풍산자
필수유형

기하 정답과 풀이

I 이차곡선

01 이차곡선

001

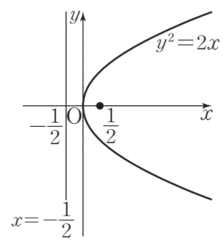
(1) $y^2=2x=4\times\frac{1}{2}\times x=4px$에서

$p=\frac{1}{2}$

따라서 초점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$,

준선의 방정식은 $x=-\frac{1}{2}$이고

그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



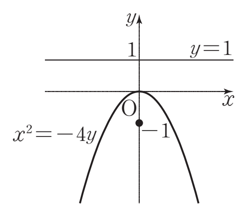
(2) $x^2=-4y=4\times(-1)\times y=4py$

에서 $p=-1$

따라서 초점의 좌표는 $(0,\ -1)$,

준선의 방정식은 $y=1$이고

그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



정답_ 풀이 참조

002

초점이 $\mathrm{F}(0,\ -2)$이고 준선의 방정식이 $y=2$이므로 구하는 포물선의 방정식은

$x^2=4\times(-2)\times y \qquad \therefore\ x^2=-8y$

정답_ ③

003

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 초점이 $\mathrm{F}(3,\ 0)$이고 준선의 방정식이 $x=-3$인 포물선 위의 점이므로 구하는 도형의 방정식은

$y^2=4\times3\times x \qquad \therefore\ y^2=12x$

정답_ ⑤

다른 풀이

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에서 점 $\mathrm{F}(3,\ 0)$과 직선 $x=-3$에 이르는 거리가 같으므로

$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=|x+3|$

양변을 제곱하면

$(x-3)^2+y^2=(x+3)^2 \qquad \therefore\ y^2=12x$

004

원점을 꼭짓점으로 하고 준선의 방정식이 $x=2$인 포물선의 방정식은

$y^2=4\times(-2)\times x \qquad \therefore\ y^2=-8x$

이 포물선이 점 $(a,\ 8)$을 지나므로

$8^2=-8a \qquad \therefore\ a=-8$

정답_ ②

005

초점이 y축 위에 있고 이 초점에서 준선까지 수직으로 그은 선분의 중점, 즉 꼭짓점이 원점인 포물선의 방정식을

$x^2=4py\ (p\neq0)$

로 놓으면 이 포물선이 점 $(\sqrt{3},\ \sqrt{3})$을 지나므로

$(\sqrt{3})^2=4p\sqrt{3} \qquad \therefore\ p=\frac{\sqrt{3}}{4}$

따라서 구하는 포물선의 방정식은

$x^2=4\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times y \qquad \therefore\ x^2=\sqrt{3}y$

정답_ ②

006

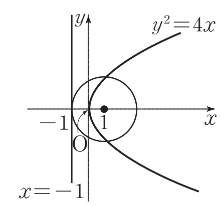
$y^2=4x=4\times1\times x$의 초점의 좌표는 $(1,\ 0)$

준선의 방정식은 $x=-1$

따라서 주어진 원은 중심의 좌표가 $(1,\ 0)$이고 직선 $x=-1$에 접하므로 반지름의 길이는

$1+1=2$

$\therefore$ (원의 넓이)$=\pi\times2^2=4\pi$



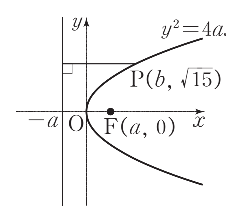
정답_ ④

007

점 $\mathrm{P}(b,\ \sqrt{15})$는 포물선 $y^2=4ax$ 위의 점이므로

$15=4ab$

$\therefore\ ab=\frac{15}{4}$ …… ㉠



포물선 $y^2=4ax$에서 준선의 방정식은

$x=-a$이고, 점 $\mathrm{P}(b,\ \sqrt{15})$에서 이 준선에 이르는 거리가 4이므로

$a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{3}{2},\ b=\frac{5}{2}$ 또는 $a=\frac{5}{2},\ b=\frac{3}{2}$

$\therefore\ |a-b|=1$

정답_ 1

008

원점을 꼭짓점으로 하고 y축 위에 초점이 있는 포물선의 방정식을

$x^2=4py\ (p\neq0)$ …… ㉠

로 놓으면 포물선 ㉠이 점 $\mathrm{P}\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$을 지나므로

$2^2=4\times p\times\frac{1}{2} \qquad \therefore\ p=2$

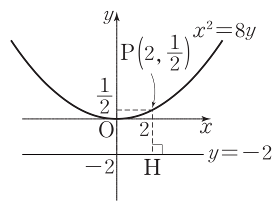
즉, 주어진 포물선의 방정식은

$x^2=4\times2\times y=8y$

이므로 준선의 방정식은

$y=-2$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 이 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라고 하면



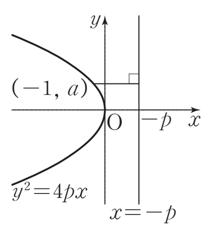
$\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}-(-2)=\frac{5}{2}$

이므로 구하는 거리는 $\frac{5}{2}$이다.

정답_②

009

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점이 원점이고 x축에 대하여 대칭인 포물선의 방정식을



$y^2=4px\ (p\neq0)$

로 놓으면 점 $(-1, a)$가 이 포물선 위의 점이므로 $a^2=-4p>0$에서

$p<0$

점 $(-1, a)$에서 준선 $x=-p$까지의 거리가 4이므로

$|-p+1|=4,\ -p+1=4\ \ (\because -p+1>0)$

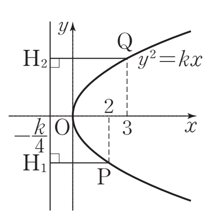
$\therefore p=-3$

따라서 구하는 포물선의 준선의 방정식은 $x=3$, 초점의 좌표는 $(-3, 0)$

정답_①

010

$y^2=kx=4\times\frac{k}{4}\times x$이므로 이 포물선의 준선의 방정식은



$x=-\frac{k}{4}$

$\overline{\mathrm{PH}_1}+\overline{\mathrm{QH}_2}=10$이므로 오른쪽 그림에서

$\left(2+\frac{k}{4}\right)+\left(3+\frac{k}{4}\right)=10$

$\frac{k}{2}=5 \qquad \therefore k=10$

따라서 주어진 포물선의 방정식은

$y^2=10x=4\times\frac{5}{2}\times x$

이므로 구하는 초점의 x좌표는 $\frac{5}{2}$이다.

정답_②

011

(1) 포물선 $(y+3)^2=-(x-4)$는 포물선 $y^2=-x$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

이때, $y^2=-x$의 초점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$, 준선의 방정식은 $x=\frac{1}{4}$이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\left(\frac{15}{4}, -3\right)$, 준선의 방정식은 $x=\frac{17}{4}$이다.

(2) 포물선 $(x-3)^2=6(y+6)$은 포물선 $x^2=6y$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것이다.

이때, $x^2=6y$의 초점의 좌표는 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, 준선의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}$이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\left(3, -\frac{9}{2}\right)$, 준선의 방정식은 $y=-\frac{15}{2}$이다.

정답_(1) 초점의 좌표 : $\left(\frac{15}{4}, -3\right)$, 준선의 방정식 : $x=\frac{17}{4}$

(2) 초점의 좌표 : $\left(3, -\frac{9}{2}\right)$, 준선의 방정식 : $y=-\frac{15}{2}$

012

포물선 $(x+2)^2=8(y-1)$은 포물선 $x^2=8y$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때, $x^2=8y$의 초점의 좌표는 $(0,\ 2)$, 준선의 방정식은 $y=-2$이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(-2,\ 3)$, 준선의 방정식은 $y=-1$이다.

따라서 $a=-2, b=3, c=-1$이므로

$a+b+c=0$

정답_③

013

포물선 $(y-1)^2=4p(x-2)$는 포물선 $y^2=4px$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때, $y^2=4px$의 초점의 좌표는 $(p, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-p$이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(p+2, 1)$, 준선의 방정식은 $x=-p+2$이다.

주어진 포물선의 초점의 좌표가 $(0, 1)$이므로

$p+2=0 \qquad \therefore p=-2$

따라서 구하는 포물선의 준선의 방정식은

$x=-p+2=-(-2)+2=4$

정답_③

014

포물선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$, 점 P에서 직선 $x=1$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로

$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=|x-1|$

양변을 제곱하면

$(x-3)^2+(y-1)^2=(x-1)^2$

$\therefore (y-1)^2=4(x-2)$

정답_④

다른 풀이

초점이 $\mathrm{F}(3,\ 1)$이고, 준선이 $x=1$이므로 이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{3+1}{2},\ 1\right)$, 즉 $(2,\ 1)$이다.

따라서 주어진 포물선은 초점의 좌표가 $(1,\ 0)$이고 준선이 $x=-1$인 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$(y-1)^2=4(x-2)$

015

$y^2+6y-4x+13=0$에서

$y^2+6y+9-4x+4=0$

$(y+3)^2-4(x-1)=0$

$\therefore\ (y+3)^2=4(x-1)$

따라서 포물선 $y^2+6y-4x+13=0$은 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

이때, 포물선 $y^2=4x$의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 0)$, 초점의 좌표는 $(1,0)$, 준선의 방정식은 $x=-1$이므로 포물선 $(y+3)^2=4(x-1)$에 대하여

(1) 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ -3)$

(2) 초점의 좌표는 $(2,\ -3)$

(3) 준선의 방정식은 $x=0$

정답_(1) $(1,\ -3)$ (2) $(2,\ -3)$ (3) $x=0$

016

$x^2-8y-4x+20=0$에서

$x^2-4x+4=8y-16$

$\therefore\ (x-2)^2=8(y-2)$ $\cdots\cdots$ ㉠

따라서 포물선 ㉠은 포물선 $x^2=8y$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 포물선 ㉠의 초점의 좌표는

$(0+2,\ 2+2)$ $\quad\therefore\ (2,\ 4)$

준선의 방정식은

$y-2=-2$ $\quad\therefore\ y=0$

따라서 $a=2, b=4, c=0$이므로

$a+b+c=6$

정답_③

017

$y^2-4x-4y+12k=0$에서

$y^2-4y+4=4x-12k+4$

$\therefore\ (y-2)^2=4(x-3k+1)$ $\cdots\cdots$ ㉠

포물선 ㉠은 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 $3k-1$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 포물선 ㉠의 초점의 좌표는

$(1+3k-1,\ 0+2)$ $\quad\therefore\ (3k,\ 2)$

이 점이 직선 $y=2x-16$ 위에 있으므로

$2=2\times3k-16$

$\therefore\ k=3$

정답_⑤

018

포물선 $(y-m)^2=x-n$이 두 점 $(-1,\ 2)$, $(-1,\ 3)$을 지나므로 포물선의 꼭짓점의 y좌표 m은

$m=\dfrac{2+3}{2}=\dfrac{5}{2}$

또 포물선 $\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2=x-n$이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$\left(1-\dfrac{5}{2}\right)^2=1-n,\ \dfrac{9}{4}=1-n$ $\quad\therefore\ n=-\dfrac{5}{4}$

$\therefore\ m+n=\dfrac{5}{2}+\left(-\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{5}{4}$

정답_④

다른 풀이

축이 x축에 평행하므로 구하는 포물선의 방정식을

$y^2+ax+by+c=0$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)

으로 놓자.

이 포물선이 세 점 $(-1,2)$, $(-1,3)$, $(1,1)$을 지나므로

$4-a+2b+c=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$9-a+3b+c=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

$1+a+b+c=0$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-1, b=-5, c=5$

이므로 주어진 포물선의 방정식은

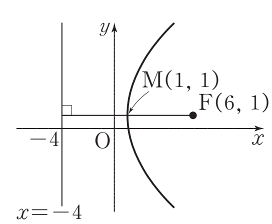
$y^2-x-5y+5=0$ $\quad\therefore\ \left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2=x+\dfrac{5}{4}$

따라서 $m=\dfrac{5}{2}$, $n=-\dfrac{5}{4}$이므로

$m+n=\dfrac{5}{4}$

019

평면 위의 한 점 $F(6, 1)$과 한 직선 $x=-4$에 이르는 거리가 같은 점은 오른쪽 그림과 같은 포물선 위의 점이다.



이 중에서 직선 $x=-4$와의 거리가 최소일 때의 점 M은 포물선의 꼭짓점이므로 $M(1, 1)$

따라서 점 $M(1, 1)$과 직선 $x=-4$ 사이의 거리는

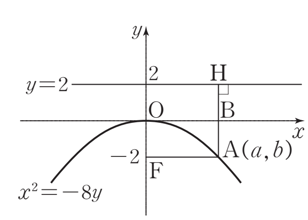
$|-4-1|=5$

정답_①

020

$x^2=-8y=4\times(-2)\times y$이므로 초점 F의 좌표는 $(0,\ -2)$이고, 준선의 방정식은 $y=2$이다.

점 $A(a,\ b)$에서 준선에 내린 수선의 발을 H, 이 수선이 x축과 만나는 점을 B라고 하면 포물선 위의 한 점에서 초점까지의



거리는 준선까지의 거리와 같으므로

$\overline{AF}=\overline{AH}$

$\overline{AF}=4$이고 $\overline{AH}=\overline{AB}+\overline{BH}$이므로

$4=-b+2 \qquad \therefore b=-2$

또, 점 $A(a,\ b)$가 포물선 $x^2=-8y$ 위의 점이므로

$a^2=-8b=-8\times(-2)=16$

$\therefore a^2b=16\times(-2)=-32$ 정답_①

021

$y^2=12x=4\times3\times x$이므로 초점은 $F(3,\ 0)$, 준선 l의 방정식은 $x=-3$이다.

이때, $\overline{AC}=4$이므로 점 A의 x좌표는 1이다.

$\therefore A(1,\ 2\sqrt{3})$

두 점 $A(1,\ 2\sqrt{3})$, $F(3,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-0=\frac{2\sqrt{3}-0}{1-3}(x-3)$$

$\therefore y=-\sqrt{3}(x-3)$

점 B는 직선 $y=-\sqrt{3}(x-3)$과 포물선 $y^2=12x$의 교점이므로 점 B의 x좌표는 방정식

$\{-\sqrt{3}(x-3)\}^2=12x$

의 근이다.

점 B의 x좌표를 $a\ (a>1)$라고 하면

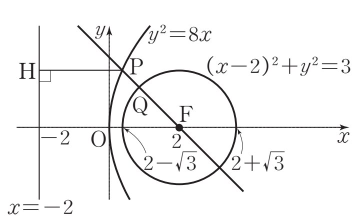
$\{-\sqrt{3}(a-3)\}^2=12a,\ 3(a-3)^2=12a$

$(a-3)^2=4a,\ a^2-10a+9=0$

$(a-1)(a-9)=0 \qquad \therefore a=9\ (\because a>1)$

$\therefore \overline{BD}=9-(-3)=12$ 정답_①

022



포물선 $y^2=8x=4\times2\times x$의 초점을 F라고 하면 $F(2,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

포물선의 정의에 의해

$\overline{PH}=\overline{PF}$이므로

$\overline{PH}-\overline{PQ}=\overline{PF}-\overline{PQ}$

$=\overline{QF}=\sqrt{3}$ ($\because$ 원의 반지름의 길이) 정답_②

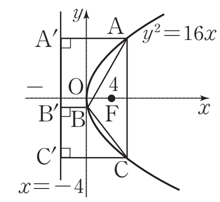
023

$y^2=16x=4\times4\times x$이므로 초점은 $F(4,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-4$이다.

세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 a, b, c라고 하면

$$\frac{a+b+c}{3}=4$$

$\therefore a+b+c=12 \qquad \cdots\cdots ㉠$



오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, C에서 포물선 $y^2=16x$의 준선 $x=-4$에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, C′이라고 하면

$\overline{AF}+\overline{BF}+\overline{CF}$

$=\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'}$

$=(a+4)+(b+4)+(c+4)$

$=(a+b+c)+12$

$=12+12=24$ ($\because$ ㉠) 정답_⑤

024

$y^2=8x-16=4\times2(x-2)$이므로 주어진 포물선의 꼭짓점은 $(2,\ 0)$, 초점은 $(4,\ 0)$이고, 준선은 y축이다.

$\overline{KP}=\overline{OF}+\overline{FH}=\overline{PF}$이므로 정삼각형 PFA의 한 변의 길이를 a라고 하면

$\overline{OH}=4+\dfrac{a}{2}=a \qquad \therefore a=8$

$\therefore \overline{PH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot8=4\sqrt{3}$

따라서 사각형 OFPK의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(\overline{PK}+\overline{FO})\times\overline{PH}=\dfrac{1}{2}\times(8+4)\times4\sqrt{3}$

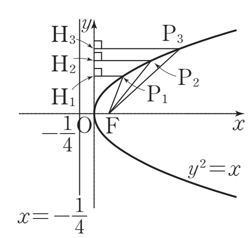
$=24\sqrt{3}$ 정답_④

참고

한 변의 길이가 a인 정삼각형에서

(1) 높이 : $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ (2) 넓이 : $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

025



오른쪽 그림과 같이 점 P_1, P_2, P_3에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2, H_3이라고 하면 포물선의 정의에 의해

$\overline{FP_1}=\overline{H_1P_1}+\overline{FO}$

$\overline{FP_2}=\overline{H_2P_2}+\overline{FO}$

$\overline{FP_3}=\overline{H_3P_3}+\overline{FO}$

점 P_1, P_2, P_3은 모두 포물선 $y^2=x$ 위의 점이고, y좌표가 각각 1, $\sqrt{2}, \sqrt{3}$이므로

$1^2=x \qquad \therefore x=1 \qquad \therefore P_1(1,\ 1)$

$\sqrt{2}^2=x \qquad \therefore x=2 \qquad \therefore P_2(2,\ \sqrt{2})$

$\sqrt{3}^2=x \qquad \therefore x=3 \qquad \therefore P_3(3,\ \sqrt{3})$

$\overline{H_1P_1}=1, \overline{H_2P_2}=2, \overline{H_3P_3}=3$이므로

$\overline{FP_1}+\overline{FP_2}+\overline{FP_3}=\overline{H_1P_1}+\overline{H_2P_2}+\overline{H_3P_3}+3\overline{FO}$

$=1+2+3+3\overline{FO}$

$=6+3\overline{FO}$

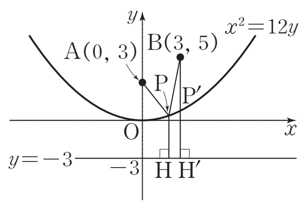
따라서 $a=6, b=3$이므로

$a+b=9$ 정답_①

026

$x^2=12y=4\times3\times y$이므로 점 $A(0,\ 3)$은 이 포물선의 초점이고, 준선의 방정식은 $y=-3$이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, B에서 준선 $y=-3$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라고 하면 $\overline{PA}=\overline{PH}$이므로



$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PH}+\overline{PB}\geq\overline{BH'}$

따라서 $\overline{PA}+\overline{PB}$의 최솟값은

$5-(-3)=8$ 정답_ ⑤

027

포물선의 정의에 의해

$\overline{AH}=\overline{AF}, \overline{BH'}=\overline{BF}$

$\therefore \overline{AH}+\overline{BH'}=\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AB}=10$

사각형 AHH′B의 넓이가 40이므로

$\frac{1}{2}(\overline{AH}+\overline{BH'})\times\overline{HH'}=40$

$\frac{1}{2}\times10\times\overline{HH'}=40 \qquad \therefore \overline{HH'}=8$ 정답_ ④

028

포물선의 정의에 의해

$\overline{AF}=\overline{AP}, \overline{BF}=\overline{BR}$

$\therefore \overline{AP}+\overline{BR}=\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AB}=20$

이때, $\overline{AP}/\!/\overline{MQ}/\!/\overline{BR}$이고, 점 M이 $\overline{AB}$의 중점이므로 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의해 점 Q는 $\overline{PR}$의 중점이다.

$\therefore \overline{MQ}=\frac{1}{2}(\overline{AP}+\overline{BR})$

$=\frac{1}{2}\times20=10$ 정답_ ③

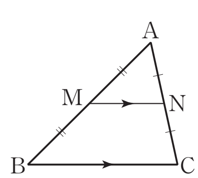
참고

(1) 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분

① △ABC에서

$\overline{AM}=\overline{MB}, \overline{AN}=\overline{NC}$이면

$\overline{MN}/\!/\overline{BC}, \overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$



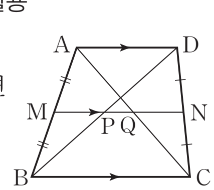
② △ABC에서

$\overline{AM}=\overline{MB}, \overline{MN}/\!/\overline{BC}$이면 $\overline{AN}=\overline{NC}$

(2) 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 활용

$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$인 사다리꼴 ABCD에서

$\overline{AB}, \overline{DC}$의 중점을 각각 M, N이라고 하면



① $\overline{AD}/\!/\overline{MN}/\!/\overline{BC}$

② $\overline{MN}=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})$

③ $\overline{PQ}=\frac{1}{2}(\overline{BC}-\overline{AD})$ (단, $\overline{BC}>\overline{AD}$)

029

두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라고 하면 $\overline{AC}+\overline{BD}=6$이므로

$a+b=6$ ⋯⋯ ㉠

포물선 $y^2=12x=4\times3\times x$의 초점을 F라고 하면 $F(3,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-3$이므로

$\overline{AF}=a+3, \overline{BF}=b+3$

$\therefore \overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}$

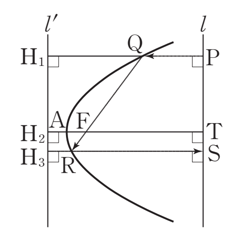
$=(a+3)+(b+3)$

$=a+b+6$

$=6+6=12$ ($\because$ ㉠) 정답_ ④

030

오른쪽 그림과 같이 포물선의 준선을 l'이라 하고, 세 점 Q, F, R에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2, H_3이라고 하자.



포물선의 정의에 의해

$\overline{QF}=\overline{QH_1}, \overline{RF}=\overline{RH_3}$

이므로

$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}=\overline{PQ}+\overline{QF}+\overline{FR}+\overline{RS}$

$=\overline{PQ}+\overline{QH_1}+\overline{RH_3}+\overline{RS}$

$=\overline{PH_1}+\overline{SH_3}$

$=2\overline{TH_2}$

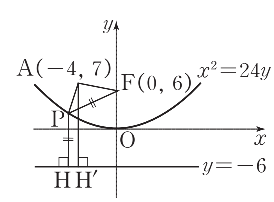
$=2(\overline{TF}+\overline{AF}+\overline{AH_2})$ ($\because \overline{AH_2}=\overline{AF}$)

$=2(6+2+2)=20$ 정답_ 20

031

$x^2=24y=4\times6\times y$이므로 초점은 $F(0,\ 6)$, 준선의 방정식은 $y=-6$이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, A에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라고 하면 $\overline{PF}=\overline{PH}$이므로



$\overline{PF}+\overline{PA}=\overline{PH}+\overline{PA}$

$\geq\overline{AH'}$

$=7-(-6)=13$

이때, $\overline{FA}=\sqrt{\{0-(-4)\}^2+(6-7)^2}=\sqrt{17}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PF}+\overline{FA}\geq\overline{AH'}+\overline{FA}$

$=13+\sqrt{17}$

따라서 삼각형 APF의 둘레의 길이의 최솟값은 $13+\sqrt{17}$이다.

정답_ ⑤

032

(1) 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$이라고 하면

$2a=10$에서 $a=5$

$a^2-b^2=3^2$에서 $b^2=5^2-3^2=16$

$\therefore \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

(2) 구하는 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$이라고 하면

$2b=14$에서 $b=7$

$b^2-a^2=5^2$에서 $a^2=7^2-5^2=24$

$\therefore \dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{49}=1$

정답_ (1) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ (2) $\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{49}=1$

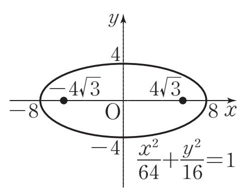
033

(1) 타원 $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{16}=1$의 장축의 길이는 $2\times8=16$

단축의 길이는 $2\times4=8$

$\sqrt{64-16}=4\sqrt{3}$이므로 초점의 좌표는 $(4\sqrt{3}, 0), (-4\sqrt{3}, 0)$

따라서 타원 $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{16}=1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

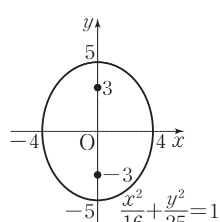


(2) 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$의 장축의 길이는 $2\times5=10$

단축의 길이는 $2\times4=8$

$\sqrt{25-16}=3$이므로 초점의 좌표는 $(0, 3), (0, -3)$

따라서 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



정답_ 풀이 참조

034

$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$에서 $\dfrac{x^2}{(2\sqrt{2})^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$이므로 타원의 장축의 길이는 $a=2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

단축의 길이는 $b=2\times2=4$

또, $\sqrt{(2\sqrt{2})^2-2^2}=\sqrt{8-4}=2$이므로 초점의 좌표는

$(\pm2, 0)$ $\quad \therefore c=2\ (\because c>0)$

$\therefore a+b+c=4\sqrt{2}+4+2=6+4\sqrt{2}$

정답_ ⑤

035

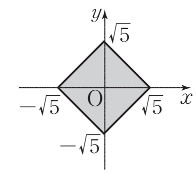
타원 $4x^2+9y^2=36$, 즉 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$의 초점의 좌표는

$(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$

타원 $9x^2+4y^2=36$, 즉 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$의 초점의 좌표는

$(0, \sqrt{5}), (0, -\sqrt{5})$

네 점 $(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0), (0, \sqrt{5}), (0, -\sqrt{5})$를 꼭짓점으로 하는 사각형은 오른쪽 그림과 같으므로 그 넓이는



$2\left(\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\sqrt{5}\right)=10$

정답_ ④

036

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$은 y축 위의 두 초점 $\mathrm{F}(0, 3)$과 $\mathrm{F}'(0, -3)$에서의 거리의 합이 10이므로

$2b=10 \qquad \therefore b=5$

$\therefore a^2=b^2-3^2=5^2-3^2=16$

$\therefore a^2+b^2=16+25=41$

정답_ ③

037

$9x^2+4y^2=36$에서 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$이므로 이 타원의 초점의 좌표는

$(0, \pm\sqrt{9-4})$, 즉 $(0, \pm\sqrt{5})$

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 초점의 좌표가 $(0, \pm\sqrt{5})$이므로

$b^2-a^2=5 \qquad \therefore b^2=a^2+5$ …… ㉠

또, 이 타원이 점 $(2, 3)$을 지나므로

$\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}=1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{9}{a^2+5}=1$

$4(a^2+5)+9a^2=a^2(a^2+5)$

$a^4-8a^2-20=0, (a^2-10)(a^2+2)=0$

$\therefore a^2=10\ (\because a^2>0)$

이것을 ㉠에 대입하면 $b^2=15$

$\therefore a^2b^2=150$

정답_ ④

038

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 모두 x축 위에 있고 원점과의 거리가 모두 $\sqrt{6}$이므로 두 초점의 좌표는

$(\sqrt{6}, 0), (-\sqrt{6}, 0)$

$a>b>0$이고, 장축의 길이가 8이므로

$2a=8 \qquad \therefore a=4$

따라서 $b^2=4^2-(\sqrt{6})^2=10$이므로

$b=\sqrt{10}\ (\because b>0)$

$\therefore ab=4\sqrt{10}$

정답_ ⑤

039

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이라고 하면 장축의 길이가 $2a$, 단축의 길이가 $2b$이므로

$2a-2b=4 \qquad \therefore a-b=2$ ······ ㉠

초점의 좌표가 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$이므로

$a^2-b^2=4^2$

$(a+b)(a-b)=16$

$\therefore a+b=8$ (∵ ㉠) ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=5$, $b=3$

따라서 구하는 타원의 장축의 길이는

$2a=10$

정답_ ②

040

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$에서

$\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OF}=c$

$c^2=a^2-b^2$ ······ ㉠

직각삼각형 OFB에서

$\overline{OF}=\frac{\overline{OB}}{\tan 60^\circ}=\frac{b}{\sqrt{3}} \qquad \therefore c=\frac{b}{\sqrt{3}}$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2=a^2-b^2$, $\frac{b^2}{3}=a^2-b^2$, $a^2=\frac{4}{3}b^2$

$\therefore a=\frac{2b}{\sqrt{3}}$ (∵ $a>0$, $b>0$)

이때, 삼각형 AFB의 넓이가 $6\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AF}\times\overline{OB}=6\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}\times(a+c)\times b=6\sqrt{3}$

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{2b}{\sqrt{3}}+\frac{b}{\sqrt{3}}\right)\times b=6\sqrt{3}$, $\frac{3b^2}{2\sqrt{3}}=6\sqrt{3} \qquad \therefore b^2=12$

$\therefore a^2=\frac{4}{3}b^2=16$

$\therefore a^2+b^2=16+12=28$

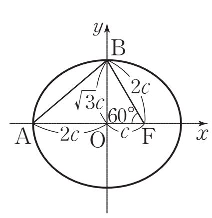
정답_ ④

다른 풀이

직각삼각형 OFB에서 $\overline{OF}=c$이고

$\angle AFB=60^\circ$이므로

$\overline{OB}=\sqrt{3}c$, $\overline{FB}=2c$



타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$에서

$\overline{OB}=b$이므로 $\quad b=\sqrt{3}c$

한편, $c^2=a^2-b^2$이므로

$a^2=b^2+c^2=(\sqrt{3}c)^2+c^2=4c^2$

$\therefore a=2c$ (∵ $a>0$)

이때, 삼각형 AFB의 넓이가 $6\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AF}\times\overline{OB}=6\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}\times(2c+c)\times\sqrt{3}c=6\sqrt{3}$

$\frac{3\sqrt{3}}{2}c^2=6\sqrt{3} \qquad \therefore c^2=4$

$\therefore a^2+b^2=(2c)^2+(\sqrt{3}c)^2=7c^2=7\times4=28$

041

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이라고 하면

$A(0,\ -b)$, $F(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

직선 $y=\frac{1}{3}x-1$의 y절편은 -1이므로

$b=1$

직선 $y=\frac{1}{3}x-1$의 x절편은 3이므로

$\sqrt{a^2-1^2}=3$, $a^2-1=9$, $a^2=10$

$\therefore a=\sqrt{10}$ (∵ $a>0$)

따라서 구하는 장축의 길이는 $2\sqrt{10}$이다.

정답_ ④

다른 풀이

직선 $y=\frac{1}{3}x-1$이 x축, y축과 만나는 점은 각각

$F(3,\ 0)$, $A(0,\ -1)$

따라서 타원의 다른 한 초점을 F′이라고 하면 $F'(-3,\ 0)$이므로

타원의 정의에 의해

(장축의 길이)$=\overline{AF}+\overline{AF'}=2\overline{AF}$

$=2\sqrt{3^2+1^2}=2\sqrt{10}$

042

타원의 정의에 의해

$\overline{AF}+\overline{AF'}=2a=6+2=8$

$\therefore a=4$

초점의 좌표를 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$ $(c>0)$으로 놓으면 직각삼각형 AF′F에서 $\overline{FF'}^2=\overline{AF'}^2+\overline{AF}^2$이므로

$4c^2=6^2+2^2=40 \qquad \therefore c^2=10$

$b^2=a^2-c^2=16-10=6$에서

$b=\sqrt{6}$ (∵ $b>0$)

따라서 구하는 단축의 길이는

$2b=2\sqrt{6}$

정답_ ③

043

△ABF의 둘레의 길이는

$\overline{AB}+\overline{BF}+\overline{AF}=(\overline{AF'}+\overline{BF'})+(\overline{BF}+\overline{AF})$

$=(\overline{AF'}+\overline{AF})+(\overline{BF'}+\overline{BF})$

$=2\times2a=12$

$\therefore a=3$

두 초점이 $F(2,\ 0)$, $F'(-2,\ 0)$이므로

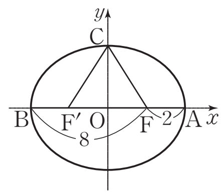
$b^2=3^2-2^2=5$

$\therefore a^2+b^2=9+5=14$

정답_ ④

044

오른쪽 그림과 같이 타원의 중심을 좌표 평면의 원점 O 위에 놓고 장축과 단축을 각각 x축, y축 위에 놓으면



$\overline{\mathrm{FF'}}=8-2=6$

따라서 $\overline{\mathrm{OF}}=3$이므로

$\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-3,\ 0)$

한편, $\overline{\mathrm{AB}}=8+2=10$이므로

$\mathrm{A}(5,\ 0)$, $\mathrm{B}(-5,\ 0)$

이때, 타원이 y축과 만나는 한 점을 $\mathrm{C}(0,\ b)$ $(b>0)$라고 하면

$5^2-b^2=3^2$, $b^2=16$ $\quad\therefore b=4$ $(\because b>0)$

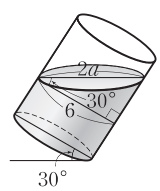
따라서 구하는 단축의 길이는

$2b=2\times4=8$

정답_ ⑤

045

타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이라고 하면 장축의 길이가 $2a$이고, 장축이 원기둥의 밑면인 원의 지름과 이루는 각의 크기가 $30°$이므로



$2a\cos30°=6$ $\quad\therefore a=2\sqrt{3}$

단축의 길이는 $2b$이므로

$2b=6$ $\quad\therefore b=3$

$\sqrt{(2\sqrt{3})^2-3^2}=\sqrt{3}$이므로 구하는 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{3}$이다.

정답_ ①

046

(1) 타원 $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y+3)^2}{4}=1$은 타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

이때, $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$에서 $\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$이므로 이 타원의

초점의 좌표는 $(\sqrt{5},0)$, $(-\sqrt{5},0)$

꼭짓점의 좌표는 $(3,0)$, $(-3,0)$, $(0,2)$, $(0,-2)$

따라서 구하는 타원의 초점의 좌표는

$(2+\sqrt{5},\ -3)$, $(2-\sqrt{5},\ -3)$

꼭짓점의 좌표는

$(5,\ -3)$, $(-1,\ -3)$, $(2,\ -1)$, $(2,\ -5)$

(2) $5(x+1)^2+4(y-1)^2=20$에서 $\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{5}=1$이므로 타원 $5(x+1)^2+4(y-1)^2=20$은 타원 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{5}=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때, $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{5}=1$에서 $\sqrt{5-4}=1$이므로 이 타원의

초점의 좌표는 $(0,1)$, $(0,-1)$

꼭짓점의 좌표는 $(2,0)$, $(-2,0)$, $(0,\sqrt{5})$, $(0,-\sqrt{5})$

따라서 구하는 타원의 초점의 좌표는

$(-1,2)$, $(-1,0)$

꼭짓점의 좌표는

$(1,1)$, $(-3,1)$, $(-1,1+\sqrt{5})$, $(-1,1-\sqrt{5})$

정답_ 풀이 참조

047

타원 $\dfrac{(x-2)^2}{a}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$은 타원 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\dfrac{(x-2)^2}{a}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$의 두 초점의 좌표가 $(6,\ b)$, $(-2,\ b)$이므로 타원 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{4}=1$의 두 초점은 x축 위에 있다.

타원 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{4}=1$의 두 초점의 좌표는 $(-\sqrt{a-4},\ 0)$, $(\sqrt{a-4},\ 0)$이므로 타원 $\dfrac{(x-2)^2}{a}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$의 두 초점의 좌표는

$(-\sqrt{a-4}+2,\ 2)$, $(\sqrt{a-4}+2,\ 2)$

즉, $-\sqrt{a-4}+2=-2$, $2=b$, $\sqrt{a-4}+2=6$이므로

$a=20$, $b=2$ $\quad\therefore ab=40$

정답_ ①

048

$3x^2+2y^2-6x-8y+5=0$에서

$3(x^2-2x+1)+2(y^2-4y+4)-6=0$

$\therefore 3(x-1)^2+2(y-2)^2=6$

따라서 주어진 타원 $3(x-1)^2+2(y-2)^2=6$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$3x^2+2y^2=6$과 일치하므로

$m=-1$, $n=-2$, $k=6$

$\therefore m^2+n^2+k^2=1+4+36=41$

정답_ ④

049

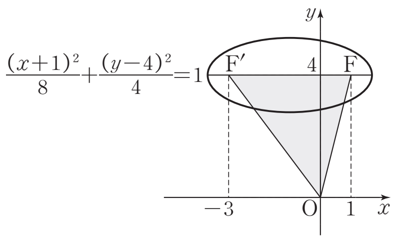
$x^2+2y^2+2x-16y+25=0$에서

$(x^2+2x+1)+2(y^2-8y+16)=8$

$(x+1)^2+2(y-4)^2=8$ $\quad\therefore \dfrac{(x+1)^2}{8}+\dfrac{(y-4)^2}{4}=1$

즉, 주어진 타원은 타원 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점의 좌표가 $(2,\ 0),\ (-2,\ 0)$이므로 주어진 타원의 두 초점의 좌표가 $(1,\ 4),\ (-3,\ 4)$이다.



따라서 $\overline{\mathrm{FF'}}=4$이므로 삼각형 OFF′의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times4=8$ 정답_①

050

타원 $x^2+3y^2+2x-12y+7=0$에서

$(x+1)^2+3(y-2)^2=6 \qquad \therefore \frac{(x+1)^2}{6}+\frac{(y-2)^2}{2}=1$

타원 $\frac{(x+1)^2}{6}+\frac{(y-2)^2}{2}=1$은 타원 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

타원 $\frac{(x+1)^2}{6}+\frac{(y-2)^2}{2}=1$의 초점은 타원 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$의 초점 $(2,\ 0),\ (-2,\ 0)$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점 $(1,\ 2),\ (-3,\ 2)$이다.

따라서 x좌표가 음수인 초점 F의 좌표는 $(-3,\ 2)$이고 점 F와 직선 $3x+4y-5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\times(-3)+4\times2-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{6}{5}$ 정답_⑤

051

타원의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2\times5=10$

이때, $\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{PF'}}=1:4$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=10\times\frac{1}{1+4}=2$

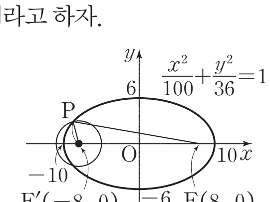
$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$에서 $\sqrt{25-9}=4$이므로 주어진 타원의 두 초점의 좌표는 $(4,\ 0),\ (-4,\ 0) \qquad \therefore \overline{\mathrm{FF'}}=8$

$\therefore \overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{FF'}}=2\times8=16$ 정답_①

052

$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$에서 $\sqrt{100-36}=8$이므로 주어진 타원의 두 초점의 좌표를 $\mathrm{F}(8,\ 0),\ \mathrm{F'}(-8,\ 0)$이라고 하자.

오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{PF'}}$은 원의 반지름이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}=3$



타원의 정의에 의해

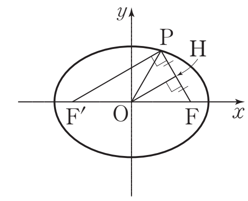
$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=20$

$3+\overline{\mathrm{PF}}=20,\ \overline{\mathrm{PF}}=17$

$\therefore |\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=14$ 정답_②

053

오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{FP}}$의 중점을 H라고 하면 삼각형 OFP는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이므로 $\overline{\mathrm{OH}}$는 $\overline{\mathrm{FP}}$와 수직이고



$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=3\sqrt{3}$

삼각형 F′FP에서 $\overline{\mathrm{FO}}=\overline{\mathrm{OF'}},\ \overline{\mathrm{FH}}=\overline{\mathrm{HP}}$이므로

$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{F'P}}$

$\therefore \overline{\mathrm{F'P}}=2\overline{\mathrm{OH}}=2\times3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

$\therefore \overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{F'P}}=6+6\sqrt{3}$

따라서 구하는 타원의 장축의 길이는 $6+6\sqrt{3}$ 정답_⑤

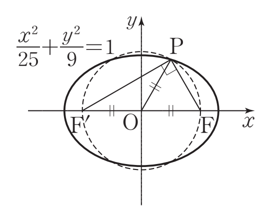
054

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$에서 $\sqrt{25-9}=4$이므로 주어진 타원의 두 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(4,\ 0),\ \mathrm{F'}(-4,\ 0)$

타원의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2\times5=10$ ……㉠

오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OF'}}$이므로 세 점 P, F, F′은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 4인 원 위의 점이다.



따라서 삼각형 PF′F는

$\angle\mathrm{F'PF}=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2=\overline{\mathrm{FF'}}^2=8^2=64$ ……㉡

$(\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}})^2=\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2+2\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}$이므로

$100=64+2\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$\therefore \overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}=18$ 정답_②

055

$\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{FQ}}=7,\ \overline{\mathrm{FQ}}=3$이므로

$\overline{\mathrm{F'Q}}=4$

$\overline{\mathrm{FQ}}=3,\ \overline{\mathrm{F'Q}}=4,\ \overline{\mathrm{FF'}}=5$이므로 삼각형 FQF′은

$\angle\mathrm{FQF'}=90^\circ$인 직각삼각형이다.

$\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{FP}}=8,\ \overline{\mathrm{F'Q}}=4$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FP}}=4$

$(\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{PQ}})+\overline{\mathrm{FP}}=8$에서

$\overline{\mathrm{FP}}=x$라고 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}=4-x$

직각삼각형 FPQ에서 $\overline{\mathrm{PF}}^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{QF}}^2$

$x^2=(4-x)^2+3^2,\ 8x=25 \qquad \therefore x=\frac{25}{8}$

따라서 선분 FP의 길이는 $\frac{25}{8}$이다. 정답_①

056

타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$은 두 초점이 $F(-3, 0)$, $G(3, 0)$이고, 두 초점으로부터의 거리의 합이 12인 타원이므로

$\overline{A_1F}+\overline{A_1G}=12$, $\overline{A_2F}+\overline{A_2G}=12$, $\overline{A_3F}+\overline{A_3G}=12$,

$\overline{A_4F}+\overline{A_4G}=12$, $\overline{A_5F}+\overline{A_5G}=12$

$\therefore (\overline{A_1F}+\overline{A_2F}+\cdots+\overline{A_5F})+(\overline{A_1G}+\overline{A_2G}+\cdots+\overline{A_5G})$

$=5\times12=60$

$\overline{A_1F}+\overline{A_2F}+\cdots+\overline{A_5F}=40$이므로

$\overline{A_1G}+\overline{A_2G}+\cdots+\overline{A_5G}=20$ 정답_ ①

057

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$에서 $\sqrt{4-3}=1$이므로 주어진 타원의 두 초점의 좌표는 $F(1, 0)$, $F'(-1, 0)$

점 $A(0, \sqrt{3})$이므로

$\overline{AF}=\overline{AF'}=\overline{FF'}=2$

즉, 삼각형 $AF'F$는 정삼각형이고 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$는 y축에 대하여 대칭이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

직선 AF'의 방정식은

$y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ …… ㉠

㉠을 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$에 대입하면

$\frac{x^2}{4}+x^2+2x+1=1$, $5x^2+8x=0$

$x(5x+8)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=-\frac{8}{5}$

따라서 점 B의 좌표는 $\left(-\frac{8}{5}, -\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)^2}=\frac{16}{5}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{AB}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{256}{25}=\frac{64\sqrt{3}}{25}$ 정답_ ④

058

$4x^2+9y^2=36$에서 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$이므로 타원의 정의에 의해

$\overline{PF}+\overline{PF'}=2\times3=6$

이때, $\overline{PF}=a$, $\overline{PF'}=b$라고 하면

$a+b=6$

$\therefore \overline{PF}^2+\overline{PF'}^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=36-2ab$

한편, $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

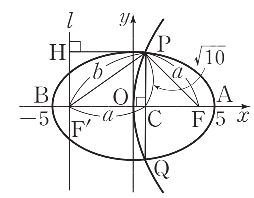
$\frac{6}{2}\geq\sqrt{ab}$ ($\because a+b=6$)

$\therefore ab\leq9$

$\therefore \overline{PF}^2+\overline{PF'}^2=36-2ab\geq36-2\times9=18$

따라서 $\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2$의 최솟값은 18이다. 정답_ ②

059



$\overline{PF}=a$, $\overline{PF'}=b$라고 하면 타원의 장축의 길이가 10이므로 타원의 정의에 의해

$a+b=10$ …… ㉠

$\overline{PQ}$와 x축의 교점을 C라고 하면

$\overline{PC}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{10}=\sqrt{10}$

점 F'을 지나고 x축에 수직인 직선을 l이라고 하면 직선 l은 포물선의 준선이므로 점 P에서 준선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하면 포물선의 정의에 의해

$\overline{PH}=\overline{PF}=a$ $\therefore \overline{CF'}=\overline{PH}=a$

직각삼각형 $PF'C$에서 피타고라스 정리에 의해

$b^2=a^2+(\sqrt{10})^2=a^2+10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{9}{2}$, $b=\frac{11}{2}$

$\therefore \overline{PF}\times\overline{PF'}=\frac{9}{2}\times\frac{11}{2}=\frac{99}{4}$

따라서 $p=4$, $q=99$이므로

$p+q=103$ 정답_ 103

060

(1) 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$)이라고 하면 두 초점으로부터의 거리의 차가 2이므로

$2a=2$ $\therefore a=1$

또, 한 초점의 x좌표가 2이므로

$a^2+b^2=2^2$ $\therefore b^2=2^2-1^2=3$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$x^2-\frac{y^2}{3}=1$

(2) 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ ($a>0$, $b>0$)이라고 하면 두 초점으로부터의 거리의 차가 8이므로

$2b=8$ $\therefore b=4$

또, 한 초점의 y좌표가 5이므로

$a^2+b^2=5^2$ $\therefore a^2=5^2-4^2=9$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$

정답_ (1) $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ (2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$

061

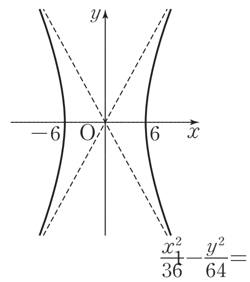
(1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$의 꼭짓점의 좌표는 $(6, 0), (-6, 0)$

주축의 길이는 $2\times6=12$

$\sqrt{36+64}=10$이므로 초점의 좌표는 $(10, 0), (-10, 0)$

점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{4}{3}x$

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



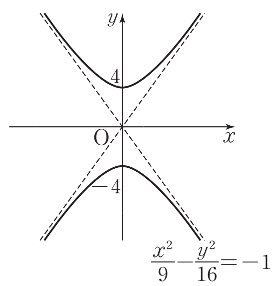
(2) 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$의 꼭짓점의 좌표는 $(0, 4), (0, -4)$

주축의 길이는 $2\times4=8$

$\sqrt{9+16}=5$이므로 초점의 좌표는 $(0, 5), (0, -5)$

점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{4}{3}x$

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



정답_ 풀이 참조

062

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$에서 $\sqrt{16+9}=5$이므로 주어진 쌍곡선의 두 초점의 좌표는 $(5, 0), (-5, 0)$

주축의 길이는 $2\times4=8$

$\therefore x_1-x_2+l=5-(-5)+8=18$

정답_ 18

063

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0, b>0)$에서 주어진 쌍곡선의 한 초점의 x좌표가 3이므로

$\sqrt{a^2+b^2}=3 \qquad \therefore a^2+b^2=9$ …… ㉠

점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \therefore b=\frac{\sqrt{3}}{3}a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{3\sqrt{3}}{2}, b=\frac{3}{2}\ (\because a>0, b>0)$

$\therefore ab=\frac{9\sqrt{3}}{4}$

정답_ ⑤

064

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 꼭짓점의 좌표는

$(a,\ 0), (-a,\ 0)$

따라서 타원 $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점의 좌표가 $(a,\ 0), (-a,\ 0)$이므로

$13-b^2=a^2 \qquad \therefore a^2+b^2=13$

정답_ ④

065

쌍곡선의 방정식이 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$이므로 두 꼭짓점은 y축 위에 있고, 주축의 길이가 $2\sqrt{6}$이므로

$2b=2\sqrt{6} \qquad \therefore b=\sqrt{6}$

두 초점 사이의 거리가 $2\sqrt{13}$이므로 두 초점의 좌표는

$(0, \sqrt{13}), (0, -\sqrt{13})$

$a^2+b^2=(\sqrt{13})^2$에서 $\quad a^2=13-6=7$

$\therefore a^2b^2=7\times6=42$

정답_ ①

066

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$에서 $\sqrt{5^2-4^2}=3$이므로 주어진 타원의 두 초점의 좌표는 $(3,\ 0), (-3,\ 0)$

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0, b>0)$이라고 하면 초점의 좌표가 $(3, 0), (-3, 0)$이므로

$\sqrt{a^2+b^2}=3 \qquad \therefore a^2+b^2=9$ …… ㉠

쌍곡선의 한 점근선의 방정식이 $y=2\sqrt{2}x$이므로

$\frac{b}{a}=2\sqrt{2} \qquad \therefore b=2\sqrt{2}a$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a^2+8a^2=9, 9a^2=9 \qquad \therefore a=1\ (\because a>0)$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는 $2a=2$

정답_ ⑤

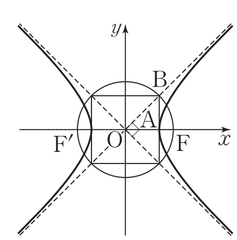
067

오른쪽 그림에서 주축의 길이가 8이므로 쌍곡선의 중심 O에서 쌍곡선의 꼭짓점 A까지의 거리는 $\overline{AO}=4$

두 점근선이 서로 수직이므로

$\angle OBA=\angle BOA=45°$

$\therefore \overline{BO}=4\sqrt{2}$



따라서 쌍곡선의 중심 O에서 초점 F까지의 거리는 $4\sqrt{2}$이므로 두 초점 사이의 거리는 $8\sqrt{2}$이다.

정답_ ⑤

068

두 점 $(0,\ \sqrt{3}), (0,\ -\sqrt{3})$이 쌍곡선의 초점이므로 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\ (a>0, b>0)$이라고 하자.

이때, $a^2+b^2=(\sqrt{3})^2=3$이므로

$b^2=3-a^2$ …… ㉠

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$이 점 $(3,\ 2\sqrt{5})$를 지나므로

$\frac{9}{a^2}-\frac{20}{b^2}=-1$ $\quad\therefore 9b^2-20a^2=-a^2b^2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$9(3-a^2)-20a^2=-a^2(3-a^2)$, $a^4+26a^2-27=0$

$(a^2+27)(a^2-1)=0$ $\quad\therefore a^2=1$ $(\because a^2>0)$

이것을 ㉠에 대입하면 $\ b^2=2$

따라서 주어진 쌍곡선의 방정식은 $x^2-\frac{y^2}{2}=-1$이므로 주축의 길이는 $2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

정답_⑤

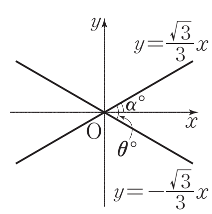
069

쌍곡선 $x^2-3y^2=9$에서 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$

따라서 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$

점근선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기를 $\alpha°$라고 하면



$\tan\alpha°=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad\therefore \alpha=30$

따라서 두 점근선이 이루는 예각의 크기는 $60°$이므로 $\theta=60$

$\therefore \cos\theta°=\cos 60°=\frac{1}{2}$

정답_③

070

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 두 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{b}{a}x$

두 점근선이 서로 수직이므로

$\frac{b}{a}\times\left(-\frac{b}{a}\right)=-1$ $\quad\therefore a^2=b^2$

또, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1$이 점 $(2,\ 4)$를 지나므로

$\frac{4}{a^2}-\frac{16}{a^2}=-1$ $\quad\therefore a^2=12$

$\therefore a^2+b^2=2a^2=2\times12=24$

정답_③

071

원 $x^2+y^2=8$과 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이 만나는 서로 다른 네 점이 원의 둘레를 4등분하므로 쌍곡선은 점 $(2,\ 2)$를 지난다.

$\therefore \frac{4}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$ …… ㉠

한편, 쌍곡선의 한 점근선의 방정식이 $y=\sqrt{2}x$이므로

$\pm\frac{b}{a}=\pm\sqrt{2}$ $\quad\therefore b^2=2a^2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a^2=2,\ b^2=4$

$\therefore a^2+b^2=6$

정답_③

보충 설명

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$은 y축에 대하여 대칭이고 원 $x^2+y^2=8$과 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이 만나는 서로 다른 네 점이 원의 둘레를 4등분하므로 쌍곡선은 원 $x^2+y^2=8$과 직선 $y=x$, $y=-x$가 만나는 네 점 $(2,\ 2)$, $(2,\ -2)$, $(-2,\ 2)$, $(-2,\ -2)$를 지난다.

072

(1) 쌍곡선 $\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y+3)^2}{9}=1$은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

이때, $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$에서 $\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$이므로 이 쌍곡선의

초점의 좌표는 $(\sqrt{13},\ 0)$, $(-\sqrt{13},\ 0)$

꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$

따라서 구하는 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(2+\sqrt{13},\ -3)$, $(2-\sqrt{13},\ -3)$

꼭짓점의 좌표는 $(4,\ -3)$, $(0,\ -3)$

(2) 쌍곡선 $(x+1)^2-4y^2=-16$에서 $\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{y^2}{4}=-1$이므로 쌍곡선 $(x+1)^2-4y^2=-16$은 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=-1$을 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이때, $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=-1$에서 $\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$이므로 이 쌍곡선의

초점의 좌표는 $(0,\ 2\sqrt{5})$, $(0,\ -2\sqrt{5})$

꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 2)$, $(0,\ -2)$

따라서 구하는 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(-1,\ 2\sqrt{5})$, $(-1,\ -2\sqrt{5})$

꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 2)$, $(-1,\ -2)$

정답_ 풀이 참조

073

$x^2-4y^2-2x+8y-7=0$에서

$(x^2-2x+1)-4(y^2-2y+1)=4$

$(x-1)^2-4(y-1)^2=4$ $\quad\therefore \frac{(x-1)^2}{4}-(y-1)^2=1$

따라서 쌍곡선 $x^2-4y^2-2x+8y-7=0$은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때, 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$의 중심의 좌표는 $(0,\ 0)$, 초점의 좌표는 $(\pm\sqrt{5},\ 0)$, 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{1}{2}x$이므로 쌍곡선 $\frac{(x-1)^2}{4}-(y-1)^2=1$에 대하여

(1) 중심의 좌표는 $(1,\ 1)$

(2) 초점의 좌표는 $(1\pm\sqrt{5},\ 1)$

(3) 점근선의 방정식은 $y-1=\pm\frac{1}{2}(x-1)$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

정답_ (1) $(1,\ 1)$ (2) $(1\pm\sqrt{5},\ 1)$

(3) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

074

$25x^2-4y^2-100x=0$에서

$25(x^2-4x+4)-4y^2=100$

$25(x-2)^2-4y^2=100$

$\therefore \frac{(x-2)^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1$

따라서 쌍곡선 $25x^2-4y^2-100x=0$은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1$을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때, $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1$에서 $\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$이므로 이 쌍곡선의 두 초점의 좌표는 $(\sqrt{29},\ 0)$, $(-\sqrt{29},\ 0)$

따라서 주어진 쌍곡선의 두 초점의 좌표는

$(2+\sqrt{29},\ 0)$, $(2-\sqrt{29},\ 0)$

이므로 구하는 두 초점 사이의 거리는

$|(2+\sqrt{29})-(2-\sqrt{29})|=2\sqrt{29}$ 정답_ ⑤

다른 풀이

평행이동을 하여도 두 초점 사이의 거리는 변하지 않으므로 평행이동하기 전의 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1$의 두 초점 $(\sqrt{29},\ 0)$, $(-\sqrt{29},0)$ 사이의 거리를 구해도 결과는 $2\sqrt{29}$로 같다.

075

쌍곡선 $\frac{(x-1)^2}{k^2}-\frac{(y-2)^2}{25}=-1$은 쌍곡선 $\frac{x^2}{k^2}-\frac{y^2}{25}=-1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$\frac{x^2}{k^2}-\frac{y^2}{25}=-1$에서 두 초점 사이의 거리가 $10\sqrt{2}$이므로

$2\sqrt{k^2+25}=10\sqrt{2}$, $4(k^2+25)=200$ $\therefore k^2=25$

$\therefore \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{25}=-1$

쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{25}=-1$에서 두 점근선의 방정식은 $y=\pm x$이므로 쌍곡선 $\frac{(x-1)^2}{25}-\frac{(y-2)^2}{25}=-1$의 두 점근선의 방정식은

$y-2=\pm(x-1)$ $\therefore y=x+1,\ y=-x+3$

따라서 기울기가 양수인 점근선의 방정식은

$y=x+1$ 정답_ ①

076

$x^2-y^2+2y+a=0$에서

$x^2-(y^2-2y+1)+a+1=0$

$\therefore x^2-(y-1)^2=-a-1$

이것이 x축에 평행한 주축을 갖는 쌍곡선이 되려면

$-a-1>0$ $\therefore a<-1$ 정답_ ①

077

$4x^2-9y^2-8x-36y-68=0$에서

$4(x^2-2x+1)-9(y^2+4y+4)=36$

$4(x-1)^2-9(y+2)^2=36$

$\therefore \frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$ ······ ㉠

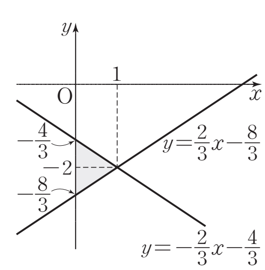
쌍곡선 ㉠은 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 쌍곡선 ㉠의 점근선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$의 점근선 $y=\pm\frac{2}{3}x$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 $y+2=\pm\frac{2}{3}(x-1)$

$\therefore y=\frac{2}{3}x-\frac{8}{3},\ y=-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$

오른쪽 그림과 같이 두 점근선이 y축과 만나는 점은 각각 $\left(0,\ -\frac{8}{3}\right)$, $\left(0,\ -\frac{4}{3}\right)$이고, 두 점근선의 교점은 $(1,\ -2)$이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times1=\frac{2}{3}$ 정답_ ②



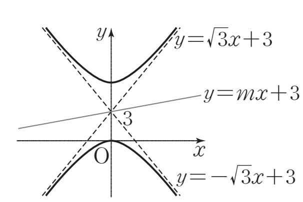
078

$3x^2-y^2+6y=0$에서

$3x^2-(y^2-6y+9)=-9$

$3x^2-(y-3)^2=-9$

$\therefore \frac{x^2}{3}-\frac{(y-3)^2}{9}=-1$



이 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$y-3=\pm\sqrt{3}x$ $\therefore y=\pm\sqrt{3}x+3$

따라서 점 $(0, 3)$을 지나고 기울기가 m인 직선이 쌍곡선과 만나지 않아야 하므로

$-\sqrt{3} \le m \le \sqrt{3}$ 정답_ $-\sqrt{3} \le m \le \sqrt{3}$

다른 풀이

점 $(0, 3)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y-3=m(x-0)$ $\quad \therefore y=mx+3$

이 식을 주어진 쌍곡선의 방정식에 대입하면

$3x^2-(mx+3)^2+6(mx+3)=0$

$(3-m^2)x^2+9=0$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

x에 대한 방정식 ㉠이 실근을 갖지 않으면 직선과 쌍곡선이 만나지 않는다.

(i) $3-m^2=0$일 때, 즉 $m=\pm\sqrt{3}$일 때 ㉠의 실근은 존재하지 않는다.

(ii) $3-m^2 \ne 0$일 때, 방정식 ㉠의 판별식 D에 대하여

$D=-4 \times (3-m^2) \times 9 < 0$, $m^2-3<0$

$\therefore -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$

(i), (ii)에서 $-\sqrt{3} \le m \le \sqrt{3}$

079

$\overline{PF}=\overline{PA}$, $\overline{AF'}=8$이므로

$\overline{AF'}=\overline{PF'}-\overline{PA}=\overline{PF'}-\overline{PF}=8$

따라서 쌍곡선 위의 점 P에서 두 초점 F, F′에 이르는 거리의 차가 8이므로 $2a=8$, $a=4$ $\quad \therefore a^2=16$

즉, 주어진 쌍곡선의 방정식은 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{12}=1$

$\therefore c^2=16+12=28$ 정답_ ⑤

080

쌍곡선의 주축의 길이가 3이므로 쌍곡선의 정의에 의해

$\overline{PF'}-\overline{PF}=3$

그런데 $\overline{PF'}=4\overline{PF}$이므로

$4\overline{PF}-\overline{PF}=3$, $3\overline{PF}=3$

$\therefore \overline{PF}=1$ 정답_ ①

081

쌍곡선 $8x^2-y^2=8$, 즉 $x^2-\dfrac{y^2}{8}=1$에서

$\sqrt{1+8}=3$이므로 두 초점의 좌표는 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$

$\therefore \overline{FF'}=6$

쌍곡선의 정의에 의해

$|\overline{PF}-\overline{PF'}|=2\times1=2$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

$\overline{PF} : \overline{PF'}=2 : 1$에서 $\overline{PF}=2\overline{PF'}$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{PF}=4$, $\overline{PF'}=2$

따라서 삼각형 PFF′의 둘레의 길이는

$\overline{PF}+\overline{FF'}+\overline{F'P}=4+6+2=12$ 정답_ ③

082

$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$에서 $\sqrt{9+16}=5$이므로

$F(5,\ 0)$, $F'(-5,\ 0)$ $\quad \therefore \overline{FF'}=10$

이것을 $2\overline{FF'}=\overline{PF}+\overline{PF'}$에 대입하면

$\overline{PF}+\overline{PF'}=20$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

점 P는 제1사분면 위의 점이므로 $\overline{PF'}>\overline{PF}$이고, 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{PF'}-\overline{PF}$는 주축의 길이와 같다.

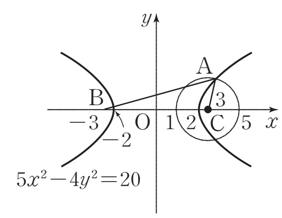
$\therefore \overline{PF'}-\overline{PF}=2\times3=6$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$2\overline{PF}=14$ $\quad \therefore \overline{PF}=7$ 정답_ 7

083

$5x^2-4y^2=20$, 즉 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$에서 $\sqrt{4+5}=3$이므로 쌍곡선의 초점의 좌표는 $B(-3, 0)$, $C(3, 0)$



쌍곡선의 정의에 의해

$\overline{AB}-\overline{AC}=$(주축의 길이)

$=2\times2=4$

이때, $\overline{AC}$는 원

$(x-3)^2+y^2=4$의 반지름이므로

$\overline{AC}=2$

$\therefore \overline{AB}=4+\overline{AC}=4+2=6$ 정답_ ④

084

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$의 주축의 길이는 $2\times4=8$

$\overline{PF'}-\overline{PF}=8$, $\overline{QF}-\overline{QF'}=8$이므로 두 식을 변끼리 더하면

$(\overline{PF'}-\overline{QF'})+(\overline{QF}-\overline{PF})=16$

이때, $\overline{PF'}-\overline{QF'}=1$이므로

$1+(\overline{QF}-\overline{PF})=16$

$\therefore \overline{QF}-\overline{PF}=16-1=15$ 정답_ ③

085

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 위의 점은 두 초점으로부터의 거리의 차가 $2\times3=6$이므로

$\overline{F'A}-\overline{FA}=6$, $\overline{F'B}-\overline{FB}=6$

두 식을 변끼리 더하면

$(\overline{F'A}-\overline{FA})+(\overline{F'B}-\overline{FB})=12$

$\therefore (\overline{F'A}+\overline{F'B})-(\overline{FA}+\overline{FB})=12$

이때, $\overline{AB}=\overline{FA}+\overline{FB}=10$이므로

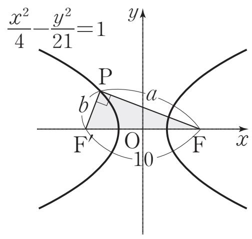
$\overline{F'A}+\overline{F'B}=22$

따라서 삼각형 AF′B의 둘레의 길이는

$\overline{F'A}+\overline{F'B}+\overline{FA}+\overline{FB}=22+10=32$ 정답_ ④

086

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{21}=1$에서



$\sqrt{4+21}=5$이므로

$F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$

$\therefore \overline{FF'}=10$

$\overline{PF}=a$, $\overline{PF'}=b$ $(a>b>0)$

로 놓으면 주축의 길이가 $2\times2=4$이므로 $a-b=4$

또, 삼각형 PF′F는 $\angle FPF'=90^\circ$인 직각삼각형이고, $\overline{FF'}=10$이므로 피타고라스 정리에 의해

$a^2+b^2=10^2$

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$이므로

$10^2=4^2+2ab \qquad \therefore ab=42$

$\therefore \triangle PF'F=\frac{1}{2}ab=21$

정답_ ②

087

쌍곡선 $\frac{4x^2}{9}-\frac{y^2}{40}=1$, 즉 $\frac{x^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{40}=1$에서

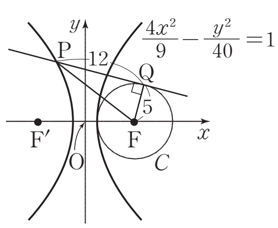
$\sqrt{\frac{9}{4}+40}=\sqrt{\frac{169}{4}}=\frac{13}{2}$이므로

$F\left(\frac{13}{2}, 0\right)$, $F'\left(-\frac{13}{2}, 0\right)$

쌍곡선의 꼭짓점의 좌표가 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$이므로 원 C는 쌍곡선과 점 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$에서 접한다.

따라서 원 C는 점 $F\left(\frac{13}{2}, 0\right)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{13}{2}-\frac{3}{2}=5$인 원이다.

직각삼각형 PFQ에서



$\overline{PF}=\sqrt{12^2+5^2}=13$

쌍곡선의 정의에 의해

$\overline{PF}-\overline{PF'}=2\times\frac{3}{2}=3$이므로

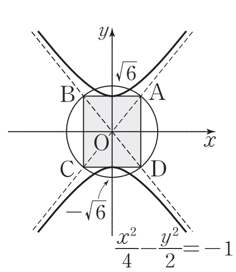
$\overline{PF'}=\overline{PF}-3$

$\quad=13-3=10$

정답_ ①

088

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=-1$에서



$\sqrt{4+2}=\sqrt{6}$이므로 두 초점의 좌표는

$(0, \sqrt{6})$, $(0, -\sqrt{6})$

따라서 두 초점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은

$x^2+y^2=6 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또, 쌍곡선의 점근선의 방정식 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$의 양변을 제곱하면

$y^2=\frac{1}{2}x^2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $x^2+\frac{x^2}{2}=6$, $x^2=4$

$\therefore x=2, y=\pm\sqrt{2}$ 또는 $x=-2, y=\pm\sqrt{2}$

즉, 원이 쌍곡선의 두 점근선과 만나는 네 점의 좌표는 각각

$A(2, \sqrt{2})$, $B(-2, \sqrt{2})$, $C(-2, -\sqrt{2})$, $D(2, -\sqrt{2})$

따라서 구하는 사각형 ABCD의 넓이는

$\{2-(-2)\}\{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})\}=4\times2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

정답_ $8\sqrt{2}$

089

$\overline{PA}$가 $\angle F'PF$의 이등분선이므로

$\overline{PF'}:\overline{PF}=\overline{F'A}:\overline{FA}=2:1$

$\overline{PF}=k$ $(k>0)$로 놓으면 $\overline{PF'}=2k$이므로

$\overline{PF'}-\overline{PF}=k=2\sqrt{6}$

$\therefore \overline{PF'}=4\sqrt{6}$, $\overline{PF}=2\sqrt{6}$

한편, $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$에서 $\sqrt{6+3}=3$이므로 쌍곡선의 초점의 좌표는 $F(3, 0)$, $F'(-3, 0) \qquad \therefore \overline{FF'}=6$

따라서 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는

$6+2\sqrt{6}+4\sqrt{6}=6+6\sqrt{6}$

이므로 $m=6$, $n=6$

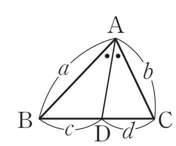
$\therefore mn=36$

정답_ ⑤

참고

삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선과 변 BC의 교점을 D라고 할 때,

$a:b=c:d$



090

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{a}=1$ $(a>0)$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{\sqrt{a}}{2}x$

쌍곡선의 한 꼭짓점 $(2, 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 이 쌍곡선의 점근선과 만나는 제1사분면 위의 점 P의 좌표는

$(2, \sqrt{a})$

따라서 중심이 원점이고, 점 $P(2, \sqrt{a})$를 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2=4+a$

이 원이 x축과 만나는 한 점의 x좌표는

$\sqrt{4+a}$ $(\because x>0)$

따라서 $\sqrt{4+a}=3$이므로

$4+a=9 \qquad \therefore a=5$

정답_ ②

091

주어진 타원의 초점의 좌표는 $(4, 3)$, $(-4, 3)$이므로 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{3}{4}x$

$\therefore \frac{b^2}{a^2}=\frac{3^2}{4^2}$ ······ ㉠

또, 타원의 장축 위의 양 끝 점의 좌표가 $(5, 3)$, $(-5, 3)$이므로

$\frac{5^2}{a^2}-\frac{3^2}{b^2}=1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a^2=9$, $b^2=\frac{81}{16}$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에서 $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+\frac{81}{16}}=\frac{15}{4}$이므로 쌍곡선의 초점은 $F\left(\frac{15}{4}, 0\right)$, $F'\left(-\frac{15}{4}, 0\right)$

$\therefore \overline{FF'}=2\times\frac{15}{4}=\frac{15}{2}$

정답_ $\frac{15}{2}$

092

$F(0, 3)$, $F'(0, -3)$, $P(2, 3)$이므로

$\overline{FF'}=3-(-3)=6$, $\overline{PF}=2$

직각삼각형 PFF'에서

$\overline{PF'}=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$\therefore \overline{PF}+\overline{PF'}=2+2\sqrt{10}$, $\overline{PF'}-\overline{PF}=2\sqrt{10}-2$

타원의 정의에 의해

$\overline{OA}=\frac{1}{2}(\overline{PF}+\overline{PF'})=\frac{1}{2}(2+2\sqrt{10})=1+\sqrt{10}$

쌍곡선의 정의에 의해

$\overline{OB}=\frac{1}{2}(\overline{PF'}-\overline{PF})=\frac{1}{2}(2\sqrt{10}-2)=\sqrt{10}-1$

$\therefore \overline{AB}=\overline{OA}-\overline{OB}=2$

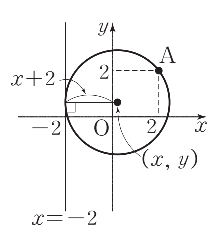
따라서 삼각형 ABP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PF}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$

정답_ 2

093

오른쪽 그림과 같이 구하는 원의 중심의 좌표를 (x, y)라고 하면 원의 반지름의 길이는



$|x-(-2)|=|x+2|$

이므로

$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=|x+2|$

양변을 제곱하면

$(x-2)^2+(y-2)^2=(x+2)^2$

$\therefore (y-2)^2=8x$

따라서 원의 중심 (x, y)가 나타내는 도형은 ④와 같다. 정답_ ④

094

주어진 원은 점 $A(4, 0)$을 지나고 y축에 접하므로

$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=|x|$

양변을 제곱하면

$(x-4)^2+y^2=x^2$ $\quad\therefore y^2=8x-16$

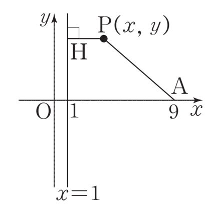
따라서 $a=8$, $b=-16$이므로

$a+b=-8$

정답_ ②

095

오른쪽 그림과 같이 점 $P(x, y)$에서 직선 $x=1$에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{PH}=|x-1|$

$\overline{PA}=\sqrt{(x-9)^2+y^2}$

$\overline{PA} : \overline{PH}=3 : 1$에서

$\overline{PA}=3\overline{PH}$이므로

$\sqrt{(x-9)^2+y^2}=3|x-1|$

양변을 제곱하면

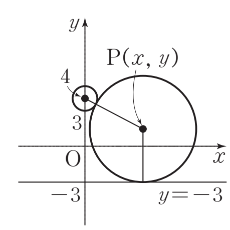
$x^2-18x+81+y^2=9x^2-18x+9$

$\therefore \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{72}=1$

정답_ $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{72}=1$

096

오른쪽 그림과 같이 구하는 원의 중심을 $P(x, y)$라고 하면 원의 반지름의 길이는



$|y-(-3)|=y+3$

이므로 두 점 $(0, 4)$, $P(x, y)$ 사이의 거리는

$\sqrt{x^2+(y-4)^2}=(y+3)+1$

양변을 제곱하면

$x^2+(y-4)^2=(y+4)^2$

$\therefore x^2=16y$

정답_ ②

097

두 원 $C_1 : x^2+(y+1)^2=9$, $C_2 : x^2+(y-1)^2=49$의 중심을 각각 A, B라고 하면 $A(0, -1)$, $B(0, 1)$

중심이 점 P인 원의 반지름의 길이를 r라고 하면

$\overline{AP}=3+r$, $\overline{BP}=7-r$

$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}=10$

따라서 점 P의 자취는 두 점 A, B를 초점으로 하고 장축의 길이가 10인 타원이므로 구하는 자취의 방정식은

$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{25}=1$

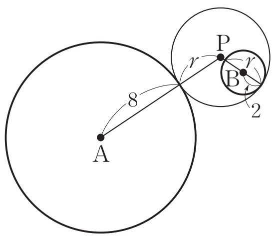
정답_ $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{25}=1$

참고

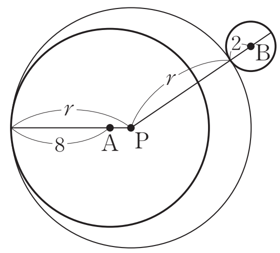
두 원의 반지름의 길이를 각각 r, r', 중심 사이의 거리를 d라고 할 때, 두 원이 내접하면 $d=|r-r'|$, 외접하면 $d=r+r'$이다.

098

원 P의 반지름의 길이를 r라고 하자.



[그림 1]



[그림 2]

(i) [그림 1]과 같이 원 P가 원 A와 외접하고 원 B와 내접할 때,

$\overline{PA}=r+8, \overline{PB}=r-2 \quad \therefore \overline{PA}-\overline{PB}=10$

(ii) [그림 2]와 같이 원 P가 원 A와 내접하고 원 B와 외접할 때,

$\overline{PA}=r-8, \overline{PB}=r+2 \quad \therefore \overline{PA}-\overline{PB}=-10$

(i), (ii)에서 $|\overline{PA}-\overline{PB}|=10$이므로 점 P는 두 점 A, B를 초점으로 하고 주축의 길이가 10인 쌍곡선이다.

정답_ ⑤

099

$5x^2+ky^2-k+3=0$에서 $5x^2+ky^2=k-3$

이 이차곡선이 타원이 되려면

$k>0, k\neq5, k-3>0$

$\therefore 3<k<5$ 또는 $k>5$

따라서 실수 k의 값이 될 수 없는 것은 ② 5이다.

정답_ ②

100

이차곡선 $(2-k)x^2+(4-3k)y^2+3x+y=0$이 포물선이 되려면 $2-k=0$ 또는 $4-3k=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=\frac{4}{3}$

따라서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은

$2+\frac{4}{3}=\frac{10}{3}$

정답_ ⑤

101

방정식 $(k-4)x^2+(2k+4)y^2+2x-3=0$이 나타내는 도형이 쌍곡선이 되려면

$(k-4)(2k+4)<0, 2(k-4)(k+2)<0$

$\therefore -2<k<4$

따라서 정수 k는 $-1, 0, 1, 2, 3$의 5개이다.

정답_ ⑤

102

주어진 이차곡선은 두 점 $A(4,\ -3)$, $B(0,\ -3)$을 초점으로 하고 장축이 x축에 평행하고 장축의 길이가 $2\sqrt{5}$인 타원이다.

$\overline{AB}=4$이므로 주어진 타원은 두 점 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 $2\sqrt{5}$인 타원을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 타원의 방정식을

$\frac{(x-2)^2}{m^2}+\frac{(y+3)^2}{n^2}=1\ (m>n>0)$이라고 하면

$2m=2\sqrt{5} \quad \therefore m=\sqrt{5}$

$m^2-n^2=2^2$에서

$n^2=(\sqrt{5})^2-2^2=1 \quad \therefore n=1\ (\because n>0)$

따라서 타원의 방정식은

$\frac{(x-2)^2}{5}+(y+3)^2=1, (x-2)^2+5(y+3)^2=5$

$\therefore x^2+5y^2-4x+30y+44=0$

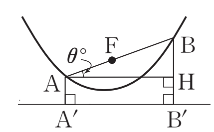
즉, $a=-4, b=30, c=44$이므로

$a-b+c=-4-30+44=10$

정답_ ②

103

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 주어진 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하고, 점 A에서 선분 BB′에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\overline{AF}:\overline{BF}=3:4$이므로 $\overline{AF}=3k$,

$\overline{BF}=4k\ (k>0)$로 놓으면 포물선의 정의에 의해

$\overline{AA'}=\overline{AF}=3k, \overline{BB'}=\overline{BF}=4k$ ❶

$\therefore \overline{BH}=\overline{BB'}-\overline{HB'}=\overline{BB'}-\overline{AA'}=4k-3k=k$

직각삼각형 AHB에서

$\overline{AH}=\sqrt{(3k+4k)^2-k^2}=4\sqrt{3}k\ (\because k>0)$ ❷

$\therefore \cos\theta°=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{4\sqrt{3}k}{7k}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$ ❸

정답_ $\frac{4\sqrt{3}}{7}$

단계	채점 기준	비율
❶	$\overline{AF}=3k$, $\overline{BF}=4k$로 놓고 $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$의 길이를 k로 나타내기	40%
❷	$\overline{BH}$, $\overline{AH}$의 길이를 k로 나타내기	30%
❸	$\cos\theta°$의 값 구하기	30%

104

원의 반지름의 길이를 r라고 하면 타원의 장축과 단축의 길이는 각각 $2(10-r), 2(6-r)$이므로 타원의 방정식은

$\frac{x^2}{(10-r)^2}+\frac{y^2}{(6-r)^2}=1$ ❶

타원의 두 초점 사이의 거리가 $4\sqrt{10}$이므로

$2\sqrt{(10-r)^2-(6-r)^2}=4\sqrt{10}$

$(10-r)^2-(6-r)^2=(2\sqrt{10})^2 \quad \therefore r=3$ ❷

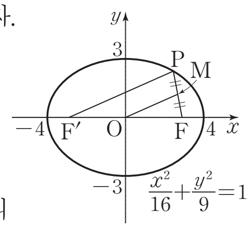
따라서 타원의 장축의 길이는 $2(10-3)=14$이다. ❸

정답_ 14

단계	채점 기준	비율
❶	원의 반지름의 길이를 r라고 할 때, 타원의 방정식 나타내기	40%
❷	r의 값 구하기	40%
❸	타원의 장축의 길이 구하기	20%

105

타원의 나머지 한 초점을 F′이라고 하자.



삼각형 FPF′에서

$\overline{FM}=\overline{MP}$, $\overline{FO}=\overline{OF'}$이므로

$\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{PF'}$ ······ ❶

타원 위의 점에서 두 초점까지의 거리의 합이 8이므로

$\overline{PF}+\overline{PF'}=8$ ······ ❷

$\overline{PF}=2$이므로 $\overline{PF'}=6$

$\therefore \overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{PF'}=3$ ······ ❸

정답_ 3

단계	채점 기준	비율
❶	타원의 초점 F′에 대하여 $\overline{OM}$과 $\overline{PF'}$ 사이의 관계식 구하기	40%
❷	$\overline{PF}+\overline{PF'}$의 값 구하기	20%
❸	$\overline{OM}$의 길이 구하기	40%

106

타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$에서 $\sqrt{36-16}=2\sqrt{5}$이므로 타원의 초점의 좌표는 $(2\sqrt{5},\ 0)$, $(-2\sqrt{5},\ 0)$

또, 타원의 장축의 길이는 $2\times6=12$ ······ ❶

주어진 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이라고 하면 타원과 초점을 공유하므로

$a^2+b^2=20$ ······ ㉠

한편, 타원의 장축의 길이를 쌍곡선이 3등분하므로 쌍곡선의 주축의 길이는 $\frac{1}{3}\times12=4$

즉, $a=2$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$2^2+b^2=20$, $b^2=16$ $\quad\therefore b=4\ (\because b>0)$

따라서 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$이므로 점근선의 방정식은 $y=\pm2x$ ······ ❷

이때, 기울기가 양수인 점근선은 $y=2x$이므로

$\tan\theta^\circ=2$ ······ ❸

정답_ 2

단계	채점 기준	비율
❶	타원의 초점의 좌표와 장축의 길이 구하기	30%
❷	쌍곡선의 방정식과 점근선의 방정식 구하기	40%
❸	$\tan\theta^\circ$의 값 구하기	30%

107

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{b}{a}x$ ······ ❶

쌍곡선 위의 임의의 점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라고 하면

$\frac{{x_1}^2}{a^2}-\frac{{y_1}^2}{b^2}=1$ ······ ㉠

······ ❷

점 Q, R의 좌표는 각각 $Q\left(x_1, \frac{b}{a}x_1\right)$, $R\left(x_1, -\frac{b}{a}x_1\right)$

또는 $Q\left(x_1, -\frac{b}{a}x_1\right)$, $R\left(x_1, \frac{b}{a}x_1\right)$이므로

$$\begin{aligned}\overline{PQ}\times\overline{PR}&=\left(\frac{b}{a}x_1-y_1\right)\left(-\frac{b}{a}x_1-y_1\right)\\&=-\frac{b^2}{a^2}{x_1}^2+{y_1}^2\\&=-b^2\left(\frac{{x_1}^2}{a^2}-\frac{{y_1}^2}{b^2}\right)\\&=b^2\ (\because ㉠)\end{aligned}$$

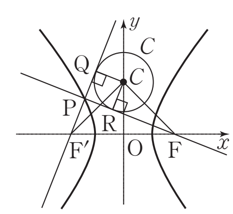
따라서 $\overline{PQ}\times\overline{PR}$는 b^2으로 일정하다. ······ ❸

정답_ 풀이 참조

단계	채점 기준	비율
❶	점근선의 방정식 구하기	20%
❷	점 P가 쌍곡선 위에 있을 조건 구하기	30%
❸	$\overline{PQ}\times\overline{PR}$가 일정함을 보이기	50%

108

쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{17}=1$의 주축의 길이가 $2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$이므로



$\overline{FP}-\overline{F'P}=4\sqrt{2}$ ······ ㉠

······ ❶

원 C의 중심을 C, 직선 FP와 원 C의 접점을 R라고 하면

$\overline{PQ}=\overline{PR}$, $\angle CQF'=\angle CRF=90^\circ$

또, $\triangle CQF'\equiv\triangle CRF$ (RHS합동)이므로

$\overline{FR}=\overline{F'Q}=5\sqrt{2}$ ······ ❷

$$\begin{aligned}\therefore \overline{FP}+\overline{F'P}&=(\overline{PR}+\overline{FR})+\overline{F'P}\\&=\overline{PQ}+\overline{FR}+\overline{F'P}\\&=(\overline{PQ}+\overline{F'P})+\overline{FR}\\&=\overline{F'Q}+\overline{FR}\\&=5\sqrt{2}+5\sqrt{2}=10\sqrt{2}\end{aligned}$$ ······ ㉡

······ ❸

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\overline{FP}=7\sqrt{2}$, $\overline{F'P}=3\sqrt{2}$

$\therefore \overline{FP}^2+\overline{F'P}^2=(7\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2=116$ ······ ❹

정답_ 116

단계	채점 기준	비율
❶	$\overline{FP}-\overline{F'P}$의 값 구하기	30%
❷	$\overline{FR}$의 길이 구하기	25%
❸	$\overline{FP}+\overline{F'P}$의 값 구하기	25%
❹	$\overline{FP}^2+\overline{F'P}^2$의 값 구하기	20%

109

포물선 $y^2=-12x=4\times(-3)x$의 초점은 $\mathrm{F}(-3,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=3$이고 포물선 $y^2=12x=4\times3x$의 초점은 $\mathrm{F}'(3,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-3$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{FF}'}=6$

$\mathrm{Q}(a,\ b)\ (a>0, b>0)$라고 하면 $\mathrm{P}(-a,\ b)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=2a$

포물선의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{QF}'}=a+3$

이때, 사다리꼴 $\mathrm{PFF'Q}$의 둘레의 길이가 16이므로

$2a+6+2(a+3)=16\qquad\therefore\ a=1$

점 $\mathrm{Q}(a,\ b)$가 포물선 $y^2=12x$ 위의 점이므로

$b^2=12a=12\qquad\therefore\ b=2\sqrt{3}\ (\because\ b>0)$

따라서 사다리꼴 $\mathrm{PFF'Q}$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(2+6)\times2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$ 정답_⑤

110

원의 반지름의 길이를 r라고 하면 타원의 네 꼭짓점의 좌표는 각각 $(2+r,\ 0)$, $(-2-r,\ 0)$, $(5+r,\ 0)$, $(-5-r,\ 0)$이므로 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{(2+r)^2}+\frac{y^2}{(5+r)^2}=1$$

이때, 타원의 두 초점 사이의 거리가 10이므로

$$(5+r)^2-(2+r)^2=\left(\frac{10}{2}\right)^2$$

$6r=4\qquad\therefore\ r=\frac{2}{3}$

따라서 타원의 장축의 길이는

$$a=2(5+r)=2\left(5+\frac{2}{3}\right)=\frac{34}{3}$$

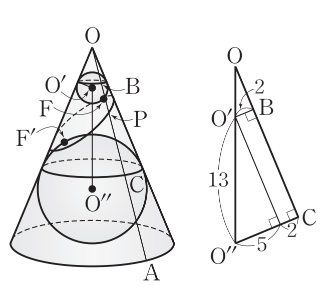
단축의 길이는

$$b=2(2+r)=2\left(2+\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{3}$$

$\therefore\ a-b=\frac{34}{3}-\frac{16}{3}=6$ 정답_②

111

오른쪽 그림과 같이 원뿔의 꼭짓점을 O, 두 구의 중심을 각각 O', O''이라 하고, 주어진 타원의 초점을 F, F'이라 고 하자.



밑면의 원주 위의 한 점 A에 대하여 선분 OA와 두 구의 접점을 각각 B, C라 하고, 주어진 타원과의 교점을 P라고 하면

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PB}}$, $\overline{\mathrm{PF}'}=\overline{\mathrm{PC}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF}'}=\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}$

$=\overline{\mathrm{BC}}$

$=\sqrt{13^2-5^2}=12$

따라서 구하는 타원의 장축의 길이는 12이다. 정답_⑤

112

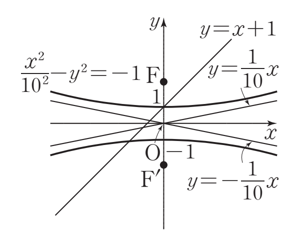
쌍곡선 $\frac{x^2}{10^2}-\frac{y^2}{n^2}=-1$의 기울기가 양수인 점근선의 방정식은

$y=\frac{n}{10}x$

ㄱ은 옳다.

$n=1$일 때, 쌍곡선 $\frac{x^2}{10^2}-y^2=-1$의 기울기가 양수인 점근선의 방정식은 $y=\frac{1}{10}x$이다.

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x+1$과 점근선의 기울기가 다르므로 쌍곡선과 직선 $y=x+1$이 만나는 교점의 개수는 2이다.



$\therefore\ f(1)=2$

$n=2$일 때, 쌍곡선 $\frac{x^2}{10^2}-\frac{y^2}{2^2}=-1$의 기울기가 양수인 점근선의 방정식은 $y=\frac{1}{5}x$이다.

같은 방법으로 직선 $y=x+2$와 점근선의 기울기가 다르므로 쌍곡선과 직선 $y=x+2$가 만나는 교점의 개수는 2이다.

$\therefore\ f(2)=2$

$\therefore\ f(1)+f(2)=4$

ㄴ은 옳지 않다.

모든 자연수 n에 대하여 직선 $y=x+n$은 항상 쌍곡선 $\frac{x^2}{10^2}-\frac{y^2}{n^2}=-1$의 꼭짓점 $(0,\ n)$을 지나므로

$f(n)\neq0$

ㄷ도 옳지 않다.

$n=10$일 때, 쌍곡선 $\frac{x^2}{10^2}-\frac{y^2}{10^2}=-1$의 기울기가 양수인 점근선의 방정식은 $y=x$이다.

직선 $y=x+10$의 기울기와 점근선의 기울기가 같으므로 만나는 교점의 개수는 1이다.

그런데 $n>10$일 때, 쌍곡선 $\frac{x^2}{10^2}-\frac{y^2}{n^2}=-1$의 기울기가 양수인 점근선의 기울기는 직선의 기울기 1보다 크므로 만나는 교점의 개수는 2이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 정답_①

02 이차곡선의 접선의 방정식

113

$y=x+k$를 $y^2=8x$에 대입하면

$(x+k)^2=8x \qquad \therefore x^2+2(k-4)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(k-4)^2-k^2=-8k+16$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$-8k+16>0 \qquad \therefore k<2$

(2) 접하려면 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$-8k+16=0 \qquad \therefore k=2$

(3) 만나지 않으려면 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로

$-8k+16<0 \qquad \therefore k>2$

정답_ (1) $k<2$ (2) $k=2$ (3) $k>2$

114

(1) $x-y=1$에서 $y=x-1$

이것을 $4x^2+y^2=12$에 대입하면

$4x^2+(x-1)^2=12 \qquad \therefore 5x^2-2x-11=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-5\times(-11)=56>0$

따라서 타원 $4x^2+y^2=12$와 직선 $x-y=1$은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $x+y-4=0$에서 $y=4-x$

이것을 $4x^2+y^2=12$에 대입하면

$4x^2+(4-x)^2=12 \qquad \therefore 5x^2-8x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-5\times4=-4<0$

따라서 타원 $4x^2+y^2=12$와 직선 $x+y-4=0$은 만나지 않는다.

(3) $y=2x+2\sqrt{6}$을 $4x^2+y^2=12$에 대입하면

$4x^2+(2x+2\sqrt{6})^2=12, 8x^2+8\sqrt{6}x+12=0$

$\therefore 2x^2+2\sqrt{6}x+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(\sqrt{6})^2-2\times3=0$

따라서 타원 $4x^2+y^2=12$와 직선 $y=2x+2\sqrt{6}$은 한 점에서 만난다. (접한다.)

정답_ (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 만나지 않는다.
(3) 한 점에서 만난다. (접한다.)

115

$y=mx+1$을 $x^2-4y^2=12$에 대입하면

$x^2-4(mx+1)^2=12$

$\therefore (4m^2-1)x^2+8mx+16=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(4m)^2-(4m^2-1)\times16=-48m^2+16=0$

$m^2=\frac{1}{3} \qquad \therefore m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 모든 상수 m의 값의 곱은

$-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{1}{3}$

정답_ ②

116

$n(A\cap B)=2$이므로 포물선 $(x-2)^2=3y$와 직선 $y=x+k$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

$y=x+k$를 $(x-2)^2=3y$에 대입하면

$(x-2)^2=3(x+k)$

$\therefore x^2-7x+4-3k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=7^2-4(4-3k)=12k+33>0$

$12k>-33 \qquad \therefore k>-\frac{11}{4}$

따라서 음의 정수 k는 $-2, -1$이므로 그 합은 -3이다.

정답_ ③

117

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{3}{2}x$

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$과 직선 $y=ax+b$가 실수 b의 값에 관계없이 교점을 가지므로

$-\frac{3}{2}<a<\frac{3}{2}$

따라서 보기에서 실수 a의 값이 될 수 있는 것은

ㄴ, ㄷ, ㄹ

정답_ ④

118

$3x-y=k$라고 하면 점 (x, y)가 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점이므로 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$과 직선 $3x-y=k$가 만나야 한다.

$3x-y=k$에서 $\quad y=3x-k$

이것을 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$에 대입하면

$\frac{x^2}{3}+\frac{(3x-k)^2}{4}=1$

$\therefore 31x^2-18kx+3k^2-12=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-9k)^2-31(3k^2-12)=-12k^2+372\geq0$

$k^2-31\leq0$, $(k+\sqrt{31})(k-\sqrt{31})\leq0$

$\therefore -\sqrt{31}\leq k\leq\sqrt{31}$

따라서 정수 k는 $-5, -4, -3, \cdots, 5$의 11개이다. 정답_ ④

119

$y=3x+5$를 $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{2}=1$에 대입하면

$\frac{x^2}{a}-\frac{(3x+5)^2}{2}=1$

$\therefore (9a-2)x^2+30ax+27a=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(15a)^2-(9a-2)\times27a=-18a^2+54a=0$

$a^2-3a=0$, $a(a-3)=0$ $\quad\therefore a=3$ ($\because a\neq0$)

즉, 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$이므로 $\sqrt{3+2}=\sqrt{5}$에서

초점의 좌표는 $(\sqrt{5},\ 0)$, $(-\sqrt{5},\ 0)$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$|\sqrt{5}-(-\sqrt{5})|=2\sqrt{5}$ 정답_ ④

다른 풀이

직선 $y=3x+5$가 쌍곡선 $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{2}=1$에 접하므로 기울기가 3인 접선의 방정식을 구하면

$y=3x\pm\sqrt{a\times3^2-2}=3x\pm\sqrt{9a-2}$

$\sqrt{9a-2}=5$이므로 $\quad 9a-2=25 \quad\therefore a=3$

즉, 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$이므로 $\sqrt{3+2}=\sqrt{5}$에서

초점의 좌표는 $(\sqrt{5},\ 0)$, $(-\sqrt{5},\ 0)$

따라서 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{5}$

120

직선 $y=-x$를 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=-x \quad\therefore y=x$

이것을 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하면

$y-k=x \quad\therefore y=x+k$

이것을 $x^2+4y^2=4$에 대입하면

$x^2+4(x+k)^2=4 \quad\therefore 5x^2+8kx+4k^2-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(4k)^2-5(4k^2-4)=-4k^2+20=0$

$4k^2=20$, $k^2=5 \quad\therefore k=\sqrt{5}$ ($\because k>0$) 정답_ ⑤

참고

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을

① x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(x,\ -y)=0$

② y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(-x,\ y)=0$

③ 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(-x,\ -y)=0$

④ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(y,\ x)=0$

⑤ 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(-y,\ -x)=0$

121

$y=x+k$를 $x^2=16y$에 대입하면

$x^2=16(x+k) \quad\therefore x^2-16x-16k=0$ ...... ㉠

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(\alpha, \alpha+k)$, $(\beta, \beta+k)$라고 하면 α, β는 이차방정식 ㉠의 두 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=16$, $\alpha\beta=-16k$ ...... ㉡

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{(\beta+k)-(\alpha+k)\}^2}$

$=\sqrt{2(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}$

$=\sqrt{2\{16^2-4\times(-16k)\}}$ ($\because$ ㉡)

$=8\sqrt{2(4+k)}$

이때, $\overline{AB}=32$이므로

$8\sqrt{2(4+k)}=32$, $\sqrt{2(4+k)}=4$

양변을 제곱하면

$2(4+k)=16$, $4+k=8 \quad\therefore k=4$ 정답_ ⑤

122

기울기가 m이고 점 $(2,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=m(x-2)+1$

이것을 $x^2=2y+1$에 대입하면

$x^2=2\{m(x-2)+1\}+1$

$\therefore x^2-2mx+4m-3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=m^2-(4m-3)=m^2-4m+3=(m-1)(m-3)$

(i) $\frac{D}{4}>0$일 때,

$(m-1)(m-3)>0$이므로 $m<1$ 또는 $m>3$

(ii) $\frac{D}{4}=0$일 때,

$(m-1)(m-3)=0$이므로 $m=1$ 또는 $m=3$

(iii) $\frac{D}{4}<0$일 때,

$(m-1)(m-3)<0$이므로 $1<m<3$

(i), (ii), (iii)에서

$a_1=1$, $a_2=0$, $a_3=1$, $a_4=2$

$\therefore a_1+2a_2+3a_3+4a_4=1+2\times0+3\times1+4\times2$

$=12$ 정답_ ③

123

(1) $y^2=8x=4\times2x$에서 $p=2$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=2x+\frac{2}{2}$ $\therefore y=2x+1$

(2) 기울기가 3이므로 구하는 직선의 방정식을 $y=3x+b$라고 하자. $y=3x+b$를 $x^2=4y$에 대입하면

$x^2=4(3x+b)$ $\therefore x^2-12x-4b=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-(-4b)=36+4b=0$ $\therefore b=-9$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=3x-9$ 정답_ (1) $y=2x+1$ (2) $y=3x-9$

참고

포물선 $x^2=4py$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y=mx-pm^2$

124

$x^2=\frac{1}{2}y=4\times\frac{1}{8}y$에서 $p=\frac{1}{8}$이므로 기울기가 -1인 접선의 방정식은

$y=-x-\frac{1}{8}\times(-1)^2$, $y=-x-\frac{1}{8}$

$\therefore 8x+8y+1=0$

따라서 $a=8, b=8$이므로 $a-b=0$ 정답_ ③

125

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60°이므로 접선의 기울기는 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

또, $y^2=x=4\times\frac{1}{4}x$에서 $p=\frac{1}{4}$이므로 포물선 $y^2=x$에 접하고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60°인 직선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x+\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{3}}$ $\therefore y=\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{12}$

따라서 이 직선의 x절편은 $\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{12}=0$에서

$x=-\frac{1}{12}$ 정답_ ②

126

직선 $x+3y+5=0$의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 3이다.

또, $y^2=4x=4\times1\times x$에서 $p=1$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y=3x+\frac{1}{3}$ 정답_ ②

127

직선 $4x+2y-1=0$의 기울기가 -2이므로 구하는 직선의 기울기는 -2이다.

$y^2=-12x=4\times(-3)x$에서 $p=-3$이므로 포물선 $y^2=-12x$에 접하고 기울기가 -2인 접선의 방정식은

$y=-2x+\frac{-3}{-2}$ $\therefore y=-2x+\frac{3}{2}$

이 직선이 점 $\left(-\frac{1}{4}, a\right)$를 지나므로

$a=-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$ 정답_ ③

128

$y^2=16x=4\times4x$에서 $p=4$

따라서 기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x+\frac{4}{\frac{1}{2}}$ $\therefore y=\frac{1}{2}x+8$

직선 $y=\frac{1}{2}x+8$이 x축과 만나는 점의 좌표는 $(-16, 0)$이고, y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 8)$이므로 구하는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times16\times8=64$ 정답_ 64

129

$x-y-k=0$에서 $y=x-k$

초점이 $\mathrm{F}(2, 0)$이고 준선의 방정식이 $x=-2$인 포물선의 방정식은 $y^2=4\times2\times x$이므로 $p=2$

이 포물선에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은 $y=x+2$

이것이 $y=x-k$와 일치하므로 $k=-2$ 정답_ ②

130

(1) $y^2=4x=4\times1\times x$에서 $p=1$이므로 포물선 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 방정식은

$2y=2\times1\times(x+1)$ $\therefore y=x+1$

(2) $x^2=8y=4\times2\times y$에서 $p=2$이므로 포물선 위의 점 $(4, 2)$에서의 접선의 방정식은

$4x=2\times2\times(y+2)$, $x=y+2$ $\therefore y=x-2$

정답_ (1) $y=x+1$ (2) $y=x-2$

다른 풀이

음함수의 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수도 있다.

(1) $y^2=4x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\times\frac{dy}{dx}=4$ $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}$

점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{2}{2}=1$이므로 접선의 방정식은

$y-2=x-1$ $\therefore y=x+1$

(2) $x^2=8y$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x=8\times\frac{dy}{dx}$ $\quad\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x}{4}$

점 $(4,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{4}{4}=1$이므로 접선의 방정식은

$y-2=x-4$ $\quad\therefore y=x-2$

131

$y^2=4x=4\times1\times x$에서 $p=1$이므로 포물선 위의 점 $(1,\ -2)$에서의 접선의 방정식은

$-2y=2\times1\times(x+1)$ $\quad\therefore y=-x-1$

따라서 구하는 접선의 y절편은 -1이다.

정답_ ②

132

$y^2=3x=4\times\frac{3}{4}\times x$에서 $p=\frac{3}{4}$이므로 초점의 좌표는 $\left(\frac{3}{4},\ 0\right)$

포물선 위의 점 $(12,\ 6)$에서의 접선의 방정식은

$6y=2\times\frac{3}{4}\times(x+12)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{4}x+3$

기울기가 $\frac{1}{4}$이고, 점 $\left(\frac{3}{4},\ 0\right)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{4}\left(x-\frac{3}{4}\right)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{16}$

따라서 $m=\frac{1}{4},\ n=-\frac{3}{16}$이므로 $m+n=\frac{1}{16}$

정답_ ①

133

포물선 $y^2=4px$의 준선의 방정식은 $x=-p$이므로 점 $\mathrm{P}(p,\ 2p)$에서 준선까지의 거리는

$2p=6$ $\quad\therefore p=3$

즉, 포물선의 방정식은 $y^2=12x$이고, 이 포물선 위의 점 $\mathrm{P}(3,\ 6)$에서의 접선의 방정식은

$6y=2\times3\times(x+3)$ $\quad\therefore y=x+3$

직선 $y=x+3$이 점 $(4,\ a)$를 지나므로

$a=4+3=7$

정답_ ④

134

$x^2=4y=4\times1\times y$에서 $p=1$이므로 포물선 위의 점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$-2x=2\times1\times(y+1)$ $\quad\therefore y=-x-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

포물선 위의 점 $\mathrm{B}(4,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$4x=2\times1\times(y+4)$ $\quad\therefore y=2x-4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad x=1,\ y=-2$

즉, 두 접선의 교점의 좌표는 $(1,\ -2)$이므로

$a=1,\ b=-2$ $\quad\therefore ab=-2$

정답_ ①

135

$y^2=4x=4\times1\times x$에서 $p=1$이므로 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(1,\ 0)$이고, 포물선 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$2y=2\times1\times(x+1)$ $\quad\therefore y=x+1$

이 접선의 x절편이 -1이므로 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$

따라서 삼각형 PAF의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\{1-(-1)\}\times2=2$

정답_ ②

136

$y^2=x=4\times\frac{1}{4}\times x$에서 $p=\frac{1}{4}$이므로 포물선 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$by=2\times\frac{1}{4}\times(x+a)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{2b}x+\frac{a}{2b}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

접선 ㉠이 직선 $y=x+1$과 만나지 않으려면 기울기가 같아야 하므로

$\frac{1}{2b}=1$ $\quad\therefore b=\frac{1}{2}$

한편, 점 $(a,\ b)$가 포물선 $y^2=x$ 위의 점이므로

$b^2=a$ $\quad\therefore a=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$\therefore ab=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

정답_ ①

137

$y^2=12x=4\times3\times x$에서 $p=3$이므로 포물선 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$by=2\times3\times(x+a)$ $\quad\therefore y=\frac{6}{b}x+\frac{6a}{b}$

이 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 30°이므로

$\frac{6}{b}=\tan 30^\circ,\ \frac{6}{b}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad\therefore b=6\sqrt{3}$

한편, 점 $(a,\ b)$가 포물선 $y^2=12x$ 위의 점이므로

$b^2=12a,\ 108=12a$ $\quad\therefore a=9$

$\therefore ab=54\sqrt{3}$

정답_ ⑤

138

$y^2=4x=4\times1\times x$에서 $p=1$이므로 포물선 위의 점 $\mathrm{A}(4,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$4y=2(x+4)$ $\quad\therefore y=\frac{1}{2}x+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 x축과 만나는 점은 $\mathrm{C}(-4,\ 0)$

포물선 $y^2=4x$의 준선의 방정식은 $x=-1$이므로 준선 $x=-1$과 직선 ㉠과의 교점은 $\mathrm{B}\left(-1,\ \frac{3}{2}\right)$

준선 $x=-1$과 x축과의 교점은 $\mathrm{D}(-1,\ 0)$

따라서 삼각형 BCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\{-1-(-4)\}\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$

정답_ ③

139

점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라고 하면 $H(0, y_1)$

$x^2=4y=4\times1\times y$에서 $p=1$이므로 포물선 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$x_1x=2\times1\times(y+y_1)$ $\therefore y=\dfrac{x_1}{2}x-y_1$

이 직선의 y절편은 $-y_1$이므로 점 Q의 좌표는 $(0, -y_1)$

$\therefore \dfrac{\overline{QO}}{\overline{OH}}=\dfrac{y_1}{y_1}=1$ 정답_③

140

포물선 위의 점 (a, b)에서 직선 $x-y+2=0$까지의 거리가 최소인 경우는 점 (a, b)에서의 접선이 직선 $x-y+2=0$과 평행할 때이다.

$y^2=-x=4\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)\times x$에서 $p=-\dfrac{1}{4}$이므로 포물선 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$by=2\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)\times(x+a)$ $\therefore y=-\dfrac{1}{2b}x-\dfrac{a}{2b}$ …… ㉠

접선 ㉠이 직선 $x-y+2=0$, 즉 $y=x+2$와 평행해야 하므로

$-\dfrac{1}{2b}=1$ $\therefore b=-\dfrac{1}{2}$

한편, 점 (a, b)가 포물선 $y^2=-x$ 위의 점이므로

$b^2=-a, -a=\dfrac{1}{4}$ $\therefore a=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore a+b=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{4}$ 정답_②

141

접점의 좌표를 (a, b)라고 하자.

$y^2=-4x=4\times(-1)\times x$에서 $p=-1$이므로 포물선 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$by=2\times(-1)\times(x+a)$ $\therefore y=-\dfrac{2}{b}x-\dfrac{2a}{b}$

이 접선이 점 $(2, -1)$을 지나므로

$-1=-\dfrac{4}{b}-\dfrac{2a}{b}$ $\therefore b=2a+4$ …… ㉠

한편, 점 (a, b)가 포물선 $y^2=-4x$ 위의 점이므로

$b^2=-4a$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(2a+4)^2=-4a, 4a^2+20a+16=0$

$a^2+5a+4=0, (a+1)(a+4)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=-4$

㉠에 의해 $a=-1$일 때 $b=2$, $a=-4$일 때 $b=-4$이므로 접선의 기울기는 -1 또는 $\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 모든 직선의 기울기의 합은

$-1+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$ 정답_④

다른 풀이

$y^2=-4x=4\times(-1)\times x$에서 $p=-1$이므로 접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은

$y=mx-\dfrac{1}{m}$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(2, -1)$을 지나므로

$-1=2m-\dfrac{1}{m}$

양변에 m을 곱하여 정리하면

$2m^2+m-1=0, (m+1)(2m-1)=0$

$\therefore m=-1$ 또는 $m=\dfrac{1}{2}$

따라서 모든 직선의 기울기의 합은

$-1+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

142

접점의 좌표를 (a, b)라고 하자.

$y^2=6x=4\times\dfrac{3}{2}\times x$에서 $p=\dfrac{3}{2}$이므로 포물선 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$by=2\times\dfrac{3}{2}\times(x+a)$ $\therefore y=\dfrac{3}{b}x+\dfrac{3a}{b}$

이 접선이 점 $(-2, 2)$를 지나므로

$2=-\dfrac{6}{b}+\dfrac{3a}{b}, 2b=3a-6$

$\therefore b=\dfrac{3a-6}{2}$ …… ㉠

한편, 점 (a, b)가 포물선 $y^2=6x$ 위의 점이므로

$b^2=6a$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

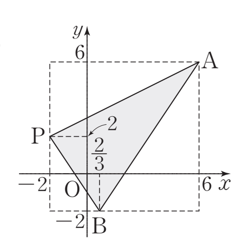
$\left(\dfrac{3a-6}{2}\right)^2=6a, \dfrac{9a^2-36a+36}{4}=6a$

$9a^2-60a+36=0, 3a^2-20a+12=0, (a-6)(3a-2)=0$

$\therefore a=6$ 또는 $a=\dfrac{2}{3}$

㉠에 의해 $a=6$일 때 $b=6$, $a=\dfrac{2}{3}$일 때 $b=-2$이므로

세 점 $P(-2, 2), A(6, 6), B\left(\dfrac{2}{3}, -2\right)$에 대하여 삼각형 PAB의 넓이는 오른쪽 그림에서 알 수 있듯이 사각형의 넓이에서 세 개의 삼각형의 넓이를 뺀 것과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$8\times8-\left(\dfrac{1}{2}\times8\times4+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8}{3}\times4+\dfrac{1}{2}\times8\times\dfrac{16}{3}\right)$

$=64-\left(16+\dfrac{16}{3}+\dfrac{64}{3}\right)$

$=\dfrac{64}{3}$ 정답_②

143

$y^2=8x=4\times2x$에서 $p=2$이므로 접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은

$y=mx+\frac{2}{m}$ ······ ㉠

이 직선이 점 $(a,\ 4)$를 지나므로

$4=ma+\frac{2}{m}$

양변에 m을 곱하여 정리하면

$am^2-4m+2=0$

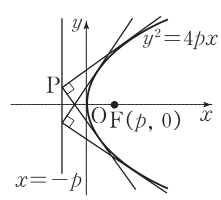
이 m에 대한 이차방정식의 두 근이 두 접선의 기울기이고 두 접선은 서로 수직이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\frac{2}{a}=-1 \qquad \therefore a=-2$

정답_ ②

참고

포물선 $y^2=4px$ 밖의 한 점 P에서 포물선에 그은 두 접선이 수직일 때, 점 P는 포물선의 준선 $x=-p$ 위에 있다.



144

(1) $a^2=3,\ b^2=2$이므로 기울기가 2인 접선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{3\times2^2+2} \qquad \therefore y=2x\pm\sqrt{14}$

(2) $4x^2+y^2=12$에서 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}=1$

따라서 $a^2=3,\ b^2=12$이므로 기울기가 -2인 접선의 방정식은 $y=-2x\pm\sqrt{3\times(-2)^2+12}$

$\therefore y=-2x\pm2\sqrt{6}$

정답_ (1) $y=2x\pm\sqrt{14}$ (2) $y=-2x\pm2\sqrt{6}$

145

$x^2+4y^2=5$에서 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{\frac{5}{4}}=1$

따라서 $a^2=5,\ b^2=\frac{5}{4}$이므로 기울기가 -1인 접선의 방정식은

$y=-x\pm\sqrt{5\times(-1)^2+\frac{5}{4}},\ y=-x\pm\frac{5}{2}$

$\therefore 2x+2y\pm5=0$

따라서 $m=2,\ n=2$이므로 $mn=4$

정답_ ④

146

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$인 직선의 기울기는 $\tan45°=1$

$x^2+2y^2=8$에서 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

즉, $a^2=8,\ b^2=4$이므로 기울기가 1인 접선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{8\times1^2+4} \qquad \therefore y=x\pm2\sqrt{3}$

따라서 두 접선의 y절편은 각각 $-2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}$이므로 그 곱은

$(-2\sqrt{3})\times(2\sqrt{3})=-12$

정답_ ①

147

$4x^2+9y^2=36$에서 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

즉, $a^2=9,\ b^2=4$이므로 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{9m^2+4}$

$\therefore \mathrm{A}\left(\mp\frac{\sqrt{9m^2+4}}{m},\ 0\right),\ \mathrm{B}(0,\ \pm\sqrt{9m^2+4})$ (복호동순)

따라서 선분 AB의 길이는

$\sqrt{\left\{0-\left(\mp\frac{\sqrt{9m^2+4}}{m}\right)\right\}^2+(\pm\sqrt{9m^2+4}-0)^2}$

$=\sqrt{\frac{9m^2+4}{m^2}+(9m^2+4)}$

$=\sqrt{9m^2+\frac{4}{m^2}+13}$

이때, $9m^2>0,\ \frac{4}{m^2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$9m^2+\frac{4}{m^2}+13\ge2\sqrt{9m^2\times\frac{4}{m^2}}+13=25$

$\left(\text{단, 등호는 } 9m^2=\frac{4}{m^2}\text{, 즉 } m^2=\frac{2}{3}\text{일 때 성립한다.}\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{9m^2+\frac{4}{m^2}+13}\ge\sqrt{25}=5$

따라서 선분 AB의 길이의 최솟값은 5이다.

정답_ ⑤

참고

산술평균과 기하평균의 관계

$a>0,\ b>0$일 때, $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

148

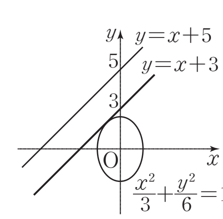
$a^2=3,\ b^2=6$이므로 기울기가 1인 접선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{3\times1^2+6}$

$\therefore y=x\pm3$

오른쪽 그림에서 알 수 있듯이 구하는 최솟값은 평행한 두 직선 $y=x+5$와 $y=x+3$ 사이의 거리와 같다.

따라서 직선 $y=x+3$ 위의 점 $(0,\ 3)$에서 직선 $y=x+5$, 즉 $x-y+5=0$ 사이의 거리를 구하면

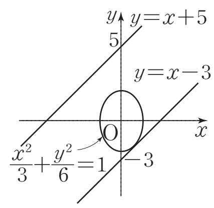


$\frac{|-3+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

정답_ ①

보충 설명

타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점과 직선 $y=x+5$ 사이의 거리의 최댓값은 두 직선 $y=x+5$와 $y=x-3$ 사이의 거리와 같다.



참고

평행한 두 직선 사이의 거리는 한 직선 위의 점과 나머지 한 직선 사이의 거리와 같다.

149

타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(3, 1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{3x}{12}+\frac{y}{4}=1$, $x+y=4$ $\quad\therefore y=-x+4$ 정답_③

다른 풀이

음함수의 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수도 있다.

$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}y\times\frac{dy}{dx}=0$ $\quad\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{3y}$

따라서 타원 위의 점 $(3, 1)$에서의 접선의 기울기는

$-\frac{3}{3\times1}=-1$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=-(x-3)$ $\quad\therefore y=-x+4$

150

점 $(2, 2)$가 타원 $\frac{x^2}{k}+\frac{y^2}{2k}=1$ 위의 점이므로

$\frac{4}{k}+\frac{4}{2k}=1$, $\frac{12}{2k}=1$ $\quad\therefore k=6$

즉, 주어진 타원은 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}=1$이므로 이 타원 위의 점 $(2, 2)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{2x}{6}+\frac{2y}{12}=1$, $2x+y=6$ $\quad\therefore y=-2x+6$

따라서 $a=-2$, $b=6$이므로 $a+b=4$ 정답_④

151

타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은

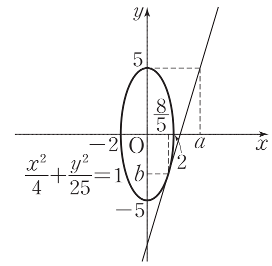
$\frac{\sqrt{2}x}{4}+\frac{\sqrt{3}y}{6}=1$

이 접선의 x절편은 $2\sqrt{2}$, y절편은 $2\sqrt{3}$이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{3}=2\sqrt{6}$ 정답_②

152

주어진 조건을 그림으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



점 $\left(\frac{8}{5}, b\right)$가 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ 위의 점이므로

$\frac{\left(\frac{8}{5}\right)^2}{4}+\frac{b^2}{25}=1$, $\frac{16}{25}+\frac{b^2}{25}=1$

$b^2=9$ $\quad\therefore b=-3$ ($\because b<0$)

타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ 위의 점 $\left(\frac{8}{5}, -3\right)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{\frac{8}{5}x}{4}+\frac{-3y}{25}=1$, $\frac{2}{5}x-\frac{3}{25}y=1$

$\therefore y=\frac{10}{3}x-\frac{25}{3}$

이 접선이 점 $(a, 5)$를 지나므로

$5=\frac{10}{3}a-\frac{25}{3}$, $10a=40$ $\quad\therefore a=4$

$\therefore a+b=4+(-3)=1$ 정답_②

153

타원 $4x^2+y^2=20$ 즉, $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{20}=1$ 위의 두 점 $(-1, 4)$, $(-1, -4)$에서 그은 접선의 방정식은 각각

$-\frac{x}{5}+\frac{4y}{20}=1$, $\frac{-x}{5}-\frac{4y}{20}=1$에서

$\therefore y=x+5$, $y=-x-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=-5$, $y=0$이므로 두 직선의 교점의 좌표는 $\mathrm{P}(-5, 0)$

한편, 두 직선 $y=x+5$, $y=-x-5$의 y절편은 각각 5, -5이므로 $\mathrm{A}(0, 5)$, $\mathrm{B}(0, -5)$

따라서 삼각형 ABP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times5\times\{5-(-5)\}=25$ 정답_④

154

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$에서 $a^2=16$, $b^2=12$이므로

$\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$으로 놓으면

$c^2=a^2-b^2=16-12=4$ $\quad\therefore c=2$ ($\because c>0$)

즉, 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(2, 0)$, $\mathrm{F}'(-2, 0)$

타원 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{2x}{16}+\frac{3y}{12}=1$ $\quad\therefore x+2y-8=0$

점 $\mathrm{F}(2, 0)$에서 직선 $x+2y-8=0$에 이르는 거리는

$d_1=\frac{|1\times2+2\times0-8|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

점 $F'(-2, 0)$에서 직선 $x+2y-8=0$에 이르는 거리는

$$d_2=\frac{|1\times(-2)+2\times0-8|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

$$\therefore d_1+d_2=\frac{6\sqrt{5}}{5}+2\sqrt{5}=\frac{16\sqrt{5}}{5}$$

따라서 $p=16, q=5$이므로 $p+q=21$ 정답_ ②

참고

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$에서 $c^2=a^2-b^2$ $(c>0)$이고 초점의 좌표는 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$이다.

155

점 P의 좌표를 (x_1, y_1) $(x_1>0, y_1>0)$이라고 하면

$H(x_1, 0)$ $\therefore \overline{OH}=x_1$

타원 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{25}+\frac{y_1y}{9}=1$$

이 접선의 x절편은 $x=\frac{25}{x_1}$이므로 $\overline{OQ}=\frac{25}{x_1}$

$$\therefore \overline{OH}\times\overline{OQ}=x_1\times\frac{25}{x_1}=25$$ 정답_ ④

156

주어진 타원의 중심의 좌표가 $(1, -2)$이므로 중심이 원점이 되도록 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$2x^2+y^2=3$ …… ㉠

이때, 점 $(2, -1)$도 같은 방법으로 평행이동하면

$(2-1, -1+2)$, 즉 $(1, 1)$이고, 이 점이 타원 ㉠ 위의 점이므로

접선의 방정식은 $\frac{2x}{3}+\frac{y}{3}=1$, 즉

$2x+y=3$ …… ㉡

구하는 직선은 접선 ㉡을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로

$2(x-1)+(y+2)=3$ $\therefore y=-2x+3$

따라서 y절편은 3이다. 정답_ ②

157

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라고 하면 이 점에서의 접선의 방정식은

$3x_1x+4y_1y=16$ $\therefore y=-\frac{3x_1}{4y_1}x+\frac{4}{y_1}$

이 접선이 점 $(4, 2)$를 지나므로

$2=-\frac{3x_1}{4y_1}\times4+\frac{4}{y_1}$, $2y_1=4-3x_1$

$\therefore y_1=-\frac{3}{2}x_1+2$ …… ㉠

한편, 점 (x_1, y_1)이 타원 $3x^2+4y^2=16$ 위의 점이므로

$3x_1^2+4y_1^2=16$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$$3x_1^2+4\left(-\frac{3}{2}x_1+2\right)^2=16$$

$3x_1^2+9x_1^2-24x_1+16=16$

$12x_1(x_1-2)=0$ $\therefore x_1=0$ 또는 $x_1=2$

$x_1=0$일 때 $y_1=2$, $x_1=2$일 때 $y_1=-1$이므로 접선의 방정식은

$y=2$ 또는 $y=\frac{3}{2}x-4$

따라서 두 접선의 기울기의 합은

$0+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ 정답_ $\frac{3}{2}$

다른 풀이

$3x^2+4y^2=16$에서 $\frac{x^2}{\frac{16}{3}}+\frac{y^2}{4}=1$

$a^2=\frac{16}{3}$, $b^2=4$이므로 접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{\frac{16}{3}m^2+4}$

이 직선이 점 $(4, 2)$를 지나므로

$2=4m\pm\sqrt{\frac{16}{3}m^2+4}$, $2-4m=\pm\sqrt{\frac{16}{3}m^2+4}$

양변을 제곱하면

$4-16m+16m^2=\frac{16}{3}m^2+4$, $\frac{32}{3}m^2-16m=0$

$2m^2-3m=0$, $m(2m-3)=0$

$\therefore m=0$ 또는 $m=\frac{3}{2}$

따라서 두 접선의 기울기의 합은 $\frac{3}{2}$이다.

158

점 $(-2, 0)$에서 타원 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$에 그은 접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{2m^2+1}$

이 직선이 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$0=-2m\pm\sqrt{2m^2+1}$, $2m=\pm\sqrt{2m^2+1}$

양변을 제곱하면

$4m^2=2m^2+1$, $m^2=\frac{1}{2}$ $\therefore m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x\pm\sqrt{2}$ (복호동순)

$\therefore \pm x-\sqrt{2}y\pm2=0$

이 직선이 직선 $ax+by+2=0$과 일치하므로

$a=\pm1$, $b=-\sqrt{2}$

$\therefore a^2+b^2=(\pm1)^2+(-\sqrt{2})^2=3$ 정답_ 3

159

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서 타원 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$에 그은 접선의 기울기를 m

이라고 하면 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{5m^2+9}$

이 직선이 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 지나므로

$b=ma\pm\sqrt{5m^2+9},\ b-ma=\pm\sqrt{5m^2+9}$

양변을 제곱하면

$b^2-2abm+a^2m^2=5m^2+9$

$\therefore\ (a^2-5)m^2-2abm+b^2-9=0$

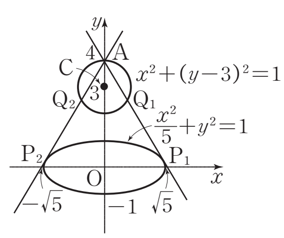
이 m에 대한 이차방정식의 두 근이 두 접선의 기울기이다.

이때, 두 접선이 서로 수직이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\dfrac{b^2-9}{a^2-5}=-1 \qquad \therefore\ a^2+b^2=14$

정답_ 14

160



오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(0,\ 4)$에서 타원 $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$에 그은 두 접선의 접점을 각각 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2$라 하고 직선 $\mathrm{AP}_1,\ \mathrm{AP}_2$가 원 $x^2+(y-3)^2=1$과 만나는 A가 아닌 점을 각각 $\mathrm{Q}_1,\ \mathrm{Q}_2$라고 하자.

그러면 점 P가 타원 위를 움직일 때, 점 Q는 원 위의 점 Q_1에서 점 Q_2까지 움직인다.

점 $\mathrm{A}(0,\ 4)$에서 타원 $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$에 그은 접선의 기울기를 m

이라고 하면 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{5m^2+1}$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(0,\ 4)$를 지나므로 $4=\pm\sqrt{5m^2+1}$

양변을 제곱하면

$16=5m^2+1,\ m^2=3 \qquad \therefore\ m=\pm\sqrt{3}$

즉, 두 접선의 방정식은 $y=\sqrt{3}x+4,\ y=-\sqrt{3}x+4$

이때, 직선 $y=\sqrt{3}x+4$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 60°이고 두 직선 $y=\sqrt{3}x+4$와 $y=-\sqrt{3}x+4$는 y축에 대하여 대칭이므로

$\angle\mathrm{AP}_2\mathrm{P}_1=\angle\mathrm{AP}_1\mathrm{P}_2=60^\circ$

$\therefore\ \angle\mathrm{P}_2\mathrm{AP}_1=180^\circ-(60^\circ+60^\circ)=60^\circ$

원 $x^2+(y-3)^2=1$의 중심을 C라고 하면

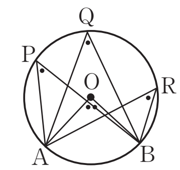
$\angle\mathrm{Q}_2\mathrm{CQ}_1=2\angle\mathrm{Q}_2\mathrm{AQ}_1=2\times60^\circ=120^\circ$

이므로 점 Q가 나타내는 도형의 길이는 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 120°인 부채꼴의 호의 길이이므로

$2\pi\times1\times\dfrac{120^\circ}{360^\circ}=\dfrac{2}{3}\pi$

정답_ ④

참고



한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 일정하고 그 크기는 중심각의 크기의 $\dfrac{1}{2}$이다.

즉, $\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{AQB}=\angle\mathrm{ARB}$이고

$\angle\mathrm{APB}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}$이다.

161

(1) $a^2=5,\ b^2=9$이므로 기울기가 2인 접선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{5\times2^2-9} \qquad \therefore\ y=2x\pm\sqrt{11}$

(2) $x^2-2y^2-12=0$에서 $x^2-2y^2=12$

$\therefore\ \dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{6}=1$

따라서 $a^2=12,\ b^2=6$이므로 기울기가 -1인 접선의 방정식은

$y=-x\pm\sqrt{12+(-1)^2-6}$

$\therefore\ y=-x\pm\sqrt{6}$

정답_ (1) $y=2x\pm\sqrt{11}$ (2) $y=-x\pm\sqrt{6}$

162

$a^2=1,\ b^2=k$이므로 기울기가 2인 접선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{1\times2^2-k} \qquad \therefore\ y=2x\pm\sqrt{4-k}$

이 직선이 점 $(2,3)$을 지나므로

$3=4\pm\sqrt{4-k},\ -1=\pm\sqrt{4-k}$

양변을 제곱하면

$1=4-k \qquad \therefore\ k=3$

정답_ ②

163

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60°인 직선의 기울기는

$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

$4x^2-3y^2=12$에서 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{4}=1$

$a^2=3,\ b^2=4$이므로 기울기가 $\sqrt{3}$인 접선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x\pm\sqrt{3\times(\sqrt{3})^2-4}$

$\therefore\ y=\sqrt{3}x\pm\sqrt{5}$

따라서 $m=\sqrt{3},\ k=\pm\sqrt{5}$이므로

$m^2+k^2=(\sqrt{3})^2+(\pm\sqrt{5})^2=8$

정답_ ④

164

$a^2=9,\ b^2=4$이므로 기울기가 1인 접선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{9\times1^2-4} \qquad \therefore\ y=x\pm\sqrt{5}$

따라서 두 직선 $y=x-\sqrt{5}$와 $y=x+\sqrt{5}$ 사이의 거리는 직선 $y=x-\sqrt{5}$ 위의 한 점 $(0,\ -\sqrt{5})$에서 직선 $y=x+\sqrt{5}$, 즉 $x-y+\sqrt{5}=0$까지의 거리와 같으므로

$\dfrac{|1\times0-1\times(-\sqrt{5})+\sqrt{5}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\sqrt{10}$

정답_ ④

165

쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 위의 점 $(2,1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{2x}{2}-y=1 \qquad \therefore y=x-1$

따라서 구하는 y절편은 -1이다. 정답_ ②

다른 풀이

음함수의 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수도 있다.

$\frac{x^2}{2}-y^2=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$x-2y\times\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{x}{2y}$

쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 위의 점 $(2,1)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{2}{2\times1}=1$이므로 접선의 방정식은

$y-1=x-2 \qquad \therefore y=x-1$

따라서 구하는 y절편은 -1이다.

166

쌍곡선 $ax^2-by^2=16$ 위의 점 $(2,4)$에서의 접선의 방정식은

$2ax-4by=16 \qquad \therefore y=\frac{a}{2b}x-\frac{4}{b}$

이 접선의 기울기가 3이므로

$\frac{a}{2b}=3 \qquad \therefore a=6b$ …… ㉠

한편, 점 $(2,4)$가 쌍곡선 위의 점이므로

$4a-16b=16$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=12, b=2$

$\therefore ab=24$ 정답_ ③

167

쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{10}=1$ 위의 점 $(\sqrt{a},\sqrt{b})$에서의 접선의 방정식은

$\frac{\sqrt{a}x}{10}-\frac{\sqrt{b}y}{10}=1$

이 접선이 점 $(5,5)$를 지나므로

$\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{\sqrt{b}}{2}=1 \qquad \therefore \sqrt{a}-\sqrt{b}=2$ …… ㉠

한편, 점 $(\sqrt{a},\sqrt{b})$는 쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{10}=1$ 위의 점이므로

$\frac{a}{10}-\frac{b}{10}=1 \qquad \therefore a-b=10$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a-b=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=2(\sqrt{a}+\sqrt{b})=10$

$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{b}=5$ 정답_ ①

168

쌍곡선 $3x^2-2y^2=1$ 위의 점 $(1,1)$에서의 접선의 방정식은

$3x-2y=1 \qquad \therefore y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{2}{3}$이므로 이 직선의 방정식을 $y=-\frac{2}{3}x+k$ (k는 상수)로 놓자.

이 직선이 점 $(3,5)$를 지나므로

$5=-2+k \qquad \therefore k=7$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-\frac{2}{3}x+7$이므로 x절편을 구하면

$\frac{2}{3}x=7 \qquad \therefore x=\frac{21}{2}$ 정답_ $\frac{21}{2}$

169

쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{18}=-1$ 위의 점 $(-3,6)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{-3x}{9}-\frac{6y}{18}=-1 \qquad \therefore y=-x+3$

두 직선의 방정식 $y=-x+3$, $y=3x+7$을 연립하여 풀면

$x=-1, y=4$

즉, 교점의 좌표가 $(-1,4)$이므로 $p=-1, q=4$

$\therefore p+q=3$ 정답_ ①

170

쌍곡선 $4x^2-y^2=a$의 점근선의 방정식은 $y=\pm2x$

점 $(1,\ b)$는 쌍곡선 $4x^2-y^2=a$ 위의 점이므로

$4-b^2=a$ …… ㉠

쌍곡선 $4x^2-y^2=a$ 위의 점 $(1,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$4x-by=a \qquad \therefore y=\frac{4}{b}x-\frac{a}{b}$

이 직선이 한 점근선과 수직이고 $b>0$이므로 직선 $y=\frac{4}{b}x-\frac{a}{b}$는 점근선 $y=-2x$와 수직이다.

즉, $\frac{4}{b}\times(-2)=-1$이므로 $b=8$

이것을 ㉠에 대입하면

$a=4-8^2=-60$

$\therefore a+b=-52$ 정답_ -52

171

쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{A}(4,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{4x}{8}-y=1 \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x-1$

$\therefore \mathrm{B}(2,\ 0)$

$\sqrt{8+1}=3$이므로 쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-y^2=1$의 두 초점의 좌표는

$(3,\ 0),\ (-3,\ 0)$ $\quad\therefore$ $F(3,\ 0)$

$A(4,\ 1)$, $B(2,\ 0)$, $F(3,\ 0)$에 대하여

따라서 삼각형 FAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(3-2)\times1=\frac{1}{2}$

정답_ ②

172

쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점 $P(5\sqrt{2},\ 4)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{5\sqrt{2}x}{25}-\frac{4y}{16}=1$ $\quad\therefore$ $y=\frac{4\sqrt{2}}{5}x-4$

이 접선의 x절편을 구하면

$\frac{4\sqrt{2}}{5}x=4$ $\quad\therefore$ $x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

즉, 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$이므로 삼각형 POQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\sqrt{2}\times4=5\sqrt{2}$

정답_ ⑤

173

쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{16}=-1$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{ax}{12}-\frac{by}{16}=-1$ $\quad\therefore$ $4ax-3by=-48$

이 접선의 x절편, y절편은 각각 $-\frac{12}{a}$, $\frac{16}{b}$이므로 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형은 밑변의 길이가 $\frac{12}{a}$, 높이가 $\frac{16}{b}$인 삼각형이다.

이 삼각형의 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{12}{a}\times\frac{16}{b}=12$

$\therefore$ $ab=8$

정답_ ③

174

쌍곡선 $x^2-y^2=-3$ 위의 점 $(1,\ -2)$에서의 접선의 방정식은

$x+2y=-3$ $\quad\therefore$ $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

쌍곡선 $x^2-y^2=-3$, 즉 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=-1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm x$

접선 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$과 두 점근선 $y=x$, $y=-x$의 교점의 좌표는 각각 $(-1,\ -1)$, $(3,\ -3)$이다.

따라서 선분 AB의 길이는

$\sqrt{\{3-(-1)\}^2+\{-3-(-1)\}^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

정답_ ②

175

쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{ax}{12}-\frac{by}{8}=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 타원 $\frac{(x-2)^2}{4}+y^2=1$의 넓이를 이등분하므로 직선 ㉠이 타원의 중심 $(2,\ 0)$을 지난다.

즉, $\frac{2a}{12}-\frac{b\times0}{8}=1$이므로

$\frac{a}{6}=1$ $\quad\therefore$ $a=6$

한편, 점 $(a,\ b)$, 즉 점 $(6,\ b)$는 쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점이므로

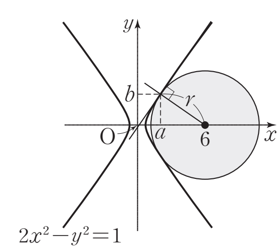
$\frac{6^2}{12}-\frac{b^2}{8}=1$, $3-\frac{b^2}{8}=1$, $\frac{b^2}{8}=2$ $\quad\therefore$ $b^2=16$

$\therefore$ $a^2+b^2=36+16=52$

정답_ 52

176

오른쪽 그림과 같이 원의 반지름의 길이를 r, 한 접점의 좌표를 $(a,\ b)$ $(b>0)$라고 하면 쌍곡선 $2x^2-y^2=1$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은



$2ax-by=1$

$\therefore$ $y=\frac{2a}{b}x-\frac{1}{b}$

한편, 이 접선에 수직이고 점 $(a,\ b)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-b=-\frac{b}{2a}(x-a)$ $\quad\therefore$ $y=-\frac{b}{2a}x+\frac{3}{2}b$

이 직선이 점 $(6,\ 0)$을 지나므로

$0=-\frac{3b}{a}+\frac{3}{2}b$, $\frac{3}{a}b=\frac{3}{2}b$ $\quad\therefore$ $a=2$ $(\because b>0)$

또한, 점 $(a,\ b)$, 즉 점 $(2,\ b)$가 쌍곡선 $2x^2-y^2=1$ 위의 점이므로

$8-b^2=1$, $b^2=7$ $\quad\therefore$ $b=\sqrt{7}$ $(\because b>0)$

즉, 접점의 좌표는 $(2,\ \sqrt{7})$이고 반지름의 길이는 두 점 $(2,\ \sqrt{7})$, $(6,\ 0)$ 사이의 거리와 같으므로

$\sqrt{(6-2)^2+(0-\sqrt{7})^2}=\sqrt{23}$

따라서 원의 넓이는 $\pi\times(\sqrt{23})^2=23\pi$

정답_ ④

177

접점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면 접선의 방정식은

$4ax-by=4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로

$-4a-b=4$ $\quad\therefore$ $b=-4a-4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

또, 점 (a, b)는 쌍곡선 $4x^2-y^2=4$ 위의 점이므로

$4a^2-b^2=4$ ...... ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$4a^2-(-4a-4)^2=4,\ 12a^2+32a+20=0$

$3a^2+8a+5=0,\ (a+1)(3a+5)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=-\frac{5}{3}$

㉡에 의해

$a=-1$일 때 $b=0$, $a=-\frac{5}{3}$일 때 $b=\frac{8}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$-4x=4$ 또는 $4\times\left(-\frac{5}{3}\right)x-\frac{8}{3}y=4$

$\therefore x=-1$ 또는 $5x+2y+3=0$

정답_ $x=-1$ 또는 $5x+2y+3=0$

178

접점의 좌표를 (a, b)라고 하면 접선의 방정식은

$ax-by=4$

이 직선이 점 $(-1, 1)$을 지나므로

$-a-b=4 \qquad \therefore a+b=-4$ ...... ㉠

또, 점 (a, b)는 쌍곡선 $x^2-y^2=4$ 위의 점이므로

$a^2-b^2=4,\ (a+b)(a-b)=4$

$-4(a-b)=4\ (\because$ ㉠$) \qquad \therefore a-b=-1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{5}{2},\ b=-\frac{3}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}y=4$

$\therefore 5x-3y+8=0$

이 직선이 직선 $mx+ny+8=0$과 일치하므로

$m=5,\ n=-3 \qquad \therefore mn=-15$

정답_ -15

179

접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{5m^2-4}$

이 직선이 점 $\mathrm{P}(a, b)$를 지나므로

$b=am\pm\sqrt{5m^2-4}$

$b-am=\pm\sqrt{5m^2-4}$

양변을 제곱하면

$b^2-2abm+a^2m^2=5m^2-4$

$\therefore (a^2-5)m^2-2abm+b^2+4=0$

이 m에 대한 이차방정식의 두 근이 두 접선의 기울기이고 두 접선은 서로 수직이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\frac{b^2+4}{a^2-5}=-1 \qquad \therefore a^2+b^2=1$

따라서 점 $\mathrm{P}(a, b)$가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원이므로 그 넓이는

$\pi\times1^2=\pi$

정답_ ②

180

$x^2-8y^2=8$에서 $\frac{x^2}{8}-y^2=1$

접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{8m^2-1}$

이 직선이 점 $(2, 2)$를 지나므로

$2=2m\pm\sqrt{8m^2-1},\ 2-2m=\pm\sqrt{8m^2-1}$

양변을 제곱하면

$4-8m+4m^2=8m^2-1 \qquad \therefore 4m^2+8m-5=0$

접선의 기울기 m_1과 m_2는 이 이차방정식의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의해

$m_1+m_2=-\frac{8}{4}=-2,\ m_1m_2=-\frac{5}{4}$

$\therefore {m_1}^2+{m_2}^2=(m_1+m_2)^2-2m_1m_2$

$=(-2)^2-2\times\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{13}{2}$

정답_ ④

181

두 접점 P, Q의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라고 하면 두 점 P, Q에서의 접선의 방정식은 각각

$2x_1x-y_1y=4,\ 2x_2x-y_2y=4$

이 두 직선이 모두 점 $(1, 1)$을 지나므로

$2x_1-y_1=4,\ 2x_2-y_2=4$

위 두 식에서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$2x-y=4$

임을 알 수 있다.

따라서 $\mathrm{A}(2, 0)$, $\mathrm{B}(0, -4)$이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times4=4$

정답_ 4

182

기울기가 -1인 직선의 방정식을 $y=-x+k$ (k는 상수)로 놓고 $x^2=4y$에 대입하면

$x^2=4(-x+k) \qquad \therefore x^2+4x-4k=0$ ...... ㉠

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(-4k)=4+4k>0$

$\therefore k>-1$ .... ❶

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(a, -a+k)$, $(b, -b+k)$라고 하면 a, b는 이차방정식 ㉠의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의해

$a+b=-4$ .... ❷

따라서 선분 AB의 중점의 좌표를 (x, y)라고 하면

$$x=\frac{a+b}{2}=\frac{-4}{2}=-2,\ y=\frac{-(a+b)+2k}{2}=2+k$$

이때, $k>-1$이므로

$y=2+k>1$

따라서 선분 AB의 중점의 자취의 방정식은

$x=-2\ (y>1)$ ······ ❸

정답_ $x=-2\ (y>1)$

단계	채점 기준	비율
❶	직선의 방정식을 $y=-x+k$로 놓고 상수 k의 값의 범위 구하기	40%
❷	$a+b$의 값 구하기	20%
❸	선분 AB의 중점의 자취의 방정식 구하기	40%

183

$y^2=4x=4\times1\times x$에서 $p=1$이므로 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$에서의 접선의 방정식은

$by=2\times1\times(x+a)\qquad\therefore y=\frac{2}{b}x+\frac{2a}{b}$ ······ ❶

이 접선의 x절편을 구하면

$\frac{2}{b}x=-\frac{2a}{b}\qquad\therefore x=-a\ (\because b>0)$

즉, 점 Q의 좌표는 $(-a, 0)$이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=4\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{(a+a)^2+(b-0)^2}=4\sqrt{5},\ \sqrt{4a^2+b^2}=4\sqrt{5}$

양변을 제곱하면

$4a^2+b^2=80$ ······ ㉠

한편, 점 (a, b)가 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로

$b^2=4a$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$4a^2+4a-80=0,\ a^2+a-20=0$

$(a-4)(a+5)=0\qquad\therefore a=4\ (\because a>0)$

$a=4$를 ㉡에 대입하면

$b^2=16\qquad\therefore b=4\ (\because b>0)$ ······ ❷

$\therefore a^2+b^2=16+16=32$ ······ ❸

정답_ 32

단계	채점 기준	비율
❶	포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$에서의 접선의 방정식 구하기	30%
❷	a, b의 값 구하기	60%
❸	a^2+b^2의 값 구하기	10%

184

$y^2=6x=4\times\frac{3}{2}\times x$에서 $p=\frac{3}{2}$이므로 초점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ······ ❶

포물선 $y^2=6x$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$by=2\times\frac{3}{2}\times(x+a)$

$\therefore 3x-by+3a=0$ ······ ㉠

······ ❷

접선 ㉠과 이 접선에 평행하고 초점 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$을 지나는 직선 사이의 거리가 $\frac{3\sqrt{5}}{2}$이므로

$$\frac{\left|3\times\frac{3}{2}-b\times0+3a\right|}{\sqrt{3^2+(-b)^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{2},\ \frac{\frac{9}{2}+3a}{\sqrt{9+b^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{2}\ (\because a>0)$$

$2a+3=\sqrt{5}\sqrt{9+b^2}$ ······ ㉡

한편, 점 (a, b)가 포물선 $y^2=6x$ 위의 점이므로

$b^2=6a$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$2a+3=\sqrt{5}\sqrt{9+6a}$

양변을 제곱하면

$4a^2+12a+9=45+30a,\ 4a^2-18a-36=0$

$2a^2-9a-18=0,\ (a-6)(2a+3)=0$

$\therefore a=6\ (\because a>0)$

$a=6$을 ㉢에 대입하면

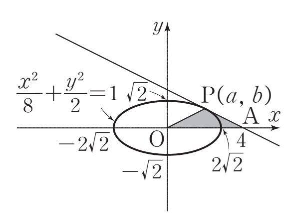
$b^2=36\qquad\therefore b=6\ (\because b>0)$ ······ ❸

따라서 점 P의 좌표는 $(6, 6)$이다. ······ ❹

정답_ $\mathrm{P}(6, 6)$

단계	채점 기준	비율
❶	포물선 $y^2=6x$의 초점의 좌표 구하기	10%
❷	포물선 $y^2=6x$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식 구하기	30%
❸	a, b의 값 구하기	50%
❹	점 P의 좌표 구하기	10%

185



오른쪽 그림과 같이 접점의 좌표를 $\mathrm{P}(a, b)$라고 하면 타원 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$\frac{ax}{8}+\frac{by}{2}=1$

$\therefore y=-\frac{a}{4b}x+\frac{2}{b}$ ······ ❶

이 접선이 점 $(4, 0)$을 지나므로

$\frac{a}{b}=\frac{2}{b}\qquad\therefore a=2\ (\because b>0)$

한편, 점 (a, b), 즉 점 $(2, b)$가 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{1}{2}+\frac{b^2}{2}=1,\ b^2=1\qquad\therefore b=1\ (\because b>0)$

$\therefore \mathrm{P}(2, 1)$ ······ ❷

따라서 삼각형 OAP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times1=2$ ······ ❸

정답_ 2

단계	채점 기준	비율
❶	타원 위의 점 P에서의 접선의 방정식 구하기	30%
❷	점 P의 좌표 구하기	50%
❸	삼각형 OAP의 넓이 구하기	20%

186

쌍곡선 $x^2-y^2=32$ 위의 점 $P(-6, 2)$에서의 접선의 방정식은

$-6x-2y=32 \qquad \therefore y=-3x-16$ …… ㉠

…… ❶

직선 OH는 접선 ㉠에 수직이므로 기울기는 $\frac{1}{3}$이고, 원점을 지나므로 직선 OH의 방정식은 $y=\frac{1}{3}x$ …… ㉡

이때, $\overline{OH}$의 길이는 원점과 직선 $y=-3x-16$, 즉 $3x+y+16=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{OH}=\frac{|3\times0+1\times0+16|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{16}{\sqrt{10}}$ …… ❷

한편, 점 Q의 좌표를 구하기 위하여 $y=\frac{1}{3}x$를 $x^2-y^2=32$에 대입하면

$x^2-\frac{1}{9}x^2=32, \frac{8}{9}x^2=32, x^2=36$

$\therefore x=6\ (\because x>0)$

$x=6$을 ㉡에 대입하면 $y=2$

즉, 점 Q의 좌표는 $(6, 2)$이므로

$\overline{OQ}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$ …… ❸

$\therefore \overline{OH}\times\overline{OQ}=\frac{16}{\sqrt{10}}\times2\sqrt{10}=32$ …… ❹

정답_ 32

단계	채점 기준	비율
❶	점 P에서의 접선의 방정식 구하기	10%
❷	$\overline{OH}$의 길이 구하기	40%
❸	$\overline{OQ}$의 길이 구하기	40%
❹	$\overline{OH}\times\overline{OQ}$의 값 구하기	10%

187

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(2\sqrt{3}, 1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{2\sqrt{3}x}{16}+\frac{y}{4}=1 \qquad \therefore y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+4$ …… ㉠

…… ❶

쌍곡선 $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=1$ 위의 점 $(2\sqrt{3}, 1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{2\sqrt{3}x}{a}-\frac{y}{b}=1 \qquad \therefore y=\frac{2b\sqrt{3}}{a}x-b$ …… ㉡

…… ❷

두 직선 ㉠, ㉡이 서로 수직이므로

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(\frac{2b\sqrt{3}}{a}\right)=-1 \qquad \therefore a=3b$ …… ㉢

한편, 점 $P(2\sqrt{3}, 1)$은 쌍곡선 $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=1$ 위의 점이므로

$\frac{(2\sqrt{3})^2}{a}-\frac{1^2}{b}=1 \qquad \therefore \frac{12}{a}-\frac{1}{b}=1$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=9, b=3$ …… ❸

$\therefore ab=27$ …… ❹

정답_ 27

단계	채점 기준	비율
❶	타원 위의 점에서의 접선의 방정식 구하기	20%
❷	쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식 구하기	20%
❸	a, b의 값 구하기	50%
❹	ab의 값 구하기	10%

188

ㄱ은 옳다.

$y^2=4x=4\times1\times x$에서 $p=1$이므로 $F(1,\ 0)$

포물선 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2\times1\times(x+x_1) \qquad \therefore y=\frac{2}{y_1}x+\frac{2x_1}{y_1}$

이 접선의 x절편을 구하면

$\frac{2}{y_1}x=-\frac{2x_1}{y_1} \qquad \therefore x=-x_1\ (\because y_1>0)$

즉, 점 T의 좌표는 $(-x_1, 0)$이므로 $\overline{TF}=1+x_1$

한편, 선분 PF의 길이는 점 P에서 준선 $x=-1$까지의 거리와 같으므로 $\overline{PF}=1+x_1$

$\therefore \overline{TF}=\overline{PF}$

ㄴ도 옳다.

$\angle PTF=\theta°$이고, $\overline{TF}=\overline{PF}$이므로

$\angle FPT=\angle PTF=\theta°$

ㄷ도 옳다.

점 $P(x_1, y_1)$이 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로

$y_1{}^2=4x_1$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $H(x_1, 0)$

$\overline{PH}=y_1=\sqrt{4x_1}=2\sqrt{x_1}$, $\overline{TH}=\overline{TO}+\overline{OH}=2x_1$이므로

$\tan\theta°=\frac{\overline{PH}}{\overline{TH}}=\frac{2\sqrt{x_1}}{2x_1}=\frac{1}{\sqrt{x_1}}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

다른 풀이

ㄷ은 옳다.

$\tan\theta°$는 접선의 기울기이므로 ㄱ에서

$\tan\theta°=\frac{2}{y_1}$

한편, $y_1{}^2=4x_1$이므로 $y_1=2\sqrt{x_1}\ (\because x_1>0, y_1>0)$

$\therefore \tan\theta°=\frac{2}{2\sqrt{x_1}}=\frac{1}{\sqrt{x_1}}$

189

꼭짓점이 원점이고 초점의 좌표가 $\left(\frac{1}{2}a_n, 0\right)$인 포물선의 방정식은

$y^2=4\times\frac{1}{2}a_nx \qquad \therefore y^2=2a_nx$

이 포물선 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2\times\frac{1}{2}a_n(x+x_1) \qquad \therefore y=\frac{a_n}{y_1}x+\frac{a_nx_1}{y_1}$ …… ㉠

직선 ㉠이 직선 $y=2nx+n+1$과 일치해야 하므로

$\frac{a_n}{y_1}=2n$에서 $y_1=\frac{a_n}{2n}$ …… ㉡

$\frac{a_nx_1}{y_1}=n+1$에서 $x_1=\frac{n+1}{a_n}y_1$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면 $x_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$ …… ㉣

점 (x_1, y_1)이 포물선 $y^2=2a_nx$ 위의 점이므로 $y_1^{\,2}=2a_nx_1$

이 식에 ㉡, ㉣을 대입하면

$\left(\frac{a_n}{2n}\right)^2=2a_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right), \frac{a_n^{\,2}}{4n^2}=a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$

포물선의 꼭짓점이 원점이므로 $\frac{1}{2}a_n\neq0$, 즉 $a_n\neq0$이므로

$\frac{a_n}{4n^2}=1+\frac{1}{n} \qquad \therefore a_n=4n^2+4n$

$\therefore a_1+a_2+a_3=(4\times1^2+4\times1)+(4\times2^2+4\times2)+(4\times3^2+4\times3)$

$=8+24+48=80$

정답_③

190

접점의 좌표를 (a, b)라고 하면 $x^2=4y=4\times1\times y$에서 $p=1$이므로 포물선 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$ax=2\times1\times(y+b) \qquad \therefore y=\frac{a}{2}x-b$

이 접선이 점 $\mathrm{P}(-1, -2)$를 지나므로

$-2=-\frac{a}{2}-b \qquad \therefore a+2b=4$ …… ㉠

한편, 점 (a, b)가 포물선 $x^2=4y$ 위의 점이므로

$a^2=4b \qquad \therefore b=\frac{a^2}{4}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a+\frac{a^2}{2}=4, a^2+2a-8=0, (a+4)(a-2)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=2$

㉡에 의해 $a=-4$일 때 $b=4$, $a=2$일 때 $b=1$이므로 접점의 좌표는 $(-4, 4)$, $(2, 1)$이다.

따라서 삼각형 APB의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{-1-4+2}{3}, \frac{-2+4+1}{3}\right) \qquad \therefore \mathrm{G}(-1, 1)$

즉, $m=-1$, $n=1$이므로 $m+n=0$

정답_③

191

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라고 하면 이 점에서의 접선의 방정식은

$9x_1x+5y_1y=45$ …… ㉠

이 접선이 점 $(1, 3)$을 지나므로

$9x_1+15y_1=45 \qquad \therefore y_1=-\frac{3}{5}x_1+3$ …… ㉡

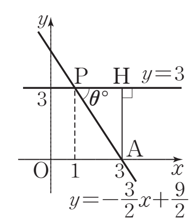
한편, 점 (x_1, y_1)이 타원 $9x^2+5y^2=45$ 위의 점이므로

$9x_1^{\,2}+5y_1^{\,2}=45$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x_1=0, y_1=3$ 또는 $x_1=\frac{5}{3}, y_1=2$

즉, 접점의 좌표가 $(0, 3)$, $\left(\frac{5}{3}, 2\right)$이므로 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은 $y=3$ 또는 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$



오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$와 x축의 교점을 A라 하고 점 A에서 직선 $y=3$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\mathrm{A}(3, 0)$, $\mathrm{H}(3, 3)$

따라서 직각삼각형 AHP에서

$\tan\theta°=\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{PH}}}=\frac{3}{3-1}=\frac{3}{2}$

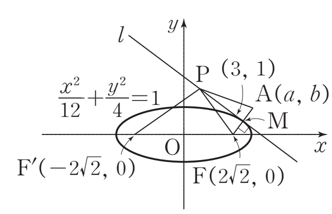
정답_③

192

$\sqrt{12-4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$이므로 두 초점을 $\mathrm{F}(2\sqrt{2}, 0)$, $\mathrm{F'}(-2\sqrt{2}, 0)$으로 놓자.

타원 위의 점 $(3, 1)$에서의 접선 l의 방정식은

$\frac{3x}{12}+\frac{y}{4}=1 \qquad \therefore y=-x+4$



$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}$의 최솟값을 구하기 위하여 위의 그림과 같이 초점 F의 직선 l에 대한 대칭점을 $\mathrm{A}(a, b)$라 하고, $\overline{\mathrm{AF}}$의 중점을 M이라고 하면 점 M의 좌표는 $\left(\frac{2\sqrt{2}+a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

이때, 점 M이 직선 l 위의 점이므로

$\frac{b}{2}=-\frac{2\sqrt{2}+a}{2}+4 \qquad \therefore a+b=8-2\sqrt{2}$ …… ㉠

또한, 직선 AF의 기울기는 $\frac{b}{a-2\sqrt{2}}$이고, 직선 AF는 직선 l과 수직이므로

$\frac{b}{a-2\sqrt{2}}=1 \qquad \therefore a-b=2\sqrt{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4, b=4-2\sqrt{2}$

$\therefore \mathrm{A}(4,\ 4-2\sqrt{2})$

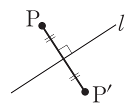
$\therefore \overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PF'}}\ (\because \overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PA}})$

$\qquad \geq \overline{\mathrm{AF'}}=\sqrt{(4+2\sqrt{2})^2+(4-2\sqrt{2})^2}=4\sqrt{3}$

따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{3}$이다. 정답_④

참고

점 P를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 고 하면



① 선분 PP′의 중점은 직선 l 위에 있다.

② 직선 PP′은 직선 l과 수직이다.

193

타원 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점 $(\sqrt{3},\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{\sqrt{3}x}{6}+\frac{y}{2}=1 \qquad \therefore \sqrt{3}x+3y-6=0$

$\sqrt{6-2}=2$에서 $\mathrm{F}(2,\ 0),\ \mathrm{F'}(-2,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AF}}=\frac{|\sqrt{3}\times 2+3\times 0-6|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}}=\frac{6-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$

$\overline{\mathrm{BF'}}=\frac{|\sqrt{3}\times(-2)+3\times 0-6|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}}=\frac{6+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1$

한편, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{FF'}}=4$이고, $\overline{\mathrm{CF'}}=\overline{\mathrm{AF}}$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BF'}}-\overline{\mathrm{CF'}}=\overline{\mathrm{BF'}}-\overline{\mathrm{AF}}=(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)=2$

직각삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$4+2+2\sqrt{3}=6+2\sqrt{3}$ 정답_⑤

194

점 P의 좌표를 $(a,\ b)\ (a<0,\ b>0)$라고 하면 점 P는 타원

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점이므로

$\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{4}=1$ ······ ㉠

타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{ax}{9}+\frac{by}{4}=1$

이 직선이 점 $(0,\ 3)$을 지나므로 $\frac{3}{4}b=1 \qquad \therefore b=\frac{4}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{a^2}{9}+\frac{1}{4}\times\left(\frac{4}{3}\right)^2=1,\ a^2=5 \qquad \therefore a=-\sqrt{5}\ (\because a<0)$

즉, $\mathrm{P}\left(-\sqrt{5},\ \frac{4}{3}\right)$이고 점 Q는 점 P와 y축에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{Q}\left(\sqrt{5},\ \frac{4}{3}\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=|\sqrt{5}-(-\sqrt{5})|=2\sqrt{5}$

한편, 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$에서 점 F가 아닌 다른 한 초점을 F′이라 고 하면 타원의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF'}}=2\times 3=6$

따라서 삼각형 PFQ의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}\ (\because \overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{QF}})$

$\qquad =(\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}})+\overline{\mathrm{PQ}}$

$\qquad =6+2\sqrt{5}$ 정답_⑤

195

$bx-ay=0$에서 $y=\frac{b}{a}x$이므로 이것을

$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0x}{b^2}=1$ ······ ㉠

㉠에 대입하면 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0x}{ab}=1$

$\therefore x_1=x=\boxed{\text{(가)}\ \frac{a^2b}{bx_0-ay_0}},\ y_1=y=\frac{ab^2}{bx_0-ay_0}$

또한, $bx+ay=0$에서 $y=-\frac{b}{a}x$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0x}{ab}=1$

$\therefore x_2=x=\frac{a^2b}{bx_0+ay_0},\ y_2=y=\boxed{\text{(나)}\ -\frac{ab^2}{bx_0+ay_0}}$

따라서 삼각형 ORQ의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

$\quad =\frac{1}{2}\left|\frac{a^2b}{bx_0-ay_0}\times\left(-\frac{ab^2}{bx_0+ay_0}\right)-\frac{a^2b}{bx_0+ay_0}\times\frac{ab^2}{bx_0-ay_0}\right|$

$\quad =\frac{a^3b^3}{b^2{x_0}^2-a^2{y_0}^2}$

$\quad =\boxed{\text{(다)}\ ab}\ (\because b^2{x_0}^2-a^2{y_0}^2=a^2b^2)$

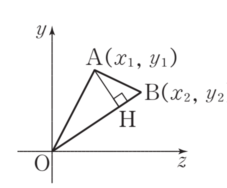
로 일정하다. 정답_④

참고

좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0),\ \mathrm{A}(x_1,\ y_1),\ \mathrm{B}(x_2,\ y_2)$의 좌표를 알 때 삼각형 AOB의 넓이 S는 다음과 같은 방법으로 구한다.

삼각형 AOB에서 변 OB의 길이는

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}$



점 A에서 변 OB에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 직선 OB의 방정식이

$y=\frac{y_2}{x_2}x$, 즉 $y_2x-x_2y=0$이므로

점과 직선 사이의 거리를 이용하여 선분 AH의 길이를 구하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{{y_2}^2+{x_2}^2}}$

따라서 삼각형 AOB의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

II 평면벡터

03 벡터의 연산

196

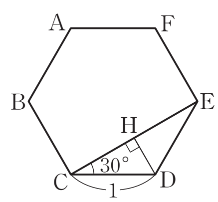
$\overline{AC}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로 $|\overrightarrow{AC}|=\overline{AC}=\sqrt{2}$ 정답_②

197

정육각형의 한 내각의 크기는 $\dfrac{180^\circ(6-2)}{6}=120^\circ$

$\triangle CDE$에서 $\angle DCE=\dfrac{1}{2}(180^\circ-120^\circ)=30^\circ$

오른쪽 그림과 같이 점 D에서 선분 CE에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$|\overrightarrow{CE}|=2|\overrightarrow{CH}|$

$=2\times\overline{CD}\cos 30^\circ$

$=2\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

따라서 $k=\sqrt{3}$이므로

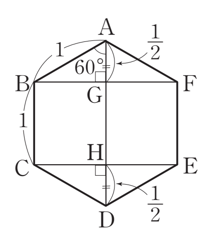
$k^2=3$ 정답_②

참고

정n각형의 한 내각의 크기는 $\dfrac{180^\circ(n-2)}{n}$

198

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BF}$, $\overline{CE}$와 $\overline{AD}$의 교점을 각각 G, H라고 하면



$\overline{AG}=\overline{DH}=\overline{AB}\times\cos 60^\circ$

$=1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \overline{AD}=\overline{AG}+\overline{GH}+\overline{DH}$

$=\dfrac{1}{2}+1+\dfrac{1}{2}=2$

따라서 크기가 2인 벡터는 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{FC}$의 6개이다. 정답_⑤

199

ㄱ은 옳다.

$\overline{DE}=\overline{FC}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}=2$이므로 $|\overrightarrow{DE}|=|\overrightarrow{FC}|=2$

ㄴ은 옳지 않다.

$\overrightarrow{DF}$와 크기와 방향이 같은 벡터는 $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{EC}$의 2개이다.

ㄷ도 옳다.

$\overrightarrow{CF}$와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터는 $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{DE}$의 3개이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_ ㄱ, ㄷ

200

(1) 크기과 방향이 모두 같아야 하므로 서로 같은 벡터는

$\vec{b}$와 $\vec{i}$, $\vec{d}$와 $\vec{h}$

정답_(1) $\vec{b}$와 $\vec{i}$, $\vec{d}$와 $\vec{h}$ (2) $\vec{a}$와 $\vec{j}$, $\vec{g}$와 $\vec{f}$

201

$\overrightarrow{OE}$와 크기와 방향이 모두 같은 벡터는

$\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{CD}$이므로 $a=3$

$\overrightarrow{OE}$와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터는

$\overrightarrow{EO}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{DC}$이므로 $b=4$

$\therefore a+b=7$ 정답_①

202

$\overrightarrow{AB}$와 서로 같은 벡터는 $\overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{ED}$

$\overrightarrow{BC}$와 서로 같은 벡터는 $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{FE}$

$\overrightarrow{CD}$와 서로 같은 벡터는 $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{AF}$

이때 세 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$는 크기가 1인 단위벡터이고, 각각에 대하여 크기가 같고 방향이 반대인 단위벡터는 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DC}$이므로 서로 다른 단위벡터의 개수는 6이다. 정답_①

203

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$

$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{DB}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}$ 정답_①

204

①은 옳지 않다.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}+\vec{0}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}$

②도 옳지 않다.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}$

③도 옳지 않다.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}$

④도 옳지 않다.

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$

$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CB}$

⑤는 옳다.

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}$

$=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

정답_⑤

205

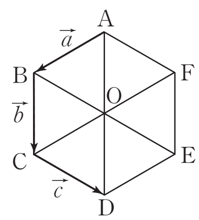
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$\quad=-\vec{b}-\vec{a}=-\vec{a}-\vec{b}$

정답_ $-\vec{a}-\vec{b}$

206

오른쪽 그림과 같이 정육각형의 세 대각선의 교점을 O라고 하면



$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

$\quad=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BO}$

$\quad=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CO}$

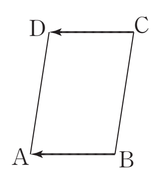
$\quad=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

정답_ ①

207

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$에서

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}\qquad\therefore \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$



즉, 오른쪽 그림과 같이 선분 BA와 선분 CD는 서로 길이가 같고 평행하다.

이때, 네 점 A, B, C, D는 서로 다른 점이고, 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같으므로 사각형 ABCD는 평행사변형이다.

정답_ ②

208

(1) $3(\vec{a}+\vec{b})-2(2\vec{a}-3\vec{b})=3\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{a}+6\vec{b}$

$\quad=-\vec{a}+9\vec{b}$

(2) $\frac{1}{2}(-5\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c})+\frac{2}{3}(4\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c})$

$=-\frac{5}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}+\frac{8}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-2\vec{c}$

$=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}-\vec{c}$

정답_ (1) $-\vec{a}+9\vec{b}$ (2) $\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}-\vec{c}$

209

$3(\vec{a}-\vec{x})+2(\vec{b}-2\vec{a})=-4\vec{x}$에서

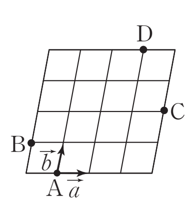
$3\vec{a}-3\vec{x}+2\vec{b}-4\vec{a}=-4\vec{x}\qquad\therefore \vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}$

따라서 $m=1, n=-2$이므로 $m+n=-1$

정답_ ③

210

오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}, \vec{b}$를 정하면



$\overrightarrow{AB}=-\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=3\vec{a}+2\vec{b}$,

$\overrightarrow{AD}=2\vec{a}+4\vec{b}$

이므로 $\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$에서

$2\vec{a}+4\vec{b}=m(-\vec{a}+\vec{b})+n(3\vec{a}+2\vec{b})$

$\quad=(-m+3n)\vec{a}+(m+2n)\vec{b}$

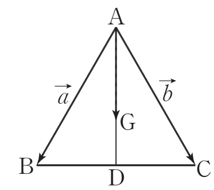
즉, $-m+3n=2$, $m+2n=4$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$m=\frac{8}{5}, n=\frac{6}{5}\qquad\therefore m+n=\frac{14}{5}$

정답_ $\frac{14}{5}$

211

오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서



$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

$\therefore \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$

정답_ ③

참고

삼각형의 무게중심

- 삼각형의 세 중선의 교점을 무게중심이라고 한다.
- 삼각형의 무게중심은 세 중선의 길이를 각 꼭짓점으로부터 각각 2 : 1로 나눈다.

212

$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=3\overrightarrow{OC}$에서 $3\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=3\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OA}=3(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$\therefore \overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{CA}=3\vec{a}+2\vec{b}$에서 $\overrightarrow{AC}=-3\vec{a}-2\vec{b}$

$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$에서 $k\vec{a}+l\vec{b}=3(-3\vec{a}-2\vec{b})=-9\vec{a}-6\vec{b}$

따라서 $k=-9, l=-6$이므로

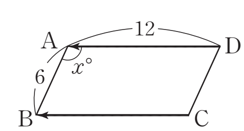
$k+l=-9-6=-15$

정답_ ①

213

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$에서

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\qquad\therefore \overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$



즉, 두 선분 DA, CB는 서로 평행하고 그 길이가 같으므로 사각형 ABCD는 평행사변형이다.

$\angle BAD=x°$라고 하면 사각형 ABCD의 넓이는

$\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin x°$

이므로 최대가 될 때에는 $x=90$일 때이다.

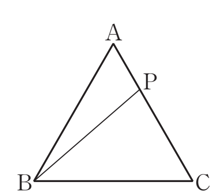
따라서 구하는 최댓값은

$6\times12\times\sin 90°=72$

정답_ ④

214

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$이므로



$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$에서

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$

$\therefore \overrightarrow{PC}=-2\overrightarrow{PA}$

즉, $|\overrightarrow{PC}|=2|\overrightarrow{PA}|$이므로 점 P는 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점이다.

$\therefore \triangle ABP : \triangle CBP=\overline{PA} : \overline{PC}=1 : 2$

정답_ ②

215

ㄱ은 옳다.

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{CA}$에서

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}$

$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=-2\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{CP}$

ㄴ도 옳다.

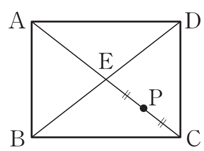
ㄱ에서

$\frac{\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}}{2}=\overrightarrow{CP}$ ······ ㉠

직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 E라고 하면 점 E는 대각선 BD의 중점이므로 ㉠에 의하여

$\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{CP}$

즉, 오른쪽 그림과 같이 점 P는 $\overline{CE}$의 중점이다.



$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

ㄷ도 옳다.

ㄴ에 의해 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$이므로

$\triangle ADP=\frac{3}{4}\triangle ADC$

이때, 삼각형 ADP의 넓이가 3이므로

$\triangle ADC=\frac{4}{3}\triangle ADP=\frac{4}{3}\times 3=4$

그러므로 직사각형 ABCD의 넓이는

$2\triangle ADC=2\times 4=8$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

216

정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 a라고 하면

① $|\overrightarrow{AB}|=a$

② $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}$이므로

$|\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}|=a$

③ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$이므로

$|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}|=a$

④ $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{DO}$이므로

$|\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DO}|=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

⑤ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}+\vec{0}=\overrightarrow{AD}$이므로

$|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}|=a$

따라서 크기가 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

정답_ ④

217

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}$

$\overline{AB}=x$로 놓으면 $\overline{AC}=\sqrt{2}x$이므로

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}|=|2\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}x=16\sqrt{2}$

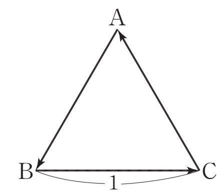
$2x=16 \qquad \therefore x=8$

따라서 정사각형의 한 변의 길이는 8이다.

정답_ ③

218

오른쪽 그림에서



$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

$=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})-\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CB}$

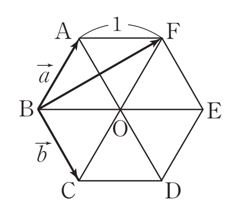
$\therefore |\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}|=|2\overrightarrow{CB}|$

$=2|\overrightarrow{CB}|=2$

정답_ ④

219

오른쪽 그림과 같이 정육각형의 세 대각선의 교점을 O라고 하면



$\vec{a}=\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{OF}$

$\therefore 2\vec{a}=\overrightarrow{CF}$

$\therefore 2\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}$

$=\overrightarrow{BF}$

이때, $\overline{BF}$의 길이는 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 높이의 2배이므로

$\overline{BF}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

즉, $|2\vec{a}+\vec{b}|=|\overrightarrow{BF}|=\sqrt{3}$이므로

$|6\vec{a}+3\vec{b}|=3|2\vec{a}+\vec{b}|=3\sqrt{3}$

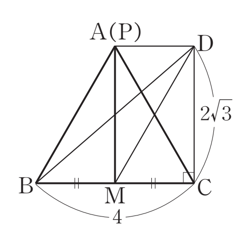
정답_ ⑤

220

$\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BM}$

이고, 점 M이 변 BC의 중점이므로 오른쪽 그림과 같이 벡터 $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BM}$의 크기는 변 AB 위의 점 P가 점 A에 위치할 때 최대가 된다. 이때 사각형 ABMD가 평행사변형이 되도록 점 D를 잡으면 $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BD}$이고,



$\overline{AD}=\overline{BM}=\overline{MC}$이므로 직각삼각형 BCD에서

$\overline{BC}=4, \overline{CD}=\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4=2\sqrt{3}$

따라서

$\overline{BD}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{16+12}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

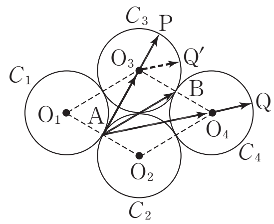
이므로

$|\overrightarrow{BD}|=\overline{BD}=2\sqrt{7}$

정답_ ②

221

오른쪽 그림과 같이 네 원 C_1, C_2, C_3, C_4의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3, O_4라 하고, 두 원 C_3, C_4의 접점을 B라고 하자.



이때 사각형 $O_1O_2O_4O_3$은 한 변의 길이가 2인 마름모이고 두 점 A, B는 각각 $\overline{O_1O_2}$, $\overline{O_3O_4}$의 중점이다.

$\therefore\ \overrightarrow{AO_3}+\overrightarrow{AO_4}=2\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{O_1O_3}$

벡터 $\overrightarrow{O_4Q}$의 시점이 O_3이 되도록 평행이동했을 때의 종점을 Q'이라고 하면

$\overrightarrow{O_3P}+\overrightarrow{O_4Q}=\overrightarrow{O_3P}+\overrightarrow{O_3Q'}$

이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}&=(\overrightarrow{AO_3}+\overrightarrow{O_3P})+(\overrightarrow{AO_4}+\overrightarrow{O_4Q})\\&=(\overrightarrow{AO_3}+\overrightarrow{AO_4})+(\overrightarrow{O_3P}+\overrightarrow{O_4Q})\\&=2\overrightarrow{O_1O_3}+\overrightarrow{O_3P}+\overrightarrow{O_3Q'}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ |\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|&\le 2|\overrightarrow{O_1O_3}|+|\overrightarrow{O_3P}|+|\overrightarrow{O_3Q'}|\\&=2\times2+1+1=6\end{aligned}$$

따라서 구하는 최댓값은 6이다. 정답_②

222

$(x+2y)\vec{a}+(x-y+1)\vec{b}=3\vec{a}-2\vec{b}$에서 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않으므로 $x+2y=3,\ x-y+1=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1,\ y=2$

$\therefore\ x+y=-1+2=1$ 정답_④

223

$\vec{c}=3\vec{b}$이므로

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}(8\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\frac{2}{3}\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{3}(8\vec{a}+\vec{b}+3\vec{b})-\frac{2}{3}\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{9}{2}\vec{b}\right)\\&=\frac{1}{3}(8\vec{a}+4\vec{b})-\frac{2}{3}(\vec{a}+5\vec{b})\\&=\frac{8}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{10}{3}\vec{b}=2\vec{a}-2\vec{b}\end{aligned}$$

$\therefore\ k=-2$ 정답_①

224

$\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}+2\vec{b}$ …… ㉠

$\vec{x}-\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $2\vec{x}=3\vec{a}+\vec{b}$

㉠−㉡을 하면 $2\vec{y}=-\vec{a}+3\vec{b}$

$$\begin{aligned}\therefore\ 2\vec{x}+4\vec{y}&=(3\vec{a}+\vec{b})+2(-\vec{a}+3\vec{b})\\&=3\vec{a}+\vec{b}-2\vec{a}+6\vec{b}=\vec{a}+7\vec{b}\end{aligned}$$

따라서 $p=1,\ q=7$이므로 $p+q=8$ 정답_④

225

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(3\vec{a}-k\vec{b})-\vec{a}=2\vec{a}-k\vec{b}$

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$

이므로 $m\overrightarrow{AC}=6\overrightarrow{BA}$에서

$m(2\vec{a}-k\vec{b})=6(\vec{a}-\vec{b}),\ 2m\vec{a}-km\vec{b}=6\vec{a}-6\vec{b}$

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 서로 평행하지 않고 영벡터가 아니므로

$2m=6,\ km=6$

$\therefore\ m=3,\ k=2$ 정답_④

226

두 벡터 $\vec{a}-2\vec{b}$와 $4\vec{a}+m\vec{b}$가 서로 평행하므로

$4\vec{a}+m\vec{b}=t(\vec{a}-2\vec{b})$ ($t\neq0$인 실수)로 놓으면

$4\vec{a}+m\vec{b}=t\vec{a}-2t\vec{b}$

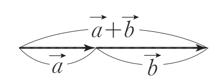
$\vec{a}, \vec{b}$가 서로 평행하지 않고 영벡터가 아니므로

$4=t,\ m=-2t$

$\therefore\ m=-8$ 정답_①

227

$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}, \vec{b}$가 같은 방향이어야 하므로



$\vec{b}=|k|\vec{a}$ 정답_③

228

$\vec{p}+\vec{q}=(\vec{a}-2\vec{b})+(2\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}-\vec{b}$

$\vec{q}-\vec{r}=(2\vec{a}+\vec{b})-(3\vec{a}-k\vec{b})=-\vec{a}+(k+1)\vec{b}$

$\vec{p}+\vec{q}$와 $\vec{q}-\vec{r}$가 서로 평행하려면

$m(\vec{p}+\vec{q})=\vec{q}-\vec{r}$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 m이 존재해야 한다.

$m(3\vec{a}-\vec{b})=-\vec{a}+(k+1)\vec{b}$에서

$3m\vec{a}-m\vec{b}=-\vec{a}+(k+1)\vec{b}$

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 서로 평행하지 않고 영벡터가 아니므로

$3m=-1,\ -m=k+1$

$\therefore\ m=-\frac{1}{3},\ k=-\frac{2}{3}$ 정답_②

229

$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$에서 $\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{AB}$

$3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{EF}-2\overrightarrow{CD}=3(\overrightarrow{EF}+2\overrightarrow{AB})$에서

$3(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{EF}-2(3\overrightarrow{AB})=3\overrightarrow{EF}+6\overrightarrow{AB}$

$3\overrightarrow{AB}-9\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}-6\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{EF}+6\overrightarrow{AB}$

$-12\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}=3\overrightarrow{EF}+6\overrightarrow{AB}$

$\therefore\ \overrightarrow{EF}=-9\overrightarrow{AB}$

$\therefore\ |\overrightarrow{EF}|=|-9\overrightarrow{AB}|=9|\overrightarrow{AB}|=9\times3=27$ 정답_⑤

230

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$,

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=2\vec{a}+m\vec{b}-\vec{a}=\vec{a}+m\vec{b}$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ ($k\neq0$인 실수)가 성립해야 하므로

$\vec{a}+m\vec{b}=k(\vec{b}-\vec{a})=-k\vec{a}+k\vec{b}$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않고 영벡터가 아니므로

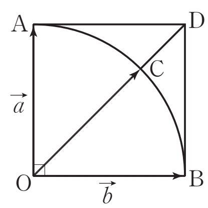
$1=-k$, $m=k$

$\therefore k=-1, m=-1$

정답_ ②

231

오른쪽 그림과 같이 정사각형 AOBD를 생각하면 세 점 O, C, D가 한 직선 위에 있으므로



$\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OD}$ ($k\neq0$인 실수)

로 놓을 수 있다.

이때, $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$이고

$|\overrightarrow{OD}|:|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{2}:1$이므로

$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{OD}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

정답_ ③

232

$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$라고 하면

$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{CA}=-\vec{a}+\vec{b}$

이때, $\overline{AN}:\overline{NC}=k:1$이므로

$\overline{AC}:\overline{NC}=(k+1):1$

$\therefore \overrightarrow{CN}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{k+1}(-\vec{a}+\vec{b})$

세 점 B, N, M이 한 직선 위에 있으려면

$\overrightarrow{BN}=m\overrightarrow{BM}$

을 만족시키는 0이 아닌 실수 m이 존재해야 한다.

이때

$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\vec{a}+\frac{1}{k+1}(-\vec{a}+\vec{b})$

$=\frac{k}{k+1}\vec{a}+\frac{1}{k+1}\vec{b}$

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

이므로 $\overrightarrow{BN}=m\overrightarrow{BM}$에서

$\frac{k}{k+1}\vec{a}+\frac{1}{k+1}\vec{b}=m\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$

$\frac{k}{k+1}\vec{a}+\frac{1}{k+1}\vec{b}=m\vec{a}+\frac{1}{2}m\vec{b}$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않고 영벡터가 아니므로

$\frac{k}{k+1}=m$, $\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2}m$

$\therefore \frac{k}{k+1}=\frac{2}{k+1}$ $\quad\therefore k=2$ ($\because k\neq-1$)

정답_ ④

233

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라고 하면

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\vec{b}$

세 점 A, P, M이 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AM}$ ($t\neq0$인 실수)으로 놓으면

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}t\vec{a}+\frac{1}{2}t\vec{b}$ …… ㉠

또, 세 점 B, P, N이 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AN}$ ($s\neq0$인 실수)으로 놓으면

$\overrightarrow{AP}=(1-s)\vec{a}+\frac{1}{3}s\vec{b}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않고 영벡터가 아니므로

$\frac{1}{2}t=1-s$, $\frac{1}{2}t=\frac{1}{3}s$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$s=\frac{3}{4}$, $t=\frac{1}{2}$

따라서 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$이므로

$m=\frac{1}{4}$, $n=\frac{1}{4}$

$\therefore m+n=\frac{1}{2}$

정답_ ②

234

점 C가 직선 AB 위에 있다고 가정하고

$\overrightarrow{OC}=m\vec{a}+n\vec{b}$ (m, n은 실수)로 놓으면

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=m\vec{a}+n\vec{b}-\vec{a}=(m-1)\vec{a}+n\vec{b}$

이때, $\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{AC}$이므로 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ ($k\neq0$인 실수)에서

$(m-1)\vec{a}+n\vec{b}=k(\vec{b}-\vec{a})$

$(m-1)\vec{a}+n\vec{b}=-k\vec{a}+k\vec{b}$

$m-1=-k$, $n=k$에서

$m-1=-n$ $\quad\therefore m+n=1$

ㄱ. $\overrightarrow{OP}=\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$에서

$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$이므로 점 P는 직선 AB 위에 있다.

ㄴ. $\overrightarrow{OQ}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{3}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$에서

$\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$이므로 점 Q는 직선 AB 위에 있지 않다.

ㄷ. $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{-\vec{a}+3\vec{b}}{2}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{3}{2}\vec{b}$에서

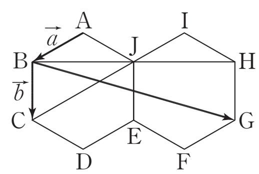
$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}=1$이므로 점 R는 직선 AB 위에 있다.

따라서 종점이 직선 AB 위에 있는 벡터는 ㄱ, ㄷ이다.

정답_ ③

235

오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BH}}$, $\overline{\mathrm{CJ}}$를 그으면 ……… ❶



$\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\overrightarrow{\mathrm{BH}}+\overrightarrow{\mathrm{HG}}$

$=2\overrightarrow{\mathrm{BJ}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$=2(\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CJ}})+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$=3\overrightarrow{\mathrm{BC}}+2\overrightarrow{\mathrm{CJ}}$ ……… ❷

이때, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{CJ}}=-2\vec{a}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{BG}}=3\vec{b}+2\times(-2\vec{a})=-4\vec{a}+3\vec{b}$ ……… ❸

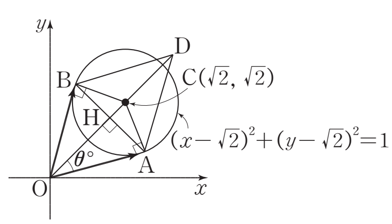
정답_ $-4\vec{a}+3\vec{b}$

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 그림에서 필요한 선을 긋기	20%
❷	$\overrightarrow{\mathrm{BG}}=3\overrightarrow{\mathrm{BC}}+2\overrightarrow{\mathrm{CJ}}$임을 알기	40%
❸	$\overrightarrow{\mathrm{BG}}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내기	40%

236

원의 중심을 $\mathrm{C}(\sqrt{2}, \sqrt{2})$라고 하면

$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$



위 그림의 직각삼각형 OAC에서

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OC}}^2-\overline{\mathrm{AC}}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ ……… ❶

$\angle\mathrm{AOC}=\theta°$로 놓으면

$\cos\theta°=\dfrac{\overline{\mathrm{OA}}}{\overline{\mathrm{OC}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……… ❷

이때, 두 선분 OA, OB를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형 OADB를 잡으면 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$이므로 사각형 OADB는 마름모이다.

즉, $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{OD}}$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{OD}}$의 교점을 H라고 하면

$\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{OD}}$

$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OA}}\cos\theta°=\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=2\overline{\mathrm{OH}}=3$ ……… ❸

정답_ 3

단계	채점 기준	비율
❶	원의 중심을 C로 놓고 $\overline{\mathrm{OA}}$, $\overline{\mathrm{OC}}$의 길이 구하기	30%
❷	$\angle\mathrm{AOC}=\theta°$로 놓고 $\cos\theta°$의 값 구하기	20%
❸	$\lvert\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\rvert$의 값 구하기	50%

참고

여러 가지 사각형의 대각선의 성질

- 평행사변형 : 서로 다른 것을 이등분한다.
- 직사각형 : 길이가 같고, 서로 다른 것을 이등분한다.
- 마름모 : 서로 다른 것을 수직이등분한다.
- 정사각형 : 길이가 같고, 서로 다른 것을 수직이등분한다.
- 등변사다리꼴 : 길이가 같다.

237

조건 (가)에서 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$이므로

$\vec{c}-\vec{a}=\vec{b}$

즉, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $\quad\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{OB}}$ …… ㉠

또, $\vec{c}-\vec{b}=\vec{a}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $\quad\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{OA}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 두 쌍의 대변이 각각 평행하므로 사각형 OACB는 평행사변형이다. ……… ❶

조건 (나)에서 $|\vec{c}|=|\vec{b}-\vec{a}|$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ $\quad\therefore\ \overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{AB}}$

즉, 평행사변형 OACB의 두 대각선의 길이가 같으므로 사각형 OACB는 직사각형이다. ……… ❷

조건 (다)에서 $|\vec{b}|=|\vec{c}-\vec{b}|$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ $\quad\therefore\ \overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{BC}}$

이때, 이웃하는 두 변의 길이가 서로 같은 직사각형은 정사각형이므로 사각형 OACB는 정사각형이다. ……… ❸

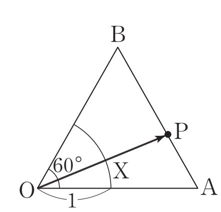
정답_ 정사각형

단계	채점 기준	비율
❶	조건 (가)를 이용하여 사각형 OACB가 평행사변형임을 보이기	40%
❷	조건 (나)를 이용하여 사각형 OACB가 직사각형임을 보이기	30%
❸	조건 (다)를 이용하여 사각형 OACB가 정사각형임을 보이기	30%

238

$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}$에서 $\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}>0$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$는 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 방향이 같고 그 크기는 1인 단위벡터이다. ……… ❶

점 P가 변 AB 위를 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 움직이고 삼각형 OAB가 정삼각형이므로 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$의 종점 X가 그리는 도형은 중심각의 크기가 60°, 반지름의 길이가 1인 부채꼴의 호이다. ……… ❷



따라서 벡터 $\overrightarrow{OX}$의 종점 X가 그리는 도형의 길이는

$2\pi\times1\times\dfrac{60^\circ}{360^\circ}=\dfrac{\pi}{3}$ ❸

정답_ $\dfrac{\pi}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	$\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{OP}$와 방향이 같고 크기가 1인 단위벡터임을 알기	40%
❷	벡터 $\overrightarrow{OX}$의 종점 X가 그리는 도형 구하기	40%
❸	벡터 $\overrightarrow{OX}$의 종점 X가 그리는 도형의 길이 구하기	20%

239

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}=-\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=(3\vec{a}-\vec{b})-(\vec{a}+k\vec{b})$

$=2\vec{a}-(k+1)\vec{b}$ ❶

두 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{CD}$가 서로 평행하므로

$\overrightarrow{CD}=m\overrightarrow{AB}$ ($m\neq0$인 실수)로 놓으면

$2\vec{a}-(k+1)\vec{b}=-m\vec{a}+m\vec{b}$ ❷

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 평행하지 않고 영벡터가 아니므로

$2=-m, -k-1=m$

따라서 $m=-2$이므로 $k=1$ ❸

정답_ 1

단계	채점 기준	비율
❶	$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내기	40%
❷	$\overrightarrow{CD}=m\overrightarrow{AB}$의 꼴로 나타내기	30%
❸	k의 값 구하기	30%

240

$\overrightarrow{CA}=\vec{a}, \overrightarrow{CF}=\vec{b}, \overrightarrow{CE}=\vec{c}$이므로

$\overrightarrow{AP}=k(\vec{c}-\vec{b}-\vec{a})$

$=k(\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{CA})$

$=k(\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{CA})$ ❶

$=k(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA})$

$=k\overrightarrow{AD}$ ❷

즉, $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AD}$이므로 세 점 A, P, D는 한 직선 위의 점이다.

따라서 점 P는 직선 AD 위의 점이다. ❸

정답_ 직선 AD

단계	채점 기준	비율
❶	$\overrightarrow{AP}=k(\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{CA})$로 나타내기	40%
❷	$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AD}$로 나타내기	40%
❸	점 P는 직선 AD 위에 있음을 알기	20%

241

조건 (가)의 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}$에서

$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{BP}$

$=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{BP}$

이므로 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$

같은 방법으로 조건 (나), (다)에서 $\overrightarrow{QB}=2\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{RC}=2\overrightarrow{AR}$이므로

$\overline{BQ}:\overline{CQ}=2:1, \overline{CR}:\overline{AR}=2:1$

이때, $\dfrac{\triangle APR}{\triangle ABC}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$이고,

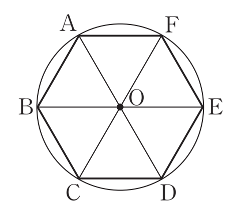
$\triangle APR=\triangle BQP=\triangle CRQ$이므로

$\dfrac{\triangle PQR}{\triangle ABC}=\dfrac{\triangle ABC-3\triangle APR}{\triangle ABC}=1-3\times\dfrac{\triangle APR}{\triangle ABC}$

$=1-3\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{3}$

정답_ ①

242



오른쪽 그림과 같이 정육각형의 외접원의 중심을 O라고 하면

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$

$=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA})$

$+(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA})$

$=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})-5\overrightarrow{OA}$

이때 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$이므로

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=-\overrightarrow{OA}$

$\therefore \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=-6\overrightarrow{OA}$

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}|=18$에서

$|-6\overrightarrow{OA}|=18, 6|\overrightarrow{OA}|=18 \qquad \therefore |\overrightarrow{OA}|=3$

따라서 정육각형 ABCDEF는 한 변의 길이가 3인 정삼각형 6개로 이루어져 있으므로 구하는 정육각형의 넓이는

$6\triangle OAB=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times3^2=\dfrac{27}{2}\sqrt{3}$

정답_ ⑤

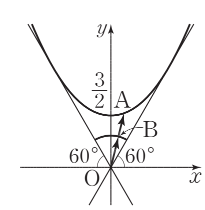
243

$\overrightarrow{OB}=\dfrac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$에서 $\overrightarrow{OB}$는 $\overrightarrow{OA}$와 방향이 같고, 크기가 1인 단위벡터이다. 원점을 지나고 곡선 $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}$에 접하는 직선을 $y=mx$라고 하면

$\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}=mx \qquad \therefore x^2-2mx+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=m^2-3=0, m^2=3 \qquad \therefore m=\pm\sqrt{3}$



즉, 오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=\sqrt{3}x$, $y=-\sqrt{3}x$가 x축과 이루는 예각의 크기는 60°이고, 점 A는 곡선 $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}$ 위를 움직이므로 벡터 $\overrightarrow{OB}$의 종점 B가 나타내는 도형의 길이는 반지름의 길이가 1이고, 중심각의 크기가 60°인 부채꼴의 호의 길이와 같다.

따라서 구하는 길이는

$2\pi \times 1 \times \dfrac{60^\circ}{360^\circ} = \dfrac{\pi}{3}$ 정답_ ①

244

$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$

$=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{YC}$

$=\overrightarrow{YC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{YA}=-\overrightarrow{AY}$

$\overrightarrow{AP}=(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})t$에서 $\overrightarrow{AP}=-t\overrightarrow{AY}$

따라서 세 점 A, P, Y는 한 직선 위에 있으므로 점 P가 나타내는 도형은 직선 AY, 즉 YA이다. 정답_ ④

245

ㄱ은 옳다.

갑이 A에서 B까지 가는 데 걸린 시간을 x라고 하면

$x=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{u} \qquad \therefore u=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{x}$

또, $\overrightarrow{OP}$는 $\overrightarrow{AB}$와 방향이 같고 크기가 u이므로

$\overrightarrow{OP}=u\times\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{x}\times\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{1}{x}\overrightarrow{AB}$

ㄴ은 옳다.

갑이 A에서 B까지 가는 데 걸린 시간을 x, B에서 C까지 가는 데 걸린 시간을 y라고 하면

$y=\dfrac{|\overrightarrow{BC}|}{v}$

을이 A에서 C까지 가는 데 걸린 시간은 $x+y$이므로

$x+y=\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{w}$

한편, ㄱ에서 $x=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{u}$이므로

$x+y=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{u}+\dfrac{|\overrightarrow{BC}|}{v}=\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{w}$

ㄷ은 옳지 않다.

갑이 A에서 B까지 가는 데 걸린 시간을 x, B에서 C까지 가는 데 걸린 시간을 y라고 하면

$\overrightarrow{OQ}=v\times\dfrac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{|\overrightarrow{BC}|}{y}\times\dfrac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{1}{y}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{OR}=w\times\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{x+y}\times\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{1}{x+y}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$이므로 여기에

$\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{BC}=y\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{CA}=-(x+y)\overrightarrow{OR}$

를 대입하면

$x\overrightarrow{OP}+y\overrightarrow{OQ}-(x+y)\overrightarrow{OR}=\vec{0}$

$\therefore \overrightarrow{OR}=\dfrac{x\overrightarrow{OP}+y\overrightarrow{OQ}}{x+y}=\dfrac{x}{x+y}\overrightarrow{OP}+\dfrac{y}{x+y}\overrightarrow{OQ}$

이때, $\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x+y}=\dfrac{x+y}{x+y}=1$이므로 세 점 P, Q, R는 한 직선 위에 있다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 정답_ ③

04 평면벡터의 성분과 내적

246

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$ 정답_ $\vec{b}-\vec{a}$

247

원점 O에 대하여

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})-(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$

$=-\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

$=-\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$ 정답_ ②

248

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$에서 $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$이므로 점 B를 원점으로 평행이동하고, 점 A를 같은 방법으로 평행이동하면 점 C의 좌표는 $(2-3, 1-3) \qquad \therefore C(-1, -2)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OD}$에서 점 A를 원점으로 평행이동하고, 점 B를 같은 방법으로 평행이동하면 점 D의 좌표는

$(3-2, 3-1) \qquad \therefore D(1, 2)$

따라서 $a=-1, b=-2, c=1, d=2$이므로

$abcd=(-1)\times(-2)\times1\times2=4$ 정답_ ④

249

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{AC}$ ($t\neq0$인 실수)

로 놓으면 원점 O에 대하여

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-\vec{a}-3\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})$

$=-2\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(k\vec{a}+2\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})$

$=(k-1)\vec{a}+4\vec{b}$

따라서 $-2\vec{a}-\vec{b}=t(k-1)\vec{a}+4t\vec{b}$이므로

$4t=-1$에서 $t=-\dfrac{1}{4}$

$t(k-1)=-2$에서

$-\dfrac{1}{4}(k-1)=-2, k-1=8 \qquad \therefore k=9$ 정답_ ②

250

$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$이므로

$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=(\vec{g}-\vec{a})+(\vec{g}-\vec{b})+(\vec{g}-\vec{c})$

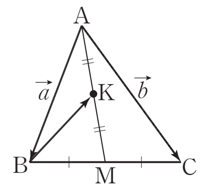
$=3\vec{g}-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$=3\vec{g}-3\vec{g}$

$=\vec{0}$ 정답_ ①

251

오른쪽 그림에서 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$이므로



$$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$
$$=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})$$

$$\therefore \overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}$$
$$=-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$$

정답_③

252

$\overline{AD}$가 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=4:3$

즉, 점 D는 선분 BC를 4 : 3으로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AD}=\frac{4\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB}}{4+3}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$$

따라서 $m=\frac{3}{7}$, $n=\frac{4}{7}$이므로

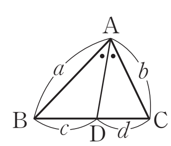
$$m-n=-\frac{1}{7}$$

정답_③

참고

삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선과 변 BC의 교점을 D라고 할 때,

$a:b=c:d$

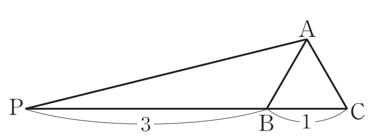


253

$\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$에서

$$-\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AP}=4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=\frac{4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}}{4-3}$$

이므로 점 P는 다음 그림과 같이 선분 CB를 4 : 3으로 외분하는 점이다.



따라서 삼각형 APC의 넓이는 삼각형 APB의 넓이의 $\frac{4}{3}$배이므로

$$\triangle APC=12\times\frac{4}{3}=16$$

정답_④

다른 풀이

$\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$에서

$\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BP}-4\overrightarrow{BA}-3(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\vec{0}$

$\therefore \overrightarrow{BP}=-3\overrightarrow{BC}$

따라서 점 B는 선분 PC를 3 : 1로 내분하는 점이다.

즉, $\triangle APC:\triangle APB=4:3$이므로

$$\triangle APC=12\times\frac{4}{3}=16$$

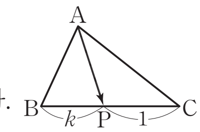
참고

오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서

$\overrightarrow{PB}=-k\overrightarrow{PC}$ $(k>0)$이면

• 점 P는 변 BC를 $k:1$로 내분하는 점이다.

• $\triangle ABP:\triangle APC=k:1$

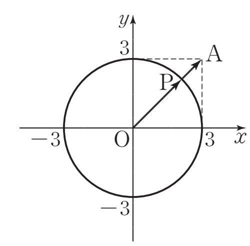


254

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}=\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}}{2+1}$$

로 놓으면 점 Q는 선분 PA를 2 : 1로 내분하는 점이다.

$|\overrightarrow{OP}|=3$, $|\overrightarrow{OA}|=3\sqrt{2}$로 일정하므로 오른쪽 그림과 같이 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OA}$의 방향이 같을 때 $|\overrightarrow{OQ}|$의 값이 최대가 된다. 이때,



$$|\overrightarrow{PQ}|=\frac{2}{3}|\overrightarrow{PA}|=\frac{2}{3}(3\sqrt{2}-3)$$
$$=2\sqrt{2}-2$$

이므로 구하는 최댓값은

$$|\overrightarrow{OQ}|=3+(2\sqrt{2}-2)=1+2\sqrt{2}$$

정답_③

참고

두 점 $P(x, y)$, $A(3, 3)$에 대하여 선분 PA를 2 : 1로 내분하는 점을 $Q(x', y')$이라고 하면 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{2\times3+1\times x}{2+1}, \frac{2\times3+1\times y}{2+1}\right)$$

$$\therefore Q\left(\frac{x+6}{3}, \frac{y+6}{3}\right)$$

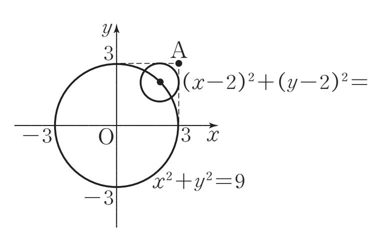
즉, $x'=\frac{x+6}{3}$, $y'=\frac{y+6}{3}$에서

$x=3x'-6$, $y=3y'-6$

이것을 $x^2+y^2=9$에 대입하여 정리하면

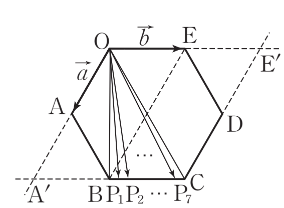
$(x'-2)^2+(y'-2)^2=1$, 즉 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$

따라서 점 Q가 나타내는 도형은 다음 그림과 같다.



255

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$, $\overline{CB}$의 연장선의 교점을 A′, $\overline{OE}$, $\overline{CD}$의 연장선의 교점을 E′이라고 하면



$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B}$$
$$=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}$$
$$=2\vec{a}+\vec{b}$$

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OE'}=2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OE}=2\vec{a}+2\vec{b}$

점 P_k는 변 BC를 $k:(8-k)(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{OP_k}=\frac{k\overrightarrow{OC}+(8-k)\overrightarrow{OB}}{k+(8-k)}=\frac{(8-k)\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{OC}}{8}$$

$$=\frac{(8-k)(2\vec{a}+\vec{b})+k(2\vec{a}+2\vec{b})}{8}$$

$$=\frac{16\vec{a}+(8+k)\vec{b}}{8}=2\vec{a}+\vec{b}+\frac{k}{8}\vec{b}$$

$\therefore\ \overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}+\cdots+\overrightarrow{OP_7}$

$$=\left(2\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{8}\vec{b}\right)+\left(2\vec{a}+\vec{b}+\frac{2}{8}\vec{b}\right)+\left(2\vec{a}+\vec{b}+\frac{3}{8}\vec{b}\right)$$

$$+\cdots+\left(2\vec{a}+\vec{b}+\frac{7}{8}\vec{b}\right)$$

$$=14\vec{a}+7\vec{b}+\left(\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{7}{8}\right)\vec{b}$$

$$=14\vec{a}+7\vec{b}+\frac{7}{2}\vec{b}=14\vec{a}+\frac{21}{2}\vec{b}$$

따라서 $m=14,\ n=\frac{21}{2}$이므로

$m-2n=-7$

정답_ ④

256

점 P는 선분 AC를 3 : 1로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{DP}=\frac{3\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}}{3+1}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$$

$$=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

따라서 $m=\frac{3}{4},\ n=-\frac{1}{4}$이므로

$m+n=\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$

정답_ ②

다른 풀이

$$\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$$

$$=\frac{3}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

257

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$이므로

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AN}=\frac{2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}}{2+1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}\right)-\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

$$=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

따라서 $m=-\frac{2}{3},\ n=\frac{1}{2}$이므로

$m+n=-\frac{1}{6}$

정답_ $-\frac{1}{6}$

258

$4\overrightarrow{AP}-3\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서

$4\overrightarrow{AP}-3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$

$8\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\qquad\therefore\ \overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\times\frac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4}$

이때, $\overline{BC}$를 1 : 3으로 내분하는 점을 Q라고 하면

$\overrightarrow{AQ}=\frac{\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB}}{1+3}=\frac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4}$이므로

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$

따라서 점 P가 위치하는 영역은 ㉣이다.

정답_ ④

259

$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{AD}=\vec{b}$라고 하면

$$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\vec{a},\ \overrightarrow{AQ}=\frac{m\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{m+1}=\frac{m\vec{a}+\vec{b}}{m+1}$$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$

이므로

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\frac{m\vec{a}+\vec{b}}{m+1}-\frac{2}{3}\vec{a}$$

$$=\frac{m-2}{3(m+1)}\vec{a}+\frac{1}{m+1}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}=\vec{a}+\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}=\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$$

세 점 P, Q, C가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{PQ}=t\overrightarrow{PC}$ ($t\neq0$인 실수)

로 놓으면

$$\frac{m-2}{3(m+1)}\vec{a}+\frac{1}{m+1}\vec{b}=\frac{t}{3}\vec{a}+t\vec{b}$$

두 벡터 $\vec{a},\ \vec{b}$가 서로 평행하지 않으므로

$$\frac{m-2}{3(m+1)}=\frac{t}{3},\ \frac{1}{m+1}=t$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$m=3,\ t=\frac{1}{4}$

정답_ ④

260

$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 하면

점 P는 선분 OA를 4 : 1로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{OP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{OA}=\frac{4}{5}\vec{a}$$

점 Q는 선분 OB의 중점이므로

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\vec{b}$$

점 R는 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{OR}=\dfrac{3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}}{3+1}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}$

점 G는 삼각형 PQR의 무게중심이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG}&=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR})\\&=\frac{1}{3}\left\{\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}\right)\right\}\\&=\frac{7}{20}\vec{a}+\frac{5}{12}\vec{b}\end{aligned}$$

따라서 $k=\dfrac{7}{20}$, $l=\dfrac{5}{12}$이므로

$k+l=\dfrac{7}{20}+\dfrac{5}{12}=\dfrac{23}{30}$ 정답_⑤

261

$\vec{a}+\vec{b}=(3,-1)+(1,2)=(4,1)$

따라서 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은

$4+1=5$ 정답_⑤

262

$\vec{a}=\vec{b}$, 즉 $(m-2,3)=(-1,4-n)$이므로

$m-2=-1$, $3=4-n$ $\quad\therefore m=1, n=1$

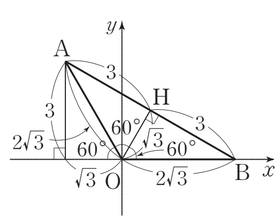
$\therefore m+n=2$ 정답_2

263

$$\begin{aligned}2\vec{a}-\vec{b}-2\vec{c}&=2(-2,1)-(1,-3)-2(2,1)\\&=(-4,2)-(1,-3)-(4,2)=(-9,3)\end{aligned}$$

$\therefore |2\vec{a}-\vec{b}-2\vec{c}|=\sqrt{(-9)^2+3^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$ 정답_③

264



오른쪽 그림과 같이 원점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $A(-\sqrt{3},3)$, $B(2\sqrt{3},0)$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(2\sqrt{3},0)-(-\sqrt{3},3)\\&=(3\sqrt{3},-3)\end{aligned}$$

따라서 $a=3\sqrt{3}$, $b=-3$이므로

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{3\sqrt{3}}{-3}=-\sqrt{3}$ 정답_②

265

$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$에서

$$\begin{aligned}(12,-8)&=p(3,2)+q(-2,4)\\&=(3p,2p)+(-2q,4q)\\&=(3p-2q,2p+4q)\end{aligned}$$

이므로 $3p-2q=12$, $2p+4q=-8$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$p=2$, $q=-3$ $\quad\therefore p+q=-1$ 정답_②

266

$3\vec{a}-2\vec{x}=2\vec{b}$에서 $2\vec{x}=3\vec{a}-2\vec{b}$

$$\begin{aligned}\therefore \vec{x}&=\frac{3}{2}\vec{a}-\vec{b}=\frac{3}{2}(0,1)-(1,1)\\&=\left(0,\frac{3}{2}\right)-(1,1)=\left(-1,\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

따라서 벡터 $\vec{x}$와 같은 방향을 갖는 단위벡터를 $\vec{u}$라고 하면

$$\begin{aligned}\vec{u}&=\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\left(-1,\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{2\sqrt{5}}{5}\left(-1,\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\end{aligned}$$

정답_⑤

267

원점 O에 대하여

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,x)-(x,-1)=(2-x,x+1)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{17}$에서 $|\overrightarrow{AB}|^2=17$이므로

$(2-x)^2+(x+1)^2=17$, $2x^2-2x-12=0$

$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은 1이다. 정답_1

268

$\vec{a}+t\vec{b}=(-2,0)+t(1,-1)=(-2+t,-t)$

이므로

$$\begin{aligned}|\vec{a}+t\vec{b}|&=\sqrt{(-2+t)^2+(-t)^2}\\&=\sqrt{2t^2-4t+4}=\sqrt{2(t-1)^2+2}\end{aligned}$$

따라서 $|\vec{a}+t\vec{b}|$는 $t=1$일 때 최소이므로 구하는 최솟값은 $\sqrt{2}$

정답_②

269

$\vec{a}+t\vec{b}=(5,-1)+t(-2,3)=(5-2t,-1+3t)$

이므로

$$\begin{aligned}|\vec{a}+t\vec{b}|&=\sqrt{(5-2t)^2+(-1+3t)^2}\\&=\sqrt{13t^2-26t+26}\\&=\sqrt{13(t-1)^2+13}\end{aligned}$$

이때, $-1\le t\le 2$이므로 $|\vec{a}+t\vec{b}|$는 $t=-1$일 때 최댓값 $\sqrt{65}$, $t=1$일 때 최솟값 $\sqrt{13}$을 갖는다.

따라서 $M=\sqrt{65}$, $m=\sqrt{13}$이므로

$M^2+m^2=65+13=78$ 정답_④

270

점 P가 x축 위의 점이므로 $\mathrm{P}(a, 0)$으로 놓으면 원점 O에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1, 1)-(a, 0)=(1-a, 1)$

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=2(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\\&=2\{(-1, -2)-(a, 0)\}\\&=2(-1-a, -2)=(-2-2a, -4)\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=(1-a, 1)+(-2-2a, -4)\\&=(-1-3a, -3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore |\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}|&=\sqrt{(-1-3a)^2+(-3)^2}\\&=\sqrt{9a^2+6a+10}\\&=\sqrt{9\left(a+\frac{1}{3}\right)^2+9}\end{aligned}$$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$는 $a=-\frac{1}{3}$일 때 최소이므로 구하는 최솟값은 $\sqrt{9}=3$

정답_③

271

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$의 y성분은 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\sin 45^\circ$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\sin 45^\circ=2\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2\sqrt{2}$

$\therefore |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=4$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OA}}=(4\cos 45^\circ, 4\sin 45^\circ)=(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

한편, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(4\cos 90^\circ, 4\sin 90^\circ)=(0, 4)$,

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(-\sqrt{2}\cos 45^\circ, \sqrt{2}\sin 45^\circ)=(-1, 1)$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=m\overrightarrow{\mathrm{OA}}+n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$에서

$$\begin{aligned}(-1, 1)&=m(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})+n(0, 4)\\&=(2\sqrt{2}m, 2\sqrt{2}m+4n)\end{aligned}$$

$\therefore 2\sqrt{2}m=-1, 2\sqrt{2}m+4n=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$m=-\frac{1}{2\sqrt{2}}, n=\frac{1}{2}$

$\therefore m^2+n^2=\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

정답_③

272

조건 (가)에 의해 $\vec{b}$는 $\vec{a}$와 방향이 반대이다.

$\vec{a}$와 같은 방향의 단위벡터를 $\vec{e}$라고 하면

$\vec{e}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}(2, -3)=\frac{1}{\sqrt{13}}(2, -3)$

조건 (나)에 의해 $|\vec{b}|=13$이므로

$\vec{b}=-13\vec{e}=-\sqrt{13}(2, -3)=(-2\sqrt{13}, 3\sqrt{13})$

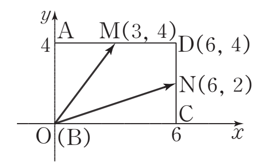
따라서 $m=-2\sqrt{13}, n=3\sqrt{13}$이므로

$m+n=-2\sqrt{13}+3\sqrt{13}=\sqrt{13}$

정답_③

273

오른쪽 그림과 같이 점 B를 좌표평면의 원점 O에 놓고, 가로, 세로의 길이가 각각 6, 4인 직사각형 ABCD를 생각하면



$\overrightarrow{\mathrm{BM}}=(3, 4), \overrightarrow{\mathrm{BD}}=(6, 4), \overrightarrow{\mathrm{BN}}=(6, 2)$

$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=a\overrightarrow{\mathrm{BM}}+b\overrightarrow{\mathrm{BN}}$에서

$$\begin{aligned}(6, 4)&=a(3, 4)+b(6, 2)\\&=(3a+6b, 4a+2b)\end{aligned}$$

이므로 $3a+6b=6, 4a+2b=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{2}{3}, b=\frac{2}{3}$

$\therefore ab=\frac{4}{9}$

정답_ $\frac{4}{9}$

274

점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면 원점 O에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(-2-x, 4-y)$

$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2-x, -y)$

$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(3-x, -1-y)$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=(3-3x, 3-3y)$

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=3$에서

$\sqrt{(3-3x)^2+(3-3y)^2}=3$

양변을 제곱하면

$(3-3x)^2+(3-3y)^2=9$

$9(x-1)^2+9(y-1)^2=9$

$\therefore (x-1)^2+(y-1)^2=1$

정답_④

275

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=3\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$는 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 방향이 같고 크기가 3인 벡터이다.

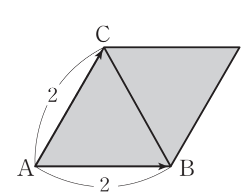
따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 종점 B가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 3인 원이므로 구하는 도형의 길이는

$2\pi\times 3=6\pi$

정답_⑤

276

주어진 조건을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 $\overline{\mathrm{AC}}$와 $\overline{\mathrm{AB}}$를 이웃하는 두 변으로 하는 오른쪽 그림과 같은 평행사변형의 내부와 그 둘레이다.



삼각형 ABC가 정삼각형이므로 구하는 넓이는

$2\triangle\mathrm{ABC}=2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=2\sqrt{3}$

정답_④

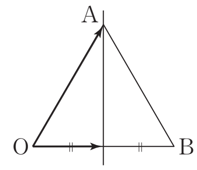
277

$s+2t=1$에서

$t=0$일 때, $s=1$이므로 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}$

$s=0$일 때, $t=\frac{1}{2}$이므로 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 점 A와 선분 OB의 중점을 지나는 직선이다.



정답_ ④

278

$0\le m+n\le 3$에서 $0\le \frac{m}{3}+\frac{n}{3}\le 1$

$\frac{m}{3}=k,\ \frac{n}{3}=l$이라고 하면 $m\ge 0,\ n\ge 0$이므로

$0\le k+l\le 1,\ k\ge 0,\ l\ge 0$

이때, $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$에 $m=3k,\ n=3l$을 대입하면

$\overrightarrow{OP}=3k\overrightarrow{OA}+3l\overrightarrow{OB}=k\times 3\overrightarrow{OA}+l\times 3\overrightarrow{OB}$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 $3\overrightarrow{OA}$와 $3\overrightarrow{OB}$를 이웃하는 두 변으로 하는 삼각형의 내부와 그 둘레이다.

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=4$에서

$|3\overrightarrow{OA}|=|3\overrightarrow{OB}|=12$

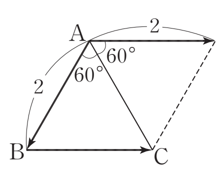
이고 $\angle AOB=45^\circ$이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times 12\times 12\times \sin 45^\circ=36\sqrt{2}$

정답_ ③

279

정삼각형의 한 내각의 크기는 60°이므로 오른쪽 그림과 같이 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{BC}$가 이루는 각의 크기는 120°이다.



$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=-|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos(180^\circ-120^\circ)$

$=-2\times 2\times \cos 60^\circ=-2$

정답_ -2

280

$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

이므로

$36=4-4\vec{a}\cdot\vec{b}+36,\ -4\vec{a}\cdot\vec{b}=-4$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=1$

$\therefore \vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=2^2+1=5$

정답_ ⑤

281

$3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$에서 $\vec{c}=-3\vec{a}-2\vec{b}$

$\therefore |\vec{c}|^2=|-3\vec{a}-2\vec{b}|^2=|3\vec{a}+2\vec{b}|^2$

$=9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=9+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4$

$=13+12\vec{a}\cdot\vec{b}$

이때, $|\vec{c}|=1$이므로

$13+12\vec{a}\cdot\vec{b}=1 \quad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=-1$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{b}-(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{b}-(3|\vec{a}|^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}+2|\vec{b}|^2)$

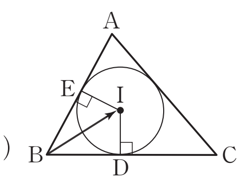
$=-3|\vec{a}|^2-2|\vec{b}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=-3-2+4=-1$

정답_ ③

282

오른쪽 그림과 같이 점 I에서 변 AB에 내린 수선의 발을 E라고 하면



$\overline{BE}=\overline{BD}=8$

$\therefore \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BI}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BI}|\cos(\angle EBI)$

$=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BE}|$

$=15\times 8=120$

정답_ 120

283

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-|\overrightarrow{OA}|^2$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-1\ (\because |\overrightarrow{OA}|=1)$ ······ ㉠

$\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기를 $\theta^\circ\ (0^\circ\le\theta^\circ\le 180^\circ)$라고 하자.

(i) $0^\circ\le\theta^\circ\le 90^\circ$일 때,

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta^\circ$

$=3\cos\theta^\circ\ (\because |\overrightarrow{OA}|=1,\ |\overrightarrow{OB}|=3)$

이때, $0\le\cos\theta^\circ\le 1$에서

$0\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\le 3$이므로 ㉠에 대입하면

$-1\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}\le 2$

(ii) $90^\circ<\theta^\circ\le 180^\circ$일 때,

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos(180^\circ-\theta^\circ)$

$=-3\cos(180^\circ-\theta^\circ)\ (\because |\overrightarrow{OA}|=1,\ |\overrightarrow{OB}|=3)$

이때, $0^\circ\le 180^\circ-\theta^\circ<90^\circ$에서

$0<\cos(180^\circ-\theta^\circ)\le 1$이고

$-3\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<0$이므로 ㉠에 대입하면

$-4\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}<-1$

(i), (ii)에서 $-4\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}\le 2$

따라서 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$의 최댓값은 2, 최솟값은 -4이므로

$M=2,\ m=-4 \quad \therefore Mm=-8$

정답_ ④

284

$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 하면

$|\vec{a}|=4,\ |\vec{b}|=2$

$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|=|\vec{b}-\vec{a}|=3$에서 $|\vec{b}-\vec{a}|^2=9$이므로

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9,\ 16-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4=9$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{11}{2}$

점 P는 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}}{1+2}=\dfrac{\vec{b}+2\vec{a}}{3}$

$\therefore\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

$=\dfrac{1}{3}(|\vec{b}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{a}|^2)$

$=\dfrac{1}{3}\left(4+\dfrac{11}{2}-32\right)=-\dfrac{15}{2}$ 정답_ ①

285

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(3,2)\cdot(3,4)=3\times3+2\times4=17$ 정답_ 17

286

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(4,1)\cdot(-2,k)=-8+k=0$이므로

$k=8$ 정답_ 8

287

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(m,\dfrac{2}{m}\right)\cdot\left(2n,\dfrac{1}{n}\right)=2mn+\dfrac{2}{mn}$

이때, $m>0,\ n>0$에서 $mn>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$2mn+\dfrac{2}{mn}\geq2\sqrt{2mn\times\dfrac{2}{mn}}=2\times2=4$

$\left(\text{단, 등호는 } 2mn=\dfrac{2}{mn}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 최솟값은 4이다. 정답_ ④

288

$2\vec{a}+\vec{b}=2(2,-1)+(3-k,3)=(7-k,1)$이므로

$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(7-k)^2+1^2}=\sqrt{(k-7)^2+1}$

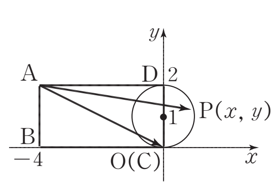
따라서 $|2\vec{a}+\vec{b}|$는 $k=7$일 때 최솟값 1을 가지므로

$\vec{b}=(-4,3)$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=(2,-1)\cdot(-4,3)=-8-3=-11$ 정답_ ②

289

다음 그림과 같이 점 C를 원점, $\overline{BC}$를 x축의 음의 방향에, $\overline{CD}$를 y축의 양의 방향에 놓이도록 직사각형 ABCD를 좌표평면 위에 놓으면 $A(-4,2), B(-4,0), C(0,0), D(0,2)$



이때, $\overline{CD}$를 지름으로 하는 원의 중심은 $(0,1)$, 반지름의 길이는 1이므로 이 원의 방정식은

$x^2+(y-1)^2=1$ ⋯⋯ ㉠

점 P의 좌표를 (x,y)라고 하면

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}=(4,-2)$

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x,y)+(4,-2)=(x+4,y-2)$

$\therefore\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=(4,-2)\cdot(x+4,y-2)$

$=4(x+4)-2(y-2)$

$=4x-2y+20$

$4x-2y+20=k$ (k는 상수)라고 하면 점 P는 원 ㉠ 위에 있으므로 원의 중심 $(0,1)$과 직선 $4x-2y+20-k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 1과 같다.

즉, $\dfrac{|4\times0+(-2)\times1+20-k|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}=1$이므로

$\dfrac{|18-k|}{2\sqrt{5}}=1,\ |18-k|=2\sqrt{5},\ 18-k=\pm2\sqrt{5}$

$\therefore\ k=18-2\sqrt{5}$ 또는 $k=18+2\sqrt{5}$

따라서 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$의 최댓값은 $18+2\sqrt{5}$이다. 정답_ ⑤

290

크기가 1인 두 벡터 $\vec{a},\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ°라고 하면

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$이므로 $0^\circ\leq\theta^\circ\leq90^\circ$

따라서 $\cos\theta^\circ=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1\times1}=\dfrac{1}{2}$이므로

$\theta^\circ=60^\circ$ 정답_ ③

291

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180^\circ-120^\circ)$

$=-3\times2\times\cos60^\circ=-3$

이므로

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=3^2-2\times(-3)+2^2=19$

$\therefore\ |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{19}$ 정답_ ①

292

$\vec{a}+\vec{b}=(-1,3)+(2,-1)=(1,2)$

$\vec{a}-\vec{b}=(-1,3)-(2,-1)=(-3,4)$

$\therefore\ (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=(1,2)\cdot(-3,4)=-3+8=5$

따라서 $0^\circ\leq\theta^\circ\leq90^\circ$이므로

$\cos\theta^\circ=\dfrac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}-\vec{b}|}$

$=\dfrac{5}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{(-3)^2+4^2}}$

$=\dfrac{5}{\sqrt{5}\times5}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 정답_ ⑤

293

$\vec{b}+\vec{c}=(-2, 5)+(3, k)=(1, 5+k)$이므로

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=(0, -2)\cdot(1, 5+k)=-10-2k$ …… ㉠

벡터의 내적의 정의에 의해

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|\,|\vec{b}+\vec{c}|\cos 45^\circ$

$=\sqrt{0^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+(5+k)^2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=\sqrt{2(26+10k+k^2)}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\sqrt{2(26+10k+k^2)}=-10-2k$ …… ㉢

$2(26+10k+k^2)=4k^2+40k+100$

$k^2+10k+24=0$, $(k+4)(k+6)=0$

$\therefore k=-4$ 또는 $k=-6$

그런데 ㉢에서 $-10-2k\ge 0$, 즉 $k\le -5$이므로

$k=-6$ 정답_ -6

294

$|\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt{5}$에서 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=20$

이때, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=2\sqrt{2}$이고

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=2^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+(2\sqrt{2})^2=12+2\vec{a}\cdot\vec{b}$

이므로

$12+2\vec{a}\cdot\vec{b}=20$ $\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=4$

$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ°라고 하면

$0^\circ\le\theta^\circ\le 90^\circ$이다.

즉, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta^\circ=4$이므로

$2\times 2\sqrt{2}\times\cos\theta^\circ=4$ $\therefore \cos\theta^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기는 45°이다. 정답_ ②

295

선분 AB가 원 O의 지름이므로 $\angle\text{APB}=90^\circ$

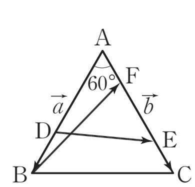
삼각형 ABP에서 $\overline{\text{AP}}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

한편, 두 벡터 $\overrightarrow{\text{AB}}$와 $\overrightarrow{\text{AP}}$가 이루는 각의 크기를 θ°라고 하면

$\cos\theta^\circ=\dfrac{\overline{\text{AP}}}{\overline{\text{AB}}}=\dfrac{3}{5}$

$\therefore \overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AP}}=5\times 3\times\cos\theta^\circ=5\times 3\times\dfrac{3}{5}=9$ 정답_ 9

296



오른쪽 그림과 같이 $\overrightarrow{\text{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\text{AC}}=\vec{b}$라고 하면 삼각형 ABC가 한 변의 길이가 3인 정삼각형이므로

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=3$, $\angle\text{BAC}=60^\circ$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 60^\circ=3\times 3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$

한편,

$\overrightarrow{\text{BF}}=\overrightarrow{\text{AF}}-\overrightarrow{\text{AB}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{AC}}-\overrightarrow{\text{AB}}=\dfrac{1}{4}\vec{b}-\vec{a}$,

$\overrightarrow{\text{DE}}=\overrightarrow{\text{AE}}-\overrightarrow{\text{AD}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\text{AC}}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\text{AB}}=\dfrac{3}{4}\vec{b}-\dfrac{2}{3}\vec{a}$

이므로

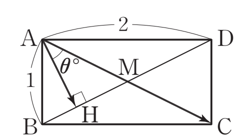
$|\overrightarrow{\text{BF}}+\overrightarrow{\text{DE}}|^2=\left|\left(\dfrac{1}{4}\vec{b}-\vec{a}\right)+\left(\dfrac{3}{4}\vec{b}-\dfrac{2}{3}\vec{a}\right)\right|^2$

$=\left|\vec{b}-\dfrac{5}{3}\vec{a}\right|^2=\left(\vec{b}-\dfrac{5}{3}\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}-\dfrac{5}{3}\vec{a}\right)$

$=|\vec{b}|^2-\dfrac{10}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{25}{9}|\vec{a}|^2$

$=3^2-\dfrac{10}{3}\times\dfrac{9}{2}+\dfrac{25}{9}\times 3^2=19$ 정답_ ③

297



오른쪽 그림과 같이 두 대각선의 교점을 M이라 하고, $\angle\text{HAM}=\theta^\circ$로 놓으면

$0^\circ\le\theta^\circ\le 90^\circ$이므로

$\overrightarrow{\text{AC}}\cdot\overrightarrow{\text{AH}}=|\overrightarrow{\text{AC}}|\,|\overrightarrow{\text{AH}}|\cos\theta^\circ$

$=2|\overrightarrow{\text{AM}}|\,|\overrightarrow{\text{AH}}|\cos\theta^\circ$

$=2|\overrightarrow{\text{AH}}|\,|\overrightarrow{\text{AM}}|\cos\theta^\circ$

$=2|\overrightarrow{\text{AH}}|\,|\overrightarrow{\text{AH}}|=2|\overrightarrow{\text{AH}}|^2$

한편, 삼각형 ABD에서 $\overline{\text{BD}}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{AB}}\times\overline{\text{AD}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{BD}}\times\overline{\text{AH}}$에서

$\dfrac{1}{2}\times 1\times 2=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\overline{\text{AH}}$ $\therefore \overline{\text{AH}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{AC}}\cdot\overrightarrow{\text{AH}}=2|\overrightarrow{\text{AH}}|^2=2\times\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{8}{5}$ 정답_ ③

298

$\vec{a}+\vec{b}=(3, 1)+(1, 2)=(4, 3)$

$2\vec{a}-t\vec{b}=2(3, 1)-t(1, 2)=(6-t, 2-2t)$

$\vec{a}+\vec{b}$와 $2\vec{a}-t\vec{b}$가 서로 수직이므로

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-t\vec{b})=0$

$(4, 3)\cdot(6-t, 2-2t)=0$

$4(6-t)+3(2-2t)=0$, $24-4t+6-6t=0$

$10t=30$ $\therefore t=3$ 정답_ ③

299

$\vec{a}$와 $\vec{b}$가 서로 수직이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$에서

$(3t-2, t)\cdot\left(-1, \dfrac{1}{t}\right)=0$, $-3t+2+1=0$ $\therefore t=1$

$\vec{a}=(1, 1)$, $\vec{b}=(-1, 1)$이므로

$\vec{a}+2\vec{b}=(1, 1)+2(-1, 1)=(-1, 3)$

$\therefore |\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$ 정답_ ④

300

$\overrightarrow{OA}=(1,2)$, $\overrightarrow{OB}=(3,-4)$이고 두 벡터 $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{OA}$가 서로 평행하므로

$\overrightarrow{BP}=k\overrightarrow{OA}$ ($k\neq0$인 실수)

로 놓으면 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}$이므로

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{OA}$

$=(3,-4)+k(1,2)=(3+k,-4+2k)=(x,y)$

한편, 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OB}$가 서로 수직이므로

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=(3+k,-4+2k)\cdot(3,-4)=0$

$3(3+k)-4(-4+2k)=0$

$-5k+25=0$ $\quad\therefore k=5$

따라서 $\overrightarrow{OP}=(8,6)$이므로 $\quad x=8, y=6$

$\therefore x+y=14$ 정답_⑤

301

$\vec{a}=(1,0)$, $\vec{b}=(0,2)$, $\vec{c}=(x,y)$에서

$\vec{a}+t\vec{b}=(1,0)+t(0,2)=(1,2t)$

$\vec{c}+t\vec{a}=(x,y)+t(1,0)=(x+t,y)$

$\vec{a}+t\vec{b}$와 $\vec{c}+t\vec{a}$가 서로 수직이므로

$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{c}+t\vec{a})=(1,2t)\cdot(x+t,y)$

$=x+t+2ty$

$=x+t(1+2y)=0$ …… ㉠

㉠이 t의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$x=0, 1+2y=0$ $\quad\therefore x=0, y=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore x+y=-\dfrac{1}{2}$ 정답_②

302

$\vec{a}$에 수직인 벡터를 $\vec{c}=(x,y)$라고 하면 $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$이므로

$(1,-1)\cdot(x,y)=x-y=0$ $\quad\therefore x=y$

이때, $|\vec{c}|=\sqrt{2}$이므로

$|\vec{c}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}|x|=\sqrt{2}$

$|x|=1$ $\quad\therefore x=\pm1$

따라서 $\vec{a}$에 수직이고 크기가 $\sqrt{2}$인 벡터는

$\vec{c}=(1,1)$ 또는 $\vec{c}=(-1,-1)$

이므로 모든 성분의 합의 최댓값은

$1+1=2$ 정답_②

303

$\vec{a}=(1,-1)$, $\vec{b}=(2,1-k)$가 서로 수직이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$에서

$(1,-1)\cdot(2,1-k)=0,\ 2-(1-k)=0$

$k+1=0$ $\quad\therefore k=-1$

즉, $\vec{b}=(2,2)$이고 $\vec{c}=(-1,3)$이므로

$\vec{b}\cdot\vec{c}=(2,2)\cdot(-1,3)=-2+6=4$

따라서 $0^\circ\le\theta^\circ\le90^\circ$이므로

$\cos\theta^\circ=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}=\dfrac{4}{\sqrt{2^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+3^2}}$

$=\dfrac{4}{\sqrt{8}\sqrt{10}}=\dfrac{4}{4\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 정답_①

304

$6\vec{a}+\vec{b}$와 $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직이므로

$(6\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0, 6|\vec{a}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=3$이므로

$6\times1^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-3^2=0$ $\quad\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{5}$ 정답_②

305

$\vec{a}-2\vec{b}$와 $\vec{a}+\vec{b}$가 서로 수직이므로

$(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0$

$\therefore |\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=0$ …… ㉠

이때, $2|\vec{a}|=3|\vec{b}|$이므로 $|\vec{a}|=\dfrac{3}{2}|\vec{b}|$를 ㉠에 대입하면

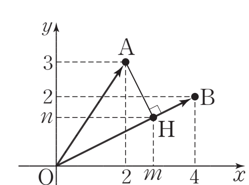
$\dfrac{9}{4}|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=0$ $\quad\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{4}|\vec{b}|^2$

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$이므로 $\quad 0^\circ\le\theta\le90^\circ$

$\therefore \cos\theta^\circ=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\frac{1}{4}|\vec{b}|^2}{\frac{3}{2}|\vec{b}|^2}=\dfrac{1}{6}$ 정답_①

306

주어진 조건을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



세 점 O, H, B가 한 직선 위에 있으므로 $\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OB}$ ($k\neq0$인 실수)로 놓으면

$\overrightarrow{OH}=k(4,2)=(4k,2k)$

$\therefore \overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}$

$=(4k,2k)-(2,3)$

$=(4k-2,2k-3)$

$\overrightarrow{OH}$와 $\overrightarrow{AH}$가 서로 수직이므로 $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AH}=0$에서

$(4k,2k)\cdot(4k-2,2k-3)=0$

$4k(4k-2)+2k(2k-3)=0, 2k(10k-7)=0$

$k\neq0$이므로 $\quad k=\dfrac{7}{10}$

따라서 점 H의 좌표는 $\left(\dfrac{14}{5},\dfrac{7}{5}\right)$이므로

$m=\dfrac{14}{5}, n=\dfrac{7}{5}$ $\quad\therefore m+n=\dfrac{21}{5}$ 정답_④

307

점 $(2, 1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(1, 2)$인 직선의 방정식은

$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}$

이 직선이 점 $(0, a)$를 지나므로

$\frac{0-2}{1}=\frac{a-1}{2}$ $\therefore a=-3$

정답_ ①

308

점 $(4, 1)$을 지나고 벡터 $\vec{n}=(1, 2)$에 수직인 직선의 방정식은

$(x-4)+2(y-1)=0$

$\therefore x+2y-6=0$

이 직선이 x축과 만나는 점의 좌표는 $(6, 0)$, y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 3)$이므로

$a=6, b=3$ $\therefore a+b=9$

정답_ 9

309

점 $(-1, 1)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(-1, -2)$인 직선의 방정식은

$-(x+1)-2(y-1)=0$

$\therefore x+2y-1=0$ …… ㉠

점 $(2, -1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(1, 2)$인 직선의 방정식은

$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}$ $\therefore 2x-y-5=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{11}{5}, y=-\frac{3}{5}$

따라서 $a=\frac{11}{5}, b=-\frac{3}{5}$이므로

$a+b=\frac{8}{5}$

정답_ ④

310

두 점 $\mathrm{A}(2, 1)$, $\mathrm{B}(-1, 0)$에 대하여 직선 AB의 방향벡터는 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3, -1)$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$를 법선벡터로 하고, 점 $\mathrm{A}(2, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$-3(x-2)-(y-1)=0$

$\therefore 3x+y-7=0$

따라서 $a=3, b=-7$이므로

$a+b=-4$

정답_ -4

311

두 점 $\mathrm{A}(-3, 0)$, $\mathrm{B}(1, 2)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4, 2)$이므로 이 벡터를 법선벡터로 하고 점 $(-2, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$4(x+2)+2(y-1)=0$

$\therefore 2x+y+3=0$

이 직선의 x절편은 $-\frac{3}{2}$, y절편은 -3이므로 이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left|-\frac{3}{2}\right|\times|-3|=\frac{9}{4}$

정답_ ⑤

312

(1) $\cos\theta°=\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}=\frac{|1\times0+3\times2|}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{0^2+2^2}}$

$=\frac{6}{2\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

(2) $\cos\theta°=\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}=\frac{|2\times(-3)+1\times2|}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{(-3)^2+2^2}}$

$=\frac{4}{\sqrt{65}}=\frac{4\sqrt{65}}{65}$

정답_ (1) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ (2) $\frac{4\sqrt{65}}{65}$

313

두 직선 $\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{3}$, $\frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{3}$의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}, \vec{u_2}$라고 하면

$\vec{u_1}=(4, 3), \vec{u_2}=(-1, 3)$

두 방향벡터 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$가 이루는 예각의 크기가 $\theta°$이므로

$\cos\theta°=\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}=\frac{|4\times(-1)+3\times3|}{\sqrt{4^2+3^2}\sqrt{(-1)^2+3^2}}$

$=\frac{5}{5\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

정답_ ⑤

314

두 직선 l_1, l_2의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}, \vec{u_2}$라고 하면

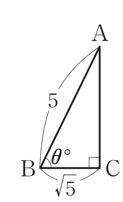
$\vec{u_1}=(3, 4), \vec{u_2}=(-1, 2)$

두 방향벡터 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$가 이루는 예각의 크기가 $\theta°$이므로

$\cos\theta°=\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}=\frac{|3\times(-1)+4\times2|}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{(-1)^2+2^2}}$

$=\frac{5}{5\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos\theta°=\frac{\sqrt{5}}{5}$이므로 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC를 생각하면



$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{5}$

$\therefore \sin\theta°=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

정답_ ④

315

두 직선 $x-5=\frac{y+2}{3}$, $\frac{x+2}{k}=\frac{y}{1-k^2}$의 방향벡터를 각각

$\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$라고 하면

$\overrightarrow{u_1}=(1,\ 3)$, $\overrightarrow{u_2}=(k,\ 1-k^2)$

두 직선이 서로 수직이므로 $\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}=0$에서

$(1,\ 3)\cdot(k,\ 1-k^2)=0$

$k+3(1-k^2)=0$

$\therefore\ 3k^2-k-3=0$ ······ ㉠

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=1^2-4\times3\times(-3)=37>0$

따라서 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 가지므로 근과 계수의 관계에 의해 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{1}{3}$이다.

정답_ ④

316

두 직선 $\frac{x-2}{-3}=\frac{y+5}{k-1}$, $\frac{x+1}{9}=\frac{y-2}{-6}$의 방향벡터를 각각 $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$라고 하면

$\overrightarrow{u_1}=(-3,\ k-1)$, $\overrightarrow{u_2}=(9,\ -6)$

두 직선이 서로 평행하면 두 방향벡터 $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$도 서로 평행하므로

$\overrightarrow{u_1}=t\overrightarrow{u_2}$ ($t\neq0$인 실수)

로 놓으면 $(-3,\ k-1)=t(9,\ -6)$에서

$-3=9t$, $k-1=-6t$

$\therefore\ t=-\frac{1}{3}$, $k=3$

정답_ ①

317

세 직선 $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{3}$, $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{a}$, $\frac{x-2}{b}=\frac{1-y}{2}$의 방향벡터를 각각 $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$이라고 하면

$\overrightarrow{u_1}=(2,3)$, $\overrightarrow{u_2}=(4,a)$, $\overrightarrow{u_3}=(b,-2)$

두 직선 $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{3}$, $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{a}$가 서로 평행하므로 두 벡터 $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$도 서로 평행하다.

따라서 $\overrightarrow{u_2}=t\overrightarrow{u_1}$ ($t\neq0$인 실수)로 놓으면

$(4,a)=t(2,3)$에서 $4=2t$, $a=3t$

$\therefore\ t=2$, $a=6$

두 직선 $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{3}$, $\frac{x-2}{b}=\frac{1-y}{2}$가 서로 수직이므로 두 벡터 $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_3}$도 서로 수직이다.

즉, $\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_3}=0$에서

$(2,3)\cdot(b,-2)=0$, $2b-6=0$ $\quad\therefore\ b=3$

$\therefore\ a+b=9$

정답_ 9

318

점 P의 좌표를 (x,y)라고 하면

$\overrightarrow{AP}=(x-2,y-1)$, $\overrightarrow{BP}=(x+2,y-3)$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$에서

$(x-2,y-1)\cdot(x+2,y-3)=0$

$(x-2)(x+2)+(y-1)(y-3)=0$

$x^2+y^2-4y-1=0$ $\quad\therefore\ x^2+(y-2)^2=5$

따라서 점 P의 자취는 중심의 좌표가 $(0,2)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원을 나타내므로

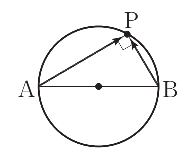
$a=0$, $b=2$, $r=\sqrt{5}$

$\therefore\ a+b+r^2=7$

정답_ ③

319

원 위의 점을 $P(x,y)$라고 하면 오른쪽 그림과 같이 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$이므로



$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$

이때, $\overrightarrow{AP}=(x-4,y+3)$,

$\overrightarrow{BP}=(x-2,y+1)$이므로

$(x-4,y+3)\cdot(x-2,y+1)=0$

$(x-4)(x-2)+(y+3)(y+1)=0$

$x^2+y^2-6x+4y+11=0$

$\therefore\ (x-3)^2+(y+2)^2=2$

정답_ $(x-3)^2+(y+2)^2=2$

320

점 P가 선분 AB를 $m:1$로 내분하는 점이므로

$\vec{p}=\frac{m\vec{b}+\vec{a}}{m+1}=\frac{\vec{a}+m\vec{b}}{m+1}$ ······ ❶

점 Q가 선분 AP를 $3:1$로 내분하는 점이므로

$\vec{q}=\frac{3\vec{p}+\vec{a}}{3+1}=\frac{3\times\frac{\vec{a}+m\vec{b}}{m+1}+\vec{a}}{4}$

$=\frac{(m+4)\vec{a}+3m\vec{b}}{4(m+1)}$ ······ ㉠

또, 점 Q는 선분 AB의 중점이므로

$\vec{q}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ ······ ㉡

······ ❷

㉠, ㉡이 서로 같으므로

$\frac{m+4}{4(m+1)}=\frac{1}{2}$, $\frac{3m}{4(m+1)}=\frac{1}{2}$

즉, $2m+8=4m+4$

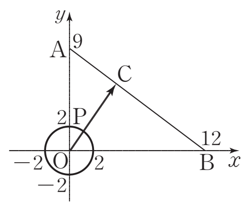
$2m=4$ $\quad\therefore\ m=2$ ······ ❸

정답_ 2

단계	채점 기준	비율
❶	점 P의 위치벡터 $\vec{p}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내기	20%
❷	점 Q의 위치벡터 $\vec{q}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내기	50%
❸	m의 값 구하기	30%

321

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점을 C라고 하면



$$\overrightarrow{PC}=\frac{\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PA}}{1+2}$$
$$=\frac{2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{3}$$

이므로

$|2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=|3\overrightarrow{PC}|$ ……… ❶

이때, $A(0,9)$, $B(12,0)$이므로 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{1\times12+2\times0}{1+2},\ \frac{1\times0+2\times9}{1+2}\right)$$

$\therefore C(4,6)$ ……… ❷

따라서 $|\overrightarrow{PC}|$의 최솟값은

$\overline{OC}-\overline{OP}=\sqrt{4^2+6^2}-2=2\sqrt{13}-2$

이므로 $|2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$의 최솟값은

$3(2\sqrt{13}-2)=6\sqrt{13}-6$ ……… ❸

정답_ $6\sqrt{13}-6$

단계	채점 기준	비율
❶	$\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점을 C로 놓고 $\|2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\|=\|3\overrightarrow{PC}\|$임을 보이기	40%
❷	점 C의 좌표 구하기	20%
❸	$\|2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\|$의 최솟값 구하기	40%

322

삼각형 OA_1A_2에서

$$\angle A_1OA_2=\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$$

따라서 $\angle A_1OA_3=45^\circ\times2=90^\circ$이므로 삼각형 OA_1A_3은 직각삼각형이고

$\overline{OA_1}=\overline{OA_3}=2$ ……… ❶

한편,

$(\overrightarrow{A_1O}\cdot\overrightarrow{A_1A_1})+(\overrightarrow{A_1O}\cdot\overrightarrow{A_1A_2})+\cdots+(\overrightarrow{A_1O}\cdot\overrightarrow{A_1A_8})$

$=\overrightarrow{A_1O}\cdot(\overrightarrow{A_1A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_1A_8})$

이고

$\overrightarrow{A_1A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_1A_8}$

$=(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_1})+(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1})+\cdots+(\overrightarrow{OA_8}-\overrightarrow{OA_1})$

$=(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_8})-8\overrightarrow{OA_1}$

$=\vec{0}-8\overrightarrow{OA_1}=-8\overrightarrow{OA_1}$ ……… ❷

이므로

$(\overrightarrow{A_1O}\cdot\overrightarrow{A_1A_1})+(\overrightarrow{A_1O}\cdot\overrightarrow{A_1A_2})+\cdots+(\overrightarrow{A_1O}\cdot\overrightarrow{A_1A_8})$

$=\overrightarrow{A_1O}\cdot(-8\overrightarrow{OA_1})=\overrightarrow{A_1O}\cdot(8\overrightarrow{A_1O})$

$=8|\overrightarrow{A_1O}|^2=8\times2^2$

$=32$ ……… ❸

정답_ 32

단계	채점 기준	비율
❶	$\overline{OA_1}$의 길이 구하기	30%
❷	$\overrightarrow{A_1A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_1A_8}=-8\overrightarrow{OA_1}$임을 보이기	50%
❸	$(\overrightarrow{A_1O}\cdot\overrightarrow{A_1A_1})+(\overrightarrow{A_1O}\cdot\overrightarrow{A_1A_2})+\cdots+(\overrightarrow{A_1O}\cdot\overrightarrow{A_1A_8})$의 값 구하기	20%

323

$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$4\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \qquad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

즉, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 수직이다. ……… ❶

따라서 $\overline{OA}=\overline{OB}=4$인 삼각형 OAB는 $\angle AOB=90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times4=8$ ……… ❷

정답_ 8

단계	채점 기준	비율
❶	두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 수직임을 보이기	60%
❷	삼각형 OAB의 넓이 구하기	40%

324

$A(2, 3)$, $B(4, 1)$이고 점 P가 직선 $x+y=1$, 즉 $y=-x+1$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(t, -t+1)$로 놓으면

$\overrightarrow{AP}=(t-2, -t-2)$, $\overrightarrow{BP}=(t-4, -t)$ ……… ❶

$\therefore \overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=(2t-6, -2t-2)$ ……… ❷

$\therefore |\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|=\sqrt{(2t-6)^2+(-2t-2)^2}$

$=\sqrt{8t^2-16t+40}$

$=\sqrt{8(t-1)^2+32}$

따라서 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|$는 $t=1$일 때 최소이고, 최솟값은

$\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ ……… ❸

정답_ $4\sqrt{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	$\overrightarrow{AP}$와 $\overrightarrow{BP}$를 성분으로 나타내기	40%
❷	$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}$를 성분으로 나타내기	20%
❸	$\|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}\|$의 최솟값 구하기	40%

325

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(3t-k, t+2)\cdot(-t^2, 3t^2-2kt+1)$

$=-t^2(3t-k)+(t+2)(3t^2-2kt+1)$

$=(6-k)t^2-(4k-1)t+2$

모든 실수 t에 대하여 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 수직이 되지 않으므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}\neq0$, 즉 t에 대한 이차방정식

$(6-k)t^2-(4k-1)t+2=0$ …… ㉠

이 실근을 갖지 않아야 한다. ……… ❶

t에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라고 하면

$D=(4k-1)^2-4\times(6-k)\times2<0$

$16k^2-47<0$ $\quad\therefore -\frac{\sqrt{47}}{4}<k<\frac{\sqrt{47}}{4}$ ……………… ❷

따라서 정수 k는 $-1, 0, 1$이므로 구하는 합은

$-1+0+1=0$ ……………… ❸

정답_ 0

단계	채점 기준	비율
❶	$\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 수직이 되지 않도록 하는 조건 알기	40%
❷	k의 값의 범위 구하기	40%
❸	모든 정수 k의 값의 합 구하기	20%

326

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CB}$이므로

$2\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+4\overrightarrow{CP}=\vec{0}$에 대입하면

$2(\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CA})+3(\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CB})+4\overrightarrow{CP}=\vec{0}$

$9\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CB}$

$\therefore \overrightarrow{CP}=\frac{2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CB}}{9}$ …… ㉠

㉠을 $\overrightarrow{CQ}=k\overrightarrow{CP}$에 대입하면

$\overrightarrow{CQ}=k\frac{2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CB}}{9}$

점 Q가 선분 AB 위의 점이므로

$\frac{2k}{9}+\frac{3k}{9}=1$ $\quad\therefore k=\frac{9}{5}$

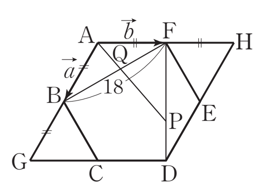
정답_ ④

327

점 P는 선분 FD를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FP}=\overrightarrow{AF}+\frac{2}{3}\overrightarrow{FD}$

오른쪽 그림에서 □AGDH가 평행사변형이므로



$\overrightarrow{AD}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})$

$\therefore \overrightarrow{FD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AF}$

$=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})-\overrightarrow{AF}$

$=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$

이때 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$이므로

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AF}+\frac{2}{3}(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})$

$=\vec{b}+\frac{2}{3}(2\vec{a}+\vec{b})=\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{5}{3}\vec{b}$

세 점 A, Q, P가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$ ($k\neq0$인 실수)로 놓으면

$\overrightarrow{AQ}=k\left(\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{5}{3}\vec{b}\right)$

점 Q가 선분 BF 위의 점이므로

$k\left(\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\right)=1$, $3k=1$ $\quad\therefore k=\frac{1}{3}$

$\therefore \overrightarrow{AQ}=\frac{4\vec{a}+5\vec{b}}{9}$

따라서 점 Q는 선분 BF를 $5:4$로 내분하는 점이고, $\overline{BF}=18$이므로

$\overline{BQ}=18\times\frac{5}{9}=10$

정답_ ⑤

328

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라고 하면

$\overrightarrow{AD}=\frac{5}{8}\vec{a}$, $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overline{DF}:\overline{FE}=2:1$이므로

$\overrightarrow{AF}=\frac{2\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}}{2+1}=\frac{2\times\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{5}{8}\vec{a}}{3}=\frac{5\vec{a}+8\vec{b}}{24}$

$\therefore \frac{24}{13}\overrightarrow{AF}=\frac{24}{13}\times\frac{5\vec{a}+8\vec{b}}{24}=\frac{5\vec{a}+8\vec{b}}{13}$

따라서 $\frac{24}{13}\overrightarrow{AF}$의 종점은 $\overline{BC}$를 $8:5$로 내분하는 점이고 $\overline{AF}$의 연장선과 $\overline{BC}$가 만나는 점이 G이므로 $\frac{24}{13}\overrightarrow{AF}$의 종점은 점 G이다.

즉, $\frac{24}{13}\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AG}$이므로

$\overline{AF}:\overline{FG}=13:11$, $\overline{BG}:\overline{GC}=8:5$

$\triangle CEF=a$라고 하면

$\triangle AFE=\triangle CEF=a$

$\triangle ADF=2\triangle AFE=2a$

$\triangle BFD=\frac{3}{5}\triangle ADF=\frac{6}{5}a$

$\triangle BGF=\frac{11}{13}(\triangle ADF+\triangle BFD)=\frac{176}{65}a$

$\triangle CFG=\frac{5}{8}\triangle BGF=\frac{22}{13}a$

$\therefore \frac{\triangle ADF+\triangle BGF+\triangle CEF}{\triangle AFE+\triangle BFD+\triangle CFG}$

$=\frac{2a+\frac{176}{65}a+a}{a+\frac{6}{5}a+\frac{22}{13}a}=\frac{371}{253}$

따라서 $m=253$, $n=371$이므로

$m+n=624$

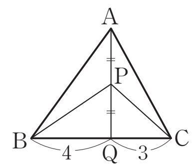
정답_ 624

329

$7\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서

$\overrightarrow{PA}+\frac{3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}}{7}=\vec{0}$

$\frac{3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}}{7}=\overrightarrow{PQ}$라고 하면 점 Q는 $\overline{BC}$를 $4:3$으로 내분하는 점이다.



또, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PQ}=\vec{0}$에서 $\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{PQ}$이므로

세 점 A, P, Q는 한 직선 위에 있고

$\overline{AP}:\overline{PQ}=1:1$이다.

$\triangle ABC=S$라고 하면

$$\triangle PAB=\frac{1}{2}\triangle ABQ$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}\triangle ABC=\frac{2}{7}S$$
$$\triangle PBC=\frac{1}{2}\triangle ABC=\frac{1}{2}S$$
$$\triangle PCA=\frac{1}{2}\triangle AQC=\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}\triangle ABC=\frac{3}{14}S$$
$$\therefore \triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCA=\frac{2}{7}S:\frac{1}{2}S:\frac{3}{14}S$$
$$=4:7:3$$

따라서 $m=4$, $n=7$이므로

$m+n=11$

정답_ ③

330

세 점 A, E, D가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{OE}=s\overrightarrow{OA}+(1-s)\overrightarrow{OD}$ ($s\neq0$인 실수) …… ㉠

$\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OE}$이므로

$\overrightarrow{OE}=s\overrightarrow{OA}+3(1-s)\overrightarrow{OB}$ …… ㉡

또, 세 점 B, E, C가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{OE}=t\overrightarrow{OB}+(1-t)\overrightarrow{OC}$ ($t\neq0$인 실수) …… ㉢

$\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}$이므로

$\overrightarrow{OE}=t\overrightarrow{OB}+2(1-t)\overrightarrow{OA}$ …… ㉣

㉡, ㉣에서 $s=2(1-t)$, $3(1-s)=t$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $s=\frac{4}{5}$, $t=\frac{3}{5}$

㉠에서 $\overrightarrow{OE}=\frac{4}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OD}=\frac{\overrightarrow{OD}+4\overrightarrow{OA}}{5}$

$\therefore \overline{AE}:\overline{ED}=1:4$

㉢에서 $\overrightarrow{OE}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}=\frac{2\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OB}}{5}$

$\therefore \overline{BE}:\overline{EC}=2:3$

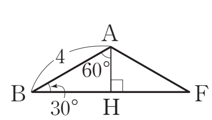
따라서 $m=4$, $n=2$이므로 $m+n=6$

정답_ ③

331

정육각형의 한 내각의 크기는

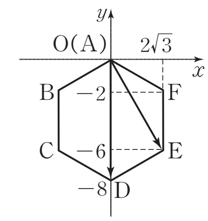
$\frac{180^\circ\times(6-2)}{6}=120^\circ$



이므로 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BF}$ 위에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\angle BAH=60^\circ$, $\angle ABH=30^\circ$

$\therefore \overline{AH}=2$, $\overline{BH}=2\sqrt{3}$



오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A가 원점, $\overline{AD}$가 y축의 음의 방향에 놓이도록 주어진 정육각형을 좌표평면 위에 놓으면

A$(0, 0)$, D$(0, -8)$,

E$(2\sqrt{3}, -6)$

$\overrightarrow{AD}=(0, -8)$, $\overrightarrow{AE}=(2\sqrt{3}, -6)$이므로

$$(1-t)\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{AE}=(1-t)(0, -8)+t(2\sqrt{3}, -6)$$
$$=(2\sqrt{3}t, 2t-8)$$
$$\therefore |(1-t)\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{AE}|=\sqrt{(2\sqrt{3}t)^2+(2t-8)^2}$$
$$=\sqrt{16t^2-32t+64}$$

$|(1-t)\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{AE}|=8\sqrt{3}$에서

$\sqrt{16t^2-32t+64}=8\sqrt{3}$

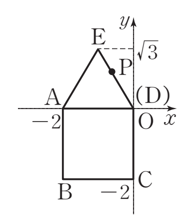
양변을 제곱하면 $16t^2-32t+64=192$

$t^2-2t-8=0$, $(t+2)(t-4)=0$

$\therefore t=4$ ($\because t>0$)

정답_ 4

332



오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 D가 원점, $\overline{AD}$가 x축의 음의 방향에, $\overline{DC}$가 y축의 음의 방향에 놓이도록 주어진 도형을 좌표평면 위에 놓으면

A$(-2, 0)$, B$(-2, -2)$, C$(0, -2)$,

D$(0, 0)$, E$(-1, \sqrt{3})$

점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면 점 P가 $\overline{DE}$ 위의 점이므로

$y=-\sqrt{3}x$, $-1\le x\le 0$

$$\therefore \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BP}=-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{DB}$$
$$=-(-2, 0)+(x, y)-(-2, -2)$$
$$=(x+4, y+2)=(x+4, -\sqrt{3}x+2)$$
$$\therefore |\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BP}|^2=(x+4)^2+(-\sqrt{3}x+2)^2$$
$$=4x^2+4(2-\sqrt{3})x+20$$
$$=4\left(x+\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2+13+4\sqrt{3}$$

$-1\le x\le 0$이므로 $|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BP}|$은 $x=\frac{\sqrt{3}-2}{2}$일 때 최솟값

$13+4\sqrt{3}$을 갖는다.

정답_ ⑤

333

$6\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\vec{0}$에서 $6\overrightarrow{OA}=-4\overrightarrow{OB}-5\overrightarrow{OC}$

양변을 제곱하면

$36|\overrightarrow{OA}|^2=16|\overrightarrow{OB}|^2+40\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+25|\overrightarrow{OC}|^2$

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$이므로

$36=16+40\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+25$, $40\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-5$

$\therefore \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{1}{8}$

한편, $\overline{BC}=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|$이므로

$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OB}|^2$

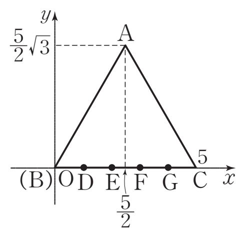
$=1-2\times\left(-\frac{1}{8}\right)+1=\frac{9}{4}$

$\therefore |\overrightarrow{BC}|=\frac{3}{2}$

따라서 선분 BC의 길이는 $\frac{3}{2}$이다. 정답_ ③

334

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 B가 원점, $\overline{BC}$가 x축의 양의 방향에 놓이도록 주어진 정삼각형을 좌표평면 위에 놓으면



$A\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\sqrt{3}\right), B(0, 0), C(5, 0),$

$D(1, 0), E(2, 0), F(3, 0), G(4, 0)$

따라서

$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{OA}=-\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)=\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA}=(3, 0)-\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)=\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$

$\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OG}=(3, 0)-(4, 0)=(-1, 0)$

$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)-(5, 0)=\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$

이므로

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)+\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$

$=(-2, -5\sqrt{3})$

$\overrightarrow{GF}-\overrightarrow{CA}=(-1, 0)-\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)=\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$

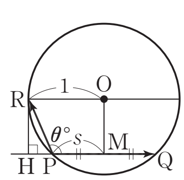
$\therefore (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})\cdot(\overrightarrow{GF}-\overrightarrow{CA})$

$=(-2, -5\sqrt{3})\cdot\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$

$=-3+\frac{75}{2}=\frac{69}{2}$ 정답_ $\frac{69}{2}$

335

오른쪽 그림과 같이 점 R에서 선분 PQ의 연장선에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\angle RPQ=\theta°\ (90°<\theta°\leq 180°)$로 놓으면

직각삼각형 PRH에서

$\angle RPH=180°-\theta°$이므로

$|\overrightarrow{PR}|\cos(180°-\theta°)=|\overrightarrow{PH}|$ …… ㉠

$\therefore \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=-|\overrightarrow{PQ}|\,|\overrightarrow{PR}|\cos(180°-\theta°)$

$=-|\overrightarrow{PQ}|\,|\overrightarrow{PH}|$ ($\because$ ㉠)

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$가 최소가 되려면 $\overline{PH}$가 최대가 되어야 하므로 점 R는 선분 PQ에 평행하고 원의 중심 O를 지나는 직선 위의 점이다.

두 점 P, Q의 중점을 M이라 하고 $|\overrightarrow{PM}|=s$로 놓으면

$|\overrightarrow{PH}|=1-s$

$\therefore \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=-|\overrightarrow{PQ}|\,|\overrightarrow{PH}|=-2s(1-s)=2s^2-2s$

$=2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\geq-\frac{1}{2}$

따라서 구하는 최솟값은 $-\frac{1}{2}$이다. 정답_ ②

336

$\sqrt{25-9}=4$이므로 $F(4, 0), F'(-4, 0)$

$A(5, 0)$으로 놓으면 $\overline{AF}=1$이므로 원 C_1의 반지름의 길이는 1이다.

한편, $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{PF'}=0$에서 $\overrightarrow{PF}\perp\overrightarrow{PF'}$이므로

$\overline{PF}=s, \overline{PF'}=t$로 놓으면 $s+t=10, s^2+t^2=8^2$

$\therefore st=\frac{(s+t)^2-(s^2+t^2)}{2}=\frac{10^2-8^2}{2}=\frac{36}{2}=18$

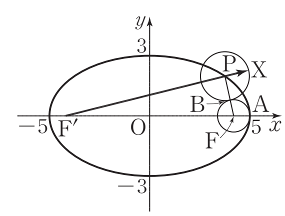
이때, s, t는 이차방정식 $x^2-10x+18=0$의 두 근이고

$s<t$이므로 $s=5-\sqrt{7}$

즉, 원 C_2의 반지름의 길이는

$5-\sqrt{7}-1=4-\sqrt{7}$

한편, $|\overrightarrow{F'X}+\overrightarrow{PX}|$가 최대인 경우는 오른쪽 그림과 같이 세 점 F′, P, X가 이 순서대로 한 직선 위에 있을 때이다. 두 원 C_1, C_2의 접점을 B라고 하면 구하는 최댓값은



$|\overrightarrow{F'X}+\overrightarrow{PX}|=|\overrightarrow{F'P}|+|\overrightarrow{PX}|+|\overrightarrow{PX}|$

$=|\overrightarrow{F'P}|+|\overrightarrow{PB}|+|\overrightarrow{PX}|$

$=|\overrightarrow{F'P}|+|\overrightarrow{PF}|-|\overrightarrow{BF}|+|\overrightarrow{PX}|$

$=t+s-1+(4-\sqrt{7})$

$=10-1+4-\sqrt{7}=13-\sqrt{7}$

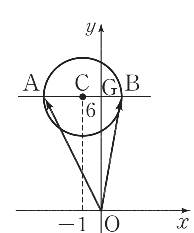
정답_ $13-\sqrt{7}$

337

$|\overrightarrow{CP}|=2$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 중심이 $C(-1, 6)$이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

또, 직선 $\frac{x+1}{m}=\frac{y-6}{n}$은 점 $C(-1, 6)$을 지나므로 원과 직선이 만나는 두 점 A, B에 대하여 $\overline{AB}$는 원의 지름이다.

오른쪽 그림에서



$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|2\overrightarrow{OC}|$

$=2\sqrt{(-1)^2+6^2}$

$=2\sqrt{37}$

정답_ ⑤

III 공간도형과 공간좌표

05 공간도형

338

⑤ 꼬인 위치에 있는 두 직선은 한 평면 위에 있지 않다. 정답_⑤

339

(ⅰ) 두 직선 AG, EG로 결정되는 평면은 평면 AGE의 1개이다.
(ⅱ) 직선 AG와 한 점으로 결정되는 평면은 평면 AGB, 평면 AGF의 2개이다.
(ⅲ) 직선 EG와 한 점으로 결정되는 평면은 평면 EGB, 평면 EGF, 평면 EGD의 3개이다.
(ⅳ) 세 점으로 결정되는 평면은 평면 BFH의 1개이다.
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에서 구하는 평면의 개수는
$1+2+3+1=7$ 정답_③

340

점 A, B, C, E, G 중 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 5개의 점 중에서 3개의 점을 택하면 한 평면이 결정된다.
따라서 5개의 점 중에서 3개의 점을 택하여 만들 수 있는 평면의 개수는
$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$
그런데 네 점 A, E, G, C는 한 평면 위에 있으므로 구하는 서로 다른 평면의 개수는
$10-{}_4C_3+1=10-4+1=7$ 정답_③

341

한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 하나의 평면을 결정하므로 구하는 평면의 개수는
$${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$ 정답_③

342

(ⅰ) 직선 l과 직선 l 위에 있지 않은 한 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는 ${}_4C_1=4$
(ⅱ) 직선 l 위의 한 점과 직선 l 위에 있지 않은 두 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는
${}_4C_1\times{}_4C_2=4\times6=24$
(ⅲ) 직선 l 위에 있지 않은 세 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는
${}_4C_3=4$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 만들 수 있는 서로 다른 평면의 최대 개수는
$4+24+4=32$ 정답_32

343

모서리 AG와 평행한 면은 면 BHIC, 면 CIJD, 면 DJKE, 면 EKLF이므로
$a=4$
면 ABHG와 평행한 모서리는 모서리 CI, 모서리 DJ, 모서리 EK, 모서리 FL, 모서리 DE, 모서리 JK이므로
$b=6$
$\therefore a+b=10$ 정답_②

344

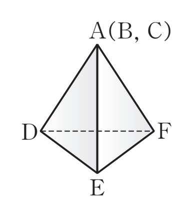
직선 AC와 한 점에서 만나는 면은 면 AEFB, 면 AEHD, 면 BFGC, 면 DHGC이므로
$a=4$
직선 AC와 꼬인 위치에 있는 모서리는 모서리 BF, 모서리 DH, 모서리 EF, 모서리 HG, 모서리 EH, 모서리 FG이므로
$b=6$
직선 AC와 수직인 모서리는 모서리 AE, 모서리 CG이므로
$c=2$
$\therefore a+b+c=12$ 정답_③

345

ㄱ. 직선 CG와 직선 EF는 만나지도 않고, 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.
ㄴ. 직선 AE와 직선 BC는 만나지도 않고, 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.
ㄷ. 직선 BF와 직선 DH는 평행하다.
따라서 꼬인 위치에 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다. 정답_③

346

주어진 전개도로 만든 정사면체는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 AF와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 DE이다.



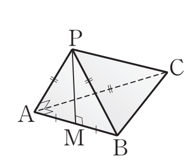
정답_ 직선 DE

347

④ 직선 ED와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 AF, 직선 BG, 직선 CH, 직선 JF, 직선 FG, 직선 GH, 직선 HI의 7개이다.
정답_④

348

세 점 D, E, F가 합쳐지는 점이 P이므로 주어진 전개도로 만든 사면체는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ은 옳다.

$\overline{AC}=\overline{AE}=\overline{BE}$이므로 $\overline{AC}=\overline{AP}=\overline{BP}$

$\angle DAC=90°$이므로 $\angle PAC=90°$

따라서 삼각형 ACP는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{CP}=\sqrt{2}\,\overline{AP}=\sqrt{2}\,\overline{BP}$

ㄴ도 옳다.

앞의 그림과 같이 세 점 A, B, C는 한 평면 위에 있으면서 한 직선 위에는 있지 않고, 점 P는 이 평면 위에 있지 않으므로 직선 AB와 직선 CP는 꼬인 위치에 있다.

ㄷ도 옳다.

$\overline{AC}\perp\overline{AP}$, $\overline{AC}\perp\overline{AB}$이므로 $\overline{AC}\perp$(평면 ABP)

$\therefore \overline{AC}\perp\overline{PM}$ ······ ㉠

삼각형 PBA가 $\overline{PB}=\overline{PA}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{PM}\perp\overline{AB}$ ······ ㉡

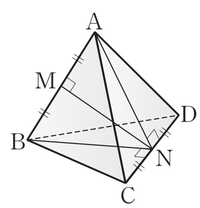
㉠, ㉡에서 $\overline{PM}\perp$(평면 ABC)

$\therefore \overline{PM}\perp\overline{BC}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

349

주어진 전개도로 만든 정사면체는 오른쪽 그림과 같다.



모서리 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라고 하면

$\overline{CD}\perp\overline{AN}$, $\overline{CD}\perp\overline{BN}$

이므로

$\overline{CD}\perp$(평면 ABN)

$\therefore \overline{CD}\perp\overline{MN}$ ······ ㉠

같은 방법으로 $\overline{AB}\perp\overline{CM}$, $\overline{AB}\perp\overline{DM}$이므로

$\overline{AB}\perp$(평면 CDM)

$\therefore \overline{AB}\perp\overline{MN}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 두 모서리 AB, CD 사이의 거리는 선분 MN의 길이와 같다. 이때 직각삼각형 AND에서 $\overline{AN}=\sqrt{3}$

직각삼각형 AMN에서 $\overline{AN}=\sqrt{3}$, $\overline{AM}=1$이므로

$\overline{MN}=\sqrt{\overline{AN}^2-\overline{AM}^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$ 정답_ ③

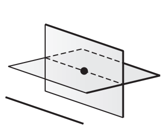
350

ㄱ은 옳다.

한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점을 포함하는 평면은 단 하나 존재한다. (평면의 결정조건)

ㄴ은 옳지 않다.

(반례)



ㄷ도 옳다.

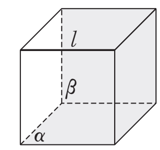
한 직선과 수직이고, 그 직선 위에 있지 않은 한 점을 포함하는 평면은 단 하나 존재한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_ ③

351

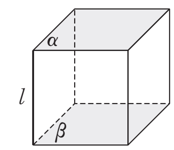
①은 옳지 않다.

오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $l\,/\!/\,\alpha$, $l\,/\!/\,\beta$이지만 두 평면 α, β가 만날 수도 있다.



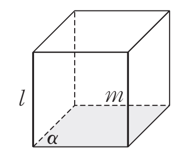
②도 옳지 않다.

오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $l\perp\alpha$, $l\perp\beta$이면 $\alpha\,/\!/\,\beta$이다.



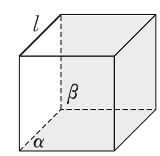
③도 옳지 않다.

오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $l\perp\alpha$, $m\perp\alpha$이면 $l\,/\!/\,m$이다.



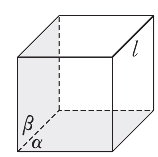
④는 옳다.

오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $l\,/\!/\,\alpha$, $l\perp\beta$이면 $\alpha\perp\beta$이다.



⑤도 옳지 않다.

오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $l\,/\!/\,\alpha$, $\alpha\perp\beta$이지만 $l\,/\!/\,\beta$일 수도 있다.

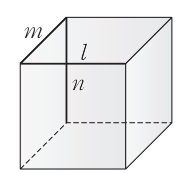


정답_ ④

352

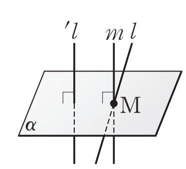
ㄱ은 옳지 않다.

(반례) 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $l\perp m$이고 $m\perp n$이지만 직선 l과 직선 n은 꼬인 위치에 있다.



ㄴ은 옳다.

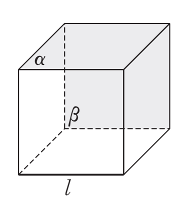
오른쪽 그림과 같이 $l\perp\alpha$이고 $m\perp\alpha$일 때, 직선 m과 평면 α의 교점을 M이라고 하자. 점 M을 지나고 직선 l에 평행한 직선 l'을 그으면 직선 l은 평면 α에 포함되는 모든 직선과 수직이므로 직선 l'도 평면 α에 포함되는 모든 직선과 수직이다.



즉, 직선 l'과 직선 m은 일치하므로 $l\,/\!/\,m$이다.

ㄷ도 옳지 않다.

(반례) 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $l\,/\!/\,\alpha$이고 $\alpha\perp\beta$이지만 $l\,/\!/\,\beta$이다.



따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

정답_ ②

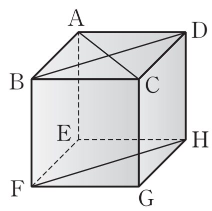
353

$\overline{BC} /\!/ \overline{FG}$이므로 두 직선 AC, FG가 이루는 각의 크기는 두 직선 AC, BC가 이루는 각의 크기와 같다.

이때, 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이므로

$\theta_1{}^\circ=45^\circ$

$\overline{BD} /\!/ \overline{FH}$이므로 두 직선 AC, FH가 이루는 각의 크기는 두 직선 AC, BD가 이루는 각의 크기와 같다.



이때, 사각형 ABCD는 정사각형이므로 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다.

$\therefore \theta_2{}^\circ=90^\circ$

$\therefore \theta_1{}^\circ+\theta_2{}^\circ=45^\circ+90^\circ=135^\circ$

정답_④

354

$\overline{DE} /\!/ \overline{CB}$이므로 두 모서리 AC, DE가 이루는 각의 크기는 두 모서리 AC, CB가 이루는 각의 크기와 같다.

이때, 삼각형 ABC는 정삼각형이므로 $\theta^\circ=60^\circ$

$\therefore \cos\theta^\circ=\dfrac{1}{2}$

정답_③

355

$\overline{AB} /\!/ \overline{DC}$이므로 꼬인 위치에 있는 두 모서리 AB, CE가 이루는 각의 크기는 두 모서리 DC, CE가 이루는 각의 크기와 같다.

이때, 삼각형 DCE는 $\angle D=90^\circ$인 직각삼각형이고,

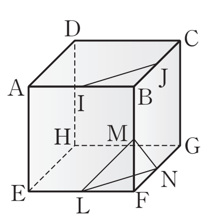
$\overline{EC}=\sqrt{3^2+3^2+3^2}=3\sqrt{3}$이므로

$\cos\theta^\circ=\dfrac{\overline{DC}}{\overline{CE}}=\dfrac{3}{3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

정답_③

356

오른쪽 그림과 같이 모서리 EF의 중점을 L이라고 하면



$\overline{IJ} /\!/ \overline{LN}$

이때, 삼각형 MLN은 $\overline{ML}=\overline{LN}=\overline{NM}$인 정삼각형이므로 두 선분 LN, MN이 이루는 각의 크기는 60°이다.

따라서 두 선분 IJ, MN이 이루는 각의 크기도 60°이므로

$\theta^\circ=60^\circ$

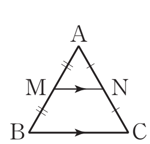
$\therefore \cos\theta^\circ=\dfrac{1}{2}$

정답_②

참고

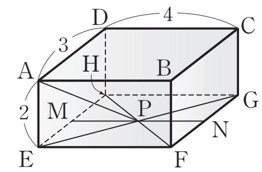
오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 두 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라고 하면

$\overline{MN} /\!/ \overline{BC}$, $\overline{MN}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$



357

오른쪽 그림과 같이 두 선분 EH, FG의 중점을 각각 M, N이라고 하자.



이때, 선분 MN은 선분 DC와 평행하고 점 P를 지나므로 두 선분 AP, DC가 이루는 각의 크기는 두 선분 AP, MP가 이루는 각의 크기와 같다.

또, $\overline{MN}\perp$(면 AEHD)이므로 $\overline{AM}\perp\overline{MP}$, 즉 삼각형 AMP는 직각삼각형이다.

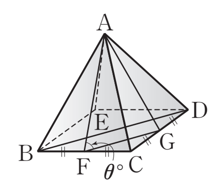
$\overline{AM}=\sqrt{2^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{5}{2}$, $\overline{MP}=\dfrac{1}{2}\overline{MN}=2$이므로 직각삼각형 AMP에서

$\tan\theta^\circ=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MP}}=\dfrac{\frac{5}{2}}{2}=\dfrac{5}{4}$

정답_③

358

오른쪽 그림과 같이 $\overline{CD}$의 중점을 G라고 하면 $\overline{FG} /\!/ \overline{BD}$



따라서 두 직선 AF, BD가 이루는 각의 크기는 두 직선 AF, FG가 이루는 각의 크기와 같다.

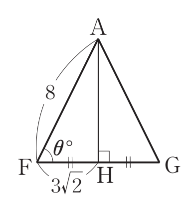
밑면이 한 변의 길이가 12인 정사각형이므로 그 대각선 BD의 길이는 $12\sqrt{2}$이다.

$\therefore \overline{FG}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}=6\sqrt{2}$

직각삼각형 ABF에서

$\overline{AF}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BF}^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{FG}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{FH}=\dfrac{1}{2}\overline{FG}=3\sqrt{2}$

이므로

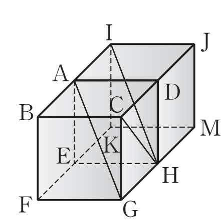
$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AF}^2-\overline{FH}^2}=\sqrt{8^2-(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{46}$

$\therefore \sin\theta^\circ=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AF}}=\dfrac{\sqrt{46}}{8}$

정답_③

359

오른쪽 그림과 같이 주어진 정육면체와 합동인 정육면체를 나란히 붙이면



$\overline{AG} /\!/ \overline{IH}$

이므로 두 직선 AG, CH가 이루는 각의 크기는 두 직선 IH, CH가 이루는 각의 크기와 같다.

직각삼각형 IBC에서

$\overline{IC}=\sqrt{\overline{IB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

직각삼각형 CGH에서

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{CG}^2+\overline{GH}^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{IH}$는 한 모서리의 길이가 2인 정육면체의 대각선이므로

$\overline{IH}=2\sqrt{3}$

삼각형 ICH에서 $\overline{IC}=2\sqrt{5}$, $\overline{CH}=2\sqrt{2}$, $\overline{IH}=2\sqrt{3}$이므로

$\overline{CH}^2+\overline{IH}^2=\overline{IC}^2$

따라서 삼각형 ICH는 $\overline{IC}$가 빗변인 직각삼각형이다.

$\therefore \angle IHC=90^\circ$

즉, 두 직선 AG, CH가 이루는 각의 크기는 90°이다. 정답_ 90°

360

$\overline{CO}\perp$(면 OAB), $\overline{CH}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{OH}\perp\overline{AB}$

직각삼각형 OAB에서

$\overline{AB}=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$

$\overline{OA}\times\overline{OB}=\overline{OH}\times\overline{AB}$이므로

$6\times6=\overline{OH}\times6\sqrt{2}$ $\quad\therefore \overline{OH}=3\sqrt{2}$ 정답_ ②

361

$\overline{AE}\perp$(면 EFGH), $\overline{AO}\perp\overline{FH}$이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{EO}\perp\overline{FH}$

직각삼각형 EFH에서 $\overline{EF}\times\overline{EH}=\overline{FH}\times\overline{EO}$이고,

$\overline{FH}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이므로

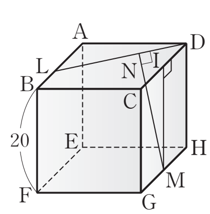
$3\times4=5\times\overline{EO}$ $\quad\therefore \overline{EO}=\frac{12}{5}$

$\therefore \overline{AO}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{EO}^2}=\sqrt{2^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{61}}{5}$

정답_ ③

362

오른쪽 그림과 같이 점 M에서 모서리 CD에 내린 수선의 발을 I라고 하면

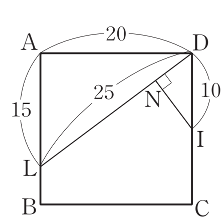


$\overline{MN}\perp\overline{LD}$, $\overline{MI}\perp\overline{CD}$

이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{LD}\perp\overline{NI}$

오른쪽 그림의 정사각형 ABCD에서



$\overline{AL}=\frac{3}{4}\overline{AB}=15$

$\overline{DI}=\frac{1}{2}\overline{CD}=10$

$\overline{LD}=\sqrt{20^2+15^2}=25$

$\triangle NDI \backsim \triangle ALD$ (AA 닮음)이므로

$\overline{NI}:\overline{AD}=\overline{DI}:\overline{LD}$

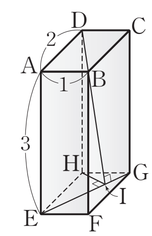
$\therefore \overline{NI}=\frac{\overline{AD}\times\overline{DI}}{\overline{LD}}=\frac{20\times10}{25}=8$

따라서 직각삼각형 MIN에서

$\overline{MN}=\sqrt{20^2+8^2}=4\sqrt{29}$ 정답_ ④

363

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 D에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 I라고 하면



$\overline{DH}\perp$(평면 EFGH), $\overline{DI}\perp\overline{EG}$

이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{HI}\perp\overline{EG}$

직각삼각형 EGH에서

$\overline{EH}\times\overline{HG}=\overline{EG}\times\overline{HI}$이고, $\overline{EG}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$이므로

$2\times1=\sqrt{5}\times\overline{HI}$ $\quad\therefore \overline{HI}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

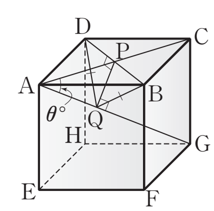
직각삼각형 DHI에서

$\overline{DI}=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{HI}^2}=\sqrt{3^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$

정답_ ③

364

오른쪽 그림에서 $\overline{DQ}=\overline{BQ}$이고



$\overline{BD}\perp\overline{PQ}$이므로 점 P는 두 선분 AC, BD의 중점이다.

이때, 점 P에서 선분 AG에 내린 수선의 발 Q에 대하여 $\angle CAG=\theta^\circ$로 놓으면

직각삼각형 AGC에서

$\overline{AG}=\sqrt{12^2+12^2+12^2}=12\sqrt{3}$

$\therefore \sin\theta^\circ=\frac{\overline{CG}}{\overline{AG}}=\frac{12}{12\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

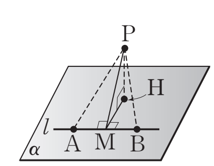
또, 직각삼각형 AQP에서

$\overline{AP}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times12\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

$\therefore \overline{PQ}=\overline{AP}\sin\theta^\circ=6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{6}$ 정답_ ④

365

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$의 중점을 M이라고 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}$이므로



$\overline{PM}\perp\overline{AB}$

$\overline{PH}\perp\alpha$이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{HM}\perp\overline{AB}$

직각삼각형 PAM에서 $\overline{PA}=6$, $\overline{AM}=3$이므로

$\overline{PM}=\sqrt{\overline{PA}^2-\overline{AM}^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$

직각삼각형 PMH에서 $\overline{PH}=4$이므로

$\overline{HM}=\sqrt{\overline{PM}^2-\overline{PH}^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-4^2}=\sqrt{11}$

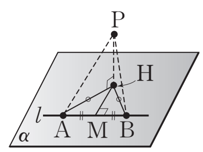
따라서 구하는 거리는 $\sqrt{11}$이다. 정답_ ①

다른 풀이

$\overline{PH}\perp\alpha$이므로

$\overline{PH}\perp\overline{HA}$, $\overline{PH}\perp\overline{HB}$

이때, $\triangle PAH\backsim\triangle PBH$ (RHS 합동)이므로



$\overline{HA}=\overline{HB}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$

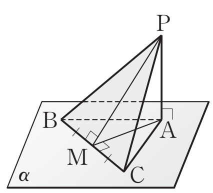
따라서 삼각형 HAB는 $\overline{HA}=\overline{HB}$인 이등변삼각형이므로 $\overline{AB}$의 중점을 M이라고 하면

$\overline{HM}\perp\overline{AB}$

$\therefore \overline{HM}=\sqrt{\overline{HA}^2-\overline{AM}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-3^2}=\sqrt{11}$

366

오른쪽 그림과 같이 선분 BC의 중점을 M이라고 하면



$\overline{PA}\perp\alpha$, $\overline{AM}\perp\overline{BC}$

이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{PM}\perp\overline{BC}$

직각삼각형 ABM에서 $\overline{AB}=\overline{AC}=5$, $\overline{BC}=6$이므로

$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BM}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

직각삼각형 PMA에서 $\overline{PA}=4$이므로

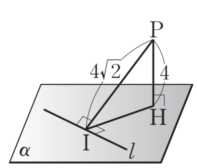
$\overline{PM}=\sqrt{\overline{PA}^2+\overline{PM}^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

따라서 삼각형 PBC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6\times4\sqrt{2}=12\sqrt{2}$ 정답_ ②

367

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 평면 α 위의 한 직선 l에 내린 수선의 발을 I라고 하면



$\overline{PH}\perp\alpha$, $\overline{PI}\perp l$

이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{HI}\perp l$

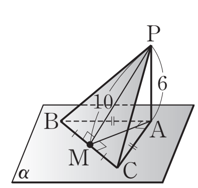
이때, $\overline{PH}=4$, $\overline{PI}=4\sqrt{2}$이고, 삼각형 PIH가 직각삼각형이므로

$\overline{HI}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-4^2}=4$

따라서 구하는 거리는 4이다. 정답_ ⑤

368

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 M이라고 하면



$\overline{PA}\perp\alpha$, $\overline{PM}\perp\overline{BC}$

이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{AM}\perp\overline{BC}$

이때, 삼각형 ABC가 $\angle A=90°$인 직각이등변삼각형이므로 점 M은 $\overline{BC}$의 중점이다.

$\overline{PM}=10$, $\overline{PA}=6$이므로 직각삼각형 PMA에서

$\overline{AM}=\sqrt{\overline{PM}^2-\overline{PA}^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

삼각형 ABM에서 $\angle B=45°$, $\angle AMB=90°$이므로

$\tan 45°=\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}$, $1=\frac{8}{\overline{BM}}$ $\quad\therefore \overline{BM}=8$

$\therefore \overline{BC}=2\overline{BM}=16$ 정답_ 16

369

$\overline{OB}=a$로 놓으면 $\overline{AP}=2a$

삼각형 AOB는 직각이등변삼각형이므로

$\sqrt{2}\,\overline{AO}=a \qquad \therefore \overline{AO}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

한편, $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{AO}\perp l$이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{PA}\perp l$

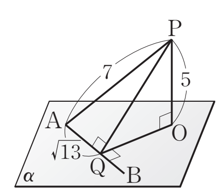
즉, 삼각형 APB는 $\angle A=90°$인 직각삼각형이다.

$$\therefore \frac{\triangle AOB}{\triangle APB}=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{AO}\times\overline{AB}}{\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AB}}=\frac{\overline{AO}}{\overline{AP}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{2a}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

정답_ ②

370

오른쪽 그림과 같이 선분 PQ를 그으면



$\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OQ}\perp\overline{AB}$

이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{PQ}\perp\overline{AB}$

즉, 삼각형 AQP는 직각삼각형이므로

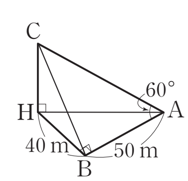
$\overline{PQ}=\sqrt{7^2-(\sqrt{13})^2}=6$

따라서 직각삼각형 PQO에서

$\overline{OQ}=\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$ 정답_ ③

371

오른쪽 그림과 같이 단순화하여 생각하면



$\overline{CH}\perp$(평면 AHB), $\overline{HB}\perp\overline{AB}$

이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{CB}\perp\overline{AB}$

직각삼각형 ACB에서

$\tan 60°=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, $\sqrt{3}=\frac{\overline{BC}}{50}$

$\therefore \overline{BC}=50\sqrt{3}\,(\mathrm{m})$

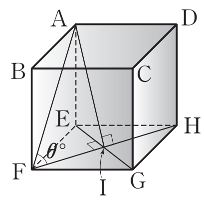
직각삼각형 CHB에서

$\overline{CH}=\sqrt{(50\sqrt{3})^2-40^2}=10\sqrt{59}\,(\mathrm{m})$

따라서 구하는 건물의 높이는 $10\sqrt{59}$ m이다. 정답_ ⑤

372

오른쪽 그림과 같이 밑면의 두 대각선 EG, FH의 교점을 I라고 하면



$\overline{\mathrm{AE}}\perp$(평면 EFGH), $\overline{\mathrm{EI}}\perp\overline{\mathrm{FH}}$

이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{\mathrm{AI}}\perp\overline{\mathrm{FH}}$

$\overline{\mathrm{AF}}$, $\overline{\mathrm{FH}}$는 모두 한 변의 길이가 4인 정사각형의 대각선이므로

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{FH}}=4\sqrt{2}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{FI}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{FH}}=2\sqrt{2}$

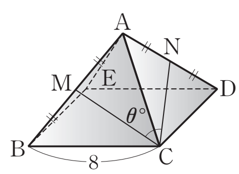
직각삼각형 AFI에서

$\cos\theta^\circ=\frac{\overline{\mathrm{FI}}}{\overline{\mathrm{AF}}}=\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

정답_ $\frac{1}{2}$

373

두 선분 CM, CN은 한 변의 길이가 8인 정삼각형의 높이이므로



$\overline{\mathrm{CM}}=\overline{\mathrm{CN}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 8=4\sqrt{3}$

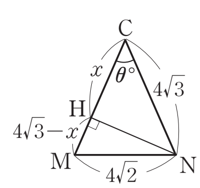
또, 선분 BD는 정사각형 BCDE의 대각선이므로

$\overline{\mathrm{BD}}=8\sqrt{2}$

삼각형 ABD에서 두 점 M, N은 각각 선분 AB, AD의 중점이므로

$\overline{\mathrm{MN}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BD}}=\frac{1}{2}\times 8\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

오른쪽 그림과 같이 점 N에서 $\overline{\mathrm{CM}}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{\mathrm{CH}}=x$라고 하면



$\overline{\mathrm{CN}}^2-\overline{\mathrm{CH}}^2=\overline{\mathrm{NM}}^2-\overline{\mathrm{MH}}^2$이므로

$(4\sqrt{3})^2-x^2=(4\sqrt{2})^2-(4\sqrt{3}-x)^2$

$48-x^2=32-(48-8\sqrt{3}x+x^2)$

$8\sqrt{3}x=64 \qquad \therefore\ x=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

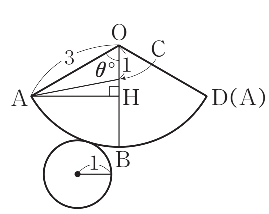
따라서 직각삼각형 NCH에서

$\cos\theta^\circ=\frac{\overline{\mathrm{CH}}}{\overline{\mathrm{CN}}}=\frac{\frac{8\sqrt{3}}{3}}{4\sqrt{3}}=\frac{2}{3}$

정답_ ④

374

주어진 원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같다.



호 AB의 길이는

$\frac{1}{2}\times 2\pi\times 1=\pi$

$\angle\mathrm{AOB}=\theta^\circ$라고 하면

$2\pi\times 3\times\frac{\theta^\circ}{360^\circ}=\pi$

$\therefore\ \theta^\circ=60^\circ$

한편, 점 A에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\cos 60^\circ=\frac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{OA}}}$에서

$\frac{1}{2}=\frac{\overline{\mathrm{OH}}}{3} \qquad \therefore\ \overline{\mathrm{OH}}=\frac{3}{2}$

삼각형 OAH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

한편,

$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{OH}}-\overline{\mathrm{OC}}=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

이므로 직각삼각형 AHC에서

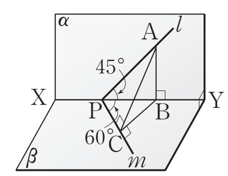
$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{CH}}^2}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{7}$

따라서 구하는 최단 거리는 $\sqrt{7}$이다.

정답_ ①

375

오른쪽 그림과 같이 직선 l 위의 점 A에서 교선 XY에 내린 수선의 발을 B, 점 B에서 직선 m에 내린 수선의 발을 C라고 하면 삼수선의 정리에 의해



$\overline{\mathrm{AC}}\perp m$

이때, $\overline{\mathrm{PA}}=a$로 놓으면

$\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PA}}\cos 45^\circ=a\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

$\overline{\mathrm{PC}}=\overline{\mathrm{PB}}\cos 60^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}a\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}a$

직각삼각형 APC에서 $\angle\mathrm{APC}=\theta^\circ$이므로

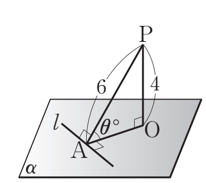
$\cos\theta^\circ=\frac{\overline{\mathrm{PC}}}{\overline{\mathrm{PA}}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}a}{a}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\therefore\ \cos^2\theta^\circ=\frac{1}{8}$

정답_ ④

376

오른쪽 그림과 같이 평면 α 밖의 한 점 P에서 평면 α와 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 O, A라고 하면



$\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{PA}}\perp l$

이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{\mathrm{AO}}\perp l$

이때, 두 평면 α, β의 이면각의 크기 θ°는 $\angle\mathrm{PAO}$의 크기와 같으므로 직각삼각형 PAO에서

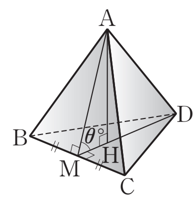
$\overline{\mathrm{AO}}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$

$\therefore\ \cos\theta^\circ=\frac{\overline{\mathrm{AO}}}{\overline{\mathrm{PA}}}=\frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

정답_ ②

377

오른쪽 그림과 같이 선분 BC의 중점을 M이라고 하면



$\overline{AM}\perp\overline{BC}$, $\overline{DM}\perp\overline{BC}$

이므로 두 평면 ABC, DBC가 이루는 각의 크기는 두 선분 AM, DM이 이루는 각의 크기와 같다.

$\therefore \angle AMD=\theta°$

한편, 꼭짓점 A에서 면 BCD에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 H는 삼각형 BCD의 무게중심이다.

이때, 정사면체의 한 모서리의 길이를 a라고 하면

$$\overline{AM}=\overline{DM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\therefore \overline{HM}=\frac{1}{3}\overline{DM}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{6}a$$

직각삼각형 AMH에서

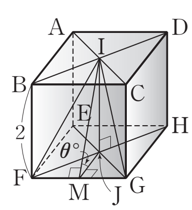
$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{HM}^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$$\therefore \sin\theta°=\frac{\overline{AH}}{\overline{AM}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

정답_ ⑤

378

오른쪽 그림과 같은 정육면체의 점 I에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 J, $\overline{FG}$에 내린 수선의 발을 M이라고 하면



$\overline{IJ}\perp$(평면 EFGH), $\overline{IM}\perp\overline{FG}$

이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{JM}\perp\overline{FG}$

따라서 평면 IFG, 평면 EFGH가 이루는 각의 크기는 $\angle IMJ$의 크기와 같다.

직각삼각형 IMJ에서

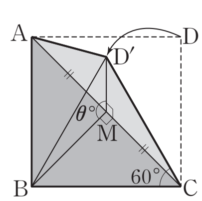
$$\overline{IM}=\sqrt{\overline{JM}^2+\overline{IJ}^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5},\ \overline{JM}=1$$

$$\therefore \cos\theta°=\frac{\overline{JM}}{\overline{IM}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

정답_ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

379

두 삼각형 ABC, ACD′은 직각이등변삼각형이므로 오른쪽 그림과 같이 선분 AC의 중점을 M이라고 하면



$\overline{BM}\perp\overline{AC}$, $\overline{D'M}\perp\overline{AC}$

이때, 두 평면 ABC, ACD′이 이루는 각의 크기를 $\theta°$라고 하면 $\theta°$는 두 직선 BM, D′M이 이루는 각의 크기와 같으므로 $\angle BMD'=\theta°$

한편, $\overline{BC}=\overline{D'C}=1$이고 $\angle BCD'=60°$이므로 삼각형 D′BC는 정삼각형이다.

$\therefore \overline{BD'}=1$ ······ ㉠

두 삼각형 BCM, CD′M에서

$\overline{BM}=\overline{D'M}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{BD'}^2=\overline{BM}^2+\overline{D'M}^2$

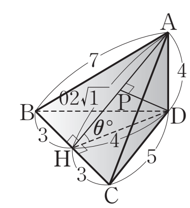
이므로 삼각형 BMD′은 $\angle BMD'=90°$인 직각삼각형이다.

따라서 두 평면 ABC, ACD′이 이루는 각의 크기는 90°이다.

정답_ ⑤

380

오른쪽 그림과 같이 선분 BC의 중점을 H라고 하면 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$, $\overline{DH}\perp\overline{BC}$이므로



삼각형 ABH에서 $\overline{AH}=\sqrt{7^2-3^2}=2\sqrt{10}$

삼각형 DHC에서 $\overline{DH}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

즉, 삼각형 AHD는 $\overline{AD}=\overline{DH}$인 이등변삼각형이다.

이때, 점 D에서 선분 AH에 내린 수선의 발을 P라고 하면

$$\overline{HP}=\overline{AP}=\frac{1}{2}\overline{AH}=\sqrt{10}$$

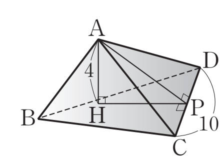
따라서 직각삼각형 DPH에서

$$\cos\theta°=\frac{\overline{HP}}{\overline{DH}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

정답_ ④

381

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H, $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 P라고 하면



$\overline{AH}\perp$(평면 BCD), $\overline{AP}\perp\overline{CD}$

이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{HP}\perp\overline{CD}$

따라서 평면 ACD와 평면 BCD가 이루는 각의 크기는 $\angle APH$의 크기와 같다.

삼각형 ACD의 넓이가 40이므로

$\frac{1}{2}\times10\times\overline{AP}=40$ $\quad\therefore \overline{AP}=8$

직각삼각형 AHP에서

$$\overline{HP}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$$

이므로

$\overline{AP}:\overline{AH}:\overline{HP}=8:4:4\sqrt{3}=2:1:\sqrt{3}$

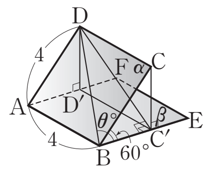
따라서 $\angle APH=30°$이므로 평면 ACD와 평면 BCD가 이루는 각의 크기는 30°이다.

정답_ ②

382

$\overline{AF} /\!/ \overline{BE}$ 이므로 두 직선 AF, BD가 이루는 각의 크기는 두 직선 BE, BD가 이루는 각의 크기와 같다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 C, D에서 평면 β에 내린 수선의 발을 각각 C′, D′이라고 하면



$\overline{DD'} \perp \beta$, $\overline{D'C'} \perp \overline{BC'}$

이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{DC'} \perp \overline{BC'}$ $\quad \therefore \angle DC'B = 90°$

이때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 60°이므로

$\overline{BC'} = \overline{BC}\cos 60° = 4 \times \dfrac{1}{2} = 2$

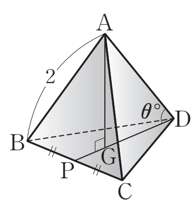
또, 정사각형 ABCD에서

$\overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2} = 4\sqrt{2}$

$\therefore \cos\theta° = \dfrac{\overline{BC'}}{\overline{BD}} = \dfrac{2}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 정답_ ①

383

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 면 BCD에 내린 수선의 발을 G, 선분 BC의 중점을 P라고 하면 모서리 AD와 면 BCD가 이루는 각의 크기는 두 선분 AD, DP가 이루는 각의 크기와 같으므로



$\angle ADG = \theta°$

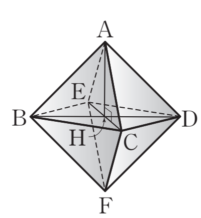
한편, 선분 DP는 정삼각형 BCD의 높이이고, 점 G는 정삼각형 BCD의 무게중심이므로

$\overline{DP} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$, $\overline{DG} = \dfrac{2}{3} \times \sqrt{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \cos\theta° = \dfrac{\overline{DG}}{\overline{AD}} = \dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 정답_ ①

384

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H, 직선 AC와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기를 θ°라고 하면 $\angle ACH = \theta°$



$\overline{AC} = 2a$라고 하면

$\overline{HC} = \dfrac{1}{2}\overline{EC} = \dfrac{1}{2} \times 2a\sqrt{2} = \sqrt{2}a$

직각삼각형 AHC에서

$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{HC}^2} = \sqrt{(2a)^2 - (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{2}a$

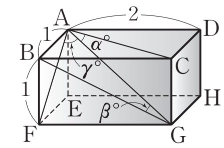
이므로

$\overline{AH} : \overline{HC} : \overline{AC} = \sqrt{2}a : \sqrt{2}a : 2a = 1 : 1 : \sqrt{2}$

따라서 $\angle ACH = 45°$이므로 직선 AC와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기는 45°이다. 정답_ 45°

385

대각선 AG가 세 면 ABCD, BFGC, ABFE와 이루는 각의 크기 $\alpha°$, $\beta°$, $\gamma°$를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때, $\overline{AG} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$이므로

세 직각삼각형 ACG, ABG, AFG에서

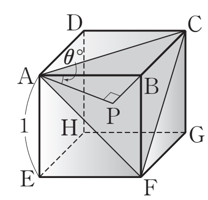
$\sin\alpha° = \dfrac{\overline{CG}}{\overline{AG}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $\sin\beta° = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$,

$\sin\gamma° = \dfrac{\overline{FG}}{\overline{AG}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$

$\therefore \sin\alpha° + \sin\beta° + \sin\gamma° = \dfrac{4}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ 정답_ ④

386

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 B에서 면 AFC에 내린 수선의 발을 P라고 하면 모서리 AB와 면 AFC가 이루는 각의 크기는 두 선분 AB, AP가 이루는 각의 크기와 같으므로 $\angle BAP = \theta°$



이때, 삼각형 AFC는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정삼각형이고, 점 P는 삼각형 AFC의 무게중심이므로

$\overline{AP} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

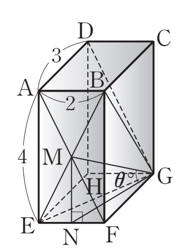
직각삼각형 APB에서

$\overline{BP} = \sqrt{1^2 - \left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \sin\theta° = \dfrac{\overline{BP}}{\overline{AB}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 정답_ ②

387

오른쪽 그림과 같이 두 선분 AF, BE의 교점을 M, 점 M에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 N이라고 하면 두 면 AFGD, BEG의 교선과 면 EFGH가 이루는 예각의 크기는 두 선분 GM, GN이 이루는 각의 크기와 같으므로 $\angle MGN = \theta°$



이때, 점 N은 선분 EF의 중점이므로 직각삼각형 GNF에서

$\overline{GN} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

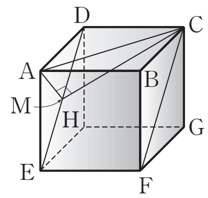
또, $\overline{MN} = \dfrac{1}{2}\overline{AE} = 2$이므로 직각삼각형 GMN에서

$\overline{GM} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 + 2^2} = \sqrt{14}$

$\therefore \cos\theta° = \dfrac{\overline{GN}}{\overline{GM}} = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{35}}{7}$ 정답_ ⑤

388

오른쪽 그림과 같이 $\overline{ED}$의 중점을 M이라고 하면 삼각형 AED는 이등변삼각형이므로



$\overline{AM}\perp\overline{ED}$

정육면체의 한 모서리의 길이를 $2a$라고 하면

$\overline{MD}=\frac{1}{2}\overline{ED}=\frac{1}{2}\times 2a\sqrt{2}=\sqrt{2}a$

직각삼각형 AMD에서

$\overline{AM}=\sqrt{(2a)^2-(\sqrt{2}a)^2}=\sqrt{2}a$ …… ㉠

직각삼각형 ACD에서

$\overline{AC}=\sqrt{(2a)^2+(2a)^2}=2\sqrt{2}a$ …… ㉡

직각삼각형 DMC에서

$\overline{MC}=\sqrt{(\sqrt{2}a)^2+(2a)^2}=\sqrt{6}a$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$\overline{AM}^2+\overline{MC}^2=\overline{AC}^2$

이므로 삼각형 AMC는 $\angle AMC=90^\circ$인 직각삼각형이다.

따라서 직선 AC와 평면 DEFC가 이루는 각의 크기는 두 직선 AC, MC가 이루는 각의 크기와 같다.

직각삼각형 AMC에서

$\overline{AC}:\overline{AM}:\overline{MC}=2\sqrt{2}a:\sqrt{2}a:\sqrt{6}a=2:1:\sqrt{3}$

따라서 $\angle ACM=30^\circ$이므로 직선 AC와 평면 DEFC가 이루는 각의 크기는 30°이다.

정답_ ②

389

직선 AB와 평면 α가 이루는 예각의 크기가 θ°이므로

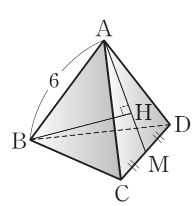
$\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta^\circ$에서

$7=14\cos\theta^\circ$ $\quad\therefore \cos\theta^\circ=\frac{1}{2}$

정답_ ④

390

오른쪽 그림과 같이 점 B에서 평면 ACD에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\overline{AB}$의 평면 ACD 위로의 정사영은 $\overline{AH}$이다.



이때, 점 H는 삼각형 ACD의 무게중심이므로

$\overline{AH}=\frac{2}{3}\overline{AM}=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=2\sqrt{3}$

정답_ ⑤

391

대각선 AG의 면 BFGC 위로의 정사영은 선분 BG이고

$\overline{AG}=3\sqrt{3}$, $\overline{BG}=3\sqrt{2}$이므로 $\overline{BG}=\overline{AG}\cos\theta^\circ$에서

$\cos\theta^\circ=\frac{\overline{BG}}{\overline{AG}}=\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

정답_ ⑤

392

타원의 장축의 길이를 $2a$라고 하면

$2a\cos 45^\circ=4$ $\quad\therefore a=2\sqrt{2}$

타원의 단축의 길이를 $2b$라고 하면

$2b=4$ $\quad\therefore b=2$

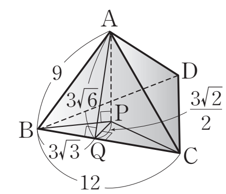
따라서 타원의 두 초점 사이의 거리는

$2\sqrt{(2\sqrt{2})^2-2^2}=4$

정답_ ①

393

오른쪽 그림에서



$\overline{AP}\perp$(평면 BCD), $\overline{AQ}\perp\overline{BC}$

이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{PQ}\perp\overline{BC}$

직각삼각형 ABQ에서 $\cos(\angle ABC)=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\overline{BQ}=\overline{AB}\cos(\angle ABQ)=9\times\frac{\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$

이므로

$\overline{AQ}=\sqrt{9^2-(3\sqrt{3})^2}=3\sqrt{6}$

직각삼각형 AQP에서 $\cos(\angle AQP)=\frac{\sqrt{3}}{6}$일 때

$\overline{QP}=\overline{AQ}\cos(\angle AQP)=3\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

(삼각형 BCP의 넓이)$=k=\frac{1}{2}\times 12\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=9\sqrt{2}$

$\therefore k^2=162$

정답_ 162

394

원기둥의 밑면의 넓이는

$\pi\times 4^2=16\pi$

자른 단면의 넓이를 S라고 하면 단면과 밑면이 이루는 각의 크기가 60°이고, 자른 단면의 밑면 위로의 정사영은 밑면인 원과 같으므로

$S\cos 60^\circ=16\pi$, $\frac{1}{2}S=16\pi$

$\therefore S=32\pi$

정답_ ⑤

395

밑면인 정삼각형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 8^2=16\sqrt{3}$

자른 단면의 넓이를 S라고 하면 단면과 밑면이 이루는 각의 크기가 30°이고, 자른 단면의 밑면 위로의 정사영은 밑면인 정삼각형과 같으므로

$S\cos 30^\circ=16\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}S=16\sqrt{3}$

$\therefore S=32$

정답_ ④

396

삼각형 OBC의 평면 ABCD 위로의 정사영은 삼각형 MBC이고

$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$,

$\triangle\mathrm{MBC}=\dfrac{1}{4}\times 2^2=1$

이므로 평면 OBC와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기를 $\theta°$라고 하면 $\triangle\mathrm{MBC}=\triangle\mathrm{OBC}\cos\theta°$에서

$\cos\theta°=\dfrac{\triangle\mathrm{MBC}}{\triangle\mathrm{OBC}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 삼각형 MBC의 평면 OBC 위로의 정사영의 넓이는

$\triangle\mathrm{MBC}\cos\theta°=1\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

정답_ ②

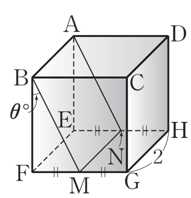
397

점 M이 선분 FG의 중점이므로

$\overline{\mathrm{BM}}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

두 평면 DCGH, ABFE는 서로 평행하므로 평면 DCGH의 평면 ABMN 위로의 정사영은 평면 ABFE의 평면 ABMN 위로의 정사영과 같다.

오른쪽 그림과 같이 두 평면 ABFE, ABMN이 이루는 이면각의 크기를 $\theta°$라 고 하면



$\cos\theta°=\dfrac{\overline{\mathrm{BF}}}{\overline{\mathrm{BM}}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

사각형 ABFE의 넓이는

$2^2=4$

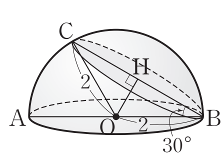
이므로 평면 DCGH의 평면 ABMN 위로의 정사영의 넓이는

$4\cos\theta°=4\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

정답_ ③

398

오른쪽 그림에서 점 B를 지나고 밑면과 $30°$의 각을 이루는 평면으로 잘랐을 때 생기는 단면은 원이다.



단면인 원의 지름을 $\overline{\mathrm{BC}}$, 점 O에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{\mathrm{BH}}=2\cos 30°=\sqrt{3}$

이므로 단면의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{3})^2=3\pi$

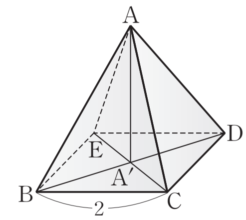
따라서 구하는 정사영의 넓이는

$3\pi\cos 30°=3\pi\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$

정답_ ②

399

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A의 평면 BCDE 위로의 정사영을 A′이라고 하면 평면 ABC의 평면 BCDE 위로의 정사영은 삼각형 A′BC이므로



$\triangle\mathrm{A'BC}=\triangle\mathrm{ABC}\cos\theta°$ ⋯⋯ ㉠

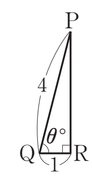
한편, 점 A′은 사각형 BCDE의 두 대각선의 교점이므로 삼각형 A′BC의 넓이는

$\dfrac{1}{4}\times 2\times 2=1$

삼각형 ABC의 넓이가 4이므로 ㉠에서

$4\cos\theta°=1 \qquad \therefore \cos\theta°=\dfrac{1}{4}$

$\cos\theta°=\dfrac{1}{4}$이므로 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 PQR를 생각하면 $\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$



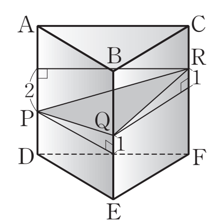
$\therefore \sin\theta°=\dfrac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

정답_ ②

400

삼각형 PQR의 평면 DEF 위로의 정사영은 삼각형 DEF이므로

$\triangle\mathrm{PQR}\cos\theta°=\triangle\mathrm{DEF}$



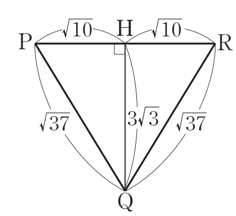
$\therefore \cos\theta°=\dfrac{\triangle\mathrm{DEF}}{\triangle\mathrm{PQR}}$

한편,

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{6^2+1^2}=\sqrt{37}$,

$\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$

이므로 오른쪽 그림과 같이 삼각형 PQR의 꼭짓점 Q에서 $\overline{\mathrm{PR}}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{\mathrm{QH}}=\sqrt{(\sqrt{37})^2-(\sqrt{10})^2}=3\sqrt{3}$

$\therefore \triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{10}\times 3\sqrt{3}=3\sqrt{30}$

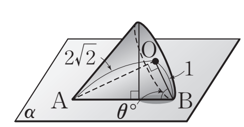
이때, $\triangle\mathrm{DEF}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2=9\sqrt{3}$이므로

$\cos\theta°=\dfrac{9\sqrt{3}}{3\sqrt{30}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

정답_ ⑤

401

오른쪽 그림과 같이 원뿔의 밑면과 평면 α가 이루는 각의 크기를 $\theta°$라고 하자.



직각삼각형 ABO에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$

$\therefore \cos\theta°=\dfrac{\overline{\mathrm{BO}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\dfrac{1}{3}$

한편, 원뿔의 밑면의 넓이는

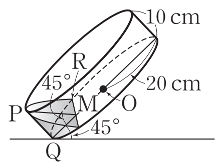
$\pi \times 1^2 = \pi$

이므로 원뿔의 밑면의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는

$\pi \cos\theta° = \pi \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{3}$ 정답_ ⑤

402

수면과 지면이 평행하므로 오른쪽 그림에서



$\angle PMQ = 45°$

즉, 삼각형 PQM은 직각이등변삼각형이므로

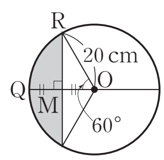
$\overline{MQ} = \overline{PQ} = 10\,\text{cm}$

이때, 직각삼각형 ORM에서

$\cos(\angle ROM) = \dfrac{\overline{OM}}{\overline{OR}} = \dfrac{20-10}{20} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \angle ROM = 60°$

수면의 원기둥의 밑면 위로의 정사영은 오른쪽 그림의 어두운 부분과 같으므로 정사영의 넓이는



$\pi \times 20^2 \times \dfrac{120°}{360°} - \dfrac{1}{2} \times 20 \times 20 \times \sin(180° - 120°)$

$= \dfrac{400}{3}\pi - 100\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$

따라서 수면의 넓이를 $S\,\text{cm}^2$라고 하면

$S \cos 45° = \dfrac{400}{3}\pi - 100\sqrt{3}$

$\therefore S = \dfrac{400}{3}\sqrt{2}\pi - 100\sqrt{6}$

즉, 수면의 넓이는 $\left(\dfrac{400}{3}\sqrt{2}\pi - 100\sqrt{6}\right)\text{cm}^2$이다.

정답_ $\left(\dfrac{400}{3}\sqrt{2}\pi - 100\sqrt{6}\right)\text{cm}^2$

403

$\overline{CG} \perp$(평면 BCD)이므로 $\overline{CG} \perp \overline{BD}$

또한, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$이므로 $\overline{BD} \perp$(면 ACG)

$\therefore \overline{AG} \perp \overline{BD}$

같은 방법으로 $\overline{AG} \perp \overline{BE}$이므로

$\overline{AG} \perp$(평면 BDE) ❶

한편, 삼각형 BDE는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정삼각형이므로

$\triangle BDE = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

사면체 ABDE에서

$\dfrac{1}{3} \times \triangle BDE \times \overline{AI} = \dfrac{1}{3} \times \triangle ABD \times \overline{AE}$이므로

$\dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \overline{AI} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times 1$

$\therefore \overline{AI} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ❷

$\overline{IG} = \overline{AG} - \overline{AI} = \sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이므로

$\overline{AI} : \overline{IG} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} : \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = 1 : 2$ ❸

정답_ 1 : 2

단계	채점 기준	비율
❶	$\overline{AG} \perp$(평면 BDE)임을 보이기	30%
❷	$\overline{AI}$의 길이 구하기	40%
❸	$\overline{AI} : \overline{IG}$ 구하기	30%

404

$\overline{AD} \perp \overline{CD}$, $\overline{AD} \perp \overline{BD}$이므로 모서리 AD와 평면 BCD는 서로 수직이다.

또한, $\overline{BC} \perp \overline{CD}$이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{AC} \perp \overline{BC}$ ❶

즉, 삼각형 ABC는 직각삼각형이므로

$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$ ❷

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

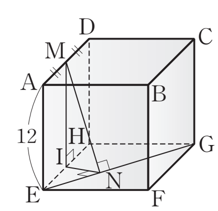
$\dfrac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AC} = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$ ❸

정답_ $4\sqrt{5}$

단계	채점 기준	비율
❶	$\overline{AC} \perp \overline{BC}$임을 보이기	50%
❷	$\overline{AC}$의 길이 구하기	30%
❸	$\triangle ABC$의 넓이 구하기	20%

405

오른쪽 그림과 같이 점 M에서 선분 EH에 내린 수선의 발을 I라고 하면



$\overline{MI} \perp$(면 EFGH), $\overline{MN} \perp \overline{EG}$

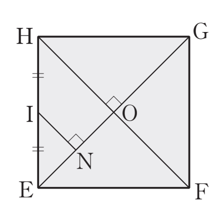
이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{IN} \perp \overline{EG}$ ❶

직각삼각형 EFG에서

$\overline{EG} = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2}$ ❷

오른쪽 그림과 같이 밑면의 두 대각선의 교점을 O라고 하면 점 I는 선분 HE의 중점이고, $\overline{IN} /\!/ \overline{HF}$이므로 점 N은 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의해 선분 OE의 중점이다.



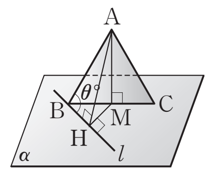
$\therefore \overline{EN} = \dfrac{1}{4}\overline{EG} = \dfrac{1}{4} \times 12\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ ❸

정답_ $3\sqrt{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	$\overline{IN} \perp \overline{EG}$임을 보이기	40%
❷	$\overline{EG}$의 길이 구하기	20%
❸	$\overline{EN}$의 길이 구하기	40%

406

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 M, 점 M에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{AM}\perp\alpha$, $\overline{MH}\perp l$

이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{AH}\perp l$ ……………… ❶

정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 $2a$라고 하면

$\overline{BM}=\dfrac{1}{2}\times 2a=a$

직각삼각형 MBH에서 $\angle MBH=30°$이므로

$\overline{BH}=\overline{BM}\cos 30°=a\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

직각삼각형 ABH에서

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BH}^2}=\sqrt{(2a)^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}=\dfrac{\sqrt{13}a}{2}$ ……………… ❷

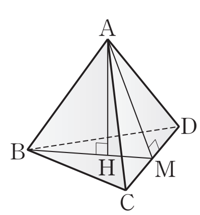
$\therefore \sin\theta°=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{13}}{2}a}{2a}=\dfrac{\sqrt{13}}{4}$ ……………… ❸

정답_ $\dfrac{\sqrt{13}}{4}$

단계	채점 기준	비율
❶	꼭짓점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선 구하기	40%
❷	정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 $2a$로 놓고 $\overline{BM}$, $\overline{BH}$, $\overline{AH}$의 길이를 a로 나타내기	40%
❸	$\sin\theta°$의 값 구하기	20%

407

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 밑면에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 H는 삼각형 BCD의 무게중심이다.



이때, 정사면체의 한 모서리의 길이를 a라고 하면 $\overline{AM}=\overline{BM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$이므로

$\overline{BH}=\dfrac{2}{3}\overline{BM}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$, $\overline{MH}=\dfrac{1}{3}\overline{BM}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$ ……………… ❶

$\angle ABH=\theta_1°$, $\angle AMH=\theta_2°$이므로

$\cos\theta_1°=\dfrac{\overline{BH}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\theta_2°=\dfrac{\overline{MH}}{\overline{AM}}=\dfrac{1}{3}$ ……………… ❷

정답_ $\cos\theta_1°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\theta_2°=\dfrac{1}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	△BCD의 무게중심 H에 대하여 정사면체의 한 모서리의 길이를 a로 놓고 $\overline{BH}$, $\overline{MH}$의 길이를 a로 나타내기	60%
❷	$\cos\theta_1°$, $\cos\theta_2°$의 값 구하기	40%

408

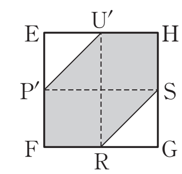
삼각형 APU가 직각이등변삼각형이고, $\overline{AP}=\overline{AU}=\sqrt{2}$이므로

$\overline{PU}=2$

따라서 육각형 PQRSTU는 한 변의 길이가 2인 정육각형이므로 그 넓이는

$6\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=6\sqrt{3}$ ……………… ❶

두 점 P, U의 평면 EFGH 위로의 정사영을 각각 P′, U′이라고 하면 정육각형 PQRSTU의 평면 EFGH 위로의 정사영은 오른쪽 그림의 어두운 부분과 같다.



이때, 정사영의 넓이는

$2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}-2\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=6$ ……………… ❷

따라서 $6=6\sqrt{3}\cos\theta°$이므로

$\cos\theta°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ……………… ❸

정답_ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	육각형 PQRSTU의 넓이 구하기	40%
❷	정사영의 넓이 구하기	40%
❸	$\cos\theta°$의 값 구하기	20%

409

삼각형 OAB, OAC가 모두 정삼각형이므로

$\overline{OM}\perp\overline{BM}$, $\overline{OM}\perp\overline{CM}$

따라서 $\overline{OM}\perp$(평면 BCM)이므로

$\overline{OM}\perp\overline{MP}$

삼각형 ABC는 한 변의 길이가 3인 정삼각형이고, 점 H는 정삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{AH}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 3=\sqrt{3}$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$

$\angle OAH=\theta°$라고 하면

$\tan\theta°=\dfrac{\overline{OH}}{\overline{AH}}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$

$\triangle OAH\backsim\triangle OPM$ (AA 닮음)이므로

$\angle OPM=\angle OAH=\theta°$

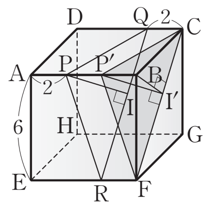
따라서 $\tan\theta°=\dfrac{\overline{OM}}{\overline{MP}}$이므로

$\overline{MP}=\dfrac{\overline{OM}}{\tan\theta°}=\dfrac{\dfrac{3}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

정답_ ③

410

$\overline{CQ}=\overline{FR}=2$이므로 오른쪽 그림과 같이 삼각형 PRQ의 세 꼭짓점 P, Q, R를 각각 모서리 AB, DC, EF를 따라 오른쪽으로 2만큼 이동하면 삼각형 P'FC가 만들어진다.



이때, 점 I는 점 I'으로 이동되므로

$\overline{PI}=\overline{P'I'}$, $\overline{P'I'}\perp\overline{CF}$

$\overline{P'B}\perp$(평면 BFGC)이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{BI'}\perp\overline{CF}$

한편, 삼각형 BFC에서 $\overline{BC}\times\overline{BF}=\overline{CF}\times\overline{BI'}$이므로

$6\times6=6\sqrt{2}\times\overline{BI'}$ $\quad\therefore \overline{BI'}=3\sqrt{2}$

$\overline{P'B}=2$이므로 직각삼각형 P'BI'에서

$\overline{P'I'}=\sqrt{\overline{P'B}^2+\overline{BI'}^2}=\sqrt{2^2+(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{22}$

$\therefore\ \overline{PI}=\overline{P'I'}=\sqrt{22}$

정답_ ②

411

삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의해

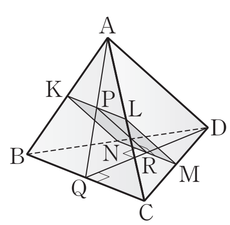
$\overline{KL}/\!/\overline{BC}$, $\overline{NM}/\!/\overline{BC}$, $\overline{KL}=\overline{NM}=\frac{1}{2}\overline{BC}$ ······ ㉠

$\overline{LM}/\!/\overline{AD}$, $\overline{KN}/\!/\overline{AD}$, $\overline{LM}=\overline{KN}=\frac{1}{2}\overline{AD}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 사각형 KLMN은 마름모이다.

또, $\overline{KM}=\overline{LN}$이므로 사각형 KLMN은 정사각형이다.

한편, 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 Q, 두 선분 AQ, KL이 만나는 점을 P, 두 선분 DQ, NM이 만나는 점을 R라고 하면



$\overline{NM}/\!/\overline{BC}$이므로

$\overline{DQ}\perp\overline{NM}$

$\overline{PR}/\!/\overline{LM}$, $\overline{LM}\perp\overline{NM}$이므로

$\overline{PR}\perp\overline{NM}$ $\quad\therefore \angle PRQ=\theta^\circ$

이때, 정사면체의 한 모서리의 길이를 $4a$라고 하면 $\triangle PQR$에서

$\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{AQ}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times4a=\sqrt{3}a$

$\overline{QR}=\frac{1}{2}\overline{QD}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times4a=\sqrt{3}a$

$\overline{PR}=\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{1}{2}\times4a=2a$

따라서 삼각형 PQR는 $\overline{PQ}=\overline{QR}$인 이등변삼각형이고 선분 PR의 중점을 H라고 하면 삼각형 HQR는 직각삼각형이므로

$\cos\theta^\circ=\frac{\overline{RH}}{\overline{QR}}=\frac{a}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

정답_ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

보충설명

정사면체 ABCD에서

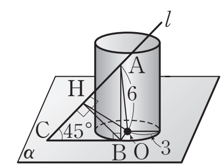
$\overline{AB}$와 $\overline{CD}$ 사이의 거리는 $\overline{KM}$

$\overline{AC}$와 $\overline{BD}$ 사이의 거리는 $\overline{LN}$

사면체 ABCD가 정사면체이므로 $\overline{KM}=\overline{LN}$

412

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 밑면에 내린 수선의 발을 B, 직선 l과 평면 α가 만나는 점을 C라고 하면 직선 BC는 평면 α 위에서 원기둥의 밑면에 접한다.



$\overline{OB}\perp\overline{BC}$, $\overline{OB}\perp\overline{AB}$이므로

$\overline{OB}\perp$(평면 ABC)

점 B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{OB}\perp$(평면 ABC), $\overline{BH}\perp l$

이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{OH}\perp l$

따라서 중심 O와 직선 l 사이의 거리는 $\overline{OH}$의 거리와 같다.

직각삼각형 ABO에서

$\overline{AB}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$

삼각형 ABC는 $\angle ABC=90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BC}=\overline{AB}=3\sqrt{3}$

직각삼각형 CBH에서

$\overline{BH}=\overline{BC}\sin45^\circ=3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$

직각삼각형 HBO에서

$\overline{OH}=\sqrt{3^2+\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$

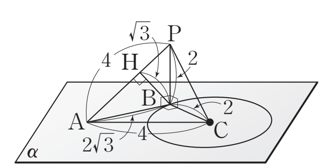
따라서 중심 O와 직선 l 사이의 거리는 $\frac{3\sqrt{10}}{2}$이다.

정답_ ⑤

413

주어진 조건을 그림으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

점 B는 원의 접점이므로 삼각형 ABC는 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형이다.



$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BP}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$이므로 점 B에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{BH}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BP}$에서

$\frac{1}{2}\times4\times\overline{BH}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2$ $\quad\therefore \overline{BH}=\sqrt{3}$

이때, 평면 PAB와 선분 BC가 수직이므로 삼수선의 정리에 의해 점 C에서 선분 AP에 내린 수선의 발은 H이다.

또한, $\overline{BC}\perp\overline{AB}$, $\overline{BC}\perp\overline{PB}$이므로

$\overline{BC}\perp\overline{BH}$

따라서 직각삼각형 BCH에서

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{BH}^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$ 정답_ $\sqrt{7}$

414

공의 중심을 지나고 햇빛에 수직인 평면을 α, 공의 그림자의 넓이를 $S\,\mathrm{cm}^2$, 평면 α에 의해 잘린 공의 단면의 넓이를 $S'\,\mathrm{cm}^2$라고 하면 그림자의 단축의 길이는 공의 지름의 길이와 같으므로 공의 지름의 길이는 16 cm이다.

$\therefore S'=\pi\times\left(\frac{16}{2}\right)^2=64\pi$

그림자의 장축의 평면 α 위로의 정사영이 공의 지름이므로 지면과 평면 α가 이루는 각의 크기를 $\theta°$라고 하면

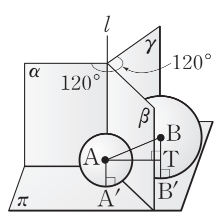
$16=26\cos\theta°\quad\therefore \cos\theta°=\frac{16}{26}=\frac{8}{13}$

$S'=S\cos\theta°$이므로

$S=\frac{S'}{\cos\theta°}=\frac{64\pi}{\frac{8}{13}}=104\pi$

따라서 그림자의 넓이는 $104\pi\,\mathrm{cm}^2$이다. 정답_ ②

415



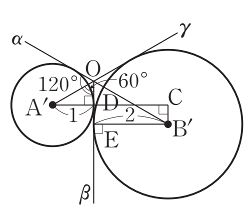
오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1, 2인 구의 중심을 각각 A, B라 하고 점 A, B의 평면 π 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라고 하자.

점 A에서 $\overline{BB'}$에 내린 수선의 발을 T라고 하면

$\overline{BT}=2-1=1$

이므로 두 구의 중심 사이의 거리를 d라고 하면

$d=\overline{AB}=\sqrt{\overline{BT}^2+\overline{AT}^2}=\sqrt{1+\overline{AT}^2}$ ······ ㉠



주어진 두 구를 평면 π 위로 정사영시켜 오른쪽 그림과 같이 나타낼 때

$\angle OA'D=\angle OB'E=30°$

이므로

$\overline{OD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\overline{OE}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

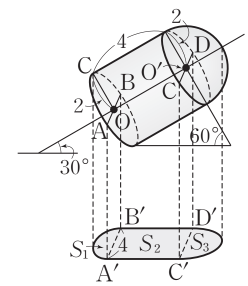
따라서 $\overline{DE}=\overline{CB'}=\overline{OE}-\overline{OD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\overline{A'B'}=\sqrt{\overline{A'C}^2+\overline{CB'}^2}=\sqrt{3^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$ ······ ㉡

이때, $\overline{A'B'}=\overline{AT}$이므로 ㉡을 ㉠에 대입하면

$d=\sqrt{1+\left(\frac{2\sqrt{21}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{93}}{3}$ 정답_ ②

416



오른쪽 그림과 같이 그림자를 세 부분으로 나누고 그 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라고 하면

(ⅰ) S_1은 선분 AB를 지름으로 하는 반원 ACB를 바닥에 정사영시킨 것이므로

$S_1=\frac{1}{2}\times\pi\times2^2\cos(90°-30°)$

$=\pi$

(ⅱ) S_2는 직사각형의 넓이이므로

$S_2=4\times4\times\cos30°=8\sqrt{3}$

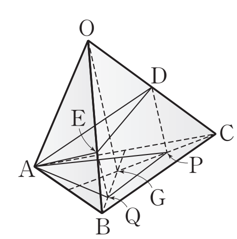
(ⅲ) S_3은 반구를 바닥에 정사영시킨 것으로 반원이 되므로

$S_3=\frac{1}{2}\times\pi\times2^2=2\pi$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $S_1+S_2+S_3=3\pi+8\sqrt{3}$

따라서 $a=3$, $b=8$이므로 $a+b=11$ 정답_ ④

417



오른쪽 그림과 같이 세 점 O, D, E의 평면 ABC 위로의 정사영을 각각 G, P, Q라고 하면 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{GP}:\overline{PC}=\overline{OD}:\overline{DC}=1:1$

$\overline{GQ}:\overline{QB}=\overline{OE}:\overline{EB}=2:1$

$\therefore \triangle AGP=\frac{1}{2}\triangle AGC=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\triangle ABC$

$=\frac{1}{6}\triangle ABC$

$\triangle AQG=\frac{2}{3}\triangle ABG=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\triangle ABC$

$=\frac{2}{9}\triangle ABC$

$\triangle QPG=\frac{1}{3}\triangle BCG=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\triangle ABC$

$=\frac{1}{9}\triangle ABC$

따라서 삼각형 AED의 평면 ABC 위로의 정사영인 삼각형 AQP의 넓이는

$\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\right)\triangle ABC=\frac{1}{2}\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$

정답_ ④

418

평면 α와 만나는 세 원기둥의 밑면의 중심을 각각 A, B, C라고 하면 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형이다.

오른쪽 그림과 같이

(평면 PQ′R″)∥(평면 ABC),

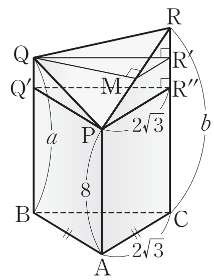
$\overline{QR} \parallel \overline{Q'R'}$

이 되도록 점 Q′, R′, R″을 잡으면

$\overline{QQ'}=\overline{RR'}=\overline{R'R''}$

이때, $\overline{QQ'}=a-8$, $\overline{RR'}=b-a$이므로

$a-8=b-a$



$\therefore b=2a-8$ …… ㉠

한편, △PQQ′≡△QRR′(SAS 합동)이므로 $\overline{PQ}=\overline{QR}$이고 점 Q에서 $\overline{RP}$에 내린 수선의 발 M은 $\overline{RP}$의 중점이므로

$\overline{MR'} \parallel \overline{PR''}$, $\overline{MR'}=\dfrac{1}{2}\overline{PR''}=\sqrt{3}$

$\angle RMR'=60°$, $\overline{MR'}=\sqrt{3}$이므로

$\overline{RR'}=b-a=\sqrt{3}\tan 60°$

$\therefore b-a=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=11$, $b=14$

$\therefore a+b=25$ 정답_ 25

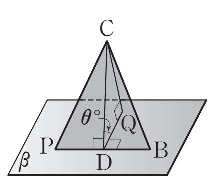
419

점 C와 평면 α 사이의 거리가 4이고

$\overline{AP}:\overline{AC}=1:4$

이므로 점 P와 평면 α 사이의 거리는 1이다.

따라서 직선 PB는 평면 α와 평행하므로 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PB}$를 포함하고 평면 α와 평행한 평면 β를 생각할 수 있다.



점 C에서 평면 β에 내린 수선의 발을 Q, 직선 PB에 내린 수선의 발을 D라고 하면 $\overline{CQ}\perp\beta$, $\overline{CD}\perp\overline{PB}$이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{QD}\perp\overline{PB}$

따라서 평면 ABC와 평면 α가 이루는 각의 크기를 $\theta°$라고 하면 평면 ABC와 평면 β가 이루는 각의 크기도 $\theta°$이므로

$\angle CDQ=\theta°$

$\overline{AP}:\overline{AC}=1:4$이고 △ABC의 넓이가 12이므로

$\triangle PBC=\dfrac{3}{4}\triangle ABC=\dfrac{3}{4}\times 12=9$

즉, $\dfrac{1}{2}\overline{PB}\cdot\overline{CD}=\dfrac{1}{2}\times 5\times\overline{CD}=9$이므로 $\overline{CD}=\dfrac{18}{5}$

$\overline{CQ}=4-1=3$이므로 직각삼각형 CDQ에서

$\overline{DQ}=\sqrt{\left(\dfrac{18}{5}\right)^2-3^2}=\dfrac{3\sqrt{11}}{5}$

$\therefore \cos\theta°=\dfrac{\overline{DQ}}{\overline{CD}}=\dfrac{\frac{3\sqrt{11}}{5}}{\frac{18}{5}}=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$

따라서 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는

$12\cos\theta°=12\times\dfrac{\sqrt{11}}{6}=2\sqrt{11}$ 정답_ $2\sqrt{11}$

06 공간좌표

420

점 A$(a, 2, b)$에서 x축에 내린 수선의 발의 좌표는

$(a, 0, 0)$

이것이 A′$(1, 0, c)$와 일치하므로

$a=1$, $c=0$

점 A$(a, 2, b)$에서 yz평면에 내린 수선의 발의 좌표는

$(0, 2, b)$

이것이 A″$(d, 2, 3)$과 일치하므로

$b=3$, $d=0$

$\therefore a+b+c+d=1+3+0+0=4$ 정답_ ④

421

점 $(6, -1, 4)$와 yz평면에 대하여 대칭인 점의 좌표는

$(-6, -1, 4)$

따라서 $a=-6$, $b=-1$, $c=4$이므로

$a-3b+2c=-6-3\times(-1)+2\times 4=5$ 정답_ ②

422

점 P$(2, -1, 5)$와 z축에 대하여 대칭인 점 Q의 좌표는

$(-2, 1, 5)$

점 Q$(-2, 1, 5)$에서 zx평면에 내린 수선의 발의 좌표는

$(-2, 0, 5)$ 정답_ ③

423

점 A는 점 B에서 zx평면에 내린 수선의 발이므로

A$(2, 0, a)$

점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-2, 0, -a)$

이 점이 점 $(b, 0, -4)$와 일치하므로

$a=4$, $b=-2$ $\therefore a+b=2$ 정답_ 2

424

점 P, Q, R는 점 A$(1, 2, 3)$에서 각각 xy평면, yz평면, zx평면에 내린 수선의 발이므로

P$(1, 2, 0)$, Q$(0, 2, 3)$, R$(1, 0, 3)$

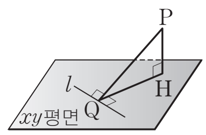
이때, $\overline{AR}\perp\overline{AQ}$, $\overline{AR}\perp\overline{AP}$, $\overline{AP}\perp\overline{AQ}$이고 $\overline{AP}=3$, $\overline{AQ}=1$, $\overline{AR}=2$이므로 구하는 사면체의 부피는

$\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\times 2\times 1\right)\times 3=1$ 정답_ ②

425

P$(4, 5, 3)$, H$(4, 5, 0)$이므로 $\overline{PH}=3$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 Q라고 하면



$\overline{PQ}\perp l$, $\overline{PH}\perp(xy$평면$)$

이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{HQ}\perp l$

따라서 점 H와 직선 l 사이의 거리는 $\overline{HQ}$의 길이와 같다.

$\overline{PQ}=6$, $\overline{PH}=3$이므로 직각삼각형 PQH에서

$\overline{HQ}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$ 정답_ ③

426

P$(2, 2, 3)$, Q$(-2, 2, 3)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(-2-2)^2+(2-2)^2+(3-3)^2}$

$=4$ 정답_ ④

427

점 $(3, -2, 4)$에 대하여 P$(3, 2, 4)$, Q$(-3, -2, -4)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(3+3)^2+(2+2)^2+(4+4)^2}$

$=\sqrt{116}=2\sqrt{29}$ 정답_ ④

428

P$(2, t, 2-t)$, Q$(1-t, 3, t)$에 대하여

$\overline{PQ}=\sqrt{(1-t-2)^2+(3-t)^2+(t-2+t)^2}$

$=\sqrt{6t^2-12t+14}=\sqrt{6(t-1)^2+8}$

따라서 선분 PQ의 길이는 $t=1$일 때 최소이고, 이때의 최솟값은 $\sqrt{8}$, 즉 $2\sqrt{2}$이다. 정답_ ⑤

429

A$(a, 2, 1)$, B$(-6, a, 6)$에 대하여

$\overline{AB}=\sqrt{(-6-a)^2+(a-2)^2+(b-1)^2}$

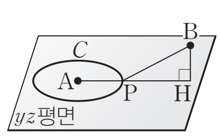
$=\sqrt{2a^2+8a+40+(b-1)^2}$

$=\sqrt{2(a+2)^2+(b-1)^2+32}$

따라서 선분 AB의 길이는 $a=-2$, $b=1$일 때 최소이고, 이때의 최솟값은 $\sqrt{32}$, 즉 $4\sqrt{2}$이다. 정답_ ②

430

오른쪽 그림과 같이 점 B$(2, 3, 3)$에서 yz평면에 내린 수선의 발을 H, 선분 AH와 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원 C의 교점을 P라고 하면 구하는 거리의 최솟값은 선분 BP의 길이와 같다.



A$(0, 1, 1)$, H$(0, 3, 3)$이므로

$\overline{AH}=\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$ $\quad\therefore \overline{PH}=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$

이때, $\overline{BH}=2$이므로 직각삼각형 BPH에서

$\overline{BP}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{6}$ 정답_ ③

431

O$(0, 0, 0)$, A$(2, -3, 4)$, B$(1-a, a, 2)$에 대하여

$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2$이므로

$(-a-1)^2+(a+3)^2+(-2)^2$

$=2^2+(-3)^2+4^2+(1-a)^2+a^2+2^2$

$2a^2+8a+14=2a^2-2a+34$

$10a=20 \quad \therefore a=2$ 정답_ ②

432

점 P가 x축 위에 있으므로 $b=c=0 \quad \therefore$ P$(a, 0, 0)$

A$(4, -2, 6)$, B$(3, -5, 4)$이고 $\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서

$(a-4)^2+2^2+(-6)^2=(a-3)^2+5^2+(-4)^2$

$a^2-8a+56=a^2-6a+50$

$2a=6 \quad \therefore a=3$

$\therefore a+b+c=3+0+0=3$ 정답_ ③

433

점 C(a, b, c)가 xy평면 위의 점이므로 $c=0$

$\therefore$ C$(a, b, 0)$

삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$에서

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$

A$(-1, 0, 2)$, B$(1, -1, 1)$이므로 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$에서

$(1+1)^2+(-1-0)^2+(1-2)^2$

$=(a-1)^2+(b+1)^2+(0-1)^2$

$\therefore (a-1)^2+(b+1)^2=5$ …… ㉠

A$(-1, 0, 2)$, B$(1, -1, 1)$이므로 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$에서

$(a-1)^2+(b+1)^2+(0-1)^2$

$=(a+1)^2+(b-0)^2+(0-2)^2$

$4a-2b+2=0$

$\therefore b=2a+1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(a-1)^2+(2a+2)^2=5$, $5a^2+6a=0$, $a(5a+6)=0$

$\therefore a=-\frac{6}{5}$ $(\because a\neq 0)$

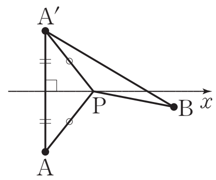
이것을 ㉡에 대입하면 $b=-\frac{7}{5}$

$a=-\frac{6}{5}$, $b=-\frac{7}{5}$, $c=0$이므로 $a+b+c=-\frac{13}{5}$ 정답_ ②

434

두 점 A, B는 xy평면 위의 점이고 두 점의 y좌표의 부호가 같으므로 xy평면에서 x축을 기준으로 같은 쪽에 있다.

오른쪽 그림과 같이 점 $A(-2, -3, 0)$과 x축에 대하여 대칭인 점을 A'이라고 하면 $A'(-2, 3, 0)$



이때, $A'(-2, 3, 0)$, $B(4, -2, 0)$이고

$\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}$

$\geq \overline{A'B}$

$=\sqrt{(4+2)^2+(-2-3)^2}$

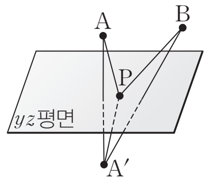
$=\sqrt{61}$

정답_④

435

두 점 A, B의 x좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 좌표공간에서 yz평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

오른쪽 그림과 같이 점 $A(4, 0, 2)$와 yz평면에 대하여 대칭인 점을 A'이라고 하면 $A'(-4, 0, 2)$



이때, $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $\overline{A'B}$의 길이와 같다.

$A'(-4, 0, 2)$, $B(2, 3, a)$이므로

$\overline{A'B}=\sqrt{(2+4)^2+(3-0)^2+(a-2)^2}=3\sqrt{6}$

양변을 제곱하면

$36+9+(a-2)^2=54$

$(a-2)^2=9$, $a-2=\pm3$

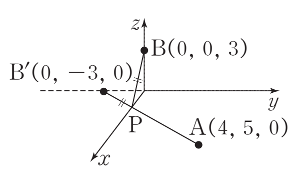
$\therefore a=5$ ($\because a>0$)

정답_⑤

436

점 A에서 점 P를 지나 점 B에 이르는 거리는 $\overline{AP}+\overline{PB}$이다.

오른쪽 그림과 같이 y축 위의 점 $B'(0, -3, 0)$을 잡으면



$\overline{PB}=\overline{PB'}$

이므로 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $\overline{AB'}$의 길이와 같다.

$\therefore d=\overline{AB'}=\sqrt{(4-0)^2+(5+3)^2}=4\sqrt{5}$

$\therefore d^2=80$

정답_80

437

두 점 $A(1, -2, 3)$, $B(2, 1, -2)$의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A', B'이라고 하면

$A'(1, -2, 0)$, $B'(2, 1, 0)$

이때,

$\overline{AB}=\sqrt{(1-2)^2+(-2-1)^2+(3+2)^2}=\sqrt{35}$,

$\overline{A'B'}=\sqrt{(1-2)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{10}$

이고 $\overline{AB}\cos\theta°=\overline{A'B'}$이므로

$\cos\theta°=\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}}=\dfrac{\sqrt{14}}{7}$

정답_④

438

삼각형 ABC의 xy평면 위로의 정사영은 삼각형 OAB이므로

$\triangle ABC\cos\theta°=\triangle OAB$ $\quad\therefore \cos\theta°=\dfrac{\triangle OAB}{\triangle ABC}$

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=\sqrt{(3-0)^2+(0-3)^2}=3\sqrt{2}$

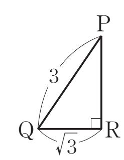
이므로 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 $3\sqrt{2}$인 정삼각형이다.

$\therefore \triangle ABC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(3\sqrt{2})^2=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

또, $\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times3\times3=\dfrac{9}{2}$이므로

$\cos\theta°=\dfrac{\frac{9}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos\theta°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 PQR를 생각하면



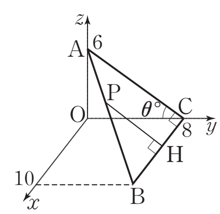
$\overline{PR}=\sqrt{3^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$

$\therefore \sin\theta°=\dfrac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

정답_⑤

439

$\overline{AC}=\sqrt{(0-8)^2+(6-0)^2}=10$



$\overline{AO}\perp(xy$ 평면$)$, $\overline{OC}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{AC}\perp\overline{BC}$

평면 ABC와 xy평면이 이루는 각의 크기를 $\theta°$라고 하면

$\angle ACO=\theta°$

$\therefore \cos\theta°=\dfrac{\overline{OC}}{\overline{AC}}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$

한편, $\triangle ABC\backsim\triangle PBH$ (AA 닮음)이므로

$\overline{BC}:\overline{BH}=\overline{AC}:\overline{PH}=10:6=5:3$

이때, $\overline{BC}=10$이므로

$\overline{BH}=\dfrac{3}{5}\overline{BC}=6$

$\therefore \triangle PBH=\dfrac{1}{2}\times6\times6=18$

따라서 삼각형 PBH의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는

$\triangle PBH\cos\theta°=18\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{72}{5}$

정답_$\dfrac{72}{5}$

440

$P(-1, 4, 2)$에 대하여 $A(-1, 4, 0)$, $B(-1, 0, 2)$이므로 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-1-1}{2}, \dfrac{4+0}{2}, \dfrac{0+2}{2}\right)$

$\therefore (-1, 2, 1)$

정답_③

441

선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\times a+3\times 1}{1+3}, \frac{1\times 2+3\times 6}{1+3}, \frac{1\times(-4)+3\times 4}{1+3}\right)$$

$\therefore \left(\frac{a+3}{4}, 5, 2\right)$

이 점이 $(2, 5, 2)$와 일치하므로

$\frac{a+3}{4}=2 \qquad \therefore a=5$

정답_③

442

선분 AB를 $1:k$로 외분하는 점이 xy평면 위에 있으므로 외분점의 z좌표는 0이다.

즉, $\frac{1\times 6-k\times 2}{1-k}=0$이므로

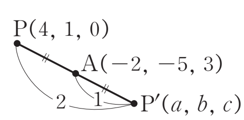
$-2k+6=0\ (\because k\neq 1)$

$\therefore k=3$

정답_③

443

점 P′은 선분 PA를 $2:1$로 외분하는 점이므로



$a=\frac{2\times(-2)-1\times 4}{2-1}=-8$

$b=\frac{2\times(-5)-1\times 1}{2-1}=-11$

$c=\frac{2\times 3-1\times 0}{2-1}=6$

$\therefore a+b+c=-13$

정답_②

다른 풀이

점 A는 선분 PP′의 중점이므로

$A\left(\frac{4+a}{2}, \frac{1+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

그런데 점 A의 좌표는 $(-2, -5, 3)$이므로

$\frac{4+a}{2}=-2,\ \frac{1+b}{2}=-5,\ \frac{c}{2}=3$

$\therefore a=-8, b=-11, c=6$

$\therefore a+b+c=-13$

444

선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점이 x축 위에 있으므로 외분점의 y좌표와 z좌표는 0이다.

즉, $\frac{2\times 2-1\times a}{2-1}=0,\ \frac{2\times b-1\times(-5)}{2-1}=0$이므로

$a=4, b=-\frac{5}{2}$

$\therefore a+b=\frac{3}{2}$

정답_③

445

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{2\times(-3)+1\times 3}{2+1}, \frac{2\times 2+1\times 2}{2+1}, \frac{2\times 4+1\times 1}{2+1}\right)$$

$\therefore C(-1, 2, 3)$

선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{2\times(-3)-1\times 3}{2-1}, \frac{2\times 2-1\times 2}{2-1}, \frac{2\times 4-1\times 1}{2-1}\right)$$

$\therefore D(-9, 2, 7)$

따라서 선분 CD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1-9}{2}, \frac{2+2}{2}, \frac{3+7}{2}\right) \qquad \therefore (-5, 2, 5)$

정답_①

446

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2\times 1+1\times 4}{2+1}, \frac{2\times(-2)+1\times 1}{2+1}, \frac{2\times(-3)+1\times 3a}{2+1}\right)$$

$\therefore P(2, -1, a-2)$

선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{2\times 1-1\times 4}{2-1}, \frac{2\times(-2)-1\times 1}{2-1}, \frac{2\times(-3)-1\times 3a}{2-1}\right)$$

$\therefore Q(-2, -5, -3a-6)$

$\overline{PQ}=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2+(-4a-4)^2}=4\sqrt{6}$이므로

$16+16+16(a+1)^2=96$

$(a+1)^2=4, a+1=\pm 2$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$

정답_①

447

선분 BC를 $3:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{3\times 0+1\times 0}{3+1}, \frac{3\times 0+1\times 4}{3+1}, \frac{3\times 4+1\times 0}{3+1}\right)$$

$\therefore P(0, 1, 3)$

선분 AC를 $1:3$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{1\times 0-3\times 4}{1-3}, \frac{1\times 0-3\times 0}{1-3}, \frac{1\times 4-3\times 0}{1-3}\right)$$

$\therefore Q(6, 0, -2)$

따라서 $P'(0, 1, 0), Q'(6, 0, 0)$이므로

$\overline{OP'}=1, \overline{OQ'}=6, \angle P'OQ'=90^\circ$

$\therefore \triangle OP'Q'=\frac{1}{2}\times 1\times 6=3$

정답_③

448

선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점이 z축 위에 있으므로 내분점의 y좌표는 0이다.

즉, $\frac{2\times(-3)+3\times a}{2+3}=0$에서

$3a-6=0 \qquad \therefore a=2$

또, 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점이 xy평면 위에 있으므로 외분점의 z좌표는 0이다.

즉, $\dfrac{2\times b-1\times 2a}{2-1}=0$에서

$2b-2a=0 \qquad \therefore b=a=2$

따라서 $A(-2, 2, 4)$, $B(3, -3, 2)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(-2-3)^2+(2+3)^2+(4-2)^2}$

$=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

정답_④

449

$\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$이므로 점 P는 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점이고, 점 P가 zx평면 위에 있으므로 점 P의 y좌표는 0이다.

즉, $\dfrac{6m-2n}{m+n}=0$에서

$3m=n$

$\therefore \dfrac{n}{m}=\dfrac{3m}{m}=3$

정답_③

450

점 $P(-3, 4, 5)$를 zx평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-3, -4, 5)$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동하면 $(3, 4, -5)$이므로

$Q(3, 4, -5)$

선분 PQ를 3 : 1로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{3\times 3-1\times(-3)}{3-1}, \dfrac{3\times 4-1\times 4}{3-1}, \dfrac{3\times(-5)-1\times 5}{3-1}\right)$

$\therefore (6, 4, -10)$

따라서 $a=6, b=4, c=-10$이므로

$a+b+c=0$

정답_0

451

선분 AC의 중점을 M이라고 하면 점 M의 좌표는

$\left(\dfrac{-2-1}{2}, \dfrac{1-3}{2}, \dfrac{4-5}{2}\right) \qquad \therefore M\left(-\dfrac{3}{2}, -1, -\dfrac{1}{2}\right)$

점 D의 좌표를 (x, y, z)라고 하면 선분 BD의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{x-5}{2}, \dfrac{y-6}{2}, \dfrac{z-6}{2}\right)$

평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 중점은 일치하므로

$\dfrac{x-5}{2}=-\dfrac{3}{2}, \dfrac{y-6}{2}=-1, \dfrac{z-6}{2}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=2, y=4, z=5$

따라서 $D(2, 4, 5)$이므로

$\overline{BD}=\sqrt{(-5-2)^2+(-6-4)^2+(-6-5)^2}$

$=\sqrt{270}=3\sqrt{30}$

정답_③

452

세 점 $A(a, 0, 5)$, $B(1, b, -3)$, $C(1, 1, 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{a+1+1}{3}, \dfrac{0+b+1}{3}, \dfrac{5-3+1}{3}\right)$

$\therefore \left(\dfrac{a+2}{3}, \dfrac{b+1}{3}, 1\right)$

이 점이 $(2, 2, 1)$과 일치하므로

$\dfrac{a+2}{3}=2, \dfrac{b+1}{3}=2 \qquad \therefore a=4, b=5$

$\therefore a+b=9$

정답_④

453

$A(3, -6, 0)$, $B(0, -6, 9)$, $C(3, 0, 9)$이므로 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\dfrac{3+0+3}{3}, \dfrac{-6-6+0}{3}, \dfrac{0+9+9}{3}\right)$

$\therefore G(2, -4, 6)$

$\therefore a=2, b=-4, c=6$

$\therefore a+b+c=2+(-4)+6=4$

정답_④

454

$B(0, 3, 5)$, $D(4, 0, 5)$, $E(4, 3, 0)$이므로 삼각형 BDE의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\dfrac{0+4+4}{3}, \dfrac{3+0+3}{3}, \dfrac{5+5+0}{3}\right)$

$\therefore G\left(\dfrac{8}{3}, 2, \dfrac{10}{3}\right)$

$\therefore \overline{AG}=\sqrt{\left(\dfrac{8}{3}-4\right)^2+(2-3)^2+\left(\dfrac{10}{3}-5\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$

정답_⑤

455

선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times(-2)+2\times 3}{1+2}, \dfrac{1\times 1+2\times(-4)}{1+2}, \dfrac{1\times(-1)+2\times 5}{1+2}\right)$

$\therefore P\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{7}{3}, 3\right)$

선분 BC를 1 : 2로 내분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times 0+2\times(-2)}{1+2}, \dfrac{1\times 3+2\times 1}{1+2}, \dfrac{1\times 2+2\times(-1)}{1+2}\right)$

$\therefore Q\left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3}, 0\right)$

선분 CA를 1 : 2로 내분하는 점 R의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times 3+2\times 0}{1+2}, \dfrac{1\times(-4)+2\times 3}{1+2}, \dfrac{1\times 5+2\times 2}{1+2}\right)$

$\therefore R\left(1, \dfrac{2}{3}, 3\right)$

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{\frac{4}{3}-\frac{4}{3}+1}{3}, \frac{-\frac{7}{3}+\frac{5}{3}+\frac{2}{3}}{3}, \frac{3+0+3}{3}\right)$$

$\therefore \left(\frac{1}{3}, 0, 2\right)$ 정답_②

다른 풀이

삼각형 PQR의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치한다. 이때, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{3-2+0}{3}, \frac{-4+1+3}{3}, \frac{5-1+2}{3}\right)$$

$\therefore \left(\frac{1}{3}, 0, 2\right)$

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{1}{3}, 0, 2\right)$

456

삼각형 ABC의 무게중심을 G라고 하면

$$G\left(\frac{n+1}{3}, \frac{n+1}{3}, \frac{n+1}{3}\right)$$

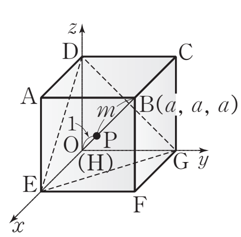
이므로

$$\begin{aligned} a_n &= \overline{OG} \\ &= \sqrt{\left(\frac{n+1}{3}\right)^2+\left(\frac{n+1}{3}\right)^2+\left(\frac{n+1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}(n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9 &= \frac{\sqrt{3}}{3}(2+3+4+\cdots+10) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\times 54 \\ &= 18\sqrt{3} \end{aligned}$$

정답_②

457



오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 H를 원점에, $\overline{HE}$, $\overline{HG}$, $\overline{HD}$를 각각 x축의 양의 방향 위에, y축의 양의 방향 위에, z축의 양의 방향 위에 놓이도록 주어진 정육면체를 좌표공간에 놓고 점 B의 좌표를 (a, a, a)라고 하면

$D(0, 0, a)$, $E(a, 0, 0)$, $G(0, a, 0)$

삼각형 DEG의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ …… ㉠

이때, 대각선 HB를 $1 : m$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$P\left(\frac{a}{1+m}, \frac{a}{1+m}, \frac{a}{1+m}\right)$ …… ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$$\frac{a}{1+m}=\frac{a}{3}$$

$\therefore m=2$ 정답_②

458

$x^2+y^2+z^2+6x-2y-4z+5=0$에서

$(x+3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$

따라서 구의 중심의 좌표는 $(-3, 1, 2)$이고 반지름의 길이는 3이므로

$a=-3, b=1, c=2, r=3$

$\therefore a+b+c+r=3$ 정답_⑤

459

선분 AB를 $1 : 2$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\times(-1)+2\times 2}{1+2}, \frac{1\times 0+2\times(-3)}{1+2}, \frac{1\times(-1)+2\times 5}{1+2}\right)$$

$\therefore (1, -2, 3)$

선분 AB를 $1 : 2$로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\times(-1)-2\times 2}{1-2}, \frac{1\times 0-2\times(-3)}{1-2}, \frac{1\times(-1)-2\times 5}{1-2}\right)$$

$\therefore (5, -6, 11)$

두 점 $(1, -2, 3)$, $(5, -6, 11)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 구의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{-2-6}{2}, \frac{3+11}{2}\right)$$

$\therefore (3, -4, 7)$

구의 반지름의 길이는

$\sqrt{(3-1)^2+(-4+2)^2+(7-3)^2}=2\sqrt{6}$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x-3)^2+(y+4)^2+(z-7)^2=24$ 정답_⑤

460

$x^2+y^2+z^2-4x-2y-2z=8$에서

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=14$

이므로 구의 중심의 좌표는

$(2, 1, 1)$

이때, 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+a}{2}, \frac{4+b}{2}, \frac{-1+c}{2}\right)$$

이 점이 구의 중심과 일치하므로

$$\frac{3+a}{2}=2, \frac{4+b}{2}=1, \frac{-1+c}{2}=1$$

$\therefore a=1, b=-2, c=3$

$\therefore a+b+c=1-2+3=2$ 정답_⑤

461

주어진 구가 x축, y축, z축에 동시에 접하므로 구의 중심을 $C(a, a, a)$로 놓고, 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $H(a, 0, 0)$

이때, $\overline{CH}=2$ (구의 반지름의 길이)이므로

$\sqrt{(a-a)^2+(0-a)^2+(0-a)^2}=2$

$\sqrt{2a^2}=2,\ 2a^2=4$

$\therefore\ a^2=2$

따라서 원점과 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{a^2+a^2+a^2}=\sqrt{3a^2}=\sqrt{3\times2}=\sqrt{6}$ 정답_⑤

462

$x^2+y^2+z^2-2x-6y-2az+b=0$에서

$(x-1)^2+(y-3)^2+(z-a)^2=a^2-b+10$ …… ㉠

이므로 구의 중심의 좌표는

$(1, 3, a)$

주어진 구가 xy평면에 접하므로

|(중심의 z좌표)|=(반지름의 길이)

즉, $|a|=\sqrt{a^2-b+10}$이므로

$a^2=a^2-b+10\quad \therefore\ b=10$

점 $(3, 4, 1)$이 구 ㉠ 위의 점이므로

$(3-1)^2+(4-3)^2+(1-a)^2=a^2-b+10$

$4+1+1-2a+a^2=a^2-b+10$

$\therefore\ 2a-b+4=0$ …… ㉡

㉡에 $b=10$을 대입하면

$2a-10+4=0\quad \therefore\ a=3$

$\therefore\ ab=3\times10=30$ 정답_②

463

주어진 구가 xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하고 점 $(1, 4, -3)$을 지나므로 구의 중심의 x좌표, y좌표는 양수이고, z좌표는 음수이다.

따라서 구의 반지름의 길이를 r라고 하면 구의 방정식은

$(x-r)^2+(y-r)^2+(z+r)^2=r^2$

이 구가 점 $(1, 4, -3)$을 지나므로

$(1-r)^2+(4-r)^2+(-3+r)^2=r^2$

$2r^2-16r+26=0$

$\therefore\ r^2-8r+13=0$

위의 방정식을 풀면 $r=4\pm\sqrt{3}$

따라서 두 구의 중심의 좌표는 각각

$(4+\sqrt{3}, 4+\sqrt{3}, -4-\sqrt{3}), (4-\sqrt{3}, 4-\sqrt{3}, -4+\sqrt{3})$

이므로 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2+(-2\sqrt{3})^2}=6$ 정답_③

464

$x^2+y^2+z^2-4x+8y-8z+27=0$에서

$(x-2)^2+(y+4)^2+(z-4)^2=9$

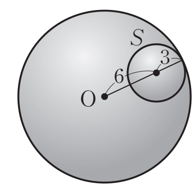
ㄱ은 옳다.

구의 중심 $(2, -4, 4)$에서 yz평면까지의 거리는 2이고, 구의 반지름의 길이는 3이므로 구 S는 yz평면과 만난다.

ㄴ도 옳다.

구의 중심 $(2, -4, 4)$에서 zx평면까지의 거리는 4이고, 구의 반지름의 길이는 3이므로 구 S는 zx평면과 만나지 않는다.

ㄷ은 옳지 않다.



원점에서 구 S의 중심 $(2, -4, 4)$까지의 거리는

$\sqrt{2^2+(-4)^2+4^2}=6$

이므로 원점에서 구 위의 점까지의 거리의 최댓값은

$6+3=9$

그러므로 중심이 원점이고 구 S와 내접하는 구의 반지름의 길이는 9이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 정답_③

465

점 A의 좌표를 (x_1, y_1, z_1)이라고 하면 점 A가 구 $x^2+y^2+z^2=9$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2=9$ …… ㉠

선분 AB의 중점을 $P(x, y, z)$라고 하면

$x=\dfrac{x_1-2}{2},\ y=\dfrac{y_1+4}{2},\ z=\dfrac{z_1+6}{2}$

$\therefore\ x_1=2x+2,\ y_1=2y-4,\ z_1=2z-6$

이것을 ㉠에 대입하면

$(2x+2)^2+(2y-4)^2+(2z-6)^2=9$

$4(x+1)^2+4(y-2)^2+4(z-3)^2=9$

$\therefore\ (x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\dfrac{9}{4}$

따라서 선분 AB의 중점이 그리는 도형은 중심이 $(-1, 2, 3)$이고 반지름의 길이가 $\dfrac{3}{2}$인 구이다.

따라서 구하는 구의 겉넓이는

$4\pi\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=9\pi$ 정답_④

466

점 P의 좌표를 (x, y, z)라고 하면 $\overline{OP}:\overline{AP}=2:1$이므로

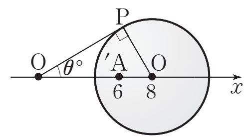
$2\overline{AP}=\overline{OP},\ 4\overline{AP}^2=\overline{OP}^2$

$4\{(x-6)^2+y^2+z^2\}=x^2+y^2+z^2$

$x^2+y^2+z^2-16x+48=0$

$\therefore\ (x-8)^2+y^2+z^2=16$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 중심이 $O'(8, 0, 0)$이고 반지름의 길이가 4인 구이다.



따라서 직선 OP가 구에 접할 때 $\angle POA$의 크기가 최대가 되므로

직각삼각형 POO'에서

$\sin\theta° = \dfrac{\overline{O'P}}{\overline{OO'}} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ 정답_ ①

467

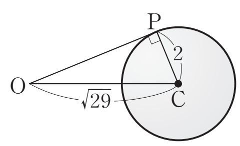
$x^2+y^2+z^2+4x-6y-8z+25=0$에서

$(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=4$

주어진 구의 중심을 C라고 하면 $C(-2, 3, 4)$이므로

$\overline{OC}=\sqrt{(-2)^2+3^2+4^2}=\sqrt{29}$

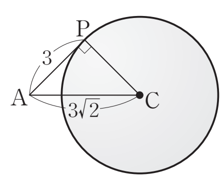
오른쪽 그림과 같이 원점에서 구에 그은 접선의 접점을 P라고 하면 삼각형 POC는 직각삼각형이므로 구하는 접선의 길이는



$\overline{OP}=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{(\sqrt{29})^2-2^2}=5$ 정답_ ①

468

오른쪽 그림과 같이 점 $A(2, 3, 1)$에서 구에 그은 접선의 접점을 P라고 하면



$\overline{PA}=3$

주어진 구의 중심이 $C(1, -1, 0)$이므로

$\overline{CA}=\sqrt{1^2+4^2+1^2}=3\sqrt{2}$

따라서 구의 반지름의 길이는

$\overline{PC}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{PA}^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-3^2}=3$ 정답_ ②

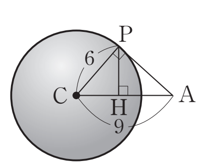
469

구 $(x-5)^2+(y+4)^2+(z-4)^2=36$의 중심을 C라고 하면

$C(5, -4, 4)$

$\therefore \overline{CA}=\sqrt{(-6)^2+6^2+(-3)^2}=9$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 $\overline{CA}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\overline{PH}$의 길이는 점 P의 자취인 원의 반지름의 길이이다.



직각삼각형 PCA에서

$\overline{AP}=\sqrt{9^2-6^2}=3\sqrt{5}$

직각삼각형 PCA의 넓이에서

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{CP}=\dfrac{1}{2}\times\overline{CA}\times\overline{PH}$

즉, $\overline{AP}\times\overline{CP}=\overline{CA}\times\overline{PH}$이므로

$3\sqrt{5}\times 6=9\times\overline{PH}$ $\quad\therefore \overline{PH}=2\sqrt{5}$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\times(2\sqrt{5})^2=20\pi$ 정답_ 20π

470

z축 위의 점은 x좌표, y좌표가 모두 0이므로 주어진 구의 방정식에 $x=0, y=0$을 대입하면

$(0-2)^2+(0-6)^2+(z-8)^2=89$

$(z-8)^2=49$, $z-8=\pm 7$

$\therefore z=1$ 또는 $z=15$

따라서 $A(0, 0, 1)$, $B(0, 0, 15)$ 또는 $A(0, 0, 15)$, $B(0, 0, 1)$이므로

$\overline{AB}=|1-15|=14$ 정답_ ①

471

y축 위의 점은 x좌표, z좌표가 모두 0이므로 주어진 구의 방정식에 $x=0, z=0$을 대입하면

$y^2-2y+k=0$ ⋯⋯ ㉠

구와 y축이 만나는 두 점 사이의 거리가 6이므로 y에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근의 차는 6이다.

따라서 이차방정식 ㉠의 두 근을 α, $\alpha+6$이라고 하면 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+(\alpha+6)=2$, $\alpha(\alpha+6)=k$

$\therefore \alpha=-2$, $k=-8$ 정답_ ①

472

$x^2+y^2+z^2-4x-6y-2kz+14=0$에서

$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-k)^2=k^2-1$ ⋯⋯ ㉠

yz 평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 ㉠에 $x=0$을 대입하면

$(y-3)^2+(z-k)^2=k^2-5$

$\therefore S=(k^2-5)\pi$

zx 평면 위의 점은 y좌표가 0이므로 ㉠에 $y=0$을 대입하면

$(x-2)^2+(z-k)^2=k^2-10$

$\therefore S'=(k^2-10)\pi$

이때, $S : S'=3 : 2$이므로

$(k^2-5)\pi : (k^2-10)\pi=3 : 2$

$3k^2-30=2k^2-10$

$\therefore k^2=20$ 정답_ ①

473

중심이 (a, b, c)이고 반지름의 길이가 4인 구의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=16$ ⋯⋯ ㉠

yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 ㉠에 $x=0$을 대입하면

$(y-b)^2+(z-c)^2=16-a^2$

이 식이 $(y+1)^2+(z+4)^2=9$와 같으므로

$a^2=7, b=-1, c=-4$

$\therefore a^2+b^2+c^2=7+(-1)^2+(-4)^2=24$ 정답_ ①

474

xy평면 위의 점은 z좌표가 0이므로 주어진 구의 방정식에 $z=0$을 대입하면

$x^2+y^2-24x-40y+508=0$

$\therefore (x-12)^2+(y-20)^2=36$

따라서 xy평면과 구가 만나서 생기는 원, 즉 나무판자의 구멍은 반지름의 길이가 6인 원이므로 구하는 넓이는

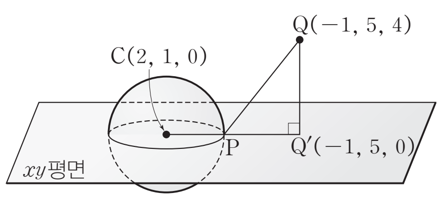
$\pi\times6^2=36\pi$ 정답_ ⑤

475

xy평면 위의 점은 z좌표가 0이므로 주어진 구의 방정식에 $z=0$을 대입하면

$(x-2)^2+(y-1)^2=4$

따라서 원 C의 중심은 $\mathrm{C}(2, 1, 0)$이고 반지름의 길이는 2이다.



한편, 위의 그림과 같이 점 $\mathrm{Q}(-1, 5, 4)$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 Q'이라고 하면

$\mathrm{Q}'(-1, 5, 0)$

점 Q'과 점 P 사이의 거리의 최솟값 $\overline{\mathrm{PQ}'}$은

$\overline{\mathrm{PQ}'}=\overline{\mathrm{CQ}'}-\overline{\mathrm{CP}}$

$=\sqrt{(-3)^2+4^2}-2=5-2=3$

$\overline{\mathrm{QQ}'}=4$이므로 점 P와 점 Q 사이의 거리의 최솟값은

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ 정답_ ②

476

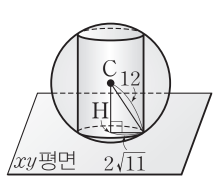
구에 내접한 원기둥의 밑면이 xy평면 위에 있으므로 그 밑면은 구와 xy평면의 교선과 같다.

xy평면 위의 점은 z좌표가 0이므로 $z=0$을 주어진 구의 방정식 $(x-5)^2+(y-8)^2+(z-10)^2=144$에 대입하면

$(x-5)^2+(y-8)^2=44$

따라서 밑면의 반지름의 길이는 $2\sqrt{11}$이다.

오른쪽 그림과 같이 주어진 구의 중심을 C라 하고 점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{12^2-(2\sqrt{11})^2}$

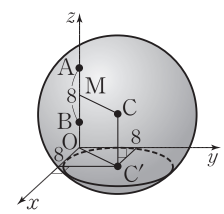
$=10$

따라서 구에 내접하는 원기둥은 밑면의 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{11}$, 높이가 20이므로 구하는 부피는

$\pi\times(2\sqrt{11})^2\times20=880\pi$ 정답_ ⑤

477

오른쪽 그림과 같이 구 S의 중심을 C, xy평면과 만나서 생기는 원의 중심을 C', z축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 고 하자. (단, 점 A의 z좌표가 점 B의 z좌표보다 크다.)



원 C'의 넓이가 64π이므로 $\mathrm{C}'(8, 8, 0)$이고, 원 C'의 반지름의 길이는 8이다.

$\therefore \overline{\mathrm{OC}'}=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$

선분 AB의 중점을 M이라고 하면

$\overline{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=4, \overline{\mathrm{CM}}=\overline{\mathrm{OC}'}=8\sqrt{2}, \overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{CM}}$

이므로 직각삼각형 AMC에서

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{CM}}^2}=\sqrt{4^2+(8\sqrt{2})^2}=12$

따라서 구 S의 반지름의 길이는 12이다. 정답_ ②

478

두 구의 중심의 좌표는 각각 $(0, 1, 0)$, $(-3, 1, 4)$이므로 두 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(-3)^2+0^2+4^2}=5$

구하는 구의 반지름의 길이를 r라고 하면 두 구가 외접하므로

$2+r=5 \qquad \therefore r=3$ 정답_ 3

479

$x^2+y^2+z^2+4x+2y-4z+k=0$에서

$(x+2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=-k+9$

두 구의 중심의 좌표는 각각 $(0, 0, 0)$, $(-2, -1, 2)$이므로 두 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+2^2}=3$

두 구가 외접하므로

$1+\sqrt{-k+9}=3, \sqrt{-k+9}=2$

$-k+9=4 \qquad \therefore k=5$ 정답_ ①

480

$x^2+y^2+z^2-10x-4y+8z+k=0$에서

$(x-5)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=45-k$

두 구의 중심의 좌표는 각각 $(0, 0, 0)$, $(5, 2, -4)$이므로 두 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{5^2+2^2+(-4)^2}=3\sqrt{5}$

구 C_1이 구 C_2의 밖에 있으려면 두 구의 중심 사이의 거리가 두 구의 반지름의 길이의 합보다 커야 하므로

$\sqrt{5}+\sqrt{45-k}<3\sqrt{5}$

$\sqrt{45-k}<2\sqrt{5}$

$0<45-k<20$

$\therefore 25<k<45$

따라서 자연수 k는 $26, 27, 28, \cdots, 44$의 19개이다. 정답_②

481

$x^2+y^2+z^2-2x-4y-8z+12=0$에서

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=9$

이므로 중심의 좌표는 $(1, 2, 4)$이고 반지름의 길이는 3이다.

$x^2+y^2+z^2-2x+2y=a$에서

$(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=a+2$

이므로 중심의 좌표는 $(1, -1, 0)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{a+2}$이다.

두 구가 내접하므로 두 구의 중심 사이의 거리는 두 구의 반지름의 길이의 차와 같다.

즉, $\sqrt{0^2+(-3)^2+(-4)^2}=|\sqrt{a+2}-3|$이므로

$|\sqrt{a+2}-3|=5, \sqrt{a+2}=8$ ($\because \sqrt{a+2}>0$)

$a+2=64 \qquad \therefore a=62$

따라서 두 구의 반지름의 길이는 각각

$3, \sqrt{a+2}=8$

이므로 구하는 곱은 24이다. 정답_⑤

482

두 구의 중심의 좌표는 각각 $(-1, 2, -3), (-1, -2, 0)$이므로 두 구의 중심 사이의 거리를 d라고 하면

$d=\sqrt{0^2+(-4)^2+3^2}=5$

또한, 두 구의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라고 하면

$r_1=\sqrt{a}, r_2=1$

ㄱ은 옳지 않다.

$a=16$이면 $r_1=\sqrt{16}=4$이고

$4+1=5$, 즉 $r_1+r_2=d$

이므로 두 구는 외접한다.

ㄴ도 옳지 않다.

$a=20$이면 $r_1=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$이고

$2\sqrt{5}-1<5<2\sqrt{5}+1$, 즉 $r_1-r_2<d<r_1+r_2$

이므로 두 구가 만나서 원이 생긴다.

ㄷ은 옳다.

$a>36$이면 $r_1>6$이므로

$r_1-r_2>d$

그러므로 두 구는 만나지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다. 정답_③

483

주어진 두 구의 중심을 각각 O, C라고 하자.

구 $x^2+y^2+z^2=8$의 중심은 $O(0, 0, 0)$이고 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이다.

$x^2+y^2+z^2-6x-8y+10z+32=0$에서

$(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2=18$

이므로 중심은 $C(3, 4, -5)$이고 반지름의 길이는 $3\sqrt{2}$이다.

두 구의 중심 사이의 거리는

$\overline{OC}=\sqrt{3^2+4^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$

두 구의 반지름의 길이의 합은

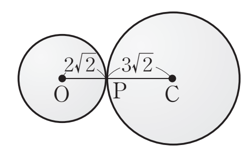
$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

따라서 두 구는 외접하므로

점 $P(a, b, c)$는 선분 OC를

$2\sqrt{2}:3\sqrt{2}=2:3$

으로 내분하는 점이다.



즉, $a=\dfrac{2\times3+3\times0}{2+3}=\dfrac{6}{5}, b=\dfrac{2\times4+3\times0}{2+3}=\dfrac{8}{5}$,

$c=\dfrac{2\times(-5)+3\times0}{2+3}=-2$이므로

$a+b+c=\dfrac{4}{5}$ 정답_③

484

평면 α를 xy평면으로 생각하면 세 구의 중심 A, B, C의 z좌표는 각각 6, 12, 24이므로 삼각형 ABC의 무게중심의 z좌표는

$\dfrac{6+12+24}{3}=14$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심과 평면 α 사이의 거리는 14이다. 정답_⑤

485

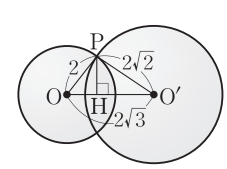
주어진 두 구의 중심을 각각 O, O′이라고 하면 구 $x^2+y^2+z^2=4$는 중심이 $O(0, 0, 0)$, 반지름의 길이가 2이고,

구 $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=8$은 중심이 $O'(2, 2, 2)$, 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이다.

이때, 두 구의 중심 사이의 거리는

$\overline{OO'}=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$

한편, 오른쪽 그림과 같이 두 구가 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P, 점 P에서 선분 OO′에 내린 수선의 발을 H라고 하면 두 구가 만나서 생기는 원의 반지름은 선분 PH이다.



이때, $\overline{OP}^2+\overline{O'P}^2=\overline{OO'}^2$이므로 삼각형 POO′은 $\angle OPO'=90^\circ$인 직각삼각형이다.

$\dfrac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\overline{PH}$이므로

$\overline{PH}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

따라서 구하는 원의 둘레의 길이는

$2\pi\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{4\sqrt{6}}{3}\pi$ 정답_④

486

집합 A는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 3인 구 위의 점들의 집합이고, 집합 B는 중심의 좌표가 (a, b, c)이고 반지름의 길이가 1인 구 위의 점들의 집합이다.

$A\cap B\neq\varnothing$은 두 구가 서로 만남을 의미하므로 두 구가 서로 만나려면 두 구의 중심 사이의 거리 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$이 두 구의 반지름의 길이의 차인 2 보다 크거나 같고, 반지름의 길이의 합인 4 보다 작거나 같아야 한다.

즉, $2\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}\le4$이므로

$2^2\le a^2+b^2+c^2\le4^2$

따라서 구하는 입체도형의 부피는 반지름의 길이가 4인 구의 부피에서 반지름의 길이가 2인 구의 부피를 뺀 값과 같으므로

$$\frac{4}{3}\pi\times4^3-\frac{4}{3}\pi\times2^3=\frac{4}{3}\pi(4^3-2^3)$$
$$=\frac{4}{3}\pi\times56$$
$$=\frac{224}{3}\pi$$

정답_⑤

487

주어진 두 구의 교선을 지나는 구의 방정식은

$x^2+y^2+z^2-4x-8y+8$

$+k(x^2+y^2+z^2-6x-4y+4)=0$ (단, $k\neq-1$) ······ ㉠

이 구가 원점을 지나므로 $(0, 0, 0)$을 대입하면

$8+4k=0$ $\therefore k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2+z^2-4x-8y+8-2(x^2+y^2+z^2-6x-4y+4)=0$

$x^2+y^2+z^2-8x=0$

$\therefore (x-4)^2+y^2+z^2=16$

따라서 구하는 구의 반지름의 길이는 4이다. 정답_④

참고

서로 만나는 두 구

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$,

$x^2+y^2+z^2+a'x+b'y+c'z+d'=0$

의 교선을 지나는 구의 방정식은

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d$

$+k(x^2+y^2+z^2+a'x+b'y+c'z+d')=0$ (단, $k\neq-1$)

488

세 정육면체 A, B, C 안에 내접하는 구의 중심을 각각 P, Q, R라고 하면

$P(3, 1, 3), Q(3, 3, 1), R(1, 3, 1)$

세 점 P, Q, R를 xy평면에 정사영한 점을 각각 P′, Q′, R′이라고 하면

$P'(3, 1, 0), Q'(3, 3, 0), R'(1, 3, 0)$

이때,

$\overline{P'Q'}=\sqrt{0^2+2^2+0^2}=2$

$\overline{P'R'}=\sqrt{(-2)^2+2^2+0^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{Q'R'}=\sqrt{(-2)^2+0^2+0^2}=2$

이므로

$\overline{P'Q'}^2+\overline{Q'R'}^2=\overline{P'R'}^2$

즉, 삼각형 P′Q′R′은 $\overline{P'R'}$을 빗변으로 하는 직각이등변삼각형이다.

따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times2=2$ 정답_③

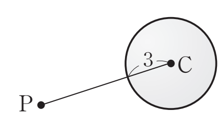
489

구의 중심을 C라고 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로 점 C의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+6}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$ $\therefore C(3, 4, 2)$

이때, $A(1, 2, 1)$이므로 구의 반지름의 길이는

$\overline{AC}=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$



이므로 오른쪽 그림과 같이 점 $P(-1, -4, 1)$에서 구 위의 점까지의 거리의 최솟값은

$\overline{CP}-3=\sqrt{(-4)^2+(-8)^2+(-1)^2}-3$

$=9-3=6$ 정답_③

490

구 $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-8)^2=64$의 중심을 C라고 하면

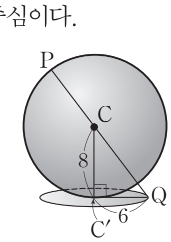
$C(1, 3, 8)$

점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 C′이라고 하면

$C'(1, 3, 0)$

이때, 점 C′은 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=36$의 중심이다.

두 점 P, Q가 오른쪽 그림과 같이 놓일 때, 두 점 사이의 거리는 최대가 되고 직각삼각형 CC′Q에서



$\overline{CQ}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

이므로 구하는 최댓값은

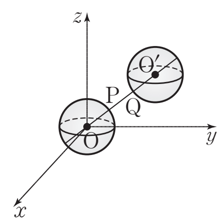
$10+8=18$ 정답_④

491

구 $x^2+y^2+z^2=1$은 중심의 좌표가 $(0, 0, 0)$, 반지름의 길이가 1이고, 구 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=1$은 중심의 좌표가 $(1, 2, 2)$, 반지름의 길이가 1이다.

이때, 두 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$



두 점 P, Q가 오른쪽 그림과 같이 놓일 때, 선분 PQ의 길이는 최소가 되므로 구하는 최솟값은

$3-(1+1)=1$

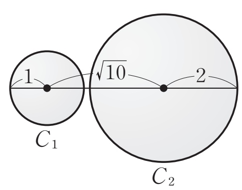
정답_ ①

492

두 구 C_1, C_2의 중심의 좌표는 각각 $(-1, 1, -1)$, $(0, 1, 2)$이고 반지름의 길이는 각각 1, 2이다.

이때, 두 구의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{1^2+0^2+3^2}=\sqrt{10}$



이고 $1+2<\sqrt{10}$이므로 두 구는 오른쪽 그림과 같이 서로 만나지 않는다.

따라서 $M=1+\sqrt{10}+2=\sqrt{10}+3$,

$m=\sqrt{10}-(1+2)=\sqrt{10}-3$이므로

$M+m=(\sqrt{10}+3)+(\sqrt{10}-3)$

$=2\sqrt{10}$

정답_ $2\sqrt{10}$

493

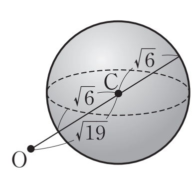
$\angle APB=90°$이므로 점 P는 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 구 위의 점이다.

이때, 구의 중심을 C라고 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로 점 C의 좌표는

$\left(\dfrac{0+2}{2}, \dfrac{1+5}{2}, \dfrac{-2-4}{2}\right) \quad \therefore C(1, 3, -3)$

$A(0, 1, -2)$이므로 구의 반지름의 길이는

$\overline{AC}=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$



한편, 원점에서 구의 중심 C까지의 거리는

$\overline{OC}=\sqrt{1^2+3^2+(-3)^2}=\sqrt{19}$

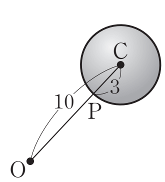
따라서 $M=\sqrt{19}+\sqrt{6}$,

$m=\sqrt{19}-\sqrt{6}$이므로

$Mm=(\sqrt{19})^2-(\sqrt{6})^2=13$

정답_ ④

494



오른쪽 그림과 같이 주어진 구의 중심을 C라고 하면 $C(6, -8, 0)$이므로 원점 O에 대하여

$\overline{OC}=\sqrt{6^2+(-8)^2+0^2}=10$

$\overline{OP}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

주어진 구의 반지름의 길이가 3이므로 $\overline{OP}$의 길이, 즉

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$의 최솟값은 $10-3=7$

따라서 $a^2+b^2+c^2$의 최솟값은 $7^2=49$

정답_ ③

495

사면체 ABCD가 정사면체이므로 모든 모서리의 길이가 같아야 한다. 각 모서리의 길이를 구하면

$\overline{AB}=\sqrt{1^2+4^2+9^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$

$\overline{AC}=\sqrt{9^2+1^2+a^2}=\sqrt{a^2+82}$

$\overline{AD}=\sqrt{4^2+(b-1)^2+1^2}=\sqrt{(b-1)^2+17}$

$\overline{BC}=\sqrt{8^2+(-3)^2+(a-9)^2}=\sqrt{(a-9)^2+73}$

$\overline{BD}=\sqrt{3^2+(b-5)^2+(-8)^2}=\sqrt{(b-5)^2+73}$

$\overline{CD}=\sqrt{(-5)^2+(b-2)^2+(1-a)^2}$

$=\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2+25}$ ········ ❶

$\overline{AB}=\overline{AC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$이므로

$98=a^2+82$, $a^2=16 \quad \therefore a=\pm 4$ ······ ㉠

$\overline{AB}=\overline{AD}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{AD}^2$이므로

$98=(b-1)^2+17$

$(b-1)^2=81$, $b-1=\pm 9$

$\therefore b=-8$ 또는 $b=10$ ······ ㉡

$\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$98=(a-9)^2+73$

$(a-9)^2=25$, $a-9=\pm 5$

$\therefore a=4$ 또는 $a=14$ ······ ㉢

$\overline{AB}=\overline{BD}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BD}^2$이므로

$98=(b-5)^2+73$

$(b-5)^2=25$, $b-5=\pm 5$

$\therefore b=0$ 또는 $b=10$ ······ ㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣에서

$a=4$, $b=10$ ········ ❷

정답_ $a=4$, $b=10$

단계	채점 기준	비율
❶	각 모서리의 길이 구하기	50%
❷	a, b의 값 구하기	50%

496

두 점 $A(-3, 3, 5)$, $B(a, b, c)$에 대하여 선분 AB가 zx평면에 의해 $3:2$로 내분되므로 내분점의 y좌표는 0이다.

즉, $\dfrac{3\times b+2\times 3}{3+2}=0$이므로

$b=-2$ ········ ❶

선분 AB가 y축에 의해 $2:1$로 외분되므로 외분점의 x좌표와 z좌표는 0이다.

즉, $\frac{2\times a-1\times(-3)}{2-1}=0$, $\frac{2\times c-1\times 5}{2-1}=0$이므로

$a=-\frac{3}{2}$, $c=\frac{5}{2}$ ❷

$\therefore a+b+c$

$=-\frac{3}{2}-2+\frac{5}{2}$

$=-1$ ❸

정답_ -1

단계	채점 기준	비율
❶	b의 값 구하기	30%
❷	a, c의 값 구하기	60%
❸	$a+b+c$의 값 구하기	10%

497

점 B는 점 A$(2, a, b)$에서 x축에 내린 수선의 발이므로

B$(2, 0, 0)$

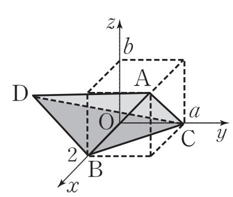
점 C는 점 A$(2, a, b)$에서 y축에 내린 수선의 발이므로

C$(0, a, 0)$

점 D는 점 A$(2, a, b)$와 zx평면에 대하여 대칭인 점이므로

D$(2, -a, b)$ ❶

$a>0$, $b>0$이므로 사면체 ABCD는 오른쪽 그림과 같다.



이때, 세 점 A, B, D는 x좌표가 같으므로 삼각형 ABD는 yz평면과 평행한 평면 위에 있다.

따라서 삼각형 ABD를 사면체 ABCD의 밑면으로 보면 높이는 2이다.

사면체 ABCD의 부피가 24이므로

$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 2a\times b\right)\times 2=24$

$\therefore ab=36$ ❷

원점과 점 A 사이의 거리는

$\sqrt{2^2+a^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2+4}$

$d=\sqrt{a^2+b^2+4}$라고 하면 $a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$d^2=a^2+b^2+4$

$\geq 2\sqrt{a^2b^2}+4$

$=2ab+4$

$=2\times 36+4=76$ (단, 등호는 $a^2=b^2$, 즉 $a=b$일 때 성립한다.)

따라서 구하는 거리의 최솟값은

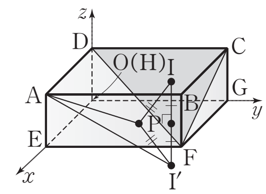
$\sqrt{76}=2\sqrt{19}$ ❸

정답_ $2\sqrt{19}$

단계	채점 기준	비율
❶	점 B, C, D의 좌표 구하기	30%
❷	ab의 값 구하기	40%
❸	원점과 점 A 사이의 거리의 최솟값 구하기	30%

498

오른쪽 그림과 같이 점 H를 원점에, 세 모서리 HE, HG, HD를 각각 x축의 양의 방향, y축의 양의 방향, z축의 양의 방향에 놓이도록 주어진 직육면체를 좌표공간에 놓으면



A$(2, 0, 1)$, B$(2, 3, 1)$, C$(0, 3, 1)$, D$(0, 0, 1)$, E$(2, 0, 0)$, F$(2, 3, 0)$, G$(0, 3, 0)$, H$(0, 0, 0)$

이때, 삼각형 CDF의 무게중심 I의 좌표는

$\left(\frac{0+0+2}{3}, \frac{3+0+3}{3}, \frac{1+1+0}{3}\right)$

$\therefore$ I$\left(\frac{2}{3}, 2, \frac{2}{3}\right)$ ❶

한편, 점 I와 평면 EFGH (xy평면)에 대하여 대칭인 점을 I′이라고 하면

I′$\left(\frac{2}{3}, 2, -\frac{2}{3}\right)$ ❷

$\overline{\mathrm{PI}}=\overline{\mathrm{PI'}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PI}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PI'}}$

$\geq\overline{\mathrm{AI'}}$

$=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+(-2)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{77}}{3}$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{\sqrt{77}}{3}$이다. ❸

정답_ $\frac{\sqrt{77}}{3}$

단계	채점 기준	비율
❶	무게중심 I의 좌표 구하기	30%
❷	점 I와 평면 EFGH (xy평면)에 대하여 대칭인 점의 좌표 구하기	30%
❸	$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PI}}$의 최솟값 구하기	40%

499

$\angle$APB$=90°$이므로 점 P가 그리는 도형은 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 구이다. ❶

구의 중심을 C라고 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로 점 C의 좌표는

$\left(\frac{10-6}{2}, \frac{2+10}{2}, \frac{5+11}{2}\right)$

$\therefore$ C$(2, 6, 8)$

구의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{8^2+(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{89}$

따라서 구의 방정식은

$(x-2)^2+(y-6)^2+(z-8)^2=89$ ❷

z축 위의 점의 x좌표와 y좌표는 모두 0이므로 위의 방정식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$(z-8)^2=49$, $z-8=\pm 7$

$\therefore z=1$ 또는 $z=15$

따라서 점 P가 그리는 도형에 의해 잘린 z축의 길이는

$|15-1|=14$ ❸

정답_ 14

단계	채점 기준	비율
❶	점 P가 그리는 도형이 구임을 알기	30%
❷	구의 방정식 구하기	60%
❸	구에 의해 잘린 z축의 길이 구하기	10%

500

구의 중심의 좌표를 (a, b, c)라고 하면 구의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=9$

yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 위의 식에 $x=0$을 대입하면

$(y-b)^2+(z-c)^2=9-a^2$ ❶

위의 방정식이 $(y-2)^2+(z-1)^2=8$과 일치하므로

$b=2, c=1, 9-a^2=8$

$\therefore a=-1, b=2, c=1$ 또는 $a=1, b=2, c=1$ ❷

따라서 두 구의 중심은 각각 $(-1, 2, 1)$, $(1, 2, 1)$이므로 구하는 거리는

$|1-(-1)|=2$ ❸

정답_ 2

단계	채점 기준	비율
❶	구의 중심의 좌표를 (a, b, c)로 놓고 구와 yz평면과의 교선의 방정식 구하기	40%
❷	a, b, c의 값 구하기	40%
❸	두 구의 중심 사이의 거리 구하기	20%

501

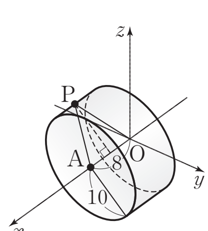
삼각형 OAP에서 $\overline{OA}$를 밑변으로 생각하면 높이는 $\sqrt{y^2+z^2}$이므로

$\triangle OAP=\frac{1}{2}\times 8\times\sqrt{y^2+z^2}\le 40$

$\sqrt{y^2+z^2}\le 10$

$\therefore 0\le y^2+z^2\le 100$

즉, 삼각형 OAP의 넓이가 40 이하가 될 때의 점 P가 존재하는 영역은 오른쪽 그림과 같이 높이가 8이고 밑면의 반지름의 길이가 10인 원기둥 및 그 내부이다.



따라서 구하는 부피는

$\pi\times 10^2\times 8=800\pi$

정답_ ⑤

502

yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 주어진 구의 방정식에 $x=0$을 대입하면

$y^2+z^2-10y-2kz+20=0$

$\therefore (y-5)^2+(z-k)^2=k^2+5$ …… ㉠

zx평면 위의 점은 y좌표가 0이므로 주어진 구의 방정식에 $y=0$을 대입하면

$x^2+z^2-6x-2kz+20=0$

$\therefore (x-3)^2+(z-k)^2=k^2-11$ …… ㉡

두 원 ㉠, ㉡의 넓이의 비가 2 : 1이므로

$(k^2+5)\pi : (k^2-11)\pi=2:1$

$2k^2-22=k^2+5$

$k^2=27$ $\quad\therefore k=3\sqrt{3}\ (\because k>0)$

정답_ ④

503

점 A와 zx평면에 대하여 대칭인 점을 A′이라고 하면

A′(6, −2, 10)

$\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}\ge\overline{A'B}$ …… ㉠

또한, 점 C와 xy평면에 대하여 대칭인 점을 C′이라고 하면

C′(8, 8, −6)

$\overline{QC}=\overline{QC'}$이므로

$\overline{BQ}+\overline{QC}=\overline{BQ}+\overline{QC'}\ge\overline{BC'}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{BQ}+\overline{QC}$

$\ge\overline{A'B}+\overline{BC'}$

$=\sqrt{(-2)^2+4^2+(-4)^2}+\sqrt{4^2+6^2+(-12)^2}$

$=\sqrt{36}+\sqrt{196}$

$=6+14=20$

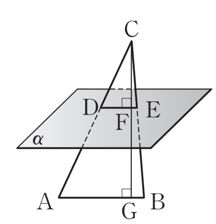
따라서 구하는 최솟값은 20이다.

정답_ ②

504

조건 (가), (나)에 의해 평면 α는 선분 AC, 선분 BC와 한 점에서 만나고 선분 AB와 평행하다.

오른쪽 그림과 같이 평면 α가 선분 AC, 선분 BC와 만나는 점을 각각 D, E라 하고 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 G라고 하면 $\overline{CG}$는 $\overline{DE}$와 한 점에서 만난다. 이때, 이 점을 F라고 하면 $\alpha\,/\!/\,\overline{AB}$이므로



$\overline{DE}\,/\!/\,\overline{AB}$ $\quad\therefore \overline{CF}\perp\overline{DE}$

점 A, B, C와 평면 α 사이의 거리를 각각 d_1, d_2, d_3이라고 하면

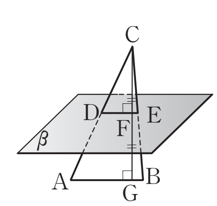
$d_1=d_2=\overline{FG}, d_3=\overline{CF}$

$d(\alpha)$는 d_1, d_3 중에서 작은 값이고, $d(\alpha)$가 최대가 되기 위해서는 $d_1=d_3$이어야 한다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 점 F가 $\overline{CG}$의 중점이 될 때의 평면 α를 평면 β로 놓자.

ㄱ은 옳다.

$\overline{DE}\perp\overline{CG}$이고 $\overline{DE}$는 평면 β 위에 있는 선분이고, $\overline{CG}$는 평면 ABC 위에



있는 선분이므로

$\beta \perp$(평면 ABC)

ㄴ도 옳다.

$\triangle$CDE$\backsim\triangle$CAB (AA 닮음)이고, 점 F가 CG의 중점이므로

$\overline{\mathrm{CD}}:\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CE}}:\overline{\mathrm{CB}}=\overline{\mathrm{CF}}:\overline{\mathrm{CG}}=1:2$

즉, 점 D, E는 각각 $\overline{\mathrm{CA}}$, $\overline{\mathrm{CB}}$의 중점이고, 이 두 점은 평면 β 위의 점이므로 평면 β는 선분 AC의 중점과 선분 BC의 중점을 지난다.

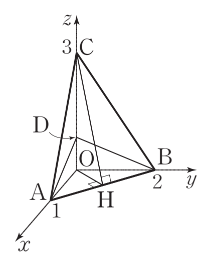
ㄷ도 옳다.

세 점 A, B, C의 좌표와 관계없이 평면 β는 세 점에서 이르는 거리가 같은 위치에 존재하므로 $d(\beta)$는 점 B와 평면 β 사이의 거리와 같다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

505

오른쪽 그림과 같이 평면 β와 z축의 교점을 D라 하고 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면 삼수선의 정리에 의해



$\overline{\mathrm{OH}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$

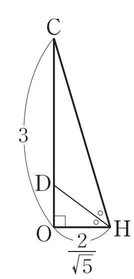
한편, 삼각형 OAB에서

$\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{AB}}$이므로

$2\times1=\overline{\mathrm{OH}}\times\sqrt{5}\qquad\therefore\ \overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

삼각형 OHC에서

$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{3^2+\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$



각의 이등분선의 성질에 의해

$\overline{\mathrm{CH}}:\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{CD}}:\overline{\mathrm{OD}}$

이므로

$\dfrac{7\sqrt{5}}{5}:\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\overline{\mathrm{CD}}:\overline{\mathrm{OD}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CD}}:\overline{\mathrm{OD}}=7:2$

이때, $\overline{\mathrm{CD}}=3-\overline{\mathrm{OD}}$이므로

$(3-\overline{\mathrm{OD}}):\overline{\mathrm{OD}}=7:2$, $7\overline{\mathrm{OD}}=6-2\overline{\mathrm{OD}}$

$9\overline{\mathrm{OD}}=6\qquad\therefore\ \overline{\mathrm{OD}}=\dfrac{2}{3}$

따라서 평면 β가 z축과 만나는 점 D의 좌표는

$\left(0,\ 0,\ \dfrac{2}{3}\right)$ 정답_ ④

506

$4\overline{\mathrm{OB}}=3\overline{\mathrm{OA}}$에서

$\overline{\mathrm{OB}}:\overline{\mathrm{OA}}=3:4\qquad\therefore\ \overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{AB}}=4:1$

따라서 점 A(a, b, c)는 $\overline{\mathrm{OB}}$를 $4:1$로 외분하는 점이므로

$a=\dfrac{4\times2-1\times0}{4-1}=\dfrac{8}{3}$

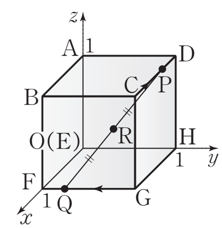
$b=\dfrac{4\times4-1\times0}{4-1}=\dfrac{16}{3}$

$c=\dfrac{4\times4-1\times0}{4-1}=\dfrac{16}{3}$

$\therefore\ a+b+c=\dfrac{8}{3}+\dfrac{16}{3}+\dfrac{16}{3}=\dfrac{40}{3}$ 정답_ $\dfrac{40}{3}$

507

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 E가 원점에, $\overline{\mathrm{EF}}$가 x축의 양의 방향, $\overline{\mathrm{EH}}$가 y축의 양의 방향, $\overline{\mathrm{EA}}$가 z축의 양의 방향에 놓이도록 주어진 정육면체를 좌표공간에 놓자.



두 점 P, Q가 매초 1의 속력으로 움직이므로 두 점은 4초 후에 처음 자리에 돌아오게 된다.

따라서 t의 값의 범위에 따른 t초 후의 점 R의 좌표를 구하면 다음과 같다.

(i) $0\le t<1$일 때,

C$(1, 1, 1)$, G$(1, 1, 0)$이므로

P$(1-t, 1, 1)$, Q$(1, 1-t, 0)$

$\therefore$ R$\left(\dfrac{2-t}{2}, \dfrac{2-t}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

(ii) $1\le t<2$일 때,

D$(0, 1, 1)$, F$(1, 0, 0)$이므로

P$(0, 2-t, 1)$, Q$(2-t, 0, 0)$

$\therefore$ R$\left(\dfrac{2-t}{2}, \dfrac{2-t}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

(iii) $2\le t<3$일 때,

A$(0, 0, 1)$, E$(0, 0, 0)$이므로

P$(t-2, 0, 1)$, Q$(0, t-2, 0)$

$\therefore$ R$\left(\dfrac{t-2}{2}, \dfrac{t-2}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

(iv) $3\le t\le4$일 때,

B$(1, 0, 1)$, H$(0, 1, 0)$이므로

P$(1, t-3, 1)$, Q$(t-3, 1, 0)$

$\therefore$ R$\left(\dfrac{t-2}{2}, \dfrac{t-2}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

각 구간에서 점 R의 z좌표는 $\dfrac{1}{2}$로 일정하고 x좌표와 y좌표가 서로 같으므로 점 R는 평면 $z=\dfrac{1}{2}$에서 직선 $y=x$ 위를 왕복한다.

이때, 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$이므로 점 R가 움직인 거리는

$2\sqrt{2}$ 정답_ ②

508

두 구

$x^2+y^2+z^2=4$ ...... ㉠

$(x-4)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=16$ ...... ㉡

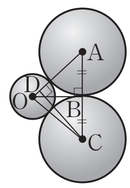
의 중심을 각각 O, A라고 하면

O$(0, 0, 0)$, A$(4, 2, 4)$

$\therefore \overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{4^2+2^2+4^2}=6$

즉, $\overline{\mathrm{OA}}$의 길이는 두 구 ㉠, ㉡의 반지름의 길이의 합과 같으므로 이 두 구는 외접한다.

오른쪽 그림과 같이 구 ㉡과 구 C의 접점을 B, 중심을 C라고 하면 삼각형 AOC는



$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OC}}=2+4=6$

인 이등변삼각형이고, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=4$이므로

$\overline{\mathrm{OB}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$

직각삼각형 AOB에서

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$

점 C에서 $\overline{\mathrm{OA}}$에 내린 수선의 발을 D라고 하면 삼각형 AOC의 넓이에서

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{OB}}$

이므로

$\frac{1}{2}\times 6\times\overline{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}\times 8\times 2\sqrt{5}$

$\therefore \overline{\mathrm{CD}}=\frac{8\sqrt{5}}{3}$

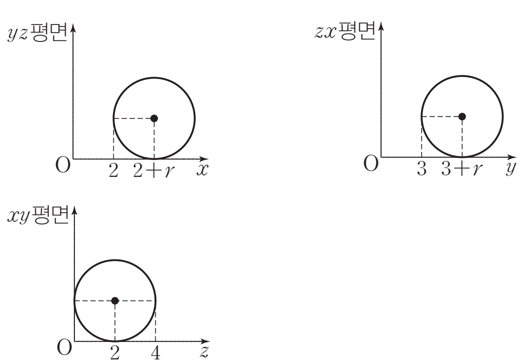
따라서 점 C가 나타내는 도형은 중심이 D이고 반지름의 길이가 $\frac{8\sqrt{5}}{3}$인 원이므로 구하는 넓이는

$\pi\left(\frac{8\sqrt{5}}{3}\right)^2=\frac{320}{9}\pi$ 정답_ $\frac{320}{9}\pi$

509

$A<0$, $B<0$, $C<0$이므로 구의 중심의 x좌표, y좌표, z좌표는 모두 양수이다.

구의 반지름의 길이를 r라 하고 주어진 조건을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



위의 그림에서 구의 반지름의 길이가 2이므로 구의 중심의 좌표는 $(4, 5, 2)$

따라서 조건을 만족시키는 구의 방정식은

$(x-4)^2+(y-5)^2+(z-2)^2=2^2$

즉, $x^2+y^2+z^2-8x-10y-4z+41=0$이므로

$D=41$ 정답_ ②

510

구 C_1은 정육면체에 내접하므로 중심의 좌표는

$\left(\frac{14}{2}, \frac{14}{2}, \frac{14}{2}\right)$ $\quad\therefore (7, 7, 7)$

구 C_2는 면 ABCD와 yz평면, zx평면에 접하고 반지름의 길이가 4이므로 중심의 좌표는

$(4, 4, 14-4)$ 또는 $(4, 4, 14+4)$

$\therefore (4, 4, 10)$ 또는 $(4, 4, 18)$

구 C_3은 면 AEFB와 xy평면, zx평면에 접하고 반지름의 길이가 2이므로 중심의 좌표는

$(14-2, 2, 2)$ 또는 $(14+2, 2, 2)$

$\therefore (12, 2, 2)$ 또는 $(16, 2, 2)$

즉, 세 구 C_1, C_2, C_3의 중심을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표는

$(7, 7, 7)$, $(4, 4, 10)$, $(12, 2, 2)$

또는 $(7, 7, 7)$, $(4, 4, 10)$, $(16, 2, 2)$

또는 $(7, 7, 7)$, $(4, 4, 18)$, $(12, 2, 2)$

또는 $(7, 7, 7)$, $(4, 4, 18)$, $(16, 2, 2)$

이므로 이 삼각형의 무게중심의 x좌표는

$\frac{7+4+12}{3}=\frac{23}{3}$ 또는 $\frac{7+4+16}{3}=9$

따라서 $a=\frac{23}{3}$, $b=9$ 또는 $a=9$, $b=\frac{23}{3}$이므로

$ab=\frac{23}{3}\times 9=69$ 정답_ ⑤