\cdot\frac{2}{x}=2\ln x+1$

주어진 곡선이 위로 볼록하려면 $y''<0$이어야 하므로

$2\ln x+1<0, \ln x<-\frac{1}{2}, x<e^{-\frac{1}{2}}$ $\quad\therefore x<\frac{1}{\sqrt{e}}$

로그의 진수 조건에서 $x>0$이므로 구하는 x의 값의 범위는

$0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$ 정답_ ④

445

$y=(x+1)(x-3)^3$에서

$y'=(x-3)^3+3(x+1)(x-3)^2=4x(x-3)^2$

$y''=4(x-3)^2+8x(x-3)=12(x-1)(x-3)$

$y''=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

$x<1$ 또는 $x>3$일 때 $y''>0$

$1<x<3$일 때 $y''<0$

따라서 주어진 곡선은 $x<1$ 또는 $x>3$일 때 아래로 볼록하고, $1<x<3$일 때 위로 볼록하다. 정답_ ④

446

(1) $y=x^4-4x^3+5$에서

$y'=4x^3-12x^2,\ y''=12x^2-24x=12x(x-2)$

$y''=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

이때, $x=0$ 또는 $x=2$의 좌우에서 y''의 부호가 바뀌므로 변곡점은 $(0, 5), (2, -11)$이다.

(2) $y=x^2+\dfrac{1}{x}+4$에서

$y'=2x-\dfrac{1}{x^2},\ y''=2+\dfrac{2}{x^3}$

$y''=0$에서 $\quad x=-1$

이때, $x=-1$의 좌우에서 y''의 부호가 바뀌므로 변곡점은 $(-1, 4)$이다.

(3) $y=x^2-2x\ln x+1$에서

$y'=2x-2\ln x-2x\cdot\dfrac{1}{x}=2x-2\ln x-2$

$y''=2-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x-1)}{x}$

$y''=0$에서 $\quad x=1$

이때, $x=1$의 좌우에서 y''의 부호가 바뀌므로 변곡점은 $(1,\ 2)$이다.

정답_ (1) $(0, 5),\ (2, -11)$ (2) $(-1,\ 4)$ (3) $(1,\ 2)$

447

$f(x)=(3x^2+4x-9)e^x$에서

$f'(x)=(6x+4)e^x+(3x^2+4x-9)e^x$

$\qquad=(3x^2+10x-5)e^x$

$f''(x)=(6x+10)e^x+(3x^2+10x-5)e^x$

$\qquad=(3x^2+16x+5)e^x=(x+5)(3x+1)e^x$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=-5$ 또는 $x=-\dfrac{1}{3}$

이때, $x=-5$ 또는 $x=-\dfrac{1}{3}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 모든 변곡점의 x좌표의 합은

$-5+\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{16}{3}$

정답_ ②

448

$y=\ln(x^2+k)$에서 $\quad y'=\dfrac{2x}{x^2+k}$

$y''=\dfrac{2(x^2+k)-2x\cdot 2x}{(x^2+k)^2}=\dfrac{-2(x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k})}{(x^2+k)^2}$

$y''=0$에서 $\quad x=-\sqrt{k}$ 또는 $x=\sqrt{k}$

이때, $x=-\sqrt{k}$ 또는 $x=\sqrt{k}$의 좌우에서 y''의 부호가 바뀌므로 변곡점은 $(-\sqrt{k},\ \ln 2k), (\sqrt{k},\ \ln 2k)$이다.

선분 PQ의 길이가 2이므로

$\sqrt{k}-(-\sqrt{k})=2,\ 2\sqrt{k}=2$

$\sqrt{k}=1 \qquad \therefore k=1\ (\because k>0)$

정답_ 1

449

$y=\left(\ln\dfrac{1}{ax}\right)^2=(\ln ax)^2$에서

$y'=2\ln ax\cdot\dfrac{a}{ax}=\dfrac{2\ln ax}{x}$

$y''=\dfrac{\dfrac{2a}{ax}\cdot x-2\ln ax\cdot 1}{x^2}=\dfrac{2(1-\ln ax)}{x^2}$

$y''=0$에서 $x^2>0$이므로

$1-\ln ax=0,\ \ln ax=1$

$ax=e \qquad \therefore x=\dfrac{e}{a}$

이때, $x=\dfrac{e}{a}$의 좌우에서 y''의 부호가 바뀌므로 변곡점은 $\left(\dfrac{e}{a},\ 1\right)$이다.

한편, 변곡점이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$1=2\cdot\dfrac{e}{a} \qquad \therefore a=2e$

정답_ ⑤

450

$y=\sin^2 x$ 에서

$y'=2\sin x\cos x=\sin x\cos x+\cos x\sin x=\sin 2x$

$y''=2\cos 2x$

$y''=0$에서 $\quad \cos 2x=0,\ 2x=\dfrac{\pi}{2}\ (\because 0\le 2x\le\pi) \qquad \therefore x=\dfrac{\pi}{4}$

이때, $x=\dfrac{\pi}{4}$의 좌우에서 y''의 부호가 바뀌므로 변곡점은 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \sin^2\dfrac{\pi}{4}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$이다.

$x=\dfrac{\pi}{4}$일 때 $y'=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$이므로 점 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\dfrac{1}{2}=1\cdot\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) \qquad \therefore y=x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}$

따라서 $a=1, b=\dfrac{1}{2}$이므로 $\quad 4ab=4\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2}=2$

정답_ ②

451

$f(x)=ax^3+bx^2+c$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx$

$f''(x)=6ax+2b$

$x=3$인 점에서의 접선의 기울기가 9이므로

$f'(3)=27a+6b=9$

$\therefore 9a+2b=3 \qquad \cdots\cdots ㉠$

또, 점 $(1, 3)$이 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이므로

$f''(1)=6a+2b=0 \qquad \therefore 3a+b=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$

$f(1)=a+b+c=3 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1, b=-3, c=5$

$\therefore a+b-c=1+(-3)-5=-7$

정답_ -7

452

$f(x)=x^2+ax+b\ln x$에서 로그의 진수 조건에 의해 $x>0$

$f'(x)=2x+a+b\cdot\frac{1}{x}=2x+\frac{b}{x}+a$

$f''(x)=2-\frac{b}{x^2}$

$x=\frac{1}{2}$에서 극댓값을 가지므로

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=1+2b+a=0$ …… ㉠

곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표가 1이므로

$f''(1)=2-b=0$ $\therefore b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면 $a=-5$

$\therefore f(x)=x^2-5x+2\ln x$

$f'(x)=2x+\frac{2}{x}-5=\frac{2x^2-5x+2}{x}=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

$x=\frac{1}{2}$, $x=2$를 기준으로 $x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 극솟값

$f(2)=4-10+2\ln 2=-6+2\ln 2$를 갖는다. 정답_ ③

453

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 근을 갖고, 이 근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f'(x)=2ax+6\cos x$, $f''(x)=2a-6\sin x$

$f''(x)=0$에서 $2a-6\sin x=0$ $\therefore \sin x=\frac{a}{3}$ …… ㉠

㉠이 근을 가지려면 $-1\le\frac{a}{3}\le 1$이어야 하므로 $-3\le a\le 3$

$a=-3$이면 $f''(x)=-6(1+\sin x)\le 0$

$a=3$이면 $f''(x)=6(1-\sin x)\ge 0$

이므로 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않는다.

따라서 변곡점을 가질 조건은 $-3<a<3$이므로 구하는 정수 a는 $-2, -1, 0, 1, 2$의 5개이다. 정답_ ②

454

$f''(b)=f''(0)=f''(c)=f''(e)=0$이고 $x=b$, $x=0$, $x=c$, $x=e$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 $x=b$, $x=0$, $x=c$, $x=e$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 변곡점을 갖는다.

따라서 변곡점의 개수는 4이다. 정답_ ④

455

함수 $y=f'(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기는 $f''(x)$이므로 $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	4	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 모양이 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로 구하는 구간은 $(1, 3)$이다. 정답_ ③

456

함수 $y=f(x)$에 대하여 $\frac{dy}{dx}<0$이려면 감소, $\frac{d^2y}{dx^2}<0$이려면 위로 볼록인 구간의 점이어야 하므로 구하는 점은 E이다.

정답_ ⑤

457

$f(x)=\frac{x}{x^2+2x+4}$에서

$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+2x+4)-x(2x+2)}{(x^2+2x+4)^2}=\frac{-(x+2)(x-2)}{(x^2+2x+4)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

$x=-2$, $x=2$를 기준으로 $-2\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{6}$	↘	$\frac{1}{7}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $\frac{1}{6}$, $x=-2$일 때 최솟값 $-\frac{1}{2}$을 가지므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{3}$ 정답_ $-\frac{1}{3}$

458

$f(x)=x+\sqrt{6-x^2}$에서 $-\sqrt{6}\le x\le\sqrt{6}$

$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{6-x^2}}=\frac{\sqrt{6-x^2}-x}{\sqrt{6-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{6-x^2}=x$ …… ㉠

양변을 제곱하면 $6-x^2=x^2$, $x^2=3$

이때, ㉠에서 $x\ge 0$이므로 $x=\sqrt{3}$

$x=\sqrt{3}$을 기준으로 $-\sqrt{6}\le x\le\sqrt{6}$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\sqrt{6}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{6}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\sqrt{6}$	↗	$2\sqrt{3}$	↘	$\sqrt{6}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{3}$일 때 최댓값 $M=2\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{6}$일 때 최솟값 $m=-\sqrt{6}$을 가지므로

$M^2+m^2=12+6=18$ 정답_ ⑤

459

$f(x)=x^2e^x$에서 $f'(x)=2xe^x+x^2e^x=x(x+2)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-2$

$x=-2, x=0$을 기준으로 $-3\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$\frac{9}{e^3}$	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0	↗	e

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 $M=e$, $x=0$일 때 최솟값 $m=0$을 가지므로 $M-m=e-0=e$

정답_④

460

$f(x)=-\cos x(1+\sin x)$에서

$$f'(x)=\sin x(1+\sin x)-\cos x\cos x$$
$$=\sin^2 x+\sin x-(1-\sin^2 x)$$
$$=2\sin^2 x+\sin x-1$$
$$=(2\sin x-1)(\sin x+1)$$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=-1$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ ($\because 0\le x\le\pi$)

$x=\frac{\pi}{6}, x=\frac{5}{6}\pi$를 기준으로 $0\le x\le\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	-1	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	1

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$일 때 최솟값 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$을 갖는다.

정답_①

461

$f(x)=e^{-x}(\sin x+\cos x)$에서

$$f'(x)=-e^{-x}(\sin x+\cos x)+e^{-x}(\cos x-\sin x)$$
$$=-2e^{-x}\sin x$$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

$x=0, x=\pi, x=2\pi$를 기준으로 $0\le x\le 2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	1	↘	$-\frac{1}{e^\pi}$	↗	$\frac{1}{e^{2\pi}}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\pi$일 때 최솟값 $-\frac{1}{e^\pi}$을 갖는다.

정답_③

462

$f(x)=\frac{x^3}{x-2}$에서

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-2)-x^3\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ ($\because x>2$)

$x=3$을 기준으로 $x>2$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	(2)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	27	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최솟값 27을 가지므로

$a=3, b=27$ $\therefore a+b=3+27=30$

정답_⑤

463

$f(x)=\frac{\ln x-1}{x}$에서 $x>0$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(\ln x-1)\cdot 1}{x^2}=\frac{2-\ln x}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=2$ $\therefore x=e^2$

$x=e^2$을 기준으로 $x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e^2}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e^2$일 때 최댓값 $\frac{1}{e^2}$을 가지므로

$a=e^2, b=\frac{1}{e^2}$ $\therefore ab=e^2\cdot\frac{1}{e^2}=1$

정답_③

464

$f(x)=\frac{2\sin x}{2+\cos x}$에서

$$f'(x)=\frac{2\cos x(2+\cos x)-2\sin x\cdot(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}$$
$$=\frac{2(2\cos x+1)}{(2+\cos x)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $2\cos x+1=0, \cos x=-\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

$x=\frac{2}{3}x, x=\frac{4}{3}x$를 기준으로 $0\le x\le 2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	0	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	↗	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{4}{3}\pi$일 때 최솟값 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $x=\frac{2}{3}\pi$일 때 최댓값 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$을 가지므로 $a=\frac{2}{3}\pi, b=\frac{4}{3}\pi$

$\therefore b-a=\frac{4}{3}\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi$

정답_③

465

$f(x)=a\sqrt{2-x^2}e^x$에서 $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$

$f'(x)=\dfrac{-2ax}{2\sqrt{2-x^2}}e^x+a\sqrt{2-x^2}e^x$

$=-\dfrac{a(x-1)(x+2)}{\sqrt{2-x^2}}e^x$ (단, $a>0$)

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$)

$x=1$을 기준으로 $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	ae	$\searrow$	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 ae를 가지므로

$ae=e$ $\quad\therefore a=1$ 정답_ ①

466

$f(x)=x\ln x-3x+k$에서 $x>0$

$f'(x)=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}-3=\ln x-2$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=2$ $\quad\therefore x=e^2$

$x=e^2$을 기준으로 $x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-e^2+k$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e^2$일 때 최솟값 $-e^2+k$를 가지므로

$-e^2+k=2$ $\quad\therefore k=e^2+2$ 정답_ ④

467

$f(x)=\log_9(5-x)+\log_3(x+4)$에서 로그의 진수 조건에 의해 $5-x>0, x+4>0$ $\quad\therefore -4<x<5$

$f(x)=\log_9(5-x)+\log_9(x+4)^2=\log_9(5-x)(x+4)^2$

$f'(x)=\dfrac{-(x+4)^2+2(5-x)(x+4)}{(5-x)(x+4)^2\ln 9}$

$=\dfrac{-3(x-2)}{(5-x)(x+4)\ln 9}$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

$x=2$를 기준으로 $-4<x<5$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(-4)	$\cdots$	2	$\cdots$	(5)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{3}{2}+\log_3 2$	$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 $\dfrac{3}{2}+\log_3 2$를 갖는다.

정답_ ④

468

$f(x)=a\sin x+b\cos x$에서

$f'(x)=a\cos x-b\sin x$

$f'\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a-\dfrac{b}{2}=0$

$\therefore b=-\sqrt{3}a$ ……㉠

$f\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)=\dfrac{a}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}b=2$

$\therefore a-\sqrt{3}b=4$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a-\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3}a)=4$에서 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-\sqrt{3}$

이때, $g(x)=\ln x-\sqrt{3}x$ $(x>0)$에서

$g'(x)=\dfrac{1}{x}-\sqrt{3}=\dfrac{1-\sqrt{3}x}{x}$

$g'(x)=0$에서 $1-\sqrt{3}x=0$ $\quad\therefore x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$을 기준으로 $x>0$에서 함수 $g(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		$\nearrow$	$-1-\frac{1}{2}\ln 3$	$\searrow$

함수 $g(x)$는 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$일 때 극대이고 동시에 최대이다.

따라서 최댓값은 $-1-\dfrac{1}{2}\ln 3$이다. 정답_ ③

469

$\sin x=t$로 치환하면 $-1\le t\le 1$

$g(t)=t^4+2(1-t^2)+k=t^4-2t^2+2+k$라고 하면

$g'(t)=4t^3-4t=4t(t+1)(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=0$ 또는 $t=1$

$t=-1, t=0, t=1$을 기준으로 $-1\le t\le 1$에서 함수 $g(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(t)$	0	$+$	0	$-$	0
$g(t)$	$1+k$	$\nearrow$	$2+k$	$\searrow$	$1+k$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 $2+k$, $x=-1, 1$일 때 최솟값 $1+k$를 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은

$(2+k)+(1+k)=9, 3+2k=9$ $\quad\therefore k=3$ 정답_ ③

470

$y=\dfrac{2}{3}\cdot 27^x-3\cdot 9^x+2=\dfrac{2}{3}\cdot(3^x)^3-3\cdot(3^x)^2+2$

이때, $3^x=t(t>0)$로 놓으면 $y=\dfrac{2}{3}t^3-3t^2+2$

$f(t)=\dfrac{2}{3}t^3-3t^2+2$로 놓으면 $f'(t)=2t^2-6t=2t(t-3)$

$f'(t)=0$에서 $t=3$ ($\because t>0$)

$t=3$을 기준으로 $t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

t	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	-7	$\nearrow$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=3$일 때 최솟값 -7을 갖는다.

$t=3$에서 $3^x=3$ $\therefore x=1$

따라서 $a=1, b=-7$이므로

$a+b=1+(-7)=-6$

정답_③

471

제1사분면에 있는 직사각형의 꼭짓점을 $(t, e^{-t})(t>0)$이라고 하면 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각 $2t, e^{-t}$

직사각형의 넓이를 $S(t)$라고 하면 $S(t)=2te^{-t}$

$S'(t)=2e^{-t}-2te^{-t}=-2(t-1)e^{-t}$

$S'(t)=0$에서 $t=1$ $(\because t>0)$

$t=1$을 기준으로 $t>0$에서 함수 $S(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$

따라서 함수 $S(t)$는 $t=1$일 때 최댓값 $\frac{2}{e}$를 가지므로 구하는 직사각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{2}{e}$이다.

정답_ $\frac{2}{e}$

472

$y=2e^{-x}$에서 $y'=-2e^{-x}$

점 $\mathrm{P}(t, 2e^{-t})$에서의 접선의 기울기는 $-2e^{-t}$이므로 점 P에서의 접선의 방정식은 $y-2e^{-t}=-2e^{-t}(x-t)$

$\therefore y=-2e^{-t}x+2te^{-t}+2e^{-t}$

$\mathrm{A}(0, 2e^{-t}), \mathrm{B}(0, 2te^{-t}+2e^{-t})$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=2te^{-t}$, $\overline{\mathrm{AP}}=t$

삼각형 APB의 넓이를 $S(t)$라고 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\cdot t\cdot 2te^{-t}=t^2e^{-t}$

$S'(t)=2te^{-t}-t^2e^{-t}=(2-t)te^{-t}$

$S'(t)=0$에서 $(2-t)te^{-t}=0$

$\therefore t=2$ $(\because te^{-t}>0)$

$t=2$를 기준으로 $t>0$에서 함수 $S(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

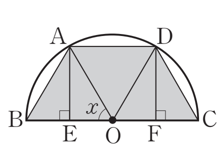
t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

따라서 함수 $S(t)$는 $t=2$에서 최댓값 $\frac{4}{e^2}$를 갖는다.

정답_④

473

점 A, D에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하고



$\angle\mathrm{AOE}=x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$라고 하면

$\overline{\mathrm{OE}}=2\cos x$, $\overline{\mathrm{AE}}=2\sin x$

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(x)$라고 하면 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{EF}}$이므로

$S(x)=\frac{1}{2}\cdot(4\cos x+4)\cdot 2\sin x$

$=4(\cos x+1)\sin x$

$S'(x)=4\cdot(-\sin x)\cdot\sin x+4(\cos x+1)\cdot\cos x$

$=-4\sin^2 x+4\cos^2 x+4\cos x$

$=8\cos^2 x+4\cos x-4$

$=4(2\cos x-1)(\cos x+1)$

$S'(x)=0$에서 $\cos x=-1$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}\left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

$x=\frac{\pi}{3}$를 기준으로 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $S(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	

따라서 함수 $S(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 최댓값 $3\sqrt{3}$을 가지므로 사다리꼴 ABCD의 넓이의 최댓값은 $3\sqrt{3}$이다.

정답_③

474

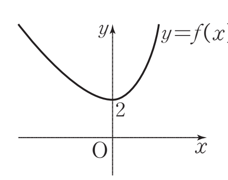
(1) $f(x)=e^x-x+1$로 놓으면 $f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$에서 $e^x=1$ $\therefore x=0$

$x=0$을 기준으로 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 0이다.



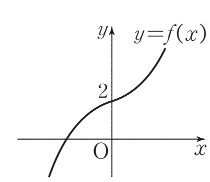
(2) $f(x)=x-\sin x+2$로 놓으면 $f'(x)=1-\cos x$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체에서 증가한다.

이때,

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

(3) $f(x)=x-\ln x-3$으로 놓으면 $x>0$

$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

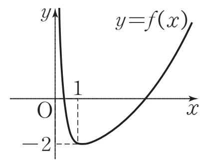
$x=1$을 기준으로 $x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$

이때,

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

정답_ (1) 0 (2) 1 (3) 2

475

$\frac{2}{x}=-x^2+a$에서 $a=x^2+\frac{2}{x}$

주어진 방정식이 서로 다른 실근을 가지려면 곡선 $y=x^2+\frac{2}{x}$와 직선 $y=a$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=x^2+\frac{2}{x}$로 놓으면

$f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2x^3-2}{x^2}=\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$

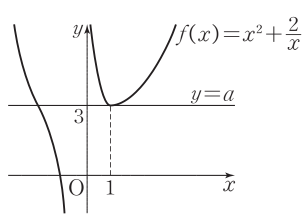
$f'(x)=0$에서 $x=1$

$x=0, x=1$을 기준으로 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−		−	0	+
$f(x)$	↘		↘	3	↗

이때, $\lim_{x\to 0-} f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\infty$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 a의 값은 3이다.



정답_ ③

476

$e^x=k-e^{-x}$에서 $k=e^x+e^{-x}$

주어진 방정식이 오직 한 개의 실근을 가지려면 곡선 $y=e^x+e^{-x}$과 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 한다.

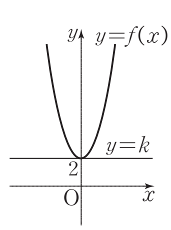
$f(x)=e^x+e^{-x}$으로 놓으면 $f'(x)=e^x-e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $e^x-e^{-x}=0$ $\therefore x=0$

$x=0$을 기준으로 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	2	↗

이때, $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나기 위한 k의 값은 2이다.



정답_ ④

477

$\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{2}\ln ax$에서 $a>0$이므로 $x>0$

$\ln ax=\frac{1}{2}x^2$에서 $ax=e^{\frac{1}{2}x^2}$이므로 $a=\frac{e^{\frac{1}{2}x^2}}{x}$

주어진 방정식이 오직 한 개의 실근을 가지려면 곡선 $y=\frac{e^{\frac{1}{2}x^2}}{x}$과 직선 $y=a$가 한 점에서 만나야 한다.

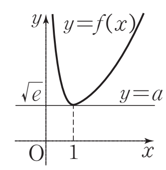
$f(x)=\frac{e^{\frac{1}{2}x^2}}{x}$으로 놓으면 $f'(x)=\frac{e^{\frac{1}{2}x^2}(x-1)}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

$x=1$을 기준으로 $x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	$\sqrt{e}$	↗

이때, $\lim_{x\to 0+} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$가 오직 한 점에서 만나기 위한 a의 값은 $\sqrt{e}$이다.



정답_ ③

478

$\ln x-x+8-a=0$에서 $x>0$이고 $a=\ln x-x+8$

주어진 방정식의 해가 존재하려면 곡선 $y=\ln x-x+8$과 직선 $y=a$가 서로 만나야 한다.

$f(x)=\ln x-x+8$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$

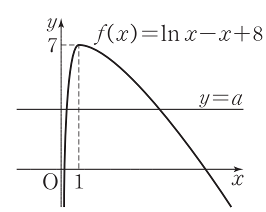
$f'(x)=0$에서 $x=1$

$x=1$을 기준으로 $x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	7	↘

이때, $\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$가 만나기 위한 a의 값의 범위는 $a\le 7$이므로 자연수 a는 $1, 2, \cdots, 7$의 7개이다.



정답_ ③

479

$\sin x-x\cos x-k=0$에서 $k=\sin x-x\cos x$

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 곡선 $y=\sin x-x\cos x$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=\sin x-x\cos x$로 놓으면

$f'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x=x\sin x$

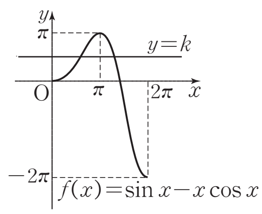
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $\sin x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$

$x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$를 기준으로 $0\le x\le 2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	π	↘	-2π

함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위는 $0\le k<\pi$이다.



따라서 정수 k는 $0, 1, 2, 3$이므로 그 합은

$0+1+2+3=6$ 정답_⑤

480

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$에서 $x>0$

$$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f''(x)=\dfrac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$$

$f'(x)=0$에서 $1-\ln x=0$ $\quad\therefore x=e$

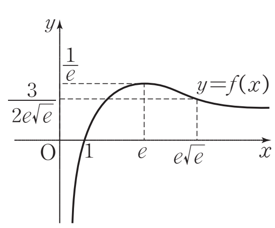
$f''(x)=0$에서 $2\ln x-3=0$ $\quad\therefore x=e\sqrt{e}$

$x=e$, $x=e\sqrt{e}$를 기준으로 $x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3}{2e\sqrt{e}}$	↘

이때, $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ은 옳지 않다.

치역은 $\left\{y \,\middle|\, y\le\dfrac{1}{e}\right\}$이다.

ㄴ은 옳다.

점근선은 x축과 y축이다.

ㄷ도 옳다.

열린구간 $(0, e\sqrt{e})$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 정답_④

481

$f(x)=e^x+\dfrac{1}{x}$에서 $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x^2}$

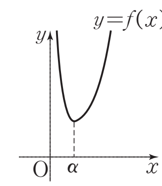
$f''(x)=e^x+\dfrac{2}{x^3}$

$x=\alpha$를 기준으로 $x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

이때, $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\infty$,

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ은 옳다.

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 가지므로

$f'(\alpha)=e^\alpha-\dfrac{1}{\alpha^2}=0$ $\quad\therefore e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha^2}$

ㄴ은 옳지 않다.

모든 양의 실수 x에 대하여 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 존재하지 않는다.

ㄷ도 옳다.

ㄴ에서 $x>0$일 때 $f''(x)>0$이므로 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고 $x=\alpha$에서 극값을 가지므로 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이면서 최소이다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 최솟값을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_④

482

ㄱ은 옳다.

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)=3$$

$\therefore F(b)=F(a)+3$

ㄴ은 옳지 않다.

$y=F(x)$에서 $F'(x)=f(x)$, $F''(x)=f'(x)$

주어진 그래프에서 $x=c$일 때, $F''(c)=f'(c)>0$

따라서 점 $(c, F(c))$는 곡선 $y=F(x)$의 변곡점이 아니다.

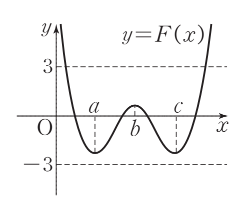
ㄷ도 옳다.

$$\int_a^c f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^c=F(c)-F(a)=0$$

$\therefore F(a)=F(c)$

$-3<F(a)<0$이면 $0<F(b)<3$,

$-3<F(c)<0$이므로 함수 $y=F(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



함수 $y=F(x)$의 그래프와 x축이 서로 다른 네 점에서 만나므로 방정식 $F(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_③

483

$f(x)=e^x-x$로 놓으면 $f'(x)=e^x-1$

이때, $x>0$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x>0$에서 증가하고, $f(0)=1$이므로 $x>0$일 때 $f(x)>1$이다.

따라서 $x>0$일 때, 부등식 $e^x-x>1$이 항상 성립한다.

정답_ 풀이 참조

484

$f(x)=x\ln x-2x+a$로 놓으면

$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-2=\ln x-1$

이때, $x>e$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x>e$에서 증가한다.

따라서 $x>e$일 때 $f(x)>0$이려면

$f(e)=e-2e+a\ge0 \qquad \therefore a\ge e$

정답_ ③

485

$f(x)=e^x-x+a$로 놓으면 $\quad f'(x)=e^x-1$

이때, $0<x<1$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $0<x<1$에서 증가한다.

$0<x<1$일 때 $f(x)<0$이려면

$f(1)=e-1+a\le0 \qquad \therefore a\le1-e$

따라서 상수 a의 최댓값은 $1-e$이다.

정답_ ②

486

$x\ge1$일 때 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 $x\ge1$에서 $f(x)>g(x)$이어야 한다.

$f(x)>g(x)$에서 $\quad f(x)-g(x)>0$

이때, $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면 $\quad h(x)=x\ln x-x-a$

$h'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln x$

$x\ge1$에서 $h'(x)\ge0$이므로 함수 $h(x)$는 $x\ge1$에서 증가한다.

$x\ge1$일 때 $h(x)>0$이려면

$h(1)=0-1-a>0 \qquad \therefore a<-1$

따라서 정수 a의 최댓값은 -2이다.

정답_ ①

487

$\sin 2x\ge a-2\sin x$에서 $\quad \sin 2x+2\sin x\ge a$

$f(x)=\sin 2x+2\sin x$로 놓으면 함수 $f(x)$는 주기가 2π인 주기함수이므로 $0\le x\le2\pi$에서 조건을 만족시키면 된다.

$$\begin{aligned}f'(x)&=2\cos 2x+2\cos x\\&=2\cos(x+x)+2\cos x\\&=2(\cos^2x-\sin^2x)+2\cos x\\&=2(2\cos^2x-1)+2\cos x\\&=2(2\cos^2x+\cos x-1)\\&=2(2\cos x-1)(\cos x+1)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad \cos x=-1$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

$x=\frac{\pi}{3}$, $x=\pi$, $x=\frac{5}{3}\pi$를 기준으로 $0\le x\le2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	0

함수 $f(x)$는 $x=\frac{5}{3}\pi$에서 최솟값 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$을 가지므로

$f(x)\ge f\left(\frac{5}{3}\pi\right)\ge a$에서 $\quad a\le-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

따라서 a의 최댓값은 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$이다.

정답_ ①

488

$f(t)=\sin t+\cos t-1$로 놓고, 시각 t에서 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=f'(t)=\cos t-\sin t,\ a=f''(t)=-\sin t-\cos t$

$t=\frac{\pi}{2}$일 때 점 P의 속도 α는 $\quad \alpha=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0-1=-1$

$t=\frac{\pi}{2}$일 때 점 P의 가속도 β는 $\quad \beta=f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1-0=-1$

$\therefore \alpha+\beta=-1+(-1)=-2$

정답_ ①

489

$f(t)=t+\frac{20}{\pi^2}\cos(2\pi t)$로 놓고 시각 t에서 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=f'(t)=1+\frac{20}{\pi^2}\cdot2\pi\cdot\{-\sin(2\pi t)\}=1-\frac{40}{\pi}\sin(2\pi t)$

$a=f''(t)=-\frac{40}{\pi}\cdot2\pi\cdot\cos(2\pi t)=-80\cos(2\pi t)$

따라서 $t=\frac{1}{3}$에서 점 P의 가속도는

$f''\left(\frac{1}{3}\right)=-80\cos\frac{2}{3}\pi=-80\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=40$

정답_ ④

490

$f(t)=t+\ln(t^2+4)$로 놓고 시각 t에서 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=f'(t)=1+\frac{2t}{t^2+4}$

$a=f''(t)=\frac{2(t^2+4)-2t\cdot2t}{(t^2+4)^2}=-\frac{2(t^2-4)}{(t^2+4)^2}$

$t=p$에서의 가속도가 0이므로

$f''(p)=-\frac{2(p^2-4)}{(p^2+4)^2}=0$

$p^2+4>0$이므로 $\quad p^2-4=0$

$\therefore p=2\ (\because p>0)$

정답_ ②

491

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_1, v_2라고 하면

$v_1=\frac{d}{dt}x_1(t)=2e^t,\ v_2=\frac{d}{dt}x_2(t)=2at$

$v_1=v_2$에서 $\quad e^t=at \qquad \therefore \frac{e^t}{t}=a$

$f(t)=\frac{e^t}{t}\,(t>0)$으로 놓으면

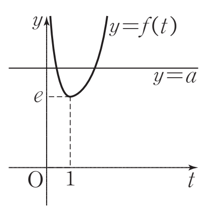
$f'(t)=\frac{e^t\cdot t-e^t\cdot 1}{t^2}=\frac{e^t(t-1)}{t^2}$

$f'(t)=0$에서 $\quad t=1$

$t=1$을 기준으로 $t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	e	↗

이때, $\lim_{t\to 0+}f(t)=\infty,\ \lim_{t\to\infty}f(t)=\infty$이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=a$가 두 점에서 만나기 위한 a의 값의 범위는 $\quad a>e$



정답_⑤

492

$x=t^2+1,\ y=4t-t^2$에서

$\frac{dx}{dt}=2t,\ \frac{dy}{dt}=4-2t$

이므로 $t=2$에서의 점 P의 속도 v는 $\quad v=(4,0)$

$\frac{dx^2}{d^2t}=2,\ \frac{dy^2}{d^2t}=-2$

이므로 $t=2$에서의 점 P의 가속도 a는 $\quad a=(2,-2)$

따라서 $m=4, n=0, p=2, q=-2$이므로

$m+n+p+q=4+0+2+(-2)=4$ 정답_②

493

$x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$에서

$\frac{dx}{dt}==1-\cos t,\ \frac{dy}{dt}=\sin t$

이므로 점 P의 속도 v는 $\quad v=(1-\cos t, \sin t)$

$\frac{dx^2}{d^2t}=\sin t,\ \frac{dy^2}{d^2t}=\cos t$

이므로 점 P의 가속도 a는 $\quad a=(\sin t, \cos t)$

$t=\frac{\pi}{3}$에서의 점 P의 속도 v와 가속도 a는 각각

$v=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right), a=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이므로

$m=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1,\ n=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$

$\therefore m+n=1+1=2$ 정답_①

494

$x=t+e^t,\ y=t-e^t$에서

$\frac{dx}{dt}=1+e^t,\ \frac{dy}{dt}=1-e^t$

$\frac{d^2x}{dt^2}=e^t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=-e^t$

점 P의 가속도 a는 $a=(e^t,\ -e^t)$이므로 $t=1$에서 점 P의 가속도 a는 $\quad a=(e,\ -e)$

따라서 가속도의 크기는 $\quad \sqrt{e^2+(-e)^2}=\sqrt{2}e$ 정답_②

495

$x=t^2-2t+2,\ y=-t^2+3t+2$에서

$\frac{dx}{dt}=2t-2,\ \frac{dy}{dt}=-2t+3$

이므로 점 P의 속도 v는 $\quad v=(2t-2,\ -2t+3)$

이때, 점 P의 속력은

$\sqrt{(2t-2)^2+(-2t+3)^2}=\sqrt{8t^2-20t+13}$

$=\sqrt{8\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{1}{2}}$

따라서 점 P의 속력은 $t=\frac{5}{4}$일 때 최소이고, 최솟값은

$\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이다. 정답_①

496

벽에서부터 사다리의 아래 끝 점 A까지의 거리를 x cm, 지면에서 사다리의 위 끝 점 B까지의 거리를 y cm라고 하면

$x^2+y^2=300^2$ $\cdots\cdots$ ㉠

양변을 t에 대하여 미분하면

$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0,\ \frac{dy}{dt}=-\frac{x}{y}\cdot\frac{dx}{dt}$

$x=180$일 때, ㉠에서 $y=\sqrt{300^2-180^2}=240$이고,

$\frac{dx}{dt}=8$이므로 $\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{180}{240}\cdot 8=-6$

따라서 A가 벽으로부터 180 cm인 위치에 있을 때, B가 벽을 따라 내려오는 속력은 6 cm/s이므로 $\quad a=6$ 정답_②

497

주어진 곡선이 변곡점을 갖지 않으려면 방정식 $f''(x)=0$이 근을 갖지 않거나 $f''(x)=0$의 근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 한다. ❶

$f(x)=x^2+a\cos x$에서

$f'(x)=2x-a\sin x,\ f''(x)=2-a\cos x$

$f''(x)=0$에서 $\quad 2-a\cos x=0 \qquad \therefore \cos x=\frac{2}{a}$ ❷

(i) 이 방정식이 근을 갖지 않으려면 $\left|\frac{2}{a}\right|>1$이어야 하므로

$\frac{2}{|a|}>1,\ |a|<2$

$\therefore -2<a<0$ 또는 $0<a<2\ (\because a\neq 0)$

(ii) $a=-2$이면 $\quad f''(x)=2(1+\cos x)\geq 0$

$a=2$이면 $\quad f''(x)=2(1-\cos x)\geq 0$

이므로 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않는다.

(i), (ii)에서 변곡점을 갖지 않을 조건은

$-2\le a<0$ 또는 $0<a\le 2$ ❸

따라서 구하는 정수 a는 $-2, -1, 1, 2$의 4개이다. ❹

정답_ 4

단계	채점 기준	비율
❶	변곡점을 갖지 않을 조건 구하기	20%
❷	$f''(x)=0$을 만족시키는 $\cos x$의 값 구하기	30%
❸	변곡점을 갖지 않을 a의 값의 범위 구하기	40%
❹	정수 a의 개수 구하기	10%

498

$f(x)=a(x-\sin 2x)$에서 $f'(x)=a(1-2\cos 2x)$

$f'(x)=0$에서 $\cos 2x=\frac{1}{2}$ ($\because a>0$)

$2x=\frac{\pi}{3}$ ($\because 0\le 2x\le \pi$) $\therefore x=\frac{\pi}{6}$ ❶

$x=\frac{\pi}{6}$를 기준으로 $0\le x\le \frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	0	↘	$a\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	↗	$\frac{\pi}{2}a$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$일 때 최댓값 $\frac{\pi}{2}a$, $x=\frac{\pi}{6}$일 때 최솟값 $a\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$을 갖는다. ❷

이때, 최댓값이 π이므로 $\frac{\pi}{2}a=\pi$ $\therefore a=2$ ❸

따라서 구하는 최솟값은 $2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$ ❹

정답_ $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값 구하기	30%
❷	함수 $f(x)$의 증감표 만들기	30%
❸	a의 값 구하기	20%
❹	함수 $f(x)$의 최솟값 구하기	20%

499

$\overline{AB}$가 원의 지름으로 삼각형 ABP는 직각삼각형이다.

$\triangle AQP \backsim \triangle PQB$이므로 $\overline{AQ}=x$ $(0<x<2)$라고 하면

$\overline{AQ}:\overline{PQ}=\overline{PQ}:\overline{BQ}$, $x:\overline{PQ}=\overline{PQ}:(2-x)$

$\overline{PQ}^2=x(2-x)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{x(2-x)}$ ($\because \overline{PQ}>0$) ❶

삼각형 PAQ의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$S(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{x(2-x)}=\frac{1}{2}\sqrt{2x^3-x^4}$ ❷

$S'(x)=\frac{6x^2-4x^3}{4\sqrt{2x^3-x^4}}=\frac{x^2(3-2x)}{2\sqrt{2x^3-x^4}}$

$S'(x)=0$에서 $3-2x=0$ $\therefore x=\frac{3}{2}$

$x=\frac{3}{2}$을 기준으로 $0<x<2$에서 함수 $S(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	(2)
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	↘	

따라서 함수 $S(x)$는 $x=\frac{3}{2}$일 때 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$을 가지므로 삼각형 PAQ의 넓이의 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$이다. ❸

정답_ $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

단계	채점 기준	비율
❶	$\overline{PQ}$를 x의 식으로 나타내기	40%
❷	삼각형 PAQ의 넓이에 대한 식 세우기	20%
❸	삼각형 PAQ의 넓이의 최댓값 구하기	40%

다른 풀이

$\angle POQ=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라고 하면 삼각형 POQ에서

$\overline{OQ}=\cos\theta$, $\overline{PQ}=\sin\theta$이므로

$\triangle PAQ=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)\sin\theta$

$f(\theta)=(1+\cos\theta)\sin\theta$로 놓으면

$$\begin{aligned}f'(\theta)&=-\sin\theta\cdot\sin\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta\\&=-\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos\theta\\&=-(1-\cos^2\theta)+\cos^2\theta+\cos\theta\\&=2\cos^2\theta+\cos\theta-1\\&=(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)\end{aligned}$$

$f'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=-1$ 또는 $\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$ $\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 함수 $f(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 삼각형 PAQ의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$

500

두 방정식 $e^x=ax$, $\ln x=ax$가 모두 실근을 갖지 않으려면 두 곡선 $y=e^x$, $y=\ln x$가 모두 직선 $y=ax$와 만나지 않아야 한다.

$f(x)=e^x$, $g(x)=\ln x$, $h(x)=ax$로 놓으면

$f'(x)=e^x$, $g'(x)=\frac{1}{x}$, $h'(x)=a$ ❶

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=h(x)$가 $x=t$에서 접한다고 하면

$f(t)=h(t)$에서 $e^t=at$, $f'(t)=h'(t)$에서 $e^t=a$

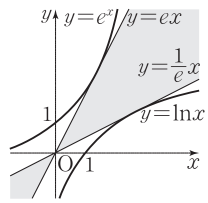
$\therefore t=1, a=e$ ❷

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=h(x)$가 $x=s$에서 접한다고 하면

$g(s)=h(s)$에서 $\ln s=as$, $g'(s)=h'(s)$에서 $\frac{1}{s}=a$

$\therefore s=e, a=\frac{1}{e}$ ······························ ❸

두 곡선 $y=e^x$, $y=\ln x$가 모두 직선 $y=ax$와 만나지 않으려면 오른쪽 그림에서 $\frac{1}{e}<a<e$이어야 하므로



$\alpha=\frac{1}{e}, \beta=e$

$\therefore \alpha\beta=\frac{1}{e}\cdot e=1$ ······························ ❹

정답_ 1

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)=e^x$, $g(x)=\ln x$, $h(x)=ax$로 놓고, $f'(x)$, $g'(x)$, $h'(x)$ 구하기	10%
❷	두 곡선 $y=f(x)$, $y=h(x)$가 접할 때의 x좌표, a의 값 구하기	30%
❸	두 곡선 $y=g(x)$, $y=h(x)$가 접할 때의 x좌표, a의 값 구하기	30%
❹	$\alpha\beta$의 값 구하기	30%

501

$x^2\ge k\ln x$에서 $x^2-k\ln x\ge 0$

$f(x)=x^2-k\ln x$로 놓으면 $f'(x)=2x-\frac{k}{x}=\frac{2x^2-k}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x^2=\frac{k}{2}$ $\therefore x=\sqrt{\frac{k}{2}}$ $(\because x>0)$

$x=\sqrt{\frac{k}{2}}$를 기준으로 $x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{\frac{k}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$\frac{k}{2}-\frac{k}{2}\ln\frac{k}{2}$	↗

함수 $f(x)$가 $x=\sqrt{\frac{k}{2}}$일 때, 최솟값 $\frac{k}{2}-\frac{k}{2}\ln\frac{k}{2}$를 갖는다.

······························ ❶

따라서 $x>0$일 때 $f(x)\ge 0$이려면

$\frac{k}{2}-\frac{k}{2}\ln\frac{k}{2}\ge 0, 1-\ln\frac{k}{2}\ge 0$ $(\because k>0)$

$\ln\frac{k}{2}\le 1, 0<\frac{k}{2}\le e$ $\therefore 0<k\le 2e$ ······························ ❷

따라서 k의 최댓값은 $2e$이다. ······························ ❸

정답_ $2e$

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)=x^2-k\ln x$의 최솟값 구하기	50%
❷	(최솟값)≥ 0임을 이용하여 k의 값의 범위 구하기	40%
❸	k의 최댓값 구하기	10%

502

$f(t)=\sin\pi t+k\cos\pi t$로 놓고 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=f'(t)=\pi\cos\pi t-k\pi\sin\pi t$

$t=\frac{3}{2}$일 때의 속도가 2π이므로

$\pi\cos\frac{3}{2}\pi-k\pi\sin\frac{3}{2}\pi=0-k\pi\cdot(-1)=k\pi=2\pi$

$\therefore k=2$ ······························ ❶

$a=f''(t)=-\pi^2\sin\pi t-2\pi^2\cos\pi t$

따라서 $t=3$일 때 점 P의 가속도는

$f''(3)=-\pi^2\sin 3\pi-2\pi^2\cos 3\pi$

$=0-2\pi^2\cdot(-1)=2\pi^2$ ······························ ❷

정답_ $2\pi^2$

단계	채점 기준	비율
❶	k의 값 구하기	50%
❷	$t=3$에서 점 P의 가속도 구하기	50%

503

ㄱ은 옳다.

$f(x)=x+\sin x$, $f'(x)=1+\cos x$, $f''(x)=-\sin x$

열린구간 $(0, \pi)$에서 $f''(x)<0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다.

ㄴ도 옳다.

$g'(x)=f'(f(x))f'(x)=\{1+\cos(x+\sin x)\}(1+\cos x)$

열린구간 $(0, \pi)$에서 $0<x+\sin x<\pi$, $1+\cos x>0$이므로 $g'(x)>0$

따라서 열린구간 $(0, \pi)$에서 함수 $g(x)$는 증가한다.

ㄷ도 옳다.

함수 $g(x)$는 미분가능하므로 평균값 정리에 의해

$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(x)$인 x가 열린구간 $(0, \pi)$에 존재한다.

$g(0)=f(f(0))=f(0)=0$, $g(\pi)=f(f(\pi))=f(\pi)=\pi$

에서 $\frac{g(\pi)-g(0)}{\pi-0}=1$이므로 $g'(x)=1$인 x가 열린구간 $(0, \pi)$에 존재한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

504

함수 $f(x)$가 역함수를 가지려면 일대일대응이어야 하므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소한다.

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

즉, 실수 전체의 집합에서 $f'(x)\ge 0$이 성립해야 한다. ······ ㉠

$f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax$에서

$f'(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+e^{x+1}(2x+n-2)+a$

$=e^{x+1}(x^2+nx+1)+a$

한편, $h(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)$이라고 하면

$h'(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)+e^{x+1}(2x+n)$

$=e^{x+1}\{x^2+(n+2)x+(n+1)\}$

$=e^{x+1}(x+n+1)(x+1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-n-1$ 또는 $x=-1$ ($\because e^{x+1}>0$)

2 이상의 자연수 n에 대하여 $x=-n-1$, $x=-1$을 기준으로 함수 $h(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-n-1$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때, $\lim_{x\to-\infty} h(x)=0$이고 n은 2 이상의 자연수이므로 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 극소이면서 최소이다.

즉, 함수 $h(x)$의 최솟값 $h(-1)=-n+2$에서 함수 $f'(x)=h(x)+a$의 최솟값은 $-n+2+a$이고, ㉠이어야 하므로

$-n+2+a\ge0$ $\quad\therefore a\ge n-2$

따라서 실수 a의 최솟값은 $g(n)=n-2$이다.

$1\le g(n)\le8$에서 $1\le n-2\le8$ $\quad\therefore 3\le n\le10$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은

$3+4+5+\cdots+10=\dfrac{8(3+10)}{2}=52$ 정답_④

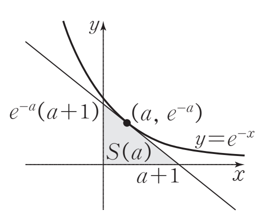
505

$y=e^{-x}$에서 $y'=-e^{-x}$

곡선 위의 점 $(a,\ e^{-a})$에서의 접선의 방정식은

$y-e^{-a}=-e^{-a}(x-a)$ $\quad\therefore y=-e^{-a}x+e^{-a}(a+1)$

이 직선의 x절편과 y절편은 각각 $a+1$, $e^{-a}(a+1)$이므로 오른쪽 그림에서



$S(a)=\dfrac{1}{2}\cdot(a+1)\cdot e^{-a}(a+1)$

$=\dfrac{1}{2}e^{-a}(a+1)^2$

$S'(a)=\dfrac{1}{2}\{-e^{-a}(a+1)^2+2e^{-a}(a+1)\}$

$=-\dfrac{1}{2}e^{-a}(a+1)(a-1)$

$S'(a)=0$에서 $a=1$ ($\because a>0$)

$a=1$을 기준으로 $a>0$에서 함수 $S(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

a	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(a)$		$+$	0	$-$
$S(a)$		↗	$\frac{2}{e}$	↘

따라서 삼각형의 넓이 $S(a)$는 $a=1$일 때 최댓값 $\dfrac{2}{e}$를 갖는다.

정답_④

506

함수 $f(x)=4\ln x+\ln(10-x)$의 정의역은 $\{x\,|\,0<x<10\}$

$f'(x)=\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{10-x}=\dfrac{-5(x-8)}{x(10-x)}$

$f'(x)=0$에서 $x=8$

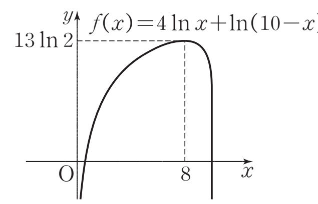
$x=8$을 기준으로 $0<x<10$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	8	$\cdots$	(10)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$13\ln2$	↘	

이때, $\lim_{x\to0+} f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to10-} f(x)=-\infty$

함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ은 옳다.

위의 그래프에서 함수 $f(x)$는 $x=8$에서 최댓값 $13\ln2$를 갖는다.

ㄴ도 옳다.

위의 그래프에서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ은 옳지 않다.

$y=e^{f(x)}=e^{4\ln x+\ln(10-x)}=x^4(10-x)=-x^5+10x^4$에서

$y'=-5x^4+40x^3$, $y''=-20x^3+120x^2=-20x^2(x-6)$

이때, $0<x<6$일 때 $y''>0$, $6<x<10$일 때 $y''<0$이므로 곡선 $y=e^{f(x)}$은 $0<x<6$일 때 아래로 볼록하고, $6<x<10$일 때 위로 볼록하다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 정답_③

507

시각 t에서의 점 P, Q의 좌표를 각각 $\mathrm{P}(x,\ 10\sin x)$, $\mathrm{Q}(q,\ 0)$이라고 하면

$(x-q)^2=10^2-(10\sin x)^2=10^2\cos^2x$이므로

$x-q=|10\cos x|$ $\quad\therefore q=x-|10\cos x|$

한편, 점 P의 속도를 v_{P}라고 하면 $v_{\mathrm{P}}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ 10\cos x\dfrac{dx}{dt}\right)$

이므로 속력은

$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(10\cos x\dfrac{dx}{dt}\right)^2}=\sqrt{1+100\cos^2x}\,\dfrac{dx}{dt}=10$

$\therefore \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{10}{\sqrt{1+100\cos^2x}}$

$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3}{2}\pi$일 때, $q=x+10\cos x$이므로

$\dfrac{dq}{dt}=(1-10\sin x)\dfrac{dx}{dt}$

점 Q의 속도를 v_{Q}라고 하면 $v_{\mathrm{Q}}=\left(\dfrac{dq}{dt},\ 0\right)$

이므로 속력은 $\sqrt{\left(\dfrac{dq}{dt}\right)^2+0^2}=\dfrac{dq}{dt}$

$x=\pi$를 대입하면

$k=(1-10\sin\pi)\dfrac{10}{\sqrt{1+100\cos^2\pi}}=\dfrac{10}{\sqrt{101}}$

$\therefore k^2=\dfrac{100}{101}$ 정답_①

III 적분법

08 여러 가지 적분법

508

(1) $\int \frac{2}{x}dx=2\int \frac{1}{x}dx=2\ln|x|+C$

(2) $\int \frac{1}{x^3}dx=\int x^{-3}dx=-\frac{1}{2}x^{-2}+C=-\frac{1}{2x^2}+C$

(3) $\int \sqrt[3]{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$

(4) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{x}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}dx-\int \frac{1}{x}dx=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)dx$

$=2x^{\frac{1}{2}}-\ln|x|+C=2\sqrt{x}-\ln|x|+C$

정답_(1) $2\ln|x|+C$ (2) $-\frac{1}{2x^2}+C$

(3) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$ (4) $2\sqrt{x}-\ln|x|+C$

509

$\int \frac{x^2-x+2}{x}dx=\int x\,dx-\int 1\,dx+2\int \frac{1}{x}dx$

$=\frac{1}{2}x^2-x+2\ln|x|+C$

따라서 $a=\frac{1}{2}, b=-1, c=2$이므로

$abc=\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot 2=-1$ 정답_②

510

$f(x)=\int\sqrt{x^5}\,dx=\int x^{\frac{5}{2}}dx$

$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+C$

$f(1)=\frac{2}{7}$이므로 $f(1)=\frac{2}{7}+C=\frac{2}{7}$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}$이므로

$f(4)=\frac{2}{7}\cdot 4^3\sqrt{4}=\frac{256}{7}$ 정답_⑤

511

$f(x)=\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx=\int \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x}dx$

$=\int 1\,dx-2\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\int \frac{1}{x}dx$

$=x-4\sqrt{x}+\ln|x|+C$

$f(1)=1$이므로 $1-4+0+C=1$ $\quad\therefore C=4$

따라서 $f(x)=x-4\sqrt{x}+\ln|x|+4$이므로

$f(e^2)=e^2-4e+6$ 정답_⑤

512

$f(x+h)-f(x)=\left(3x^2-\frac{1}{x}\right)h$이므로

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(3x^2-\frac{1}{x}\right)h}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left(3x^2-\frac{1}{x}\right)=3x^2-\frac{1}{x}$

따라서 $f(x)=\int\left(3x^2-\frac{1}{x}\right)dx=x^3-\ln|x|+C$이므로

$f(e)-f(1)=(e^3-\ln e+C)-(1-\ln 1+C)$

$=e^3-2$ 정답_①

513

$\int \frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx=-\frac{1}{x}+C_1$

$\int(3x^2+1)dx=x^3+x+C_2$

이므로

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}+C_1 & (x<-1)\\ x^3+x+C_2 & (x\ge -1)\end{cases}$$

$f(-2)=\frac{1}{2}$이므로

$f(-2)=-\frac{1}{-2}+C_1=\frac{1}{2}+C_1=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore C_1=0$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$-\frac{1}{-1}+C_1=(-1)^3+(-1)+C_2,\ 1=-2+C_2$

$\therefore C_2=3$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x} & (x<-1)\\ x^3+x+3 & (x\ge -1)\end{cases}$이므로

$f(0)=3$ 정답_③

514

(1) $\int(2e^x+4^x)dx=2\int e^x dx+\int 4^x dx=2e^x+\frac{4^x}{\ln 4}+C$

(2) $\int e^{x+3}dx=e^3\int e^x dx=e^3\cdot e^x+C=e^{x+3}+C$

(3) $\int \frac{x\cdot 2^x+3}{x}dx=\int 2^x dx+3\int\frac{1}{x}dx=\frac{2^x}{\ln 2}+3\ln|x|+C$

(4) $\int 3^{2x+1}dx=3\int(3^2)^x dx=3\cdot\frac{(3^2)^x}{\ln 3^2}+C=\frac{3^{2x+1}}{2\ln 3}+C$

정답_(1) $2e^x+\frac{4^x}{\ln 4}+C$ (2) $e^{x+3}+C$

(3) $\frac{2^x}{\ln 2}+3\ln|x|+C$ (4) $\frac{3^{2x+1}}{2\ln 3}+C$

515

$\int \frac{4^x-1}{2^x-1}dx=\int\frac{(2^x-1)(2^x+1)}{2^x-1}dx$

$$=\int(2^x+1)dx$$
$$=\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$$
따라서 $a=\frac{1}{\ln 2}$, $b=1$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{1}{\frac{1}{\ln 2}}=\ln 2$ 정답_①

516

$f(x)=\int(3^x-1)(9^x+3^x+1)dx$
$=\int(3^x-1)(3^{2x}+3^x+1)dx$
$=\int(3^{3x}-1)dx$
$=\int(27^x-1)dx$
$=\frac{27^x}{3\ln 3}-x+C$

$f(0)=\frac{1}{3\ln 3}$이므로

$f(0)=\frac{1}{3\ln 3}+C=\frac{1}{3\ln 3}$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{27^x}{3\ln 3}-x$이므로

$f(1)=\frac{9}{\ln 3}-1$ 정답_④

517

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2e^{2x}+e^x)dx$
$=2\int(e^2)^x dx+\int e^x dx=e^{2x}+e^x+C$

$f(0)=-4$이므로
$1+1+C=-4$ $\quad\therefore C=-6$
$\therefore f(x)=e^{2x}+e^x-6$
방정식 $f(x)=0$, 즉 $e^{2x}+e^x-6=0$에서
$(e^x+3)(e^x-2)=0$ $\quad\therefore e^x=2$ ($\because e^x+3>0$)
$\therefore x=\ln 2$ 정답_④

518

조건 (나)에서 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로

$f'(x)=\frac{xe^x-1}{x}=e^x-\frac{1}{x}$

$\therefore f(x)=\int\left(e^x-\frac{1}{x}\right)dx=e^x-\ln|x|+C$

조건 (가)에서 $f(1)=e$이므로
$e-0+C=e$ $\quad\therefore C=0$
따라서 $f(x)=e^x-\ln|x|$이므로
$f(e)=e^e-1$ 정답_⑤

519

$y=\ln(x+2)-1$로 놓고 x와 y를 서로 바꾸면
$x=\ln(y+2)-1$, $x+1=\ln(y+2)$
$e^{x+1}=y+2$ $\quad\therefore y=e^{x+1}-2$

$G(x)=\int g(x)dx=\int(e^{x+1}-2)dx$
$=e^{x+1}-2x+C$

$G(-1)=4$이므로
$G(-1)=1+2+C=4$ $\quad\therefore C=1$
따라서 $G(x)=e^{x+1}-2x+1$이므로
$G(0)=e+1$ 정답_④

520

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 e^x에 정비례하므로 $f'(x)=ke^x$ $(k\neq 0)$으로 놓으면

$f(x)=\int f'(x)dx=\int ke^x dx=ke^x+C$

곡선 $y=f(x)$는 두 점 $(0,\ 5)$, $(1,\ 2e+3)$을 지나므로
$f(0)=k+C=5$ ……㉠
$f(1)=ke+C=2e+3$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $k=2$, $C=3$
따라서 $f(x)=2e^x+3$
$f(2)=2e^2+3$ 정답_⑤

521

$W(t)=\int 0.02e^{0.1t}dt=0.02\int(e^{0.1})^t dt=0.2e^{0.1t}+C$

처음 효모의 질량이 2 g이므로 $W(0)=2$에서
$0.2+C=2$ $\quad\therefore C=1.8$
$W(t)=0.2e^{0.1t}+1.8$이므로
$W(10)=0.2e+1.8$
따라서 10시간 후 효모의 질량은 $(0.2e+1.8)$g이다. 정답_④

522

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=e^x$에서

$f(x)+g(x)=\int e^x dx=e^x+C_1$

양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=1$, $g(1)=-1$이므로
$f(1)+g(1)=e+C_1=0$ $\quad\therefore C_1=-e$
$\therefore f(x)+g(x)=e^x-e$ ……㉠

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=e^{-x}$에서

$f(x)-g(x)=\int e^{-x}dx=-e^{-x}+C_2$

양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=1$, $g(1)=-1$이므로
$f(1)-g(1)=-e^{-1}+C_2=2$ $\quad\therefore C_2=e^{-1}+2$
$\therefore f(x)-g(x)=-e^{-x}+e^{-1}+2$ ……㉡

㉠－㉡을 하면 $2g(x)=(e^x+e^{-x})-(e+e^{-1})-2$

따라서 $g(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})-\frac{1}{2}(e+e^{-1})-1$이므로

$\therefore g(-1)=\frac{1}{2}(e+e^{-1})-\frac{1}{2}(e+e^{-1})-1=-1$ 정답_ ②

523

(1) $\int(3\sin x+2\cos x)dx=-3\cos x+2\sin x+C$

(2) $\int(\sec x+\tan x)\sec x\,dx$

$=\int\sec^2 x\,dx+\int\sec x\tan x\,dx$

$=\tan x+\sec x+C$

(3) $\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx$

$=\int(\csc^2 x-1)dx$

$=-\cot x-x+C$

(4) $\tan^2 x=\sec^2 x-1$이므로

$\int\tan^2 x\,dx=\int(\sec^2 x-1)dx=\tan x-x+C$

정답_ (1) $-3\cos x+2\sin x+C$ (2) $\tan x+\sec x+C$
(3) $-\cot x-x+C$ (4) $\tan x-x+C$

524

$\int\frac{(\sin x-\cos x)^2}{\sin^2 x}dx+\int\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin^2 x}dx$

$=\int\frac{(\sin x-\cos x)^2+(\sin x+\cos x)^2}{\sin^2 x}dx$

$=\int\frac{2}{\sin^2 x}dx$

$=2\int\csc^2 x\,dx$

$=-2\cot x+C$ 정답_ ④

525

$f(x)=\int\tan x\cos x\,dx=\int\sin x\,dx=-\cos x+C$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f(0)=\left(-\cos\frac{\pi}{3}+C\right)-(-\cos 0+C)$

$=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$ 정답_ $\frac{1}{2}$

526

$f(x)=\int\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}dx$

$=\int(1+\cos x)dx=x+\sin x+C$

$f(0)=0$이므로 $0+C=0$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=x+\sin x$이므로

$f(\pi)=\pi+0=\pi$ 정답_ ④

527

$\int(-\sin x)dx=\cos x+C_1$,

$\int(1+\cos x)dx=x+\sin x+C_2$이므로

$f(x)=\begin{cases}\cos x+C_1 & (x<0)\\ x+\sin x+C_2 & (x\ge 0)\end{cases}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$이므로 $\frac{\pi}{2}+1+C_2=\frac{\pi}{2}$ $\therefore C_2=-1$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$1+C_1=0+C_2$, $1+C_1=-1$ $\therefore C_1=-2$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\cos x-2 & (x<0)\\ x+\sin x-1 & (x\ge 0)\end{cases}$이므로

$f(-\pi)+f(\pi)=-3+(\pi-1)=\pi-4$ 정답_ ①

528

접선의 기울기가 $\cot^2 x$이므로 $f'(x)=\cot^2 x$

$f(x)=\int\cot^2 x\,dx=\int(\csc^2 x-1)dx=-\cot x-x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$를 지나므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$에서 $0-\frac{\pi}{2}+C=-\frac{\pi}{2}$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=-\cot x-x$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1-\frac{\pi}{4}$ 정답_ ①

529

$F(x)=xf(x)-(x\sin x+\cos x)$에서

$F'(x)=f(x)+xf'(x)-(\sin x+x\cos x-\sin x)$

$f(x)=f(x)+xf'(x)-x\cos x$, $xf'(x)=x\cos x$

$x>0$이므로 양변을 x로 나누면 $f'(x)=\cos x$

$\therefore f(x)=\int\cos x\,dx=\sin x+C$

$f(\pi)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=\sin x$이므로 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ 정답_ ④

530

$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{f(x)}{x-\frac{\pi}{6}}=k-1$에서 극한값이 존재하고 $x\to\frac{\pi}{6}$일 때

(분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}f(x)=0$에서 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{f(x)}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$=k\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}k$

즉, $\frac{1}{2}k=k-1$이므로 $k=2$

$f'(x)=2\cos 2x$이므로

$f(x)=\int 2\cos 2x dx=\sin 2x+C$ ……㉠

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$이므로

$\sin\frac{\pi}{3}+C=0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}+C=0$ $\quad\therefore C=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 $f(x)=\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

정답_②

531

$f(x)=\int\frac{1}{x^2+x}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\ln|x|-\ln|x+1|+C$

$f(1)=-\ln 2$이므로 $-\ln 2+C=-\ln 2$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\ln|x|-\ln|x+1|$이므로

$f(2)=\ln 2-\ln 3=\ln\frac{2}{3}$

정답_①

532

$\frac{x-8}{x^2-x-6}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-3}$ (a, b는 상수)로 놓으면

$\frac{x-8}{x^2-x-6}=\frac{(a+b)x-3a+2b}{(x+2)(x-3)}$이므로

$a+b=1,\ -3a+2b=-8$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-1$

즉, $\frac{x-8}{x^2-x-6}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-3}$이므로

$f(x)=\int\frac{x-8}{x^2-x-6}dx=\int\left(\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-3}\right)dx$

$=2\ln|x+2|-\ln|x-3|+C$

$f(2)=4\ln 2$이므로 $2\ln 4+C=4\ln 2$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=2\ln|x+2|-\ln|x-3|$이므로

$f(4)=2\ln 6-0=2\ln 6$

정답_②

533

$\frac{6}{x^2+2x-8}=\frac{6}{(x-2)(x+4)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+4}$이므로

$f(x)=\int\frac{6}{x^2+2x-8}dx=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+4}\right)dx$

$=\ln|x-2|-\ln|x+4|+C$

$f(3)=\ln 7$이므로 $-\ln 7+C=\ln 7$ $\quad\therefore C=2\ln 7$

따라서 $f(x)=\ln|x-2|-\ln|x+4|+2\ln 7$이므로

$f(-5)=\ln 7+2\ln 7=3\ln 7$

정답_②

534

$\frac{x+1}{x(x-1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$ (a, b, c는 상수)

로 놓으면

$\frac{x+1}{x(x-1)^2}=\frac{a(x-1)^2+bx(x-1)+cx}{x(x-1)^2}$

이므로 $x+1=a(x-1)^2+bx(x-1)+cx$에서

$x+1=(a+b)x^2+(-2a-b+c)x+a$

$a+b=0,\ -2a-b+c=1,\ a=1$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-1,\ c=2$

즉, $\frac{x+1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}$이므로

$f(x)=\int\frac{x+1}{x(x-1)^2}dx$

$=\int\left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right\}dx$

$=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C$

$=\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{2}{x-1}+C$

$f(2)=-2$이므로 $\ln 2-2+C=-2$ $\quad\therefore C=-\ln 2$

따라서 $f(x)=\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{2}{x-1}-\ln 2$이므로

$f(3)=\ln\frac{3}{2}-1-\ln 2=\ln\frac{3}{4}-1$

정답_④

535

$2x+3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$이므로

$f(x)=\int(2x+3)^3dx=\frac{1}{2}\int t^3dt$

$=\frac{1}{8}t^4+C=\frac{1}{8}(2x+3)^4+C$

따라서 $a=8,\ b=4$이므로

$a+b=8+4=12$

정답_②

536

$3x^2-x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=6x-1$이므로

$f(x)=\int(6x-1)(3x^2-x+1)^4dx$

$=\int t^4dt=\frac{1}{5}t^5+C$

$=\frac{1}{5}(3x^2-x+1)^5+C$

$f(0)=\frac{1}{5}$이므로 $\frac{1}{5}+C=\frac{1}{5}$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{5}(3x^2-x+1)^5$이므로

$f(1)=\frac{1}{5}\cdot 3^5=\frac{243}{5}$

정답_⑤

537

$x^4+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=4x^3$이므로

$$f(x)=\int \frac{x^3}{x^4+1}dx=\frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+1}dx$$
$$=\frac{1}{4}\int \frac{1}{t}dt=\frac{1}{4}\ln|t|+C$$
$$=\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+C\ (\because x^4+1>0)$$

$f(0)=\frac{1}{4}$이므로 $\frac{1}{4}\ln(0+1)+C=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore C=\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+\frac{1}{4}$이므로

$f(\sqrt[4]{e^2-1})=\frac{1}{4}\ln(e^2-1+1)+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ 정답_③

538

$$\frac{x^3+2x}{x^2+x+1}=x-1+\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

$x^2+x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+1$이므로

$$f(x)=\int \frac{x^3+2x}{x^2+x+1}dx$$
$$=\int(x-1)dx+\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$
$$=\int(x-1)dx+\int\frac{1}{t}dt$$
$$=\frac{1}{2}x^2-x+\ln|t|+C$$
$$=\frac{1}{2}x^2-x+\ln(x^2+x+1)+C\ (\because x^2+x+1>0)$$

$f(0)=0$이므로 $0+C=0$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\ln(x^2+x+1)$이므로

$f(-1)=\frac{1}{2}+1+0=\frac{3}{2}$ 정답_⑤

539

$0<x<1$이므로 $f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$

$1-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$이므로

$$F(x)=\int\frac{1}{1-x}dx=-\int\frac{1}{t}dt$$
$$=-\ln|t|+C=-\ln|1-x|+C$$

$F(0)=0$이므로 $-\ln 1+C=0$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $F(x)=-\ln|1-x|$이므로

$F(e^3+1)=-\ln e^3=-3$ 정답_①

540

$2x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$이므로

$$\int\sqrt{2x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}t\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C$$

$\therefore k=\frac{1}{3}$ 정답_$\frac{1}{3}$

541

$x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$f(x)=\int x\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$$
$$=\frac{1}{3}t\sqrt{t}+C=\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C$$

$f(0)=\frac{1}{3}$이므로 $\frac{1}{3}+C=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$이므로

$f(2\sqrt{2})=\frac{1}{3}(8+1)\sqrt{8+1}=9$ 정답_⑤

542

$\sqrt{x+1}=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$이므로

$$f(x)=\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx$$
$$=\int\frac{t-1}{t+1}\cdot 2t\,dt$$
$$=\int\frac{2t^2-2t}{t+1}dt$$
$$=\int\left(2t-4+\frac{4}{t+1}\right)dt$$
$$=t^2-4t+4\ln|t+1|+C$$
$$=x+1-4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}+1)+C$$

$f(0)=4\ln 2$이므로 $-3+4\ln 2+C=4\ln 2$ $\quad\therefore C=3$

따라서 $f(x)=x+1-4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}+1)+3$이므로

$f(e^2-1)=e^2-4e+4\ln(e+1)+3$ 정답_⑤

543

$x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$f(x)=\int\frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{2}{\sqrt{t}}dt$$
$$=4\sqrt{t}+C=4\sqrt{x^2+1}+C$$

$\therefore f(\sqrt{3})-f(0)=(8+C)-(4+C)=4$ 정답_④

544

$x^3+5=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3x^2$이므로

$$f(x)=\int 3x^2e^{x^3+5}dx=\int e^t\,dt$$
$$=e^t+C=e^{x^3+5}+C$$

$f(0)=-e^5$이므로 $e^5+C=-e^5$ $\quad\therefore C=-2e^5$

$\therefore f(x)=e^{x^3+5}-2e^5$ 정답_①

545

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx=\int t^2dt$$
$$=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}(\ln x)^3+C$$

$f(e)=\frac{1}{3}$이므로 $\frac{1}{3}\cdot 1^3+C=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}(\ln x)^3$이므로

$f(e^3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3=9$

정답_ 9

546

$\ln x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$\int\frac{\ln x}{x(\ln x+1)^2}dx=\int\frac{t-1}{t^2}dt=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt$$
$$=\ln|t|+\frac{1}{t}+C$$
$$=\ln|\ln x+1|+\frac{1}{\ln x+1}+C$$

따라서 $a=1, b=1$이므로

$a+b=1+1=2$

정답_ ②

547

$1-e^x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-e^x$이므로

$$f(x)=\int\frac{e^x}{1-e^x}dx=-\int\frac{1}{1-e^x}\cdot(-e^x)dx$$
$$=-\int\frac{1}{t}dt=-\ln|t|+C=\ln\left|\frac{1}{1-e^x}\right|+C$$

$$\therefore f(1)-f(2)=\ln\frac{1}{e-1}-\ln\frac{1}{e^2-1}$$
$$=\ln\frac{e^2-1}{e-1}=\ln(e+1)$$

정답_ ⑤

548

$e^x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{e^x+1}dx=\int\frac{e^x}{(e^x+1)e^x}dx$$
$$=\int\frac{1}{t(t-1)}dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt$$
$$=\ln|t-1|-\ln|t|+C=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|+C$$
$$=\ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right|+C$$
$$=\ln\frac{e^x}{e^x+1}+C\ \left(\because \frac{e^x}{e^x+1}>0\right)$$

$f(0)=0$이므로

$\ln\frac{1}{2}+C=0$ $\quad\therefore C=\ln 2$

따라서 $f(x)=\ln\frac{e^x}{e^x+1}+\ln 2$이므로

$$f(\ln 3)=\ln\frac{e^{\ln 3}}{e^{\ln 3}+1}+\ln 2$$
$$=\ln\frac{3}{4}+\ln 2=\ln\frac{3}{2}$$

정답_ ①

549

$xf'(x)=2(\ln x)^3$에서 $f'(x)=\frac{2(\ln x)^3}{x}$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$f(x)=\int\frac{2(\ln x)^3}{x}dx=\int 2t^3dt$$
$$=\frac{1}{2}t^4+C=\frac{1}{2}(\ln x)^4+C$$

$f(e)=\frac{7}{2}$이므로 $\frac{1}{2}+C=\frac{7}{2}$ $\quad\therefore C=3$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^4+3$

방정식 $f(x)=11$에서

$\frac{1}{2}(\ln x)^4+3=11, (\ln x)^4=16$

$\ln x=-2$ 또는 $\ln x=2$ ($\because$ x는 실수)

$\therefore x=\frac{1}{e^2}$ 또는 $x=e^2$

따라서 주어진 방정식을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱은

$\frac{1}{e^2}\cdot e^2=1$

정답_ ①

550

$-x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-2x$이므로

$$P(x)=\int 2xe^{-x^2}dx=-\int e^t dt=-e^t+C=-e^{-x^2}+C$$

새로운 기술로 제품을 생산한 지 1개월 후의 이익이 1천만 원이므로 $P(1)=1$에서

$-e^{-1^2}+C=1$ $\quad\therefore C=1+\frac{1}{e}$

$\therefore P(x)=-e^{-x^2}+1+\frac{1}{e}$

정답_ ④

551

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기가 $-(2+e^x)$이므로

$$f'(x)=\frac{1}{2+e^x}$$

$$f(x)=\int\frac{1}{2+e^x}dx=\int\frac{e^{-x}}{2e^{-x}+1}dx$$

$2e^{-x}+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-2e^{-x}$

$f(x)=\int \frac{e^{-x}}{2e^{-x}+1}dx=-\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt$

$=-\frac{1}{2}\ln|t|+C$

$=-\frac{1}{2}\ln(2e^{-x}+1)+C\ (\because 2e^{-x}+1>0)$

곡선 $y=f(x)$가 점 $\left(0,\ -\frac{\ln 3}{2}\right)$을 지나므로

$f(0)=-\frac{1}{2}\ln 3+C=-\frac{\ln 3}{2}$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}\ln(2e^{-x}+1)$이므로

$f(\ln 2)=-\frac{1}{2}\ln(2e^{-\ln 2}+1)=-\frac{1}{2}\ln 2=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$ 정답_ ①

552

$\cos^3 x=\cos^2 x\cos x=(1-\sin^2 x)\cos x$

$\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$f(x)=\int \cos^3 x dx=\int (1-\sin^2 x)\cos x dx$

$=\int (1-t^2)dt=t-\frac{1}{3}t^3+C$

$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

$f(x)=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x=\sin x\left(1-\frac{1}{3}\sin^2 x\right)$

따라서 $a=1, b=-\frac{1}{3}$이므로

$a+b=1+\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$ 정답_ $\frac{2}{3}$

553

$\sqrt{x}=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$이므로

$f(x)=\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\int \cos t\, dt$

$=2\sin t+C=2\sin\sqrt{x}+C$

$f(0)=1$이므로 $2\cdot 0+C=1$ $\therefore C=1$

따라서 $f(x)=2\sin\sqrt{x}+1$이므로

$f\left(\frac{\pi^2}{4}\right)=2\sin\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}+1=2\sin\frac{\pi}{2}+1=3$ 정답_ 3

554

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$f(x)=\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx=\int \cos t\, dt$

$=\sin t+C=\sin(\ln x)+C$

$f(e^{-\pi})=-1$이므로 $\sin(\ln e^{-\pi})+C=-1$ $\therefore C=-1$

$\therefore f(x)=\sin(\ln x)-1$ 정답_ ①

555

$f(x)=\int \frac{1}{\cos^2 x(1+\tan x)}dx=\int \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}dx$

$\tan x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\sec^2 x$이므로

$f(x)=\int \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}dx=\int \frac{1}{1+t}dt=\ln|1+t|+C$

$=\ln|1+\tan x|+C$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\ln 2$이므로 $\ln(1+1)+C=\ln 2$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\ln|1+\tan x|$이므로

$f(0)=\ln(1+0)=0$ 정답_ ①

556

$f(x)=\int \tan x\, dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx$

$\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$f(x)=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int \frac{1}{t}dt$

$=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C$

$f(0)=1$이므로 $-\ln|1|+C=1$ $\therefore C=1$

$\therefore f(x)=-\ln|\cos x|+1$ 정답_ ⑤

557

$f'(x)=2\sin x\cos x-\cos x=(2\sin x-1)\cos x$

$\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$f(x)=\int (2\sin x-1)\cos x dx=\int (2t-1)dt$

$=t^2-t+C=\sin^2 x-\sin x+C$

한편, $f(x)$가 극댓값을 가지므로 $f'(x)=0$에서

$(2\sin x-1)\cos x=0$ $\therefore \sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}\left(\because 0<x<\frac{3}{4}\pi\right)$

$x=\frac{\pi}{6}, x=\frac{\pi}{2}$를 기준으로 $0<x<\frac{3}{4}\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\left(\frac{3}{4}\pi\right)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극솟값을 갖고, $x=\frac{\pi}{2}$에서 극댓값을 갖는다.

극댓값이 0이므로 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$에서 $1^2-1+C=0$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\sin^2 x-\sin x$이므로 구하는 극솟값은

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$ 정답_ ②

558

$f(x)>0$이므로 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=x$에서 $\ln f(x)+C_1=x$

$\ln f(x)=x+C$ (단, $C=-C_1$) $\quad \therefore f(x)=e^{x+C}$

$f(0)=1$이므로 $e^C=1 \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=e^x$이므로 $f(e)=e^e$ 정답_⑤

559

$f'(x)+2g(x)=0$과 $g'(x)+2f(x)=0$의 양변을 변끼리 더하면

$f'(x)+g'(x)+2\{f(x)+g(x)\}=0$

$f'(x)+g'(x)=-2\{f(x)+g(x)\}$

$\therefore \frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}=-2$

$f(x)+g(x)>0$이므로 위 등식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$\int \frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}dx=-\int 2\,dx$

$\ln\{f(x)+g(x)\}=-2x+C$

$\therefore f(x)+g(x)=e^{-2x+C}$

$f(1)+g(1)=e^3$이므로 $e^{-2+C}=e^3 \quad \therefore C=5$

따라서 $f(x)+g(x)=e^{-2x+5}$이므로 $f(x)+g(x)=e$에서

$e^{-2x+5}=e,\ -2x+5=1 \quad \therefore x=2$ 정답_④

560

$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=f(x)\left\{g(x)+\frac{d}{dx}g(x)\right\}$에서

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=f(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$\therefore f'(x)g(x)=f(x)g(x)$ ……㉠

$f(x)>0,\ g(x)\neq 0$이므로 ㉠의 양변을 $f(x)g(x)$로 나누면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=1$

이 등식의 양변을 적분하면 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 1\,dx$

$\ln f(x)+C_1=x+C_2$, 즉 $\ln f(x)=x+C$ (단, $C=C_2-C_1$)

$\therefore f(x)=e^{x+C}$

$f(0)=e$이므로 $e^C=e \quad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=e^{x+1}$이므로 $f(-1)=e^0=1$ 정답_①

561

(1) $f'(x)=e^x,\ g(x)=x$로 놓으면

$f(x)=e^x,\ g'(x)=1$이므로

$\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C$

(2) $f'(x)=1,\ g(x)=\ln x$로 놓으면

$f(x)=x,\ g'(x)=\frac{1}{x}$이므로

$\int \ln x\,dx=x\ln x-\int 1\,dx=x\ln x-x+C$

(3) $f'(x)=\cos x,\ g(x)=x$로 놓으면

$f(x)=\sin x,\ g'(x)=1$이므로

$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int \sin x\,dx$

$=x\sin x+\cos x+C$

정답_(1) xe^x-e^x+C (2) $x\ln x-x+C$
(3) $x\sin x+\cos x+C$

562

$f'(x)=(x-2)e^x$이므로 $f(x)=\int (x-2)e^x dx$

$u'(x)=e^x,\ v(x)=x-2$로 놓으면

$u(x)=e^x,\ v'(x)=1$이므로

$f(x)=\int (x-2)e^x dx=(x-2)e^x-\int e^x dx$

$=(x-2)e^x-e^x+C=(x-3)e^x+C$

$f(1)=-e$이므로 $-2e+C=-e \quad \therefore C=e$

따라서 $f(x)=(x-3)e^x+e$이므로

$f(2)=(2-3)e^2+e=-e^2+e$ 정답_①

563

$f'(x)=x^2\ln x$이므로 $f(x)=\int x^2\ln x\,dx$

$u'(x)=x^2,\ v(x)=\ln x$로 놓으면

$u(x)=\frac{1}{3}x^3,\ v'(x)=\frac{1}{x}$이므로

$f(x)=\int x^2\ln x\,dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^2 dx$

$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$

$f(1)=-\frac{1}{9}$이므로 $-\frac{1}{9}+C=-\frac{1}{9} \quad \therefore C=0$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3$

$f(x)=0$에서 $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3=0,\ \frac{1}{3}x^3\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)=0$

$x>0$이므로 $\ln x-\frac{1}{3}=0,\ \ln x=\frac{1}{3}$

$\therefore x=\sqrt[3]{e}$ 정답_①

564

$\int xe^x dx$에서 $u'(x)=e^x,\ v(x)=x$로 놓으면

$u(x)=e^x,\ v'(x)=1$

$\therefore \int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C_1=(x-1)e^x+C_1$

$\int x^2 dx=\frac{1}{3}x^3+C_2$이므로

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)e^x+C_1 & (x<0)\\ \frac{1}{3}x^3+C_2 & (x\geq 0)\end{cases}$$

$f(1)=\frac{1}{3}$이므로 $\frac{1}{3}+C_2=\frac{1}{3} \quad \therefore C_2=0$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$-1+C_1=C_2,\ -1+C_1=0 \qquad \therefore C_1=1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}(x-1)e^x+1 & (x<0)\\ \dfrac{1}{3}x^3 & (x\geq 0)\end{cases}$ 이므로

$f(-1)=-2e^{-1}+1=1-\dfrac{2}{e}$ 정답_ ②

565

$\dfrac{d}{dx}e^{f(x)}=x\cos x\cdot e^{f(x)}$에서

$e^{f(x)}f'(x)=x\cos x\cdot e^{f(x)}$

$f'(x)=x\cos x\ (\because e^{f(x)}>0)$

$f(x)=\int x\cos x\,dx$에서

$u'(x)=\cos x,\ v(x)=x$로 놓으면

$u(x)=\sin x,\ v'(x)=1$

$f(x)=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C$

$f(\pi)=-1$이므로

$0+(-1)+C=-1 \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=x\sin x+\cos x$이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}+0=\dfrac{\pi}{2}$ 정답_ ①

566

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $x\sin x$이므로 $f'(x)=x\sin x \qquad \therefore f(x)=\int x\sin x\,dx$

$u'(x)=\sin x,\ v(x)=x$로 놓으면

$u(x)=-\cos x,\ v'(x)=1$이므로

$f(x)=\int x\sin x\,dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx$

$\qquad=-x\cos x+\sin x+C$

곡선 $y=f(x)$가 원점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$f(0)=0$에서 $0+C=0 \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=-x\cos x+\sin x$이므로 $f(\pi)=\pi$ 정답_ ⑤

567

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로 $F'(x)=f(x)$이고

$\{xF(x)\}'=F(x)+xF'(x)=F(x)+xf(x)$

즉, 조건 (가)에서 $F(x)+xf(x)=(2x+2)e^x$이므로

$\{xF(x)\}'=(2x+2)e^x$

$\int\{xF(x)\}'dx=\int(2x+2)e^x\,dx$에서

$u'(x)=e^x,\ v(x)=2x+2$로 놓으면

$u(x)=e^x,\ v'(x)=2$이므로

$\int(2x+2)e^x\,dx=(2x+2)e^x-\int 2e^x\,dx$

$\qquad=(2x+2)e^x-2e^x+C=2xe^x+C$

$\therefore xF(x)=2xe^x+C$ ······ ㉠

조건 (나)에서 $F(1)=2e$이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1\cdot F(1)=2e+C=2e \qquad \therefore C=0$

따라서 $xF(x)=2xe^x$이므로

$F(x)=2e^x\ (\because x>0) \qquad \therefore F(3)=2e^3$ 정답_ ④

568

$xf'(x)+f(x)=x\ln x$에서

$\dfrac{d}{dx}\{xf(x)\}=xf'(x)+f(x)$이므로 $xf(x)=\int x\ln x\,dx$

$u'(x)=x,\ v(x)=\ln x$로 놓으면

$u(x)=\dfrac{1}{2}x^2,\ v'(x)=\dfrac{1}{x}$이므로

$\int x\ln x\,dx=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{2}\int x\,dx$

$\qquad=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+C$

$\therefore xf(x)=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+C$

위의 등식의 양변에 $x=e$를 대입하면

$ef(e)=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{e^2}{4}+C=\dfrac{e^2}{4}+C$

$ef(e)=\dfrac{e^2}{4}$이므로 $\dfrac{e^2}{4}+C=\dfrac{e^2}{4} \qquad \therefore C=0$

$\therefore xf(x)=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2$

위의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1\cdot f(1)=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot0\cdot-\dfrac{1}{4}\cdot1 \qquad \therefore f(1)=-\dfrac{1}{4}$ 정답_ $-\dfrac{1}{4}$

569

$\dfrac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))g'(x)=e^x\sin x$에서

$f(g(x))=\int e^x\sin x\,dx$

$u'(x)=e^x,\ v(x)=\sin x$로 놓으면

$u(x)=e^x,\ v'(x)=\cos x$이므로

$\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$ ······ ㉠

이때, $\int e^x\cos x\,dx$에서

$h'(x)=e^x,\ k(x)=\cos x$로 놓으면

$h(x)=e^x,\ k'(x)=-\sin x$이므로

$\int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\left(e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx\right)$

$\qquad=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\,dx$

$\therefore f(g(x))=\int e^x\sin x\,dx$

$\qquad=\dfrac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$ ······ ㉢

$g(x)=e^x$에서 $g(0)=1$이고, $f(1)=-\frac{1}{2}$이므로 ㉢에서

$f(g(0))=-\frac{1}{2}+C=-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore C=0$

$\therefore f(g(x))=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)$

이때, $g(\pi)=e^{\pi}$이므로

$f(e^{\pi})=f(g(\pi))=\frac{e^{\pi}}{2}(0+1)=\frac{e^{\pi}}{2}$

정답_ ③

570

$f(x)=\int\frac{x-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx=\int(x^{\frac{2}{3}}-1)\,dx$

$=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-x+C=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}-x+C$ ❶

$f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}-x+1$이므로 ❷

$f(1)=\frac{3}{5}-1+1=\frac{3}{5}$ ❸

정답_ $\frac{3}{5}$

단계	채점 기준	비율
❶	부정적분을 이용하여 $f(x)$ 구하기	60%
❷	$f(0)=1$을 이용하여 $f(x)$의 식 완성하기	20%
❸	$f(1)$의 값 구하기	20%

571

조건 (나)에서 $g(x)=xf(x)-x$이므로

$g'(x)=f(x)+xf'(x)-1$

이때, 조건 (가)에서 $g'(x)=f(x)$이므로

$f(x)=f(x)+xf'(x)-1$, $xf'(x)=1$

$x\neq0$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=\frac{1}{x}$ ❶

$f(x)=\int\frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C$ ……㉠

❷

또한, 조건 (다)에서 $g(e)=e$이므로

$g(e)=ef(e)-e=e(\ln e+C)-e=e\cdot C=e$ $\quad\therefore C=1$

$\therefore f(x)=\ln|x|+1$ ❸

정답_ $f(x)=\ln|x|+1$

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)$ 구하기	40%
❷	$f(x)$ 구하기 (적분상수 C 제외)	30%
❸	적분상수 C의 값과 $f(x)$ 구하기	30%

572

$f(x)+g(x)=2e^x$ ……㉠

$f'(x)-g'(x)=6e^x$의 양변을 x에 대하여 적분하면

$\int\{f'(x)-g'(x)\}dx=\int6e^x\,dx$에서

$f(x)-g(x)=6e^x+C$

위의 식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)-g(0)=6+C$, $2-0=6+C$ $\quad\therefore C=-4$

$\therefore f(x)-g(x)=6e^x-4$ ……㉡

❶

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$f(x)=4e^x-2$, $g(x)=-2e^x+2$ ❷

정답_ $f(x)=4e^x-2$, $g(x)=-2e^x+2$

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)-g(x)$ 구하기	50%
❷	$f(x)$, $g(x)$ 구하기	50%

573

$h'(x)=2f(x)+g(x)$이므로

$h(x)=\int\{2f(x)+g(x)\}dx$

$=2\int f(x)dx+\int g(x)dx$ ……㉠

(i) $\int f(x)dx=\int(-e^{-x})dx=e^{-x}+C_1$ ……㉡

(ii) $\int g(x)dx=\int\cos^2x\sin x\,dx$에서 $\cos x=t$로 놓으면

$\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$\int g(x)dx=-\int t^2\,dt=-\frac{1}{3}t^3+C_2$

$=-\frac{1}{3}\cos^3x+C_2$ ……㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$h(x)=2e^{-x}-\frac{1}{3}\cos^3x+C$ ❶

$h(0)=0$이므로 $2-\frac{1}{3}+C=0$ $\quad\therefore C=-\frac{5}{3}$

따라서 $h(x)=2e^{-x}-\frac{1}{3}\cos^3x-\frac{5}{3}$이므로 ❷

$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=2e^{-\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}\cos^3\frac{\pi}{2}-\frac{5}{3}=2e^{-\frac{\pi}{2}}-\frac{5}{3}$ ❸

정답_ $2e^{-\frac{\pi}{2}}-\frac{5}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	$h(x)$ 구하기 (적분상수 C 제외)	50%
❷	적분상수 C의 값과 $h(x)$ 구하기	30%
❸	$h\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값 구하기	20%

574

$F(x)=xf(x)-x^2\sin x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-2x\sin x-x^2\cos x$

$xf'(x)=2x\sin x+x^2\cos x$

$x>0$이므로 양변을 x로 나누면

$f'(x)=2\sin x+x\cos x$ ❶

$\int x\cos x\,dx$에서 $u'(x)=\cos x$, $v(x)=x$로 놓으면

$u(x)=\sin x, v'(x)=1$이므로

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin dx$$

$$\therefore f(x)=\int(2\sin x + x\cos x)dx$$

$$=-2\cos x + x\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$=-2\cos x + x\sin x + \cos x + C$$

$$=x\sin x - \cos x + C \text{ ······ ❷}$$

$f(\pi)=1$이므로 $0+1+C=1$ $\therefore C=0$

$\therefore f(x)=x\sin x-\cos x$ ······ ❸

정답_ $f(x)=x\sin x-\cos x$

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)$ 구하기	40%
❷	$f(x)$ 구하기 (적분상수 C 제외)	40%
❸	적분상수 C의 값과 $f(x)$ 구하기	20%

575

점 $(x,\ y)$에서 접선의 기울기는 $f'(x)$이므로

$f'(x)\cdot\left(-\dfrac{1}{\ln x}\right)=-1$ $\therefore f'(x)=\ln x$ ······ ❶

$f(x)=\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$ ······ ❷

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$f(1)=-1+C=0$ $\therefore C=1$

$\therefore f(x)=x\ln x - x + 1$ ······ ❸

정답_ $f(x)=x\ln x-x+1$

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)$ 구하기	40%
❷	$f(x)$ 구하기 (적분상수 C 제외)	30%
❸	적분상수 C의 값과 $f(x)$ 구하기	30%

576

$f(x)=ae^x$에서 $f'(x)=ae^x$

$g(x)=\int e^x f(x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=e^x f(x)$

$\therefore f'(x)+g'(x)=ae^x+e^x f(x)=ae^x+e^x\cdot ae^x=ae^{2x}+ae^x$

$f'(x)+g'(x)=e^{2x}+e^x$이므로 $ae^{2x}+ae^x=e^{2x}+e^x$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 $a=1$

따라서 $f(x)=e^x$이므로 $f(2)=e^2$

정답_ ⑤

577

$$f(\theta)=\int 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta - \int(\sin\theta+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$=\int 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta - \int(1+2\sin\theta\cos\theta)d\theta$$

$$=\int(-1)d\theta = -\theta + C$$

$f(\theta^2)=-\theta^2+C$이므로

$f(\theta^2)=f(\theta)-6$에서 $-\theta^2+C=-\theta+C-6$

$\theta^2-\theta-6=0,\ (\theta+2)(\theta-3)=0$

$\therefore \theta=3\ (\because \theta>0)$

정답_ ③

578

$F(x)=xf(x)+x\cos x-\sin x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)+xf'(x)+\cos x - x\sin x - \cos x$

$f(x)=f(x)+xf'(x)-x\sin x$

$\therefore xf'(x)=x\sin x$

$x\neq 0$이므로 양변을 x로 나누면 $f'(x)=\sin x$

$\therefore f(x)=\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$f(\pi)=1$이므로 $1+C=1$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=-\cos x$이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

정답_ ③

579

(i) $-\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{4}$일 때

$|\sin x|<|\cos x|$이므로 $\left|\dfrac{\sin x}{\cos x}\right|<1$

$$(\sin^n x+\cos^n x)^{\frac{1}{n}}=\left\{\left(\frac{\sin^n x}{\cos^n x}+1\right)\cos^n x\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\left\{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^n+1\right\}^{\frac{1}{n}}\cos x$$

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}\cos x\left\{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^n+1\right\}^{\frac{1}{n}}=\cos x$$

$$\therefore f(x)=\int\cos x\,dx=\sin x + C_1$$

$f(0)=0$이므로 $C_1=0$ $\therefore f(x)=\sin x$ ······㉠

(ii) $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3}{4}\pi$일 때

$|\sin x|>|\cos x|$이므로 $\left|\dfrac{\cos x}{\sin x}\right|<1$

$$(\sin^n x+\cos^n x)^{\frac{1}{n}}=\left\{\left(1+\frac{\cos^n x}{\sin^n x}\right)\sin^n x\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\left\{1+\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}\sin x$$

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}\sin x\left\{1+\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}=\sin x$$

$\therefore f(x)=\int\sin x\,dx = -\cos x + C_2$ ······㉡

함수 $f(x)$가 $x=\dfrac{\pi}{4}$에서 연속이므로 ㉠, ㉡에서

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+C_2$ $\therefore C_2=\sqrt{2}$

따라서 $f(x)=-\cos x+\sqrt{2}\left(\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3}{4}\pi\right)$이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}$

정답_ ⑤

580

$x^2+ax+b=(x+1)(x-2)$이므로

$$\frac{x-5}{x^2+ax+b}=\frac{x-5}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}$$

로 놓고, 양변에 $(x+1)(x-2)$를 곱하여 정리하면

$x-5=(A+B)x+(-2A+B)$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

$A+B=1,\ -2A+B=-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $A=2, B=-1$

$$\therefore \int\frac{x-5}{x^2+ax+b}dx=\int\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-2}\right)dx$$
$$=2\ln|x+1|-\ln|x-2|+C$$

$\therefore f(3)-f(1)$

$=(2\ln 4-\ln 1+C)-(2\ln 2-\ln 1+C)$

$=2\ln 2$

정답_ ②

581

$$f(x)=\int\sin^2 x\cos^4 x\sin x\,dx$$
$$=\int(1-\cos^2 x)\cos^4 x\sin x\,dx$$

$\cos x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$f(x)=-\int(1-\cos^2 x)\cos^4 x(-\sin x)dx$$
$$=\int(t^2-1)t^4\,dt=\int(t^6-t^4)dt$$
$$=\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{5}t^5+C$$
$$=\frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{7}\cos^7 x-\dfrac{1}{5}\cos^5 x$이므로

$f(0)=\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{5}=-\dfrac{2}{35}$

정답_ ①

582

$2f'(x)-f(x)=0,\ 2g'(x)-g(x)=0$의 양변을 변끼리 더하면

$2\{f'(x)+g'(x)\}-\{f(x)+g(x)\}=0$

$f'(x)+g'(x)=\dfrac{1}{2}\{f(x)+g(x)\}$

$\therefore \dfrac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}=\dfrac{1}{2}$

위의 식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$$\int\frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}dx=\int\frac{1}{2}dx$$

$\ln|f(x)+g(x)|=\dfrac{1}{2}x+C$

$\ln\{f(x)+g(x)\}=\dfrac{1}{2}x+C$ ($\because f(x)+g(x)>0$)

$\therefore f(x)+g(x)=e^{\frac{1}{2}x+C}$

이때, $f(0)=e, g(0)=0$이므로

$f(0)+g(0)=e^C$에서 $e=e^C$ $\therefore C=1$

따라서 $f(x)+g(x)=e^{\frac{1}{2}x+1}$이므로 방정식 $f(x)+g(x)=1$의 해는

$e^{\frac{1}{2}x+1}=1,\ \dfrac{1}{2}x+1=0$ $\therefore x=-2$

정답_ $x=-2$

583

$(x+2)f'(x)-2f(x)+2=0$에서

$2\{f(x)-1\}=(x+2)f'(x)$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)-1}=\dfrac{2}{x+2}$

위의 식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)-1}dx=\int\frac{2}{x+2}dx$에서

$\ln|f(x)-1|=2\ln|x+2|+C$

$\ln|f(x)-1|=\ln|x+2|^2+\ln e^C=\ln e^C(x+2)^2$

$|f(x)-1|=e^C(x+2)^2$

$f(0)=0$이므로 $1=4e^C$ $\therefore e^C=\dfrac{1}{4}$

따라서 $f(x)-1=\pm\dfrac{1}{4}(x+2)^2$이므로 $f(-2)=1$ 정답_ ①

584

$y=e^x-1$로 놓고 x와 y를 서로 바꾸면 $x=e^y-1$

$x+1=e^y$ $\therefore y=\ln(x+1)$

$\therefore f^{-1}(x)=\ln(x+1)$

$x+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=1$이므로

$$g(x)=\int\ln(x+1)dx=\int\ln t\,dt$$
$$=t\ln t-\int 1\,dt=t\ln t-t+C$$
$$=(x+1)\ln(x+1)-(x+1)+C$$

$g(0)=0$이므로 $-1+C=0$ $\therefore C=1$

$g(x)=(x+1)\ln(x+1)-(x+1)+1$

$=(x+1)\ln(x+1)-x$

이므로 $g(e-1)=e-(e-1)=1$

정답_ ①

585

$\displaystyle\int f(x)dx=xf(x)-x^2e^{-x}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-(2-x)xe^{-x}$

$xf'(x)=(2-x)xe^{-x}$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로 $f'(x)=(2-x)e^{-x}$
이때, $(2-x)e^{-x}=0$에서 $x=2$이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.
$u'(x)=e^{-x}, v(x)=2-x$로 놓으면
$u(x)=-e^{-x}, v'(x)=-1$이므로
$$f(x)=\int(2-x)e^{-x}dx=-(2-x)e^{-x}-\int e^{-x}dx$$
$$=(x-2)e^{-x}+e^{-x}+C=(x-1)e^{-x}+C$$
곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로
$f(1)=C=0$
따라서 $f(x)=(x-1)e^{-x}$이므로 구하는 극값은
$f(2)=\frac{1}{e^2}$ 정답_ ①

586

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로
조건 (가)에서 $\{f(x)g(x)\}'=h(x)$
위의 식의 양변을 x에 대하여 적분하면
$f(x)g(x)=\int h(x)dx$ ……㉠
이때, $f(x)=x, h(x)=\ln x$를 ㉠에 대입하면
$xg(x)=\int \ln x\,dx=x\ln x-\int dx+C=x\ln x-x+C$
$g(x)=\ln x-1+\frac{C}{x}$ $(\because x>0)$
한편, 조건 (나)에서 $g(1)=-1$이므로
$-1=-1+C \quad \therefore C=0$
따라서 $g(x)=\ln x-1$이므로
$g(e)=\ln e-1=0$ 정답_ ③

587

조건 (가), (나)에서
$$f_2(x)=\int f_1(x)dx=\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx$$
$$=xe^x-e^x+C_1=(x-1)e^x+C_1$$
조건 (다)에서 $f_2(1)=0$이므로 $0+C_1=0 \quad \therefore C_1=0$
$\therefore f_2(x)=(x-1)e^x$ ……㉠
조건 (나)와 ㉠에서
$$f_3(x)=\int f_2(x)dx=\int(x-1)e^x dx=(x-1)e^x-\int e^x dx$$
$$=(x-1)e^x-e^x+C_2=(x-2)e^x+C_2$$
조건 (다)에서 $f_3(2)=0$이므로 $0+C_2=0 \quad \therefore C_2=0$
$\therefore f_3(x)=(x-2)e^x$
같은 방법으로
$f_4(x)=(x-3)e^x, \cdots, f_n(x)=(x-n+1)e^x$
$\therefore \sum_{k=2}^{10} f_k(0)=(-1-2-\cdots-9)e^0=-45$ 정답_ ①

09 정적분

588

(1) $\int_1^2 \frac{2x+1}{x}dx=\int_1^2\left(2+\frac{1}{x}\right)dx=\Big[2x+\ln|x|\Big]_1^2$
$=(4+\ln 2)-2=2+\ln 2$
(2) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx=\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^8=12-\frac{3}{4}=\frac{45}{4}$
(3) $\int_0^{\ln 3} e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^{\ln 3}=3-1=2$
(4) $\int_1^4 2^x dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_1^4=\frac{2^4-2^1}{\ln 2}=\frac{14}{\ln 2}$
정답_ (1) $2+\ln 2$ (2) $\frac{45}{4}$ (3) 2 (4) $\frac{14}{\ln 2}$

589

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x-1}dx-\int_0^1\frac{1}{e^x-1}dx$$
$$=\int_0^1\frac{e^{2x}-1}{e^x-1}dx=\int_0^1\frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x-1}dx$$
$$=\int_0^1(e^x+1)dx=\Big[e^x+x\Big]_0^1$$
$=(e+1)-1=e$ 정답_ ②

590

$$\int_1^2\frac{3x+2}{x^2}dx=\int_1^2\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx=\left[3\ln|x|-\frac{2}{x}\right]_1^2$$
$=(3\ln 2-1)-(-2)=3\ln 2+1$ 정답_ ⑤

591

$$\int_1^3\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}\right)dx=\Big[\ln|x+1|+\ln|x|\Big]_1^3$$
$$=\ln 4+\ln 3-\ln 2$$
$$=\ln\frac{4\cdot 3}{2}=\ln 6$$
$\therefore a=6$ 정답_ ②

592

$$\int_0^a\frac{1}{1-\sin^2 x}dx=\int_0^a\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int_0^a\sec^2 x\,dx$$
$$=\Big[\tan x\Big]_0^a=\tan a=1$$
이때, $0<a<\frac{\pi}{2}$이므로 $\tan a=1 \quad \therefore a=\frac{\pi}{4}$ 정답_ ③

593

$$\int_2^4 f(x)dx-\int_3^4 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$
$$=\int_2^4 f(x)dx+\int_4^3 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$

$$=\int_2^3 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$
$$=\int_1^3 f(x)dx$$
$$=\int_1^3 (e^{x-1}+\sin\pi x)dx$$
$$=\left[e^{x-1}-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_1^3$$
$$=\left(e^2-\frac{1}{\pi}\cos 3\pi\right)-\left(1-\frac{1}{\pi}\cos\pi\right)$$
$$=\left(e^2+\frac{1}{\pi}\right)-\left(1+\frac{1}{\pi}\right)=e^2-1$$

정답_③

594

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos^2 x}{\sin x-\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin x-\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x-\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx$$
$$=\left[-\cos x+\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=1-(-1)=2$$

정답_⑤

595

$$\int_2^3\frac{8^x}{2^x-1}dx+\int_3^2\frac{1}{2^y-1}dy$$
$$=\int_2^3\frac{8^x}{2^x-1}dx-\int_2^3\frac{1}{2^x-1}dx=\int_2^3\frac{8^x-1}{2^x-1}dx$$
$$=\int_2^3(4^x+2^x+1)dx=\left[\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2^x}{\ln 2}+x\right]_2^3$$
$$=\left(\frac{64}{\ln 4}+\frac{8}{\ln 2}+3\right)-\left(\frac{16}{\ln 4}+\frac{4}{\ln 2}+2\right)$$
$$=\frac{48}{2\ln 2}+\frac{4}{\ln 2}+1=\frac{28}{\ln 2}+1$$

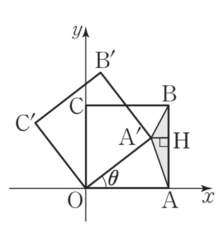
따라서 $a=28, b=1$이므로

$a-b=28-1=27$

정답_②

596

점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$을 θ만큼 회전한 점 A'의 좌표는 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$이고 점 A'에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 삼각형 $\mathrm{A'AB}$는 밑변의 길이가 $\overline{\mathrm{AB}}=1$이고 높이가 $\overline{\mathrm{A'H}}=1-\cos\theta$이다.



$$\therefore f(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{A'H}}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$$
$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\theta)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos\theta)d\theta=\frac{1}{2}\left[\theta-\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

정답_④

597

$f(x)=e^x-1$로 놓으면

$-1\le x\le 0$일 때 $f(x)\le 0$, $0\le x\le 1$일 때, $f(x)\ge 0$이므로

$$\int_{-1}^1|e^x-1|dx=\int_{-1}^0(1-e^x)dx+\int_0^1(e^x-1)dx$$
$$=\left[x-e^x\right]_{-1}^0+\left[e^x-x\right]_0^1$$
$$=\{(-1)-(-1-e^{-1})\}+\{(e-1)-1\}$$
$$=e+\frac{1}{e}-2$$

정답_①

598

$f(x)=\cos x-\sin x$로 놓으면

$0\le x\le\frac{\pi}{4}$일 때 $f(x)\ge 0$, $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$일 때 $f(x)\le 0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x-\sin x|dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x+\sin x)dx$$
$$=\left[\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[-\sin x-\cos x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=(\sqrt{2}-1)+\{-1-(-\sqrt{2})\}=2\sqrt{2}-2$$

따라서 $a=2, b=-2$이므로

$a^2+b^2=2^2+(-2)^2=8$

정답_④

599

$f(x)=\ln x$로 놓으면

$\frac{1}{e^2}\le x\le 1$일 때 $f(x)<0$, $1\le x\le e$일 때 $f(x)>0$이므로

$$\int_{\frac{1}{e^2}}^e\sqrt[4]{(\ln x)^4}dx=\int_{\frac{1}{e^2}}^e|\ln x|dx$$
$$=-\int_{\frac{1}{e^2}}^0\ln x\,dx+\int_0^e\ln x\,dx$$
$$=\left[-x\ln x+x\right]_{\frac{1}{e^2}}^1+\left[x\ln x-x\right]_1^e$$
$$=\left\{1-\left(\frac{2}{e^2}+\frac{1}{e^2}\right)\right\}+\{0-(-1)\}$$
$$=2-\frac{3}{e^2}$$

정답_④

600

$f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}=1-\dfrac{4}{x+2}$로 놓으면

$-1\le x\le 2$일 때 $f(x)\le 0$, $2\le x\le 6$일 때 $f(x)\ge 0$이므로

$$\int_{-1}^6\left|\frac{x-2}{x+2}\right|dx=\int_{-1}^2\left(\frac{4}{x+2}-1\right)dx+\int_2^6\left(1-\frac{4}{x+2}\right)dx$$
$$=\left[4\ln|x+2|-x\right]_{-1}^2+\left[x-4\ln|x+2|\right]_2^6$$
$$=(8\ln 2-3)+(4-4\ln 2)$$
$$=4\ln 2+1$$

정답_⑤

601

$f(-x)=|-x+1|$이므로 $xf(-x)=\begin{cases} x-x^2 & (x<1) \\ x^2-x & (x\ge 1) \end{cases}$

$\therefore \int_0^2 xf(-x)dx=\int_0^1 (x-x^2)dx+\int_1^2 (x^2-x)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left\{\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right\}$

$=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=1$ 정답_⑤

602

(1) $f(x)=e^x+e^{-x}$으로 놓으면 $f(-x)=e^{-x}+e^x=f(x)$이므로

$\int_{-3}^3 (e^x+e^{-x})dx=2\int_0^3 (e^x+e^{-x})dx$

$=2\left[e^x-e^{-x}\right]_0^3=2\left(e^3-\frac{1}{e^3}\right)$

(2) $f(x)=\sin|x|$로 놓으면

$f(-x)=\sin|-x|=\sin|x|=f(x)$이므로

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|dx=2\int_0^{\pi} \sin|x|dx=2\int_0^{\pi} \sin x\, dx$

$=2\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=2(1+1)=4$

(3) $f(x)=x^3\ln(x^2+1)$로 놓으면

$f(-x)=-x^3\ln(x^2+1)=-f(x)$이므로

$\int_{-3}^3 x^3\ln(x^2+1)dx=0$

(4) $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$로 놓으면

$f(-x)=-x\sqrt{x^2+1}=-f(x)$이므로

$\int_{-2}^2 x\sqrt{x^2+1}dx=0$ 정답_(1) $2\left(e^3-\frac{1}{e^3}\right)$ (2) 4 (3) 0 (4) 0

603

$f(x)=|x|-1$이므로 $f(-x)=f(x)$

$g(x)=\sin x$로 놓으면 $g(-x)=-g(x)$

즉, $f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)$이므로

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\, dx=0$ 정답_③

604

$f(x)=\sin x$, $g(x)=x\cos x$로 놓으면

$f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)$,

$g(-x)=-x\cos(-x)=-x\cos x=-g(x)$이고,

곡선 $y=3x^2+1$은 y축에 대하여 대칭이므로

$\int_{-1}^1 (\sin x+x\cos x+3x^2+1)dx$

$=\int_{-1}^1 (\sin x+x\cos x)dx+\int_{-1}^1 (3x^2+1)dx$

$=0+2\int_0^1 (3x^2+1)dx$

$=2\left[x^3+x\right]_0^1=2\cdot 2=4$ 정답_④

605

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

이때, $f(\theta)=\sin\theta\cos\theta$로 놓으면

$f(-\theta)=\sin(-\theta)\cos(-\theta)=-\sin\theta\cos\theta=-f(\theta)$이므로

$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin\theta+\cos\theta)^2 d\theta=\int_{-\pi}^{\pi} (1+2\sin\theta\cos\theta)d\theta$

$=\int_{-\pi}^{\pi} 1d\theta+2\int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta$

$=\left[\theta\right]_{-\pi}^{\pi}+0=2\pi$ 정답_⑤

606

$f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x)$이므로

$(f\circ f)(-x)=f(f(-x))=f(f(x))=(f\circ f)(x)$

또한, $g(-x)=\sin(-x)+(-x)=-(\sin x+x)=-g(x)$

이므로

$(g\circ g)(-x)=g(g(-x))=g(-g(x))$

$=-g(g(x))=-(g\circ g)(x)$

$\therefore \int_{-1}^1 \{(f\circ f)(x)+(g\circ g)(x)\}dx$

$=\int_{-1}^1 (f\circ f)(x)dx+\int_{-1}^1 (g\circ g)(x)dx$

$=2\int_0^1 (f\circ f)(x)dx+0$

$=2\int_0^1 \{(x^2+1)^2+1\}dx=2\int_0^1 (x^4+2x^2+2)dx$

$=2\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1=2\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+2\right)=\frac{86}{15}$

따라서 $p=15$, $q=86$이므로

$p+q=15+86=101$ 정답_⑤

607

$1+x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$\int_0^1 10x(1+x^2)^4 dx=\int_1^2 5t^4 dt=\left[t^5\right]_1^2$

$=32-1=31$ 정답_③

608

$x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=5$이므로

$\int_0^2 \frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_1^5 \frac{1}{t}dt=\frac{1}{2}\left[\ln|t|\right]_1^5=\frac{\ln 5}{2}$ 정답_⑤

609

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로

$$f'(x)=\frac{2(x^2+x+1)}{x^2+1}=2+\frac{2x}{x^2+1}$$

$$\therefore \int_0^{\sqrt{e-1}} f'(x)dx=\int_0^{\sqrt{e-1}}\left(2+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$
$$=\Big[2x+\ln(x^2+1)\Big]_0^{\sqrt{e-1}}$$
$$=\{2\sqrt{e-1}+\ln(e-1+1)\}-(0+0)$$
$$=2\sqrt{e-1}+1$$

정답_③

610

$$\int_0^4 f(x)dx-\int_3^5 f(x)dx+\int_4^5 f(x)dx$$
$$=\int_0^4 f(x)dx+\int_4^5 f(x)dx-\int_3^5 f(x)dx$$
$$=\int_0^5 f(x)dx+\int_5^3 f(x)dx$$
$$=\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3\sqrt{2x+1}dx$$

이때, $2x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=3$일 때 $t=7$이므로

$$\int_0^3\sqrt{2x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^7\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\Big[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big]_1^7$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 7\sqrt{7}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}(7\sqrt{7}-1)$$

따라서 $a=3$, $b=7$이므로

$a^2b=3^2\cdot 7=63$

정답_⑤

611

$2-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$이고, $x=1$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=0$이므로

$$\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx=-\int_1^0(2-t)\sqrt{t}\,dt=\int_0^1(2\sqrt{t}-t\sqrt{t})dt$$
$$=\Big[\frac{4}{3}t\sqrt{t}-\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}\Big]_0^1=\frac{4}{3}-\frac{2}{5}=\frac{14}{15}$$

정답_⑤

612

$2^x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2^x\ln 2$이고, $x=0$일 때 $t=2$, $x=3$일 때 $t=9$이므로

$$\int_0^3\frac{2^x\ln 2}{2^x+1}\,dx=\int_2^9\frac{1}{t}\,dt=\Big[\ln|t|\Big]_2^9=\ln 9-\ln 2=\ln\frac{9}{2}$$

정답_⑤

613

$\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이고, $x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^3 x\,dx=\int_0^1 t^3\,dt=\Big[\frac{1}{4}t^4\Big]_0^1=\frac{1}{4}$$

정답_②

614

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이고, $x=e^2$일 때 $t=2$, $x=e^3$일 때 $t=3$이므로

$$\int_{e^2}^{e^3}\frac{a+\ln x}{x}\,dx=\int_2^3(a+t)dt=\Big[at+\frac{1}{2}t^2\Big]_2^3$$
$$=\left(3a+\frac{9}{2}\right)-(2a+2)=a+\frac{5}{2} \quad\cdots\cdots ㉠$$

$\sin x=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dx}=\cos x$이고, $x=0$일 때 $s=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $s=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)\cos x\,dx=\int_0^1(1+s)ds$$
$$=\Big[s+\frac{1}{2}s^2\Big]_0^1=\frac{3}{2} \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $a+\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore a=-1$

정답_②

615

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로 $x=2\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=2\sec^2\theta$이고, $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=2$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^2\frac{1}{x^2+4}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4(1+\tan^2\theta)}\cdot 2\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sec^2\theta}{4\sec^2\theta}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\,d\theta=\Big[\frac{1}{2}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}$$

정답_①

616

$\int_{-3}^0 f(3x+9)dx$에서 $3x+9=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3$이고,

$x=-3$일 때 $t=0$, $x=0$일 때 $t=9$이므로

$$\int_{-3}^0 f(3x+9)dx=\frac{1}{3}\int_0^9 f(t)dt=\frac{1}{3}\int_0^9 f(x)dx$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 6=2$$

정답_②

617

$\frac{d}{dx}\{f(x)\}=g(x)$이므로 $g(x)=f'(x)$

$\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b f(x)f'(x)dx$에서

$f(x)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$이고, $x=a$일 때

$t=f(a)=0$, $x=b$일 때 $t=f(b)=4$이므로

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b f(x)f'(x)dx=\int_0^4 t\,dt=\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_0^4=8$$

정답_④

618

$\tan\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{PH}}}{\overline{\mathrm{OH}}}$이므로 $f(\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

$\therefore \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta$

$\sin\theta=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{d\theta}=\cos\theta$이고, $x=\dfrac{\pi}{6}$일 때 $t=\dfrac{1}{2}$,

$x=\dfrac{\pi}{3}$일 때 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{t}dt=\Big[\ln|t|\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln\frac{1}{2}$$
$$=\ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}\ln 3$$

정답_ ①

619

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx$에서 $-x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=-1$이고,

$x=-\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=-\dfrac{\pi}{2}$이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

한편, $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)+f(-x)\}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x+1)dx$에서

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x+1)dx$$
$$=\Big[2\sin x+x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=4+\pi$$

$\therefore \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=2+\frac{\pi}{2}$

정답_ $2+\dfrac{\pi}{2}$

620

조건 (가)에 의해 $\displaystyle\int_0^a f(x)dx=\int_a^{2a} f(x)dx$이고

$f(2a-x)=f(a+(a-x))=f(a-(a-x))=f(x)$이므로

$$\int_0^a\{f(2x)+f(2a-x)\}dx=\int_0^a\{f(2x)+f(x)\}dx$$
$$=\int_0^a f(2x)dx+\int_0^a f(x)dx$$
$$=\int_0^a f(2x)dx+13$$

$2x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2$이고, $x=0$일 때 $t=0$, $x=a$일 때

$t=2a$이므로

$$\int_0^a f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{2a} f(t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^a f(t)dt+\int_a^{2a} f(t)dt\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^a f(t)dt+\int_0^a f(t)dt\right\}$$
$$=\int_0^a f(t)dt=13$$

$\therefore \displaystyle\int_0^a\{f(2x)+f(2a-x)\}dx=\int_0^a f(2x)dx+13$

$$=13+13=26$$

정답_ 26

621

$\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$에서 $f'(x)=e^x$, $g(x)=x$로 놓으면

$f(x)=e^x$, $g'(x)=1$이므로

$$\int_0^1 xe^x dx=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-\Big[e^x\Big]_0^1$$
$$=e-(e-1)=1$$

정답_ ①

622

$\displaystyle\int_1^e x(1-\ln x)dx$에서 $f'(x)=x$, $g(x)=1-\ln x$로 놓으면

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$, $g'(x)=-\dfrac{1}{x}$이므로

$$\int_1^e x(1-\ln x)dx=\Big[\frac{1}{2}x^2(1-\ln x)\Big]_1^e-\int_1^e\left(-\frac{1}{2}x\right)dx$$
$$=\left(0-\frac{1}{2}\right)+\Big[\frac{1}{4}x^2\Big]_1^e$$
$$=\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}(e^2-3)$$

정답_ $\dfrac{1}{4}(e^2-3)$

623

$$\int_1^e\ln\frac{x}{e}dx=\int_1^e(\ln x-1)dx$$
$$=\int_1^e\ln x\,dx-\int_1^e 1\,dx$$

$\displaystyle\int_1^e\ln x\,dx$에서 $f'(x)=1$, $g(x)=\ln x$로 놓으면

$f(x)=x$, $g'(x)=\dfrac{1}{x}$이므로

$$\int_1^e\ln x\,dx=\Big[x\ln x\Big]_1^e-\int_1^e 1\,dx=e-\Big[x\Big]_1^e$$
$$=e-(e-1)=1$$
$$\int_1^e 1\,dx=\Big[x\Big]_1^e=e-1$$

$\therefore \displaystyle\int_1^e\ln\frac{x}{e}dx=\int_1^e\ln x\,dx-\int_1^e 1\,dx=1-(e-1)=2-e$

정답_ ⑤

624

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$에서 $f'(x)=\sin x$, $g(x)=x$로 놓으면

$f(x)=-\cos x$, $g'(x)=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)dx$$
$$=0+\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

정답_ ①

625

$\int_{-2\pi}^{\pi} x\sin|x|\,dx=\int_{-2\pi}^{-\pi} x\sin|x|\,dx+\int_{-\pi}^{\pi} x\sin|x|\,dx$에서

$f(x)=x\sin|x|$로 놓으면 $f(-x)=-f(x)$이므로

$$\int_{-2\pi}^{\pi} x\sin|x|\,dx=-\int_{-2\pi}^{-\pi} x\sin x\,dx+0$$
$$=\Big[x\cos x\Big]_{-2\pi}^{-\pi}-\int_{-2\pi}^{-\pi}\cos x\,dx$$
$$=(\pi+2\pi)-\Big[\sin x\Big]_{-2\pi}^{-\pi}$$
$$=3\pi$$

정답_⑤

626

$\int_0^1 f(x)g'(x)dx=\frac{1}{10}$에서

$$\Big[f(x)g(x)\Big]_0^1-\int_0^1 f'(x)g(x)dx=\frac{1}{10}$$

$f'(x)=\frac{1}{(1+x^3)^2}$, $g(x)=x^2$이므로

$$f(1)g(1)-f(0)g(0)-\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx=\frac{1}{10}$$
$$f(1)=\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx+\frac{1}{10}$$

$1+x^3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3x^2$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$f(1)=\int_1^2\left(\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{3}\right)dt+\frac{1}{10}=-\frac{1}{3}\Big[\frac{1}{t}\Big]_1^2+\frac{1}{10}$$
$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{1}{10}=\frac{4}{15}$$

정답_③

627

$f(x)=ax\ln x+b$에서 $f'(x)=a\ln x+a$

$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=f'(e)=a\ln e+a=2a=2$이므로 $a=1$

$\therefore f(x)=x\ln x+b$

$$\int_1^e f(x)dx=\int_1^e(x\ln x+b)dx$$
$$=\int_1^e x\ln x\,dx+\int_1^e b\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_1^e x\ln x\,dx$에서 $u'(x)=x$, $v(x)=\ln x$로 놓으면

$u(x)=\frac{1}{2}x^2$, $v'(x)=\frac{1}{x}$이므로

$$\int_1^e x\ln x\,dx=\Big[\frac{1}{2}x^2\ln x\Big]_1^e-\int_1^e\frac{1}{2}x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}e^2-\Big[\frac{1}{4}x^2\Big]_1^e=\frac{1}{2}e^2-\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_1^e x\ln x\,dx+\int_1^e b\,dx=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}+\Big[bx\Big]_1^e$$
$$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}+be-b$$
$$=\frac{1}{4}e(e+4b)+\frac{1}{4}-b$$

$4b=1$, $\frac{1}{4}-b=0$이므로 $b=\frac{1}{4}$

$\therefore a+b=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

정답_⑤

628

$\int_0^{2\pi}e^t\cos t\,dt$에서 $f'(t)=e^t$, $g(t)=\cos t$로 놓으면

$f(t)=e^t$, $g'(t)=-\sin t$이므로

$$\int_0^{2\pi}e^t\cos t\,dt=\Big[e^t\cos t\Big]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}(-e^t\sin t)dt$$
$$=e^{2\pi}-1+\int_0^{2\pi}e^t\sin t\,dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^{2\pi}e^t\sin t\,dt$에서 $u'(t)=e^t$, $v(t)=\sin t$로 놓으면

$u(t)=e^t$, $v'(t)=\cos t$이므로

$$\int_0^{2\pi}e^t\sin t\,dt=\Big[e^t\sin t\Big]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}e^t\cos t\,dt$$
$$=-\int_0^{2\pi}e^t\cos t\,dt \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{2\pi}e^t\cos t\,dt=e^{2\pi}-1-\int_0^{2\pi}e^t\cos t\,dt$$

$\therefore \int_0^{2\pi}e^t\cos t\,dt=\frac{e^{2\pi}-1}{2}$

정답_④

629

$\int_0^1 f(t)dt=a$ (a는 상수)로 놓으면 $f(x)=\frac{1}{x+1}+2a$

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}+2a\right)dx=\Big[\ln|x+1|+2ax\Big]_0^1$$
$$=\ln 2+2a=a$$

$\therefore a=-\ln 2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{x+1}-2\ln 2$이므로

$f(0)=1-2\ln 2$

정답_②

630

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=a$ (a는 상수)로 놓으면 $f(x)=x\cos x+a$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\cos x+a)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\,dx=a \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx$에서 $u'=\cos x$, $v(x)=x$로 놓으면

$u(x)=\sin x$, $v'(x)=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx=\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}-\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\,dx=\frac{\pi}{2}-1+\left[ax\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}-1+\frac{a}{2}\pi=a$$

$\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=x\cos x-1$이므로

$f(0)=-1$ 정답_ -1

631

$\int_0^1 tf(t)dt=a$ (a는 상수)로 놓으면 $f(x)=e^{x^2}+a$

$$\int_0^1 tf(t)dt=\int_0^1 t(e^{t^2}+a)dt=\int_0^1 (te^{t^2}+at)dt$$

$$=\int_0^1 te^{t^2}dt+\int_0^1 at\,dt=a \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^1 te^{t^2}dt$에서 $t^2=x$로 놓으면 $\frac{dx}{dt}=2t$

$t=0$일 때 $x=0$, $t=1$일 때 $x=1$이므로

$$\int_0^1 te^{t^2}dt=\int_0^1 \frac{1}{2}e^x dx \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^1 \frac{1}{2}e^x dx+\int_0^1 at\,dt=\left[\frac{1}{2}e^x\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}at^2\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{e}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}a=a$$

$\therefore a=e-1$

$\therefore \int_0^1 xf(x)dx=a=e-1$ 정답_ ④

632

$\int_e^x f(t)dt=x\ln x-x+k$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln x$$

$\int_e^x f(t)dt=x\ln x-x+k$의 양변에 $x=e$를 대입하면

$0=e\ln e-e+k \qquad \therefore k=0$

$\therefore f(e)+k=1+0=1$ 정답_ ②

633

$\int_0^x f(t)dt=\cos 2x+ax^2+a$에 $x=0$에 대입하면

$0=1+a \qquad \therefore a=-1$

$\int_0^x f(t)dt=\cos 2x-x^2-1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-2\sin 2x-2x$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-2-\frac{\pi}{2}$ 정답_ ①

634

$$\int_1^x \left\{\frac{d}{dx}f(t)\right\}dt=\int_1^x f'(t)dt=\left[f(t)\right]_1^x=f(x)-f(1),$$

$\frac{d}{dx}\int_1^x f(t)dt=f(x)$이므로 $f(x)-f(1)=f(x)$

즉, $f(1)=0$이므로 $f(1)=a=0 \qquad \therefore a=0$

따라서 $f(x)=\ln|x|$이므로 $f(e)=1$ 정답_ ②

635

$f(x)=\int_0^x e^t f(t)dt+k$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=\int_0^0 e^t f(t)dt+k=0+k=k$

$f(0)=1$이므로 $k=1$

$$\therefore f(x)=\int_0^x e^t f(t)dt+1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=e^x f(x)$ $\cdots\cdots$ ㉡

$\therefore f'(0)=e^0 f(0)=1\cdot 1=1$

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f''(x)=e^x f(x)+e^x f'(x)$

$\therefore f''(0)=e^0 f(0)+e^0 f'(0)=1\cdot 1+1\cdot 1=2$ 정답_ ①

636

$\sin x=\int_0^x (x-t)f(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$이므로

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\cos x=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)dt$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=-\sin x$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$ 정답_ -1

637

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt=e^{-x}+g(x)=e^{-x}+ax+b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $0=1+b \qquad \therefore b=-1$

또, $\int_0^x (x-t)f(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=e^{-x}+ax+b$

에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=-e^{-x}+a$$

$$\therefore \int_0^x f(t)dt=-e^{-x}+a \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면 $0=-1+a \qquad \therefore a=1$

따라서 $g(x)=x-1$이므로 $g(2)=1$ 정답_ ①

638

$f(x)=\int_0^x \cos t(1+\sin t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\cos x(1+\sin x)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ 또는 $\sin x=-1$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0<x<\pi$)

$x=\frac{\pi}{2}$를 기준으로 $0<x<\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극댓값을 가지므로 극댓값은

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t(1+\sin t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt$에서 $\sin t=s$로 놓으면

$\frac{ds}{dt}=\cos t$이고 $t=0$일 때 $s=0$, $t=\frac{\pi}{2}$일 때 $s=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt=\int_0^1 s\,ds$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt+\int_0^1 s\,ds$$

$$=\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{1}{2}s^2\right]_0^1$$

$$=(1-0)+\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{3}{2}$$

정답_③

639

$f(x)=ax(x-2)$ $(a>0)$로 놓으면

$$g(x)=\int_x^{x+1}e^{at(t-2)}dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=e^{a(x+1)(x-1)}-e^{ax(x-2)}$$

$$=e^{ax^2-a}-e^{ax^2-2ax}=e^{ax^2-a}(1-e^{a-2ax})$$

$g'(x)=0$에서 $e^{ax^2-a}>0$이므로 $1=e^{a-2ax}$ $\quad\therefore x=\frac{1}{2}$

$a>0$이고 $x<\frac{1}{2}$일 때 $g'(x)<0$, $x>\frac{1}{2}$일 때 $g'(x)>0$이므로

함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극소이면서 동시에 최솟값을 갖는다.

정답_②

640

$f(t)=\frac{1}{2+3\cos t}$로 놓으면

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^x\frac{1}{2+3\cos t}dt$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)dt$$

$$=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

정답_②

641

$f(x)=e^x$으로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^3-1}\int_1^x e^t dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^3-1}\int_1^x f(t)dt$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x^2+x+1)(x-1)}\int_1^x f(t)dt$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x^2+x+1}\cdot\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt\right\}$$

$$=\frac{1}{3}f(1)=\frac{e}{3}$$

정답_②

642

$f(x)=\ln(x^3+x)$로 놓으면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin 3x}\int_1^{x+1}\ln(t^3+t)dt$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin 3x}\int_1^{x+1}f(t)dt$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\left\{\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{1}{x}\int_1^{x+1}f(t)dt\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot1\cdot f(1)=\frac{1}{3}\ln 2$$

정답_①

643

$f(x)=e^x-k$, $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=f(0)$

$f(0)=6$이므로 $1-k=6$ $\quad\therefore k=-5$

정답_①

644

$f(t)f'(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 하면

$F'(t)=f(t)f'(t)$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}f(t)f'(t)dt$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}F'(t)dt$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)\right\}$$

$$=2F'(1)=2f(1)f'(1)=2\cdot3\cdot3=18$$

정답_②

645

$\frac{x+3}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$ (A, B는 상수)라고 하면

$$\frac{x+3}{x(x+1)}=\frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}$$

$A+B=1$, $A=3$에서 $A=3$, $B=-2$

$$\therefore \frac{x+3}{x(x+1)}=\frac{3}{x}-\frac{2}{x+1} \quad \cdots\cdots ❶$$

$$\int_1^2\frac{x+3}{x(x+1)}dx=\int_1^2\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$=3\Big[\ln|x|\Big]_1^2-2\Big[\ln|x+1|\Big]_1^2$$
$$=3\ln 2-2(\ln 3-\ln 2)$$
$$=5\ln 2-\ln 9=\ln\frac{32}{9}$$ ······ ❷

정답_ $\ln\frac{32}{9}$

단계	채점 기준	비율
❶	$\frac{x+3}{x(x+1)}$의 식 변형하기	40%
❷	$\int_1^2\frac{x+3}{x(x+1)}dx$의 값 구하기	60%

646

$$\int_{-2}^2\frac{f(x)}{e^{-x}+1}dx=\int_{-2}^0\frac{f(x)}{e^{-x}+1}dx+\int_0^2\frac{f(x)}{e^{-x}+1}dx$$ ······ ❶

$\int_{-2}^0\frac{f(x)}{e^{-x}+1}dx$에서 $-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$이고,

$x=-2$일 때 $t=2$, $x=0$일 때 $t=0$이므로 $(\because f(x)=f(-x))$

$$\int_{-2}^0\frac{f(x)}{e^{-x}+1}dx=\int_2^0\frac{f(-t)}{e^t+1}(-dt)=\int_0^2\frac{f(t)}{e^t+1}dt$$ ······ ❷

$$\therefore \int_{-2}^2\frac{f(x)}{e^{-x}+1}dx=\int_0^2\frac{f(x)}{e^x+1}dx+\int_0^2\frac{f(x)}{e^{-x}+1}dx$$
$$=\int_0^2\frac{e^x+e^{-x}+2}{e^x+e^{-x}+2}f(x)dx$$
$$=\int_0^2 f(x)dx=5$$ ······ ❸

정답_ 5

단계	채점 기준	비율
❶	$\int_{-2}^2\frac{f(x)}{e^{-x}+1}dx$의 식 변형하기	20%
❷	$\int_{-2}^0\frac{f(x)}{e^{-x}+1}dx$의 식 변형하기	40%
❸	$\int_{-2}^2\frac{f(x)}{e^{-x}+1}dx$의 값 구하기	40%

647

$f(x+y)=f(x)+f(y)$에 $x=y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$　　$\therefore f(0)=0$ ······ ❶

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=f'(0)=a$$

$f(x)=ax+C$이고 $f(0)=0$이므로　$C=0$

$\therefore f(x)=ax$ ······ ❷

$$\int_0^\pi f(x)\{f(x)-4\sin x\}dx$$
$$=\int_0^\pi (a^2x^2-4ax\sin x)dx$$
$$=a^2\int_0^\pi x^2dx-4a\int_0^\pi x\sin x dx$$
$$=a^2\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^\pi-4a\Big\{\Big[-x\cos x\Big]_0^\pi+\int_0^\pi\cos x dx\Big\}$$
$$=\frac{1}{3}\pi^3a^2-4\pi a$$ ······ ❸
$$=\frac{1}{3}\pi^3\Big(a-\frac{6}{\pi^2}\Big)^2-\frac{12}{\pi}$$

따라서 $a=\frac{6}{\pi^2}$일 때 $\int_0^\pi f(x)\{f(x)-4\sin x\}dx$는 최솟값을 가지므로

$f(x)=\frac{6}{\pi^2}x$ ······ ❹

정답_ $f(x)=\frac{6}{\pi^2}x$

단계	채점 기준	비율
❶	$f(0)$의 값 구하기	20%
❷	$f(x)$를 a에 대한 식으로 나타내기	20%
❸	$\int_0^\pi f(x)\{f(x)-4\sin x\}dx$를 a에 대한 이차식으로 나타내기	30%
❹	$\int_0^\pi f(x)\{f(x)-4\sin x\}dx$가 최소가 되는 $f(x)$ 구하기	30%

648

조건 (가)에서 극한값이 존재하고, $x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{f(x)-3\}=0$에서　$f(1)=3$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$$ ······ ❶

또한, 조건 (나)에서 극한값이 존재하고, $x\to 2$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f(x)-4\}=0$에서　$f(2)=4$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=3$$ ······ ❷

$$\therefore \int_1^2 xf''(x)dx=\int_1^2 x\{f'(x)\}'dx$$
$$=\Big[xf'(x)\Big]_1^2-\int_1^2 f'(x)dx$$
$$=\Big[xf'(x)\Big]_1^2-\Big[f(x)\Big]_1^2$$
$$=\{2f'(2)-f'(1)\}-\{f(2)-f(1)\}$$
$$=(2\cdot 3-2)-(4-3)=3$$ ······ ❸

정답_ 3

단계	채점 기준	비율
❶	조건 (가)를 이용하여 $f(1)$, $f'(1)$의 값 구하기	30%
❷	조건 (나)를 이용하여 $f(2)$, $f'(2)$의 값 구하기	30%
❸	$\int_1^2 xf''(x)dx$의 값 구하기	40%

649

$$xf(x)-x=\int_1^x f(t)dt-1$$ ······ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)-1=f(x)$　　$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}$ ······ ❶

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{1}{x}dx=\ln x+C$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)-1=-1$, $f(1)=0$

$\therefore f(1)=C=0 \quad \therefore f(x)=\ln x$ ❷

한편, $1\le x<2$이면 $[x]=1$, $2\le x<e$이면 $[x]=2$이므로

$$\begin{aligned}\int_1^e [x]f(x)dx&=\int_1^2 \ln x\,dx+\int_2^e 2\ln x\,dx\\&=\Big[x\ln x\Big]_1^2-\int_1^2 1dx+2\left\{\Big[x\ln x\Big]_2^e-\int_2^e 1dx\right\}\\&=2\ln 2-\Big[x\Big]_1^2+2\left\{e-2\ln 2-\Big[x\Big]_2^e\right\}\\&=2\ln 2-1+2\{e-2\ln 2-(e-2)\}\\&=2\ln 2-1+2(-2\ln 2+2)\\&=-2\ln 2+3\end{aligned}$$ ❸

정답_ $-2\ln 2+3$

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)$ 구하기	30%
❷	$f(x)$ 구하기	30%
❸	$\int_1^e [x]f(x)dx$의 값 구하기	40%

650

조건 (가)에서 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=f(0)=-4$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)dt&=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}\cdot\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt\\&=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt\\&=\frac{1}{4}f(2)=\frac{1}{2}(e^2+1)\end{aligned}$$

$\therefore f(2)=2(e^2+1)$ ❶

$f(x)=2e^x+ax+b$에서

$f(0)=2+b=-4 \quad \therefore b=-6$

$f(2)=2e^2+2a+b=2e^2+2a-6=2(e^2+1) \quad \therefore a=4$

따라서 $f(x)=2e^x+4x-6$이므로 ❷

$$\begin{aligned}&\int_0^2 \{f(x)+f(-x)\}dx\\&=\int_0^2 \{(2e^x+4x-6)+(2e^{-x}-4x-6)\}dx\\&=\int_0^2 \{2(e^x+e^{-x})-12\}dx=\Big[2(e^x-e^{-x})-12x\Big]_0^2\\&=2\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)-24\end{aligned}$$ ❸

정답_ $2\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)-24$

단계	채점 기준	비율
❶	$f(0)$, $f(2)$의 값 구하기	30%
❷	$f(x)$ 구하기	30%
❸	$\int_0^2 \{f(x)+f(-x)\}dx$의 값 구하기	40%

651

$$g(x)=\frac{4-|x-4|}{2}=\begin{cases}\frac{1}{2}x & (0\le x\le 4)\\ -\frac{1}{2}x+4 & (4<x\le 8)\end{cases}$$

이때, $S(a)=\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$로 놓으면

(i) $0\le a\le 4$일 때,

$$\begin{aligned}S(a)&=\int_0^a\left(\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}\right)dx+\int_a^4 \frac{1}{2}x\,dx\\&\quad+\int_4^8\left(-\frac{1}{2}x+4\right)dx\\&=\Big[\frac{5}{2}x-5\ln(x^2+4)\Big]_0^a+\Big[\frac{1}{4}x^2\Big]_a^4+\Big[-\frac{1}{4}x^2+4x\Big]_4^8\\&=\left\{\frac{5}{2}a-5\ln(a^2+4)+5\ln 4\right\}+\left(4-\frac{1}{4}a^2\right)+4\\&=\frac{5}{2}a-5\ln(a^2+4)-\frac{1}{4}a^2+5\ln 4+8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S'(a)&=\frac{5}{2}-\frac{10a}{a^2+4}-\frac{1}{2}a\\&=-\frac{a^3-5a^2+24a-20}{2(a^2+4)}\\&=-\frac{(a-1)(a^2-4a+20)}{2(a^2+4)}\end{aligned}$$

$S'(a)=0$에서 $a=1$ ($\because a^2-4a+20>0$)

$a=1$의 좌우에서 $S'(a)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 $S(a)$는 $a=1$에서 극댓값을 갖는다.

또한, $S(0)=-5\ln 4+5\ln 4+8=8$,

$S(4)=10-5\ln 20-4+5\ln 4+8=14-5\ln 5$이므로

$0\le a\le 4$일 때 $S(a)$의 최솟값은

$S(4)=14-5\ln 5$ ……㉠

(ii) $4<a\le 8$일 때,

$$\begin{aligned}S(a)&=\int_0^a\left(\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}\right)dx+\int_a^8\left(-\frac{1}{2}x+4\right)dx\\&=\Big[\frac{5}{2}x-5\ln(x^2+4)\Big]_0^a+\Big[-\frac{1}{4}x^2+4x\Big]_a^8\\&=\left\{\frac{5}{2}a-5\ln(a^2+4)+5\ln 4\right\}+\left(16+\frac{1}{4}a^2-4a\right)\\&=\frac{1}{4}a^2-\frac{3}{2}a-5\ln(a^2+4)+5\ln 4+16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S'(a)&=\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}-\frac{10a}{a^2+4}\\&=\frac{a^3-3a^2-16a-12}{2(a^2+4)}\\&=\frac{(a+1)(a+2)(a-6)}{2(a^2+4)}\end{aligned}$$

$S'(a)=0$에서 $a=6$ ($\because 4<a\le 8$)

$a=6$의 좌우에서 $S'(a)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 $S(a)$는 $a=6$에서 극소이면서 최솟값을 갖는다.

즉, $4<a\le 8$일 때 $S(a)$의 최솟값은

$S(6)=9-9-5\ln 40+5\ln 4+16$

$\quad =16-5\ln 10 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에 의해 $S(a)=\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$의 최솟값은 $S(6)=16-5\ln 10$이다.

정답_ ④

652

$$\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{1+f(x)}dx=\int_{-2}^{0}\frac{f(x)}{1+f(x)}dx+\int_{0}^{2}\frac{f(x)}{1+f(x)}dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_{-2}^{0}\frac{f(x)}{1+f(x)}dx$에서 $x=-t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$이고,

$x=-2$일 때 $t=2$, $x=0$일 때 $t=0$이므로

$$\int_{-2}^{0}\frac{f(x)}{1+f(x)}dx=-\int_{2}^{0}\frac{f(-t)}{1+f(-t)}dt$$

$$=\int_0^2\frac{\frac{1}{f(t)}}{1+\frac{1}{f(t)}}dt\left(\because f(-x)=\frac{1}{f(x)}\right)$$

$$=\int_0^2\frac{1}{1+f(x)}dx \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{1+f(x)}dx=\int_0^2\frac{1}{1+f(x)}dx+\int_0^2\frac{f(x)}{1+f(x)}dx$$

$$=\int_0^2 1\,dx=\Big[x\Big]_0^2=2$$

정답_ ②

653

$y=e^x+1$에서 $e^x=y-1$이므로 $x=\ln|y-1|$

$\therefore g(x)=\ln(x-1)\ (\because e^x+1>1)$

$\int_2^{e+1}g(t)dt=\int_2^{e+1}\ln(t-1)dt=\int_2^{e+1}\ln(x-1)dx$

에서 $u'(x)=1, v(x)=\ln(x-1)$로 놓으면

$u(x)=x,\ v'(x)=\frac{1}{x-1}$이므로

$$\int_2^{e+1}\ln(x-1)dx=\Big[x\ln(x-1)\Big]_2^{e+1}-\int_2^{e+1}\frac{x}{x-1}dx$$

$$=(e+1)-\int_2^{e+1}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$=e+1-\Big[x+\ln|x-1|\Big]_2^{e+1}$$

$$=e+1-(e+1+1-2)=1$$

정답_ ①

654

$f(x)=\int_a^x \sin t^2\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\sin x^2$

$f''(x)=(\cos x^2)\cdot 2x=2x\cos x^2$

이때, $f''(a)=a$이므로

$f''(a)=2a\cos a^2=a \qquad \therefore \cos a^2=\frac{1}{2}\ (\because a\neq 0)$

$0<a<\sqrt{\frac{\pi}{2}}$에서 각 변을 제곱하면

$0<a^2<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos a^2=\frac{1}{2}$에서 $\quad a^2=\frac{\pi}{3}$

함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$에 대하여

$f^{-1}(0)=b$로 놓으면 $\ f(b)=0$이므로

$f(b)=\int_a^b \sin t^2\,dt=0$에서 $\quad b=a$

$\therefore f'(b)=f'(a)=\sin a^2=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore (f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(b)}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

정답_ ⑤

655

조건 (나)에서 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$g(x)=k\cos x+3$

조건 (가)에서 양변에 $x=0$을 대입하면

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f(t)dt=\{g(0)+a\}\sin 0-2$

이때 $\quad -k=-2 \qquad \therefore k=2$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=2$

또한, 조건 (가)에서 양변에 $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=\left\{g\left(\frac{\pi}{2}\right)+a\right\}\sin\frac{\pi}{2}-2$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$이므로 $\quad 0=(3+a)-2 \qquad \therefore a=-1$

$g(x)=2\cos x+3, a=-1$을 조건 (가)에 대입하면

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}f(t)dt=(2\cos x+2)\sin x-2$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=(-2\sin x)\sin x+(2\cos x+2)\cos x$

$\quad =-2\sin^2 x+2\cos^2 x+2\cos x$

$\therefore f(0)=0+2\cdot 1^2+2\cdot 1=4$

정답_ ④

656

$F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)dt$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)+F(x)-F(x-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{F(x-h)-F(x)}{-h}$$

$=2F'(x)=2f(x)=2^x$

$\therefore f(x)=2^{x-1}$

$\therefore \int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 2^{x-1}dx=\left[\frac{2^{x-1}}{\ln 2}\right]_1^2=\frac{1}{\ln 2}$

정답_ ①

10 정적분의 활용

657

S_n은 밑변의 길이가 $\frac{1}{n}$이고, 높이가 각각

$\left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \left(\frac{3}{n}\right)^2, \cdots, \left(\frac{n}{n}\right)^2$

인 n개의 직사각형의 넓이의 합이므로

$$S_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\boxed{(가)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}}$$

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\boxed{(가)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\frac{2}{6}=\boxed{(나)\ \frac{1}{3}}$$

정답_④

658

원뿔을 자른 단면의 반지름의 길이는 위에서부터 차례대로

$\frac{r}{n}, \frac{2r}{n}, \frac{3r}{n}, \cdots, \frac{(n-1)r}{n}$

이때, $(n-1)$개의 원기둥의 부피의 합을 V_n이라고 하면 각 원기둥의 높이는 $\boxed{(가)\ \frac{h}{n}}$이므로

$$V_n=\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2\frac{h}{n}+\pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2\frac{h}{n}+\pi\left(\frac{3r}{n}\right)^2\frac{h}{n}+\cdots$$

$$+\pi\left\{\frac{(n-1)r}{n}\right\}^2\frac{h}{n}$$

$$=\frac{\pi r^2h}{n^3}\{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\}$$

$$=\frac{\pi r^2h}{n^3}\cdot\boxed{(나)\ \sum_{k=1}^{n-1}k^2}$$

따라서 구하는 부피 V는

$$V=\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi r^2h}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi r^2h}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$=\pi r^2h\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

$$=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

정답_①

659

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3\frac{1}{x}dx$$

$$=\Big[\ln|x|\Big]_1^3=\ln 3$$

정답_②

660

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{3k}{n}\right)\cdot\frac{3}{n}-\int_2^4 f(x)dx$$

$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^4 f(x)dx-\int_2^4 f(x)dx$$

$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^4 f(x)dx+\int_4^2 f(x)dx$$

$$=\int_0^2 f(x)dx$$

정답_②

661

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}\{(2n+1)^2+(2n+2)^2+\cdots+(2n+n)^2\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(2n+k)^2=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2n+k)^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=2\int_2^3 x^2dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^3=\frac{38}{3}$$

정답_④

662

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{n}{2}}+\sqrt{\frac{n}{4}}+\sqrt{\frac{n}{6}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{2n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n}{2k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{\frac{2k}{n}}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{2k}{n}}}\cdot\frac{2}{n}=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[2\sqrt{x}\Big]_0^2=\sqrt{2}$$

정답_③

663

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{2n^2+3nk+k^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+3\frac{k}{n}+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2+3x+x^2}dx=\int_0^1\frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$=\Big[\ln|x+1|-\ln|x+2|\Big]_0^1$$

$$=(\ln 2-\ln 3)-(0-\ln 2)=\ln\frac{4}{3}$$

정답_②

664

점 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{n-1}$이 x축 위의 닫힌구간 $[0,\ 3]$을 n등분하였으므로

$A_k\left(\frac{3k}{n},\ 0\right)\qquad\therefore\ \overline{A_kB_k}=\left(\frac{3k}{n}\right)^2$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{A_kB_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3k}{n}\right)^2$$

$$=9\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=9\int_0^1 x^2dx$$

$$=9\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=9\cdot\frac{1}{3}=3$$

정답_ 3

665

$\angle \mathrm{AOP}_k=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}=\frac{k\pi}{2n}$

$\angle \mathrm{BOQ}_k=\frac{\pi}{2}-\angle \mathrm{AOP}_k=\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2n}$

이때, $\overline{\mathrm{OB}}=8$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}_k}=\overline{\mathrm{OB}}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2n}\right)=8\sin\frac{k\pi}{2n}$

$\overline{\mathrm{BQ}_k}=\overline{\mathrm{OB}}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2n}\right)=8\cos\frac{k\pi}{2n}$

$$S_k=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OQ}_k}\cdot\overline{\mathrm{BQ}_k}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 8\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot 8\cos\frac{k\pi}{2n}$$
$$=16\left(2\sin\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{k\pi}{2n}\right)$$
$$=16\left(\sin\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{k\pi}{2n}+\cos\frac{k\pi}{2n}\sin\frac{k\pi}{2n}\right)$$
$$=16\sin\left(\frac{k\pi}{2n}+\frac{k\pi}{2n}\right)$$
$$=16\sin\frac{k\pi}{n}$$

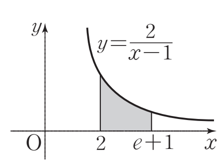
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}16\sin\frac{k\pi}{n}$$
$$=\frac{16}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}$$
$$=\frac{16}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$
$$=\frac{16}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$=\frac{16}{\pi}(1+1)=\frac{32}{\pi}$$

$\therefore a=32$

정답_ 32

666

주어진 조건을 그림으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_2^{e+1}\frac{2}{x-1}dx=2\Big[\ln|x-1|\Big]_2^{e+1}$$
$$=2(1-0)=2$$

정답_ ②

667

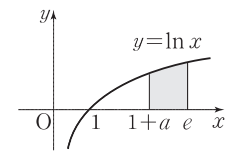
$(x^2+1)'=2x$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^1\frac{4x}{x^2+1}dx=2\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=2\Big[\ln(x^2+1)\Big]_0^1$$
$$=2(\ln 2-\ln 1)=2\ln 2$$

정답_ ⑤

668

주어진 조건을 그림으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



도형의 넓이는

$$\int_{1+a}^{e}\ln x\,dx=\Big[x\ln x-x\Big]_{1+a}^{e}$$
$$=-(1+a)\ln(1+a)+(1+a)$$
$$=(1+a)\{1-\ln(1+a)\}=3(1-\ln 3)$$

$1+a=3 \quad \therefore a=2$

정답_ ②

669

$(\ln x)^2-3\ln x+2=(\ln x-1)(\ln x-2)$이므로

$f(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구하면

$\ln x-1=0$ 또는 $\ln x-2=0$

$\therefore x=e$ 또는 $x=e^2$

한편, $e<x<e^2$에서 $f(x)<0$이므로 구하는 도형의 넓이는

$$-\int_e^{e^2}\frac{(\ln x)^2-3\ln x+2}{x}dx$$

이때, $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이고,

$x=e$일 때 $t=1$, $x=e^2$일 때 $t=2$이므로

$$-\int_e^{e^2}\frac{(\ln x)^2-3\ln x+2}{x}dx$$
$$=-\int_1^2(t^2-3t+2)dt=-\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_1^2$$
$$=-\left\{\left(\frac{8}{3}-6+4\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)\right\}=\frac{1}{6}$$

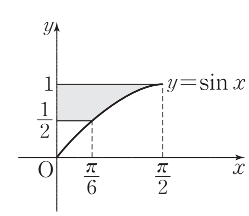
정답_ ①

670

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 $y=1$일 때 $x=\frac{\pi}{2}$,

$y=\frac{1}{2}$일 때 $x=\frac{\pi}{6}$

주어진 조건을 그림으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$1\times\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}-\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{5}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

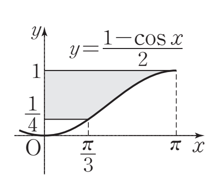
정답_ ⑤

671

$0\le x\le\pi$에서 $y=\frac{1}{4}$일 때 $x=\frac{\pi}{3}$,

$y=1$일 때 $x=\pi$

주어진 조건을 그림으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



도형의 넓이는

$$1\times\pi-\frac{1}{4}\times\frac{\pi}{3}-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1-\cos x}{2}\,dx$$

$$=\pi-\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(1-\cos x)dx$$

$$=\frac{11}{12}\pi-\frac{1}{2}\Big[x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$=\frac{11}{12}\pi-\frac{1}{2}\left\{(\pi-\sin\pi)-\left(\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$=\frac{11}{12}\pi-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{7}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

따라서 $a=\frac{7}{12}$, $b=-\frac{1}{4}$이므로

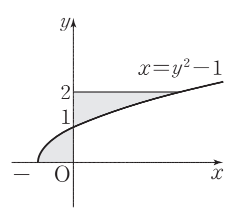
$a+b=\frac{7}{12}+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{3}$ 정답_②

672

$y=\sqrt{x+1}$에서 양변을 제곱하면

$y^2=x+1$ $\quad\therefore x=y^2-1$

주어진 조건을 그림으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$-\int_0^1(y^2-1)dy+\int_1^2(y^2-1)dy$$

$$=-\left[\frac{1}{3}y^3-y\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}y^3-y\right]_1^2$$

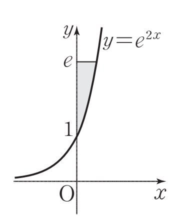
$$=-\left\{\left(\frac{1}{3}-1\right)-(0-0)\right\}+\left\{\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right\}$$

$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$ 정답_②

673

$y=e^{2x}$에서 $\ln y=2x$ $\quad\therefore x=\frac{1}{2}\ln y$

주어진 조건을 그림으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^e\frac{1}{2}\ln y\,dy=\frac{1}{2}\Big[y\ln y-y\Big]_1^e$$

$$=\frac{1}{2}\{(e-e)-(0-1)\}$$

$=\frac{1}{2}$ 정답_②

674

$y=\sqrt{1-\sqrt{x}}$에서 양변을 제곱하면

$y^2=1-\sqrt{x}$, $\sqrt{x}=1-y^2$ $\quad\therefore x=(1-y^2)^2=y^4-2y^2+1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1(y^4-2y^2+1)dy=\left[\frac{1}{5}y^5-\frac{2}{3}y^3+y\right]_0^1$$

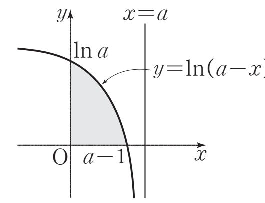
$$=\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right)-0$$

$=\frac{8}{15}$ 정답_②

675

$y=\ln(a-x)$에서 $e^y=a-x$ $\quad\therefore x=a-e^y$

주어진 조건을 그림으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



도형의 넓이는

$$\int_0^{\ln a}(a-e^y)dy$$

$$=\Big[ay-e^y\Big]_0^{\ln a}$$

$=(a\ln a-e^{\ln a})-(0-1)$

$=a\ln a-a+1$

$a\ln a-a+1=a+1$에서 $a(\ln a-2)=0$

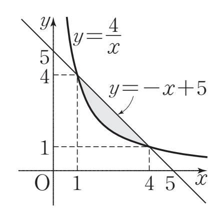
$\ln a=2$ ($\because a>1$) $\quad\therefore a=e^2$ 정답_⑤

676

$xy=4$에서 $y=\frac{4}{x}$

$x+y=5$에서 $y=-x+5$

곡선 $y=\frac{4}{x}$와 직선 $y=-x+5$의 교점의



x좌표는 $\frac{4}{x}=-x+5$에서

$x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

한편, $1\le x\le 4$에서 $\frac{4}{x}\le -x+5$이므로

도형의 넓이는

$$\int_1^4\left\{(-x+5)-\frac{4}{x}\right\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+5x-4\ln|x|\right]_1^4$$

$$=\left\{(-8+20-4\ln 4)-\left(-\frac{1}{2}+5-0\right)\right\}$$

$=\frac{15}{2}-4\ln 4=\frac{15}{2}-8\ln 2$

따라서 $a=\frac{15}{2}$, $b=-8$이므로

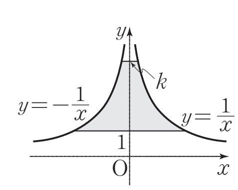
$a+b=\frac{15}{2}+(-8)=-\frac{1}{2}$ 정답_②

677

$y=\frac{1}{x}$에서 $x=\frac{1}{y}$

$y=-\frac{1}{x}$에서 $x=-\frac{1}{y}$

주어진 조건을 그림으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



도형의 넓이는

$$\int_1^k\left\{\frac{1}{y}-\left(-\frac{1}{y}\right)\right\}dy=2\int_1^k\frac{1}{y}\,dy$$

$$=2\Big[\ln|y|\Big]_1^k$$

$=2\ln k$

$2\ln k=4$에서 $\ln k=2$ $\therefore k=e^2$ 정답_ ⑤

678

구하는 넓이는

$$\int_0^1\left\{2^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}}\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{2}{\ln 2}-\frac{\frac{1}{2}}{\ln\frac{1}{2}}\right)-\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\frac{5}{2\ln 2}-\frac{2}{\ln 2}=\frac{1}{2\ln 2}$$

정답_ ④

679

곡선 $y=x\cos x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x\cos x=x$, $x(\cos x-1)=0$, $x=0$ 또는 $\cos x=1$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

$0\le x\le 2\pi$에서 $x\cos x\le x$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^{2\pi}(x-x\cos x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{2\pi}-\left\{\left[x\sin x\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin x\,dx\right\}$$

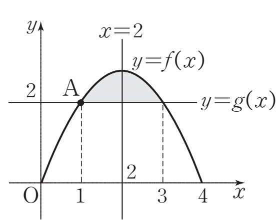
$$=2\pi^2-0+\left[-\cos x\right]_0^{2\pi}$$

$$=2\pi^2+(-1+1)=2\pi^2$$

정답_ $2\pi^2$

680

닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $f(x)$는 주기가 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$인 함수로 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다. 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $g(x)=2$의 교점의 x좌표는 $x=1$, $x=3$이다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^3\{f(x)-g(x)\}dx=\int_1^3\left(2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x-2\right)dx$$

$$=\left[-2\sqrt{2}\cdot\frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi}{4}x-2x\right]_1^3$$

$$=-\frac{8\sqrt{2}}{\pi}\left(\cos\frac{3}{4}\pi-\cos\frac{\pi}{4}\right)-4$$

$$=-\frac{8\sqrt{2}}{\pi}\cdot(-\sqrt{2})-4$$

$$=\frac{16}{\pi}-4$$

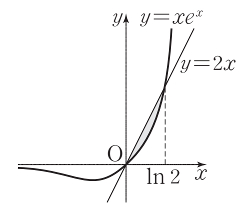
정답_ ①

681

곡선 $y=xe^x$과 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는

$xe^x=2x$, $x(e^x-2)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=\ln 2$

한편, $0\le x\le\ln 2$에서 $xe^x\le 2x$이므로 구하는 넓이는



$$\int_0^{\ln 2}(2x-xe^x)dx$$

$$=\int_0^{\ln 2}2x\,dx-\int_0^{\ln 2}xe^x\,dx$$

$$=\left[x^2\right]_0^{\ln 2}-\left\{\left[xe^x\right]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}e^x\,dx\right\}$$

$$=(\ln 2)^2-\left(2\ln 2-\left[e^x\right]_0^{\ln 2}\right)$$

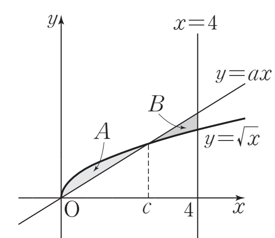
$$=(\ln 2)^2-2\ln 2+1$$

정답_ ④

682

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표를 c라고 하자.

두 도형 A, B의 넓이가 서로 같으므로



$$\int_0^c(\sqrt{x}-ax)dx=\int_c^4(ax-\sqrt{x})dx$$

$$\int_0^c(\sqrt{x}-ax)dx-\int_c^4(ax-\sqrt{x})dx=0$$

$$\int_0^c(\sqrt{x}-ax)dx+\int_c^4(\sqrt{x}-ax)dx=0$$

$\displaystyle\int_0^4(\sqrt{x}-ax)dx=0$에서 $\left[\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}-\dfrac{a}{2}x^2\right]_0^4=0$

$\dfrac{16}{3}-8a=0$ $\therefore a=\dfrac{2}{3}$

정답_ $\dfrac{2}{3}$

683

두 도형 A, B의 넓이가 서로 같으므로 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=0$

$\displaystyle\int_0^1 f'(\sqrt{x})dx$에서 $\sqrt{x}=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$이고, $x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^1 f'(\sqrt{x})dx=2\int_0^1 tf'(t)dt=2\left\{\left[tf(t)\right]_0^1-\int_0^1 f(t)dt\right\}$$

$$=2f(1)=2\cdot 1=2$$

정답_ ②

684

[그림 1]에서 곡선 $y=\ln x$와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_1^4\ln x\,dx=\left[x\ln x\right]_1^4-\int_1^4 1\,dx$$

$$=(4\ln 4-\ln 1)-\left[x\right]_1^4$$

$=4\ln 4-3$ ……㉠

또, [그림 2]에서 색칠한 도형의 넓이는

$(4-1)\ln k=3\ln k$ ……㉡

㉠, ㉡이 서로 같으므로 $4\ln 4-3=3\ln k$

$\ln k=\frac{4}{3}\ln 4-1=\ln 4^{\frac{4}{3}}-\ln e=\ln \frac{4\sqrt[3]{4}}{e}$

$\therefore k=\frac{4\sqrt[3]{4}}{e}$ 정답_④

685

곡선 $y=\frac{1}{x}$과 x축 및 두 직선 $x=1, x=e$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_1^e \frac{1}{x}dx=\Big[\ln|x|\Big]_1^e=\ln e-\ln 1=1$

직선 $x=a$가 넓이를 이등분하므로 $\int_1^a \frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}$

$\Big[\ln|x|\Big]_1^a=\frac{1}{2}, \ln a=\frac{1}{2}$

$\therefore a=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$ 정답_②

686

곡선 $y=\cos 2x$와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{12}$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 2x\,dx=\Big[\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{12}}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

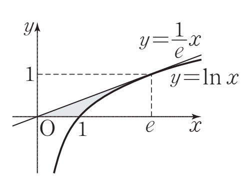
이때, 직선 $y=a$가 넓이를 이등분하고 이등분된 아래쪽 영역은 가로, 세로의 길이가 각각 $\frac{\pi}{12}, a$인 직사각형이므로

$\frac{\pi}{12}\cdot a=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$ $\quad\therefore a=\frac{3}{2\pi}$ 정답_③

687

$y=\ln x$에서 $y'=\frac{1}{x}$이므로 이 곡선 위의 점 $(e,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{e}(x-e)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{e}x$



따라서 구하는 넓이는

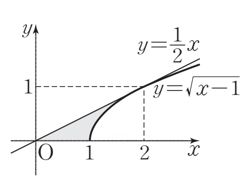
$\frac{1}{2}\cdot e\cdot 1-\int_1^e \ln x\,dx=\frac{e}{2}-\left\{\Big[x\ln x\Big]_1^e-\int_1^e 1\,dx\right\}$

$=\frac{e}{2}-\left\{e-\Big[x\Big]_1^e\right\}$

$=\frac{e}{2}-\{e-(e-1)\}=\frac{e}{2}-1$ 정답_①

688

$y=\sqrt{x-1}$에서 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$이므로 이 곡선 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2\sqrt{2-1}}=\frac{1}{2}$이고 접선의 방정식은



$y-1=\frac{1}{2}(x-2)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{2}x$

따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1-\int_1^2 \sqrt{x-1}\,dx=1-\Big[\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}\Big]_1^2$

$=1-\left(\frac{2}{3}-0\right)=\frac{1}{3}$ 정답_④

689

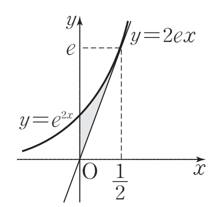
$y=e^{2x}$에서 $y'=2e^{2x}$이므로 접점의 좌표를 $(a,\ e^{2a})$이라고 하면 이 점에서의 접선의 방정식은 $y-e^{2a}=2e^{2a}(x-a)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-e^{2a}=2e^{2a}\cdot(-a), (2a-1)e^{2a}=0$

$2a-1=0$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

즉, 접점의 좌표가 $\left(\frac{1}{2},\ e\right)$이므로 원점에서 곡선 $y=e^{2x}$에 그은 접선의 방정식은 $y-e=2e\left(x-\frac{1}{2}\right)$



$\therefore y=2ex$

따라서 구하는 넓이는

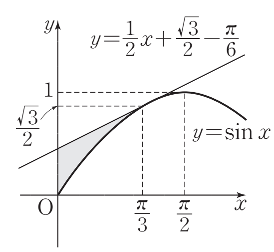
$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x}dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot e=\Big[\frac{1}{2}e^{2x}\Big]_0^{\frac{1}{2}}-\frac{e}{4}=\frac{e}{4}-\frac{1}{2}$ 정답_①

690

$y=\sin x$에서 $y'=\cos x$이므로 곡선 위의 점 $\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$

따라서 구하는 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\cdot\frac{\pi}{3}$

$-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx$

$=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\pi}{6}-\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=-\frac{\pi^2}{36}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi-\frac{1}{2}$ 정답_①

691

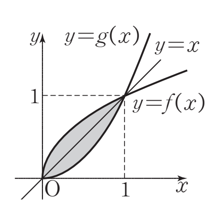
함수 $f(x)=\sqrt{x}\ (x\ge 0)$의 역함수를 $g(x)$라고 하면

$g(x)=x^2\ (x\ge 0)$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다. 즉, $\sqrt{x}=x$에서 $x=x^2$

$x^2-x=0, x(x-1)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=1$

이때, 구하는 넓이는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$와 곡선 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로



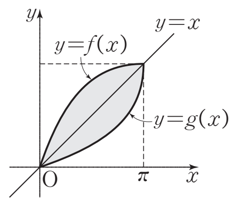
$2\int_0^1 (x-x^2)dx=2\Big[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-0\right\}=\frac{1}{3}$$

정답_ ④

692

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 서로 역함수이므로 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 따라서 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같으므로



$x+\sin x=x, \sin x=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=\pi$ ($\because 0\le x\le \pi$)

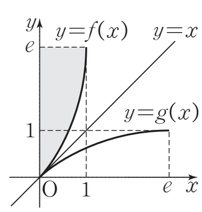
따라서 구하는 넓이는

$$2\int_0^{\pi}(x+\sin x-x)dx=2\int_0^{\pi}\sin x\,dx=2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$=2(1+1)=4$$

정답_ ④

693

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 서로 역함수이므로 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 이때, $\int_0^e g(x)dx$는 색칠한 도형의 넓이와 같으므로 가로, 세로가 각각 1, e인 직사각형에서 $\int_0^1 f(x)dx$를 뺀 것과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$1\cdot e-\int_0^1 xe^x dx=e-\left\{\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx\right\}$$
$$=e-\left(e-\Big[e^x\Big]_0^1\right)$$
$$=e-\{e-(e-1)\}=e-1$$

정답_ ①

694

점 P의 좌표가 $(x,\ 0)$이므로 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(x,\ -x^2+x)$

$\overline{\mathrm{PQ}}=-x^2+x$

이때, $\overline{\mathrm{PQ}}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는

$(-x^2+x)^2=x^4-2x^3+x^2$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^1(x^4-2x^3+x^2)dx=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{30}$$

정답_ $\frac{1}{30}$

695

한 변의 길이가 $\sqrt{x}+1$인 정사각형의 넓이는

$(\sqrt{x}+1)^2=x+2\sqrt{x}+1$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^1(x+2\sqrt{x}+1)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+1\right)-0=\frac{17}{6}$$

정답_ ④

696

구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^6\ln(x+1)dx=\Big[x\ln(x+1)\Big]_0^6-\int_0^6\frac{x}{x+1}dx$$
$$=6\ln 7-\int_0^6\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=6\ln 7-\Big[x-\ln|x+1|\Big]_0^6$$
$$=6\ln 7-\{(6-\ln 7)-(0-0)\}=7\ln 7-6$$

정답_ ①

697

수면의 넓이가 1 m^2일 때의 수면의 높이를 구하면

$1-\cos\frac{\pi}{4}x=1, \cos\frac{\pi}{4}x=0$

$\frac{\pi}{4}x=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore x=2$ ($\because 0\le x\le 3$)

따라서 구하는 물의 부피는

$$\int_0^2\left(1-\cos\frac{\pi}{4}x\right)dx=\left[x-\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}x\right]_0^2$$
$$=\left(2-\frac{4}{\pi}\right)-(0-0)$$
$$=2-\frac{4}{\pi}(\mathrm{m}^3)$$

정답_ ②

698

물의 깊이가 x일 때의 수면의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$$V=\int_0^x S(x)dx=\{\ln(x+1)\}^2+kx$$

양변을 x에 대하여 미분하면 $\quad S(x)=\frac{2\ln(x+1)}{x+1}+k$

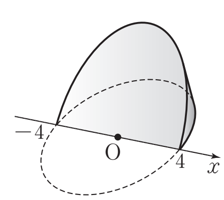
물의 깊이가 $e-1$일 때, 수면의 넓이가 $\frac{12}{e}$이므로

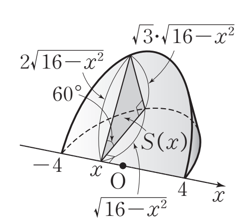
$S(e-1)=\frac{2}{e}+k=\frac{12}{e} \qquad \therefore k=\frac{10}{e}$

정답_ $\frac{10}{e}$

699

다음 그림과 같이 원기둥의 밑면의 중심을 원점으로 하고, 지름을 x축으로 정하면 작은 쪽의 입체도형의 밑면은 반지름의 길이가 4인 반원이다.





이때, x좌표가 x인 점을 지나고 밑면에 수직인 평면으로 이 입체도형을 자를 때 생기는 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{16-x^2}\cdot\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{16-x^2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}(16-x^2)$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_{-4}^{4}\frac{\sqrt{3}}{2}(16-x^2)dx=\sqrt{3}\int_{0}^{4}(16-x^2)dx$$
$$=\sqrt{3}\left[16x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^4$$
$$=\sqrt{3}\left(64-\frac{64}{3}\right)=\frac{128\sqrt{3}}{3}$$

정답_ ④

700

$v(t)=\sin 2t$에서 $v\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\pi=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$$

점 P가 움직인 거리는 양수이므로 함수 $y=|\sin 2t|$를 생각하면

이 함수의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이고, $\frac{13}{4}=3+\frac{1}{4}$이다.

$\int_0^u \sin 2t\,dt=\frac{1}{4}$인 $u\left(0<u<\frac{\pi}{2}\right)$의 값을 구하면

$$\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^u=\frac{1}{4},\ -\frac{1}{2}\cos 2u+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$\cos 2u=\frac{1}{2},\ 2u=\frac{\pi}{3}\qquad \therefore u=\frac{\pi}{6}$

$\therefore a=3\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{5}{3}\pi$

정답_ ④

701

$t=0$에서의 위치가 0이므로 $t=a\ (0<a\le 100)$일 때 점 P의 위치는

$$0+\int_0^a\cos\frac{\pi}{3}t\,dt=\left[\frac{3}{\pi}\sin\frac{\pi}{3}t\right]_0^a=\frac{3}{\pi}\sin\frac{a}{3}\pi$$

점 P가 원점을 지나려면 $\frac{3}{\pi}\sin\frac{a}{3}\pi=0$에서

$a=3k$ (단, k는 자연수이다.)

따라서 $0<3k\le 100$에서 $0<k\le\frac{100}{3}=33.333\cdots$이므로 원점을 통과하는 횟수는 33이다.

정답_ ③

702

$x=\frac{4}{3}t\sqrt{t}=\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}},\ y=t\left(1-\frac{1}{2}t\right)=-\frac{1}{2}t^2+t$에서

$\frac{dx}{dt}=2t^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{t},\ \frac{dy}{dt}=-t+1$

이므로 구하는 거리는

$$\int_1^5\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_1^5\sqrt{4t+(-t+1)^2}dt$$
$$=\int_1^5\sqrt{(t+1)^2}dt$$
$$=\int_1^5(t+1)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_1^5$$
$$=\left(\frac{25}{2}+5\right)-\left(\frac{1}{2}+1\right)$$
$$=16$$

정답_ ③

703

$x=t^2,\ y=\frac{2}{3}t^3$에서 $\frac{dx}{dt}=2t,\ \frac{dy}{dt}=2t^2$

구하는 거리는

$$\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{(2t)^2+(2t^2)^2}dt$$
$$=\int_0^{\sqrt{3}}2t\sqrt{1+t^2}dt$$

$1+t^2=u$로 놓으면 $\frac{du}{dt}=2t$이고,

$t=0$일 때 $u=1,\ t=\sqrt{3}$일 때 $u=4$이므로

$$\int_0^{\sqrt{3}}2t\sqrt{1+t^2}dt=\int_1^4\sqrt{u}\,du$$
$$=\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{14}{3}$$

정답_ ⑤

704

$x=e^t-t,\ y=4e^{\frac{t}{2}}$에서

$\frac{dx}{dt}=e^t-1,\ \frac{dy}{dt}=2e^{\frac{t}{2}}$

이므로 구하는 거리는

$$\int_0^a\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^a\sqrt{(e^t-1)^2+(2e^{\frac{t}{2}})^2}dt$$
$$=\int_0^a\sqrt{e^{2t}+2e^t+1}\,dt$$
$$=\int_0^a\sqrt{(e^t+1)^2}dt$$
$$=\int_0^a(e^t+1)dt$$
$$=\left[e^t+t\right]_0^a$$
$$=(e^a+a)-(1+0)$$
$$=e^a+a-1$$

$e^a+a-1=e^2+1$에서

$a=2$

정답_ 2

705

$y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$에서

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x=x\sqrt{x^2+2}$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^6\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_0^6\sqrt{1+x^2(x^2+2)}dx$$
$$=\int_0^6\sqrt{x^4+2x^2+1}\,dx$$
$$=\int_0^6\sqrt{(x^2+1)^2}dx$$
$$=\int_0^6(x^2+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^6$$
$$=(72+6)-0=78$$

정답_ ④

706

$y=\int_0^x \sqrt{\sec^4 t-1}\,dt$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\sec^4 x-1}$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+(\sec^4 x-1)}\,dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx=\Big[\tan x\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=1-(-1)=2$$

정답_ ③

707

$0\le x\le t$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이는

$\int_0^t \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$

위의 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$

양변을 제곱하면

$1+\{f'(t)\}^2=\frac{1}{4}(e^t+e^{-t})^2,\ \{f'(t)\}^2=\frac{1}{4}(e^t-e^{-t})^2$

그런데 $f'(t)\ge0$이므로 $f'(t)=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$

$f(t)=\frac{1}{2}\int (e^t-e^{-t})\,dt=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})+C$

이때, $f(0)=1+C=1$이므로 $C=0$

따라서 $f(t)=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$이므로

$f(\ln 2)=\frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$

정답_ ⑤

708

$x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t$에서

$\frac{dx}{dt}=e^t(\cos t-\sin t),\ \frac{dy}{dt}=e^t(\sin t+\cos t)$

이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{3\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{3\pi} \sqrt{e^{2t}(\cos t-\sin t)^2+e^{2t}(\sin t+\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{3\pi} \sqrt{e^{2t}(1-2\sin t\cos t+1+2\sin t\cos t)}\,dt$$
$$=\sqrt{2}\int_0^{3\pi} e^t\,dt=\sqrt{2}\Big[e^t\Big]_0^{3\pi}$$
$$=\sqrt{2}(e^{3\pi}-1)$$

정답_ ④

709

$x=\ln t^2=2\ln|t|=2\ln t\,(1\le t\le a),\ y=t+\frac{1}{t}$에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{t},\ \frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t^2}$

이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_1^a \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_1^a \sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2+\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_1^a \sqrt{\frac{4}{t^2}+1-\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}}\,dt$$
$$=\int_1^a \sqrt{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_1^a \left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$$
$$=\left[t-\frac{1}{t}\right]_1^a$$
$$=\left(a-\frac{1}{a}\right)-(1-1)$$
$$=a-\frac{1}{a}$$

$a-\frac{1}{a}=\frac{3}{2}$에서 $2a^2-3a-2=0,\ (2a+1)(a-2)=0$

$a\ge1$이므로 $a=2$

정답_ ②

710

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^2}\left(\cos\frac{\pi}{n}+2\cos\frac{2\pi}{n}+3\cos\frac{3\pi}{n}+\cdots+n\cos\frac{n\pi}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\cos\frac{k\pi}{n}$$
$$=\pi\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\pi\int_0^1 x\cos\pi x\,dx \quad \cdots\cdots\cdots ❶$$

이때, $f'(x)=\cos\pi x,\ g(x)=x$로 놓으면

$f(x)=\frac{1}{\pi}\sin\pi x,\ g'(x)=1$이므로

$$(\text{주어진 식})=\pi\left[\frac{x}{\pi}\sin\pi x\right]_0^1-\pi\int_0^1\frac{1}{\pi}\sin\pi x\,dx$$
$$=-\int_0^1\sin\pi x\,dx$$
$$=-\left[-\frac{\cos\pi x}{\pi}\right]_0^1$$
$$=-\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\right)=-\frac{2}{\pi} \quad \cdots\cdots\cdots ❷$$

정답_ $-\frac{2}{\pi}$

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 급수를 정적분으로 나타내기	50%
❷	부분적분법을 이용하여 정적분의 값 구하기	50%

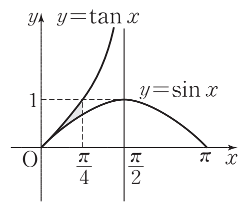
711

두 곡선 $y=\tan x,\ y=\sin x$의 교점의 x좌표는

$\tan x=\sin x,\ \frac{\sin x}{\cos x}=\sin x,\ \sin x(1-\cos x)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=1$ $\quad\therefore x=0$ $\cdots\cdots\cdots$ ❶

주어진 조건을 그림으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



한편, $0\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 $\sin x<\tan x$ 이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x-\sin x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x\right)dx$$
$$=\Big[-\ln|\cos x|+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\left\{-\ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{4}\right\}-\{-\ln(\cos 0)+\cos 0\}$$
$$=-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$
$$=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\sqrt{2}}{2}-1 \quad \cdots\cdots ❷$$

정답_ $\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\sqrt{2}}{2}-1$

단계	채점 기준	비율
❶	두 곡선 $y=\tan x$, $y=\sin x$의 교점의 x좌표 구하기	50%
❷	넓이 구하기	50%

712

곡선 $y=\frac{1}{x}$과 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_a^b\frac{1}{x}dx=\Big[\ln|x|\Big]_a^b=\ln b-\ln a$ ……㉠

…… ❶

한편, $y=\frac{1}{x}$에서 $y'=-\frac{1}{x^2}$이므로 이 곡선 위의 점 $\mathrm{P}\left(a, \frac{1}{a}\right)$에서의 접선의 방정식은 $y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a)$

이 직선의 x절편은 $-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a)$

$x-a=a \qquad \therefore x=2a$

따라서 곡선 위의 점 $\mathrm{P}\left(a, \frac{1}{a}\right)$에서의 접선과 x축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot(2a-a)\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$ ……㉡

…… ❷

㉠이 ㉡의 4배이므로 $\ln b-\ln a=4\cdot\frac{1}{2}=2$, $\ln\frac{b}{a}=2$

$\frac{b}{a}=e^2 \qquad \therefore b=ae^2$ …… ❸

정답_ $b=ae^2$

단계	채점 기준	비율
❶	곡선 $y=\frac{1}{x}$과 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	30%
❷	곡선 $y=\frac{1}{x}$ 위의 점에서의 접선과 x축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	40%
❸	b를 a에 대한 식으로 나타내기	30%

713

$f(x)=\int_0^x(a-t)e^t\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(a-x)e^x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=a\ (\because e^x>0)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대인 동시에 최댓값을 갖는다.

$$f(x)=\int_0^x(a-t)e^t\,dt=\Big[(a-t)e^t\Big]_0^x+\int_0^x e^t\,dt$$
$$=\{(a-x)e^x-a\}+\Big[e^t\Big]_0^x=(a-x)e^x-a+(e^x-1)$$
$$=(a+1-x)e^x-a-1$$

최댓값이 32이므로

$f(a)=e^a-a-1=32 \qquad \therefore e^a-a=33$ …… ❶

한편, 곡선 $y=3e^x$과 직선 $y=3$이 만나는 점의 x좌표는

$3e^x=3$, $e^x=1 \qquad \therefore x=0$ …… ❷

따라서 구하는 넓이는

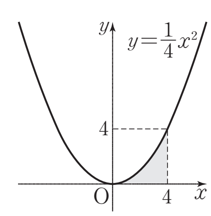
$$\int_0^a(3e^x-3)dx=\Big[3e^x-3x\Big]_0^a=(3e^a-3a)-(3-0)$$
$$=3(e^a-a)-3=3\cdot 33-3=96 \quad \cdots\cdots ❸$$

정답_ 96

단계	채점 기준	비율
❶	e^a-a의 값 구하기	50%
❷	곡선 $y=e^{3x}$과 직선 $y=3$이 만나는 점의 x좌표 구하기	30%
❸	넓이 구하기	20%

714

오른쪽 그림과 같이 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 포물선 $y=\frac{1}{4}x^2$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\int_0^4\frac{1}{4}x^2\,dx=\Big[\frac{1}{12}x^3\Big]_0^4=\frac{16}{3}$ …… ❶

블록에서 포물선을 이루는 단면의 넓이는

$8\cdot 4-2\cdot\frac{16}{3}=\frac{64}{3}$ …… ❷

따라서 구하는 블록의 부피는

$$12\cdot 12\cdot 5-\int_0^{12}\frac{64}{3}dx=720-\Big[\frac{64}{3}x\Big]_0^{12}$$
$$=720-256=464\ (\mathrm{cm}^3) \quad \cdots\cdots ❸$$

정답_ $464\ \mathrm{cm}^3$

단계	채점 기준	비율
❶	닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	20%
❷	블록에서 포물선을 이루는 단면의 넓이 구하기	40%
❸	블록의 부피 구하기	40%

715

두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 S_P, S_Q라고 하면

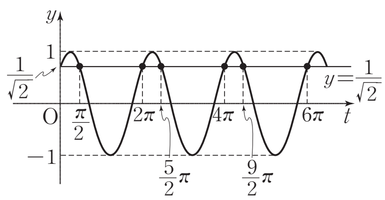
$$S_P=\int_0^t\cos t\,dt=\Big[\sin t\Big]_0^t=\sin t$$

$S_Q=\int_0^t \sin t\,dt=\Big[-\cos t\Big]_0^t=-\cos t+1$ ❶

$\sin t=-\cos t+1$ $(0<t\le 6\pi)$에서

$\sin t+\cos t=1$, $\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

이때, 두 함수 $y=\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$와 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$의 그래프의 교점의 개수를 구해 보면



위의 그림과 같이 $0<t\le 6\pi$에서 두 점 P, Q는 6회 만난다.

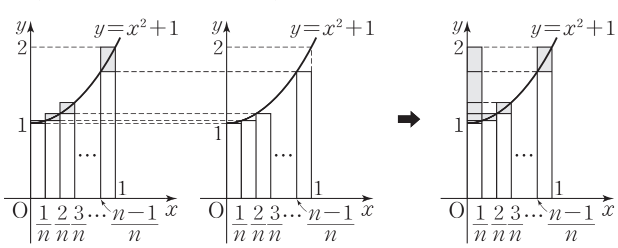
따라서 구하는 횟수는 6이다. ❷

정답_ 6

단계	채점 기준	비율
❶	두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치 각각 구하기	40%
❷	두 점이 만나는 횟수 구하기	60%

716

다음 그림과 같이 [그림 1]의 각 직사각형에서 [그림 2]의 대응하는 직사각형을 지우고 나면 색칠한 부분만 남으므로 $A-B$의 값은 [그림 1]의 가장 큰 직사각형의 넓이와 [그림 2]의 가장 작은 직사각형의 넓이의 차와 같다.



$f(x)=x^2+1$로 놓으면 위의 그림에서

$A-B=\frac{1}{n}f(1)-\frac{1}{n}f(0)=\frac{2}{n}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$

$A-B\le 0.15$에서 $\frac{1}{n}\le 0.15$ $\quad\therefore n\ge 6.66\cdots$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 7이다. 정답_ ②

717

$$\int_1^n f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\cdots+\int_{n-1}^n f(x)dx$$
$$=1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2$$
$$=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\int_1^n f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$
$$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

정답_ ③

718

$$F(t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a+\frac{t+1}{n}k\right)\cdot\frac{t+1}{n}$$
$$=\int_a^{a+t+1}x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^{a+t+1}$$
$$=\frac{1}{2}\{(a+t+1)^2-a^2\}$$
$$=\frac{1}{2}(t+1)(t+2a+1)$$

이때, $F(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=-2a-1$

$F(t)=0$이 양의 실근을 가지려면

$-2a-1>0$ $\quad\therefore a<-\frac{1}{2}$

따라서 정수 a의 최댓값은 -1이다. 정답_ ②

719

$f(x)=a\sin x$, $g(x)=e^{x-b}$으로 놓으면

$f'(x)=a\cos x$, $g'(x)=e^{x-b}$

두 곡선이 $x=b$에서 접하므로

$f(b)=g(b)$에서 $a\sin b=1$ ⋯⋯ ㉠

$f'(b)=g'(b)$에서 $a\cos b=1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a\sin b=a\cos b$, $\sin b=\cos b$

$\therefore b=\frac{\pi}{4}$ $\left(\because a>0, 0<b<\frac{\pi}{2}\right)$

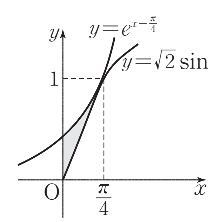
$b=\frac{\pi}{4}$를 ㉠에 대입하면

$a\sin\frac{\pi}{4}=1$, $\frac{\sqrt{2}}{2}a=1$ $\quad\therefore a=\sqrt{2}$

따라서 $f(x)=\sqrt{2}\sin x$,

$g(x)=e^{x-\frac{\pi}{4}}$이고, 접점의 좌표는

$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$이므로 구하는 넓이는



$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(e^{x-\frac{\pi}{4}}-\sqrt{2}\sin x\right)dx$$
$$=\left[e^{x-\frac{\pi}{4}}+\sqrt{2}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=(1+1)-\left(e^{-\frac{\pi}{4}}+\sqrt{2}\right)$$
$$=2-\sqrt{2}-e^{-\frac{\pi}{4}}$$

정답_ ②

720

$f(x)=k\ln x$라 하고, 곡선 $y=k\ln x$와 직선 $y=x$가 접할 때 접점의 좌표를 $\mathrm{P}(t, t)$라고 하면

$f(t)=k\ln t=t$ ⋯⋯ ㉠

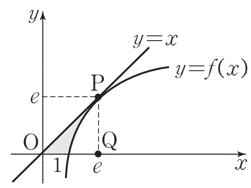
또, $f'(x)=\frac{k}{x}$이고 $x=t$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=\frac{k}{t}=1$ $\quad\therefore t=k$ ⋯⋯ ㉡

ⓒ을 ㉠에 대입하면 $k\ln k=k$에서 $k=e$이므로 $t=e$

따라서 $f(x)=e\ln x$이고 접점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(e,\ e)$이다.

한편, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라고 하면 $\mathrm{Q}(e,\ 0)$이고 곡선 $y=e\ln x$와 직선 $y=x$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 삼각형 OQP의 넓이에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=e$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 빼면 되므로 구하는 도형의 넓이는



$$\triangle\mathrm{OQP}-\int_1^e f(x)dx=\frac{1}{2}\cdot e\cdot e-\int_1^e e\ln x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}e^2-e\Big[x\ln x-x\Big]_1^e$$
$$=\frac{1}{2}e^2-e(e\ln e-e+1)$$
$$=\frac{1}{2}e^2-e$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=1$이므로

$100ab=100\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=50$ 정답_ 50

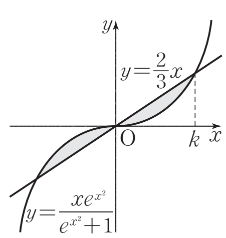
721

$f(x)=\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$, $g(x)=\frac{2}{3}x$로 놓으면

$$f(-x)=-\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}=-f(x)$$

$$g(-x)=-\frac{2}{3}x=-g(x)$$

곡선 $y=\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$과 직선 $y=\frac{2}{3}x$는 모두 오른쪽 그림과 같이 원점에 대하여 대칭이다. 따라서 구하는 넓이는 $x\ge0$인 범위에서 곡선 $y=\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$과 직선 $y=\frac{2}{3}x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.



$x\ge0$일 때, 곡선 $y=\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$과 직선 $y=\frac{2}{3}x$의 교점의 x좌표는

$\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}=\frac{2}{3}x$, $3xe^{x^2}=2x(e^{x^2}+1)$, $x(e^{x^2}-2)=0$

$x=0$ 또는 $e^{x^2}=2$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=\sqrt{\ln 2}$

$0\le x\le\sqrt{\ln 2}$에서 $\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}\le\frac{2}{3}x$이므로 구하는 넓이는

$$2\int_0^{\sqrt{\ln 2}}\left(\frac{2}{3}x-\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}\right)dx=\frac{2}{3}\ln 2-2\int_0^{\sqrt{\ln 2}}\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx$$

이때, $x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이고,

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\sqrt{\ln 2}$일 때 $t=\ln 2$이므로

$$\frac{2}{3}\ln 2-2\int_0^{\sqrt{\ln 2}}\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx=\frac{2}{3}\ln 2-\int_0^{\ln 2}\frac{e^t}{e^t+1}dt$$
$$=\frac{2}{3}\ln 2-\Big[\ln(e^t+1)\Big]_0^{\ln 2}$$
$$=\frac{2}{3}\ln 2-(\ln 3-\ln 2)$$
$$=\frac{5}{3}\ln 2-\ln 3$$

정답_ ①

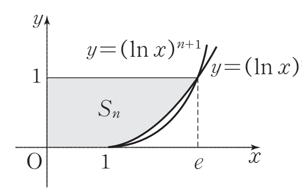
722

ㄱ은 옳다.

$1\le x\le e$일 때,

$0\le\ln x\le 1$이므로

$(\ln x)^n\ge(\ln x)^{n+1}$



ㄴ도 옳다.

$S_n=e\cdot1-\int_1^e(\ln x)^n dx$

$S_{n+1}=e\cdot1-\int_1^e(\ln x)^{n+1}dx$

그런데 $1<x<e$이면 $0<\ln x<1$에서

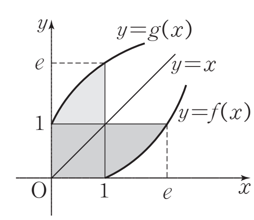
$(\ln x)^n>(\ln x)^{n+1}$이므로

$\int_1^e(\ln x)^n dx>\int_1^e(\ln x)^{n+1}dx$

$\therefore S_n<S_{n+1}$

ㄷ도 옳다.

함수 $f(x)=(\ln x)^n$의 역함수 $g(x)$에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로



$S_n=\int_0^1 g(x)dx$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

723

선분 PQ를 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면은 선분 PQ를 한 변으로 하는 정삼각형이고

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{x(x^2+1)\sin x^2}$이므로 단면인 정삼각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\{\sqrt{x(x^2+1)\sin x^2}\}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}x(x^2+1)\sin x^2$$

$x^2=t$라고 하면 $\frac{dt}{dx}=2x$이고,

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\sqrt{\pi}$일 때 $t=\pi$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{3}}{4}x(x^2+1)\sin x^2\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\int_0^{\pi}(t+1)\sin t\,dt$$

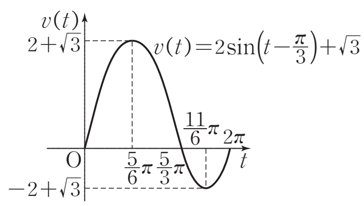
$=\frac{\sqrt{3}}{8}\Big[-(t+1)\cos t\Big]_0^{\pi}-\frac{\sqrt{3}}{8}\int_0^{\pi}(-\cos t)dt$

$=\frac{\sqrt{3}}{8}(\pi+2)-\frac{\sqrt{3}}{8}\Big[-\sin t\Big]_0^{\pi}$

$=\frac{(\pi+2)\sqrt{3}}{8}$ 정답_ ①

724

속도 $v(t)=2\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ은 옳다.

$0\le t\le 2\pi$에서 점 P는 $t=\frac{5}{3}\pi$일 때 양에서 음이 되므로 운동 방향을 한 번 바꾼다.

ㄴ도 옳다.

점 P는 $t=\frac{5}{3}\pi$일 때 운동 방향을 바꾸므로 $t=\frac{5}{3}\pi$일 때 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

ㄷ도 옳다.

$t=2\pi$일 때 점 P의 위치는

$\int_0^{2\pi}\left\{2\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\right\}dt$

$=\Big[-2\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}t\Big]_0^{2\pi}$

$=(-1+2\sqrt{3}\pi)-(-1)=2\sqrt{3}\pi$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤