풍산자
필수유형

수학 (하) 정답과 풀이

IV 집합과 명제

01 집합

001

ㄱ은 집합이다.

2의 배수의 모임은 집합 $\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots\}$이다.

ㄴ도 집합이다.

1보다 작은 자연수는 없으므로 공집합($\varnothing$)이다. 공집합도 엄연한 집합임에 유의하도록 하자.

ㄷ도 집합이다.

$a^2=16$을 만족시키는 실수 a는 $-4,\ 4$이므로 집합은 $\{-4,\ 4\}$이다.

ㄹ은 집합이 아니다.

'가까운' 의 기준이 확실하지 않다.

따라서 집합인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ④

002

$A=\{1, 3, 5, 15\}$이므로 $n(A)=4$

$B=\{2\}$이므로 $n(B)=1$

$x^2=2$를 만족시키는 자연수는 없으므로 $C=\varnothing$ $\therefore n(C)=0$

$\therefore n(A)+n(B)-n(C)=4+1-0=5$ 정답_ 5

003

$\square$보다 작은 6의 배수가 6, 12, 18, 24, 30이 되어야 하므로 $\square$ 안에 들어갈 수 있는 자연수는 31, 32, 33, 34, 35, 36으로 6개이다. 정답_ ⑤

004

$m\in A,\ n\in A$일 때, $2^m=2,\ 4$이고 $4^n=4,\ 16$이므로

2^m+4^n의 값은

+	4	16
2	6	18
4	8	20

$2+4=6,\ 2+16=18,$

$4+4=8,\ 4+16=20$

$\therefore X=\{6,\ 8,\ 18,\ 20\}$

따라서 집합 X의 모든 원소의 합은

$6+8+18+20=52$ 정답_ ②

005

1의 약수는 1이므로 1개, 2의 약수는 1, 2이므로 2개, 3의 약수는 1, 3이므로 2개, 4의 약수는 1, 2, 4이므로 3개, 5의 약수는 1, 5이므로 2개이다.

따라서 집합 X의 원소의 개수는 $1+2+2+3+2=10$

정답_ 10

참고

집합 X의 원소는 $(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 2),\ (1,\ 3),\ (3,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 4),\ (4,\ 4),\ (1,\ 5),\ (5,\ 5)$로 10개이다.

006

조건 (나)는 A의 두 원소의 합이 U의 원소이면서 A의 원소임을 의미한다. 조건 (가)에 의해 3은 반드시 A의 원소이므로 조건 (나)를 연쇄적으로 적용하면

$3+3\in A \quad \therefore 6\in A$

$6+3\in A \quad \therefore 9\in A$

$9+3\in A \quad \therefore 12\in A$

$\vdots$

즉, 주어진 조건을 만족시키는 집합은 3의 배수를 반드시 포함한다. 따라서 3의 배수를 반드시 포함하면서 원소의 개수가 가장 적은 것은 3의 배수의 집합이다. 정답_ ②

007

$x\in A$이면 $\frac{1}{2}x\in A$를 만족시키는 집합은 여러 가지가 있다.

> ㄱ. $0\in A$이면 $\frac{0}{2}\in A$에서 $\{0\}$이 주어진 조건을 만족시킨다.
>
> ㄴ. $1\in A$이면 $\frac{1}{2}\in A,\ \frac{1}{2}\in A$이면 $\frac{1}{4}\in A, \cdots$에서
>
> $\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots\right\}$이 주어진 조건을 만족시킨다.
>
> ㄷ. $\left\{0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots\right\}$이 주어진 조건을 만족시킨다.

①은 항상 옳지는 않다.

(반례) $\left\{0,\ \sqrt{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{4},\ \cdots\right\}$

②는 항상 옳다.

$2\in A$이면 $1\in A,\ 1\in A$이면 $\frac{1}{2}\in A,\ \frac{1}{2}\in A$이면 $\frac{1}{4}\in A,$ $\cdots$이므로 $2\in A$이면 A는 무한집합이다.

③은 항상 옳지는 않다.

(반례) $\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots\right\}$

④도 항상 옳지는 않다.

(반례) $\left\{2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots\right\}$에서

$x=2,\ y=2$이면 $x+y=4\notin A$

⑤도 항상 옳지는 않다.

(반례) $\left\{2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots\right\}$에서

$x=2,\ y=2$이면 $xy=4\notin A$ 정답_ ②

008

x와 $\frac{12}{x}$가 모두 자연수이려면 $x\geq 1,\ \frac{12}{x}\geq 1$이고 x는 12의 양의 약수이어야 한다.

$x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12$

따라서 집합 S는 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12$ 중의 어떤 원소로 구성되어야 하므로 주어진 조건을 만족시키는 집합 S를 원소의 개수에 따라 구해 보면 다음과 같다.

(i) 집합 S의 원소의 개수가 2일 때,

$S=\{1,\ 12\},\ \{2,\ 6\},\ \{3,\ 4\}$

(ii) 집합 S의 원소의 개수가 4일 때,

$S=\{1,\ 2,\ 6,\ 12\},\ \{1,\ 3,\ 4,\ 12\},\ \{2,\ 3,\ 4,\ 6\}$

(iii) 집합 S의 원소의 개수가 6일 때,

$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

따라서 집합 S의 개수는 $3+3+1=7$ 정답_ 7

다른 풀이

집합 S는 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12$ 중 어떤 원소로 구성되면서 $1\in S$이면 $12\in S$, $2\in S$이면 $6\in S$, $3\in S$이면 $4\in S$이다.

즉, $1,\ 2,\ 3$이 집합 S의 원소인지 아닌지에 따라 집합 S가 결정되므로 집합 S의 개수는 $2\times2\times2=8$

이때, 이 중에는 $S=\varnothing$도 포함되어 있으므로 주어진 조건 $S\neq\varnothing$으로부터 $S=\varnothing$을 제외하면 집합 S의 개수는 $8-1=7$

009

조건 (가), (나)에 의해 $A=\{1,\ 2,\ a\}$ $(a\neq1,\ a\neq2)$로 놓을 수 있다.

조건 (다)에 의해 A의 서로 다른 원소의 곱은 A의 원소가 되어야 하므로 $2a\in A$

$\therefore 2a=1$ 또는 $2a=2$ 또는 $2a=a$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$ 또는 $a=0$

$a\neq1$이므로 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=0$

따라서 주어진 세 조건을 모두 만족시키는 집합 A는

$\left\{1,\ 2,\ \frac{1}{2}\right\}$, $\{1,\ 2,\ 0\}$으로 2개이다. 정답_ ③

010

$A=B$이므로 두 집합의 원소는 같다.

$1\in A$이므로 $1\in B$

$\therefore a+2b=1$ …… ㉠

$10\in B$이므로 $10\in A$

$\therefore 3a-b=10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-1$

$\therefore a+b=3+(-1)=2$ 정답_ ②

011

$A\subset B$이고 $B\subset A$이면 $A=B$

따라서 두 집합의 원소는 같다.

$20\in A$이므로 $20\in B$

$\therefore a+b=20$ …… ㉠

$5\in B$이므로 $5\in A$

$\therefore a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면

$5+b=20$ $\therefore b=15$ 정답_ ③

012

$A\subset B$이므로 집합 A의 원소는 모두 집합 B의 원소이다.

$1\in A$이므로 $1\in B$

$\therefore -a^2+2=1$ 또는 $-a+8=1$

$-a^2+2=1$에서 $a=\pm1$

$-a+8=1$에서 $a=7$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$ 또는 $a=7$

(i) $a=-1$일 때, $A=\{1,\ 3\},\ B=\{1,\ 9,\ 3\}$

$\therefore A\subset B$

(ii) $a=1$일 때, $A=\{1,\ 5\},\ B=\{1,\ 7,\ 3\}$

$\therefore A\not\subset B$

(iii) $a=7$일 때, $A=\{1,\ 11\},\ B=\{-47,\ 1,\ 3\}$

$\therefore A\not\subset B$

따라서 구하는 값은 $a=-1$ 정답_ -1

013

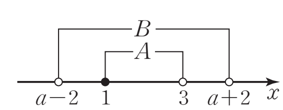
$x^2-2ax+a^2-4<0$에서 $(x-a+2)(x-a-2)<0$

$\therefore a-2<x<a+2$

$\therefore B=\{x\,|\,a-2<x<a+2\}$

부등식으로 이루어진 집합의 포함 관계는 수직선을 이용한다.

이때, $A\subset B$가 성립하려면 다음과 같아야 한다.



즉, $a-2<1$이고 $a+2\geq3$이어야 하므로 $1\leq a<3$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 a의 값은 $1,\ 2$이므로 그 합은

$1+2=3$ 정답_ 3

014

①은 옳지 않다.

1이 원소이므로 $\{1\}$은 부분집합이다.

$\therefore 1\in A$ 또는 $\{1\}\subset A$

②도 옳지 않다.

$\{2\}$가 원소이므로 $\{\{2\}\}$는 부분집합이다.

$\therefore \{2\}\in A$ 또는 $\{\{2\}\}\subset A$

③도 옳지 않다.

1, $\{2\}$가 원소이므로 $\{1, \{2\}\}$는 부분집합이다.

$\therefore \{1, \{2\}\} \subset A$

④는 옳다.

$\{1, 3\}$이 원소이므로 $\{1, 3\} \in A$이다.

⑤는 옳지 않다.

$\{2\}$, $\{3\}$이 원소이므로 $\{\{2\}, \{3\}\}$은 부분집합이다.

$\therefore \{\{2\}, \{3\}\} \subset A$ 정답_④

015

ㄱ은 옳다.

$\varnothing$이 원소이므로 $\varnothing \in A$이다.

ㄴ은 옳지 않다.

$\{3\}$이 원소가 아니므로 $\{3\} \notin A$이다.

ㄷ은 옳다.

1, 2가 원소이므로 $\{1, 2\}$는 부분집합이다.

$\therefore \{1, 2\} \subset A$

ㄹ은 옳지 않다.

$\{2, 3\}$이 원소이므로 $\{\{2, 3\}\}$은 부분집합이다.

$\therefore \{2, 3\} \in A$ 또는 $\{\{2, 3\}\} \subset A$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_②

016

①은 옳다.

$\varnothing$이 원소이므로 $\varnothing \in A$이다.

②도 옳다.

공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing \subset A$이다.

③은 옳지 않다.

$\{0, \varnothing\}$이 원소가 아니므로 $\{0, \varnothing\} \notin A$이다.

④는 옳다.

0, $\varnothing$이 원소이므로 $\{0, \varnothing\}$은 부분집합이다.

$\therefore \{0, \varnothing\} \subset A$

⑤도 옳다.

$\varnothing$, $\{\varnothing\}$이 원소이므로 $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$은 부분집합이다.

$\therefore \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \subset A$ 정답_③

017

$P(A)=\{X \mid X \subset A\}$는 집합 A의 부분집합 전체를 원소로 하는 집합을 의미한다.

$A=\{0, \varnothing\}$의 부분집합은 $\varnothing$, $\{0\}$, $\{\varnothing\}$, $\{0, \varnothing\}$이므로

$P(A)=\{\varnothing, \{0\}, \{\varnothing\}, \{0, \varnothing\}\}$

따라서 집합 $P(A)$의 원소가 아닌 것은 ① 0이다. 정답_①

018

$A_6=\{x \mid x$는 6의 양의 약수$\}=\{1, 2, 3, 6\}$,

$A_{12}=\{x \mid x$는 12의 양의 약수$\}=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로

집합 A_6의 부분집합의 개수는 $p=2^4=16$

집합 A_{12}의 진부분집합의 개수는 $q=2^6-1=63$

$\therefore p+q=16+63=79$ 정답_79

019

ㄱ은 옳다.

$\{-1, 1\}$이 원소이므로 $\{-1, 1\} \in A$이다.

ㄴ도 옳다.

-1, 1이 원소이므로 $\{-1, 1\}$은 부분집합이다.

$\therefore \{-1, 1\} \subset A$

ㄷ은 옳지 않다.

집합 A의 원소는 -1, 1, $\{-1, 1\}$로 3개이다.

ㄹ도 옳지 않다.

집합 A의 원소가 3개이므로 진부분집합은 $2^3-1=7$(개)이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 정답_③

020

$2^A=\{X \mid X \subset A\}$는 집합 A의 부분집합 전체를 원소로 하는 집합을 의미한다.

①은 옳다.

$\varnothing$이 A의 부분집합이므로 $\varnothing \in 2^A$이다.

②도 옳다.

공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing \subset 2^A$이다.

③도 옳다.

A는 A의 부분집합이므로 $A \in 2^A$이다.

④는 옳지 않다.

$A \in 2^A$이므로 $\{A\} \subset 2^A$이라고 해야 옳다.

⑤는 옳다.

2^A은 집합 A의 부분집합 전체를 원소로 하는 집합이므로

$(2^A$의 원소의 개수$)=(A$의 부분집합의 개수$)$

$=2^{(A\text{의 원소의 개수})}=2^{n(A)}$ 정답_④

021

'홀수가 한 개 이상'이라는 문장은 직접 다루는 것보다 반대를 생각하면 쉽다. 전체 부분집합에서 홀수를 하나도 포함하지 않는, 즉 모두 짝수로 이루어진 부분집합을 빼는 것이다.

집합 A의 전체 부분집합의 개수는 $2^5=32$

이 중에서 원소 1, 3, 5를 포함하지 않는 부분집합의 개수는 짝수 2, 4를 포함하는 부분집합의 개수와 같으므로 $2^2=4$

따라서 홀수가 한 개 이상 속해 있는 집합의 개수는

$32-4=28$ 정답_④

다른 풀이

(i) 홀수 원소가 1개 속해 있는 집합

$\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{3\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{5\}$, $\{2, 5\}$, $\{4, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$로 12개

(ii) 홀수 원소가 2개 속해 있는 집합

$\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{1,\ 3,\ 4\}$, $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $\{1,\ 5\}$, $\{1,\ 2,\ 5\}$, $\{1,\ 4,\ 5\}$, $\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$, $\{3,\ 5\}$, $\{2,\ 3,\ 5\}$, $\{3,\ 4,\ 5\}$, $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$로 12개

(iii) 홀수 원소가 3개 속해 있는 집합

$\{1,\ 3,\ 5\}$, $\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$, $\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$로 4개

따라서 구하는 집합의 개수는 $12+12+4=28$

022

집합 A를 원소나열법으로 나타내면

$A=\{x\,|\,0\le x\le 10,\ x$는 정수$\}=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10\}$

집합 A의 부분집합 중 원소 0, 1을 포함하는 집합의 개수는 이 두 수를 지우고 생각하면 되므로 $m=2^{11-2}=2^9=512$

집합 A의 부분집합 중 원소 1, 2, 3을 포함하지 않는 집합의 개수는 이 세 수를 지우고 생각하면 되므로 $n=2^{11-3}=2^8=256$

$\therefore\ m-n=512-256=256$ 정답_③

023

'적어도 하나' 라는 문장은 직접 다루는 것보다 반대를 생각하면 쉽다. 전체 부분집합에서 소수를 하나도 포함하지 않는 부분집합을 빼는 것이다. '적어도 하나' 하면 일단 반대를 생각하도록 하자.

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$의 전체 부분집합의 개수는

$2^{10}=1024$

이 중에서 소수를 하나도 포함하지 않는 부분집합의 개수는 소수 2, 3, 5, 7을 지우고 생각하면 되므로 $2^{10-4}=2^6=64$

따라서 적어도 하나의 소수를 원소로 포함하는 부분집합의 개수는

(전체 부분집합의 개수)

$-$(소수를 하나도 포함하지 않는 부분집합의 개수)

$=1024-64=960$ 정답_④

024

주어진 조건을 분석하면 다음과 같다.

$\underbrace{\{a_1,\ a_2,\ a_3\}\subset X}_{X\text{는 }a_1,\ a_2,\ a_3\text{을 포함한다.}}$ $\underbrace{X\subset\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{10}\}}_{X\text{는 }\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{10}\}\text{의 부분집합이다.}}$

이제 다음과 같은 문제로 변신했다.

> 집합 $\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{10}\}$의 부분집합 중 $a_1,\ a_2,\ a_3$을 포함하는 집합의 개수는?

이 개수는 $\{a,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{10}\}$에서 $a_1,\ a_2,\ a_3$을 지우고 생각하면 되므로 $2^{10-3}=2^7=128$이다. 정답_③

025

집합 $A,\ B$를 원소나열법으로 나타내면

$A=\{x\,|\,x$는 4의 양의 약수$\}=\{1,\ 2,\ 4\}$

$B=\{x\,|\,x$는 16의 양의 약수$\}=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$

주어진 조건을 분석하면 다음과 같다.

$\underbrace{A\subset X}_{X\text{는 }A\text{의 원소를 포함한다.}}$ $\underbrace{X\subset B}_{X\text{는 }B\text{의 부분집합이다.}}$

이제 다음과 같은 문제로 변신했다.

> 집합 B의 부분집합 중 집합 A의 원소를 포함하는 집합의 개수는?

이 개수는 $\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$에서 1, 2, 4를 지우고 생각하면 되므로 $2^{5-3}=2^2=4$이다. 정답_①

026

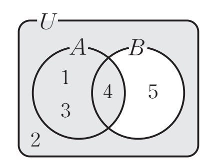
$B^C=\{1,\ 2,\ 3\}$이므로

$A\cup B^C=\{1,\ 3,\ 4\}\cup\{1,\ 2,\ 3\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

따라서 구하는 원소의 개수는 4이다. 정답_④

다른 풀이

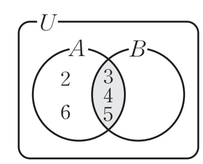
$A\cup B^C$을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$A\cup B^C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

027

$A=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $A-B=\{2,\ 6\}$을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $A\cap B=\{3,\ 4,\ 5\}$이므로 모든 원소의 합은 $3+4+5=12$ 정답_12

다른 풀이

$$\begin{aligned}A-(A-B)&=A\cap(A\cap B^C)^C=A\cap(A^C\cup B)\\&=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)=\varnothing\cup(A\cap B)\\&=A\cap B\end{aligned}$$

이고

$A-(A-B)=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}-\{2,\ 6\}=\{3,\ 4,\ 5\}$

이므로 $A\cap B=\{3,\ 4,\ 5\}$

$\therefore\ 3+4+5=12$

028

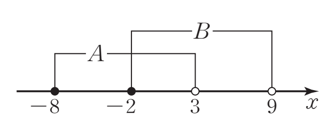
$A\cap B^C=A-B$이므로 $A\cap B^C=\varnothing$이면

$A-B=\varnothing$ $\quad\therefore\ A\subset B$ 정답_④

029

부등식으로 이루어진 집합의 연산은 수직선을 이용한다.

두 집합 $A,\ B$를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$A\cup B=\{x\,|\,-8\le x<9\}$

$A\cap B=\{x\,|\,-2\le x<3\}$

$A \cup B$에서 $A \cap B$를 빼면

$(A \cup B)-(A \cap B)=\{x \mid -8 \le x < -2$ 또는 $3 \le x < 9\}$

이 집합의 원소 중 정수인 것은

$-8,\ -7,\ -6,\ -5,\ -4,\ -3,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$

로 12개이다. 정답_ 12

030

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$이므로 $A \cap B=\{3,\ 5\}$이려면 B는 3, 5를 제외한 A의 나머지 원소 1, 7, 9를 포함하지 않아야 한다.

정답_ ①

031

$A \cap (A-B)=A$이므로 $A \subset (A-B)$

$\therefore A-B=A$

즉, $A \cap B=\varnothing$이고 $A \cup B=U$이므로

$B=U-A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}-\{2,\ 3,\ 5\}=\{1,\ 4\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은 $1+4=5$ 정답_ ③

032

벤 다이어그램에서 색칠한 부분에 속하는 임의의 원소를 x라고 하면

$x \in (A \cap B)$이고 $x \notin C$

$\therefore x \in (A \cap B) \cap C^C=(A \cap B)-C$

따라서 색칠한 부분을 나타내는 집합은

$(A \cap B)-C$ 정답_ ①

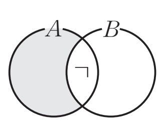
다른 풀이

벤 다이어그램을 보고 집합으로 곧바로 나타내기 힘들면 ①, ②, ③, ④, ⑤를 모두 벤 다이어그램으로 그려 보면 된다.

033

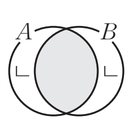
ㄱ은 옳다.

$A-B$는 A에서 $A \cap B$를 빼는 것이므로 $A-B=A$라는 것은 $A \cap B=\varnothing$이라는 것을 의미한다. 오른쪽 벤 다이어그램의 ㄱ부분이 사라지는 것이다.



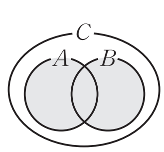
ㄴ도 옳다.

$A \cup B=A \cap B$라는 것은 $A=B$라는 것을 의미한다. 오른쪽 벤 다이어그램의 ㄴ부분이 사라지는 것이다.



ㄷ도 옳다.

$(A \cup B) \subset C$라는 것은 $A \subset C$, $B \subset C$라는 것을 의미한다. 오른쪽 벤 다이어그램과 같은 상황이다.



ㄹ도 옳다.

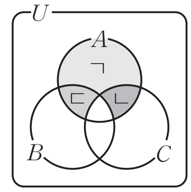
$A \cup B=\varnothing$이라는 것은 $A=\varnothing$, $B=\varnothing$이라는 것을 의미한다.

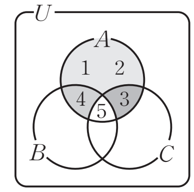
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이다. 정답_ ⑤

034

아래 벤 다이어그램에서 $A-B$는 ㄱ, ㄴ부분이고, $A-C$는 ㄱ, ㄷ부분이다. 두 부분에 공통인 부분이 ㄱ이므로

$A-B=\{1,\ 2,\ 3\}$, $A-C=\{1,\ 2,\ 4\}$의 공통인 원소 1, 2는 ㄱ의 원소이다. 나머지 원소인 3은 ㄴ의 원소이고, 4는 ㄷ의 원소일 것이다.





따라서 $C-B$의 원소인 것은 3이다. 정답_ ③

035

$A \cap B=\{3,\ 9\}$이므로 3, 9는 두 집합 A, B 모두의 원소이다.

즉, $9 \in A$이므로 $a^2-7=9$, $a^2-16=0$

$(a+4)(a-4)=0 \qquad \therefore a=-4$ 또는 $a=4$

(i) $a=-4$일 때, $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 9\}$, $B=\{-5,\ 9\}$

$\therefore A \cap B=\{9\}$

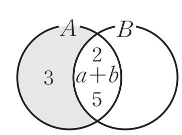
(ii) $a=4$일 때, $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 9\}$, $B=\{3,\ 9,\ 11\}$

$\therefore A \cap B=\{3,\ 9\}$

따라서 구하는 값은 $a=4$ 정답_ ⑤

036

$A-B=\{3\}$이므로 3을 제외한 A의 나머지 원소인 2, 5, $a+b$는 $A \cap B$에 속한다.



$\therefore 5 \in B$, $a+b \in B$

즉, $2a-b=5$, $a+b=7$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=3$

$\therefore ab=4 \cdot 3=12$ 정답_ 12

037

$A \cap B^C=\varnothing$이므로 $A-B=\varnothing \qquad \therefore A \subset B$

따라서 집합 A의 원소는 모두 집합 B의 원소이다.

$2 \in A$이므로 $2 \in B$

(i) $x-1=2$일 때, $x=3$이므로

$A=\{2,\ 10\}$, $B=\{2,\ 10\}$

이때, $A=B$이므로 $A \subset B$가 성립한다.

(ii) $x^2-7=2$일 때, $x^2-9=0$, $(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

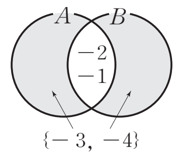
$x=-3$일 때 $A=\{2,\ 10\}$, $B=\{-4,\ 2,\ 10\}$이므로

$A \subset B$가 성립한다.

$x=3$일 때, (i)에서 $A \subset B$가 성립한다.

따라서 구하는 값은 $x=-3$, 3이다. 정답_ -3, 3

038



$(A-B)\cup(B-A)=\{-3,\ -4\}$이므로 $-3,\ -4$를 제외한 $A,\ B$의 나머지 원소인 $-2,\ -1$은 $A\cap B$에 속한다.

$\therefore -2\in B$

즉, $-a-2=-2$ 또는 $a^2-6=-2$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-2$ 또는 $a=2$

(i) $a=0$일 때,

$A=\{-2,\ -1,\ -5\},\ B=\{-1,\ -2,\ -6\}$

$\therefore (A-B)\cup(B-A)=\{-5,\ -6\}$

(ii) $a=-2$일 때,

$A=\{-2,\ -1,\ -7\},\ B=\{-1,\ 0,\ -2\}$

$\therefore (A-B)\cup(B-A)=\{-7,\ 0\}$

(iii) $a=2$일 때,

$A=\{-2,\ -1,\ -3\},\ B=\{-1,\ -4,\ -2\}$

$\therefore (A-B)\cup(B-A)=\{-3,\ -4\}$

따라서 구하는 값은 $a=2$ 정답_ ②

039

$A\cup B=\{a,\ b,\ c\}$이려면 집합 B는 c를 반드시 포함해야 하고, d를 포함하지 않아야 한다.

이제 다음과 같은 문제로 변신했다.

> U의 부분집합 중 c를 포함하고, d를 포함하지 않는 집합의 개수는?

이 개수는 $\{a,\ b,\ c,\ d\}$에서 $c,\ d$를 지우고 생각하면 되므로 $2^{4-2}=2^2=4$이다. 정답_ ①

040

$A-B$는 A에서 $A\cap B$를 빼는 것이므로 $A-B=A$라는 것은 $A\cap B=\varnothing$이라는 것을 의미한다.

$A\cap B=\varnothing$인 것은 공통인 원소가 없는 것이므로 A의 원소를 포함하지 않는 것, 즉 10, 1000을 포함하지 않는 것이다.

이제 다음과 같은 문제로 변신했다.

> U의 부분집합 중 10, 1000을 포함하지 않는 집합의 개수는?

이 개수는 U에서 10, 1000을 지우고 생각하면 되므로 $2^{5-2}=2^3=8$이다. 정답_ ②

041

$A\cup C=B\cup C$, 즉 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}\cup C=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}\cup C$이려면 집합 C는 $A,\ B$에 공통인 원소 1, 3, 5를 제외한 나머지 원소인 2, 4, 7, 9를 반드시 포함해야 한다.

이제 다음과 같은 문제로 변신했다.

> U의 부분집합 중 2, 4, 7, 9를 포함하는 집합의 개수는?

이 개수는 U에서 2, 4, 7, 9를 지우고 생각하면 되므로 $2^{10-4}=2^6=64$이다. 정답_ 64

042

집합 $A,\ B$를 원소나열법으로 나타내면

$A=\{x\,|\,x$는 10 이하의 소수$\}=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

$B=\{x\,|\,x$는 12의 양의 약수$\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

주어진 조건을 분석하면 다음과 같다.

$(A-B)\cup X=X$: 아하! $(A-B)\subset X$라는 말이구나!

⇨ $A-B$는 X의 부분집합이다.

$(A\cup B)\cap X=X$: 아하! $X\subset(A\cup B)$라는 말이구나!

⇨ X는 $A\cup B$의 부분집합이다.

이제 다음과 같은 문제로 변신했다.

> 집합 $A\cup B$의 부분집합 중 집합 $A-B$의 원소를 포함하는 집합의 개수는?

$A-B=\{5,\ 7\},\ A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 12\}$이므로 이 개수는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 12\}$에서 5, 7을 지우고 생각하면 된다.

$\therefore 2^{8-2}=2^6=64$ 정답_ 64

043

전체집합 U를 원소나열법으로 나열하면

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12\}$

조건 (가)에서 $A\cup X=X$이므로 $A\subset X$

즉, 집합 X는 집합 A의 두 원소 4, 7을 포함해야 한다.

조건 (나)에서 $(B-A)\cap X=\{5,\ 10\}$이고 $B-A=\{2,\ 5,\ 10\}$이므로

$(B-A)\cap X=\{2,\ 5,\ 10\}\cap X=\{5,\ 10\}$

즉, 집합 X는 두 원소 5, 10을 포함하고 2는 포함하지 않아야 한다.

이제 다음과 같은 문제로 변신했다.

> U의 부분집합 중 4, 5, 7, 10을 포함하고, 2는 포함하지 않는 집합의 개수는?

이 개수는 U에서 2, 4, 5, 7, 10을 지우고 생각하면 되므로 $2^{12-5}=2^7=128$이다. 정답_ 128

044

'$\neq$'로 이루어진 조건은 반대를 생각하면 쉽다. 전체 부분집합에서 $A\cap B=\varnothing$인 것을 빼자.

집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$의 전체 부분집합의 개수는 $2^{10}=1024$이다.

$A\cap B=\varnothing$인 것은 공통인 원소가 없는 것이므로 A의 원소를 포함하지 않는 것, 즉 5, 10을 포함하지 않는 것이다.
이 개수는 U에서 5, 10을 지우고 생각하면 되므로
$2^{10-2}=2^8=256$이다.
따라서 $A\cap B\neq\varnothing$인 것의 개수는
(전체 부분집합의 개수)$-$($A\cap B=\varnothing$인 것의 개수)
$=1024-256=768$ 정답_ ⑤

045

ㄱ은 옳다.
$A_3=\{3, 6, 9, 12, \cdots\}$, $A_6=\{6, 12, 18, 24, \cdots\}$에서
$A_6\subset A_3$
$\therefore A_3\cup A_6=A_3$
ㄴ도 옳다.
4의 배수의 집합과 6의 배수의 집합의 교집합은 4와 6의 공배수의 집합이고, 이것은 4와 6의 최소공배수인 12의 배수의 집합이다.
$\therefore A_4\cap A_6=A_{12}$
ㄷ도 옳다.
6과 9는 3의 배수이므로 $A_6\subset A_3$, $A_9\subset A_3$
$\therefore (A_6\cup A_9)\subset A_3$
ㄹ은 옳지 않다.
m이 n의 배수이면 $A_m\subset A_n$이므로
$A_2\cup A_4=A_2$, $A_6\cup A_{12}=A_6$, $A_2\cap A_6=A_6$
$\therefore (A_2\cup A_4)\cap(A_6\cup A_{12})=A_2\cap A_6=A_6$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ④

046

18과 30의 최소공배수는 90이므로
$A_{18}\cap A_{30}=A_{90}$ $\therefore A_n\subset A_{90}$
$A_n\subset A_{90}$을 만족시키려면 n은 90의 배수이어야 한다. 90의 배수 중에서 가장 작은 세 자리의 자연수는 180이므로 구하는 n의 최솟값은 180이다. 정답_ 180

047

$(A_{150}\cup A_{250})\subset A_n$이라는 것은 $A_{150}\subset A_n$, $A_{250}\subset A_n$을 의미한다. $A_{150}\subset A_n$에서 n은 150의 약수, $A_{250}\subset A_n$에서 n은 250의 약수이므로 n은 150과 250의 공약수이다.
따라서 구하는 n의 최댓값은 150과 250의 최대공약수인 50이다.
정답_ ①

048

$B\subset A$이므로 $A\cap B=B$
드 모르간의 법칙을 이용하면
$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=B^C$ 정답_ ⑤

049

분배법칙을 이용하여 전개하면
$$A\cup(A^C\cap B)=(A\cup A^C)\cap(A\cup B)$$
$$=U\cap(A\cup B)$$
$$=A\cup B$$
정답_ ⑤

050

①은 옳다.
$\varnothing^C\cap A=U\cap A=A$
②도 옳다.
$B\cup U^C=B\cup\varnothing=B$
③도 옳다.
$(A^C)^C\cap A=A\cap A=A$
④는 옳지 않다.
$B^C\cup(B^C)^C=B^C\cup B=U$
⑤는 옳다.
$\varnothing^C\cap(A^C\cup U^C)=U\cap(A^C\cup\varnothing)=U\cap A^C=A^C$
정답_ ④

051

①은 옳다.
분배법칙을 이용하여 전개하면
$$A\cap(A^C\cup B)=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$$
$$=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B$$
②도 옳다.
분배법칙을 이용하여 묶어 내면
$(A\cup B)\cap(A\cup B^C)=A\cup(B\cap B^C)=A\cup\varnothing=A$
③도 옳다.
차집합 공식과 드 모르간의 법칙을 이용하면
$(A-B)^C=(A\cap B^C)^C=A^C\cup(B^C)^C=A^C\cup B$
④도 옳다.
드 모르간의 법칙과 흡수법칙을 이용하면
$A^C\cup(A\cup B^C)^C=A^C\cup(A^C\cap B)=A^C$
⑤는 옳지 않다.
드 모르간의 법칙을 이용한 후 $X\cup X^C=U$임을 떠올리면
$(A\cup B)\cup(A^C\cap B^C)=(A\cup B)\cup(A\cup B)^C=U$
정답_ ⑤

052

ㄱ은 옳다.
$A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$
ㄴ도 옳다.
$$(A-B)-C=(A\cap B^C)-C=(A\cap B^C)\cap C^C$$
$$=A\cap(B^C\cap C^C)=A\cap(B\cup C)^C$$
$$=A-(B\cup C)$$

ㄷ도 옳다.

$A\cap(B-A)^C=A\cap(B\cap A^C)^C$

$=A\cap(B^C\cup A)=A$ ⇦ 흡수법칙

$(B-A)\cap A=(B\cap A^C)\cap A$

$=B\cap(A^C\cap A)=B\cap\varnothing=\varnothing$

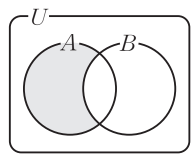
$\therefore \{A\cap(B-A)^C\}\cup\{(B-A)\cap A\}=A\cup\varnothing=A$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_⑤

053

① 차집합 공식을 이용하면

$A\cap B^C=A-B$

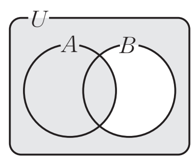


② 분배법칙을 이용하여 전개하면

$(A\cap B)\cup B^C$

$=(A\cup B^C)\cap(B\cup B^C)$

$=(A\cup B^C)\cap U=A\cup B^C$



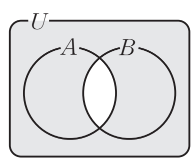
③ 분배법칙을 이용하여 전개하고 드 모르간의 법칙을 이용하면

$(A\cap B^C)\cup A^C$

$=(A\cup A^C)\cap(B^C\cup A^C)$

$=U\cap(A\cap B)^C$

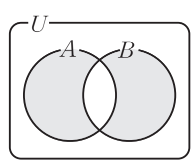
$=(A\cap B)^C$



④ 차집합 공식을 이용하면

$(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$

$=(A\cup B)-(A\cap B)$

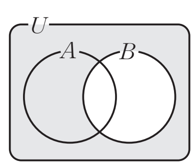


⑤ 차집합 공식을 이용한 후 분배법칙을 이용하여 묶어 내면

$(A-B)\cup(A^C\cap B^C)$

$=(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B^C)$

$=(A\cup A^C)\cap B^C=U\cap B^C=B^C$



정답_②

054

차집합 공식과 드 모르간의 법칙을 이용한 후 교환법칙, 결합법칙으로 정리하여 분배법칙으로 전개하면

$(A-B)-(A-C)$

$=(A\cap B^C)\cap(A\cap C^C)^C$

$=(A\cap B^C)\cap(A^C\cup C)$

$=\{A\cap(A^C\cup C)\}\cap B^C$ ⇦ 교환법칙, 결합법칙

$=\{(A\cap A^C)\cup(A\cap C)\}\cap B^C$

$=\{\varnothing\cup(A\cap C)\}\cap B^C$

$=(A\cap C)\cap B^C$

$=(A\cap C)-B$ 정답_②

055

차집합 공식과 드 모르간의 법칙을 이용한 후 흡수법칙을 이용하면

$(A-B)^C\cap B=(A\cap B^C)^C\cap B$

$=(A^C\cup B)\cap B$

$=B$

①, ②, ③, ④, ⑤를 계산하여 B가 되는 것을 찾으면 된다.

① 흡수법칙에 의해 $(A\cap B)\cup A=A$

② $A-(A\cap B)=A\cap(A\cap B)^C$

$=A\cap(A^C\cup B^C)$

$=(A\cap A^C)\cup(A\cap B^C)$

$=\varnothing\cup(A\cap B^C)$

$=A\cap B^C$

③ $A\cap(B-A)^C=A\cap(B\cap A^C)^C$

$=A\cap(B^C\cup A)$

$=A$ ⇦ 흡수법칙

④ $B\cup(B-A)=B\cup(B\cap A^C)=B$ ⇦ 흡수법칙

⑤ $(A-B)\cup B=(A\cap B^C)\cup B$

$=(A\cup B)\cap(B^C\cup B)$

$=(A\cup B)\cap U$

$=A\cup B$

따라서 주어진 집합과 같은 집합은 ④이다. 정답_④

056

분배법칙을 이용하여 묶어 내면

$(A\cap B)\cup(A^C\cap B)=(A\cup A^C)\cap B$

$=U\cap B=B$

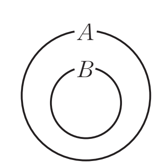
$(A^C\cap B)\cup(A^C\cap B^C)=A^C\cap(B\cup B^C)$

$=A^C\cap U=A^C$

따라서 주어진 식의 좌변은

(좌변)$=B\cap A^C=B-A$

주어진 식은 $B-A=\varnothing$이므로 이것을 보자마자 떠올린다. 아하! $B\subset A$라는 말이구나!



①은 옳다.

$B-A=\varnothing$이다.

②도 옳다.

$B\cap A^C=\varnothing$이므로 $(B\cap A^C)^C=\varnothing^C$

$\therefore A\cup B^C=U$

③도 옳다.

$B\subset A$이므로 $A^C\subset B^C$

④도 옳다.

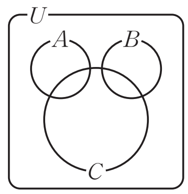
$B\subset A$이므로 $A\cup B=A$

⑤는 옳지 않다.

$B\subset A$이므로 $A\cap B=B$ 정답_⑤

057

두 집합 A, B가 서로소이므로 $A\cap B=\varnothing$이고, 오른쪽 벤 다이어그램과 같은 상황이다.



ㄱ은 옳다.

$A\cap B=\varnothing$이므로

$(A\cap B)\cup C=\varnothing\cup C=C$

ㄴ은 옳지 않다.

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$=\varnothing\cup(A\cap C)=A\cap C$

ㄷ은 옳다.

벤 다이어그램에서 $B\subset A^C$이므로 $A^C\cap B=B$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_ ③

058

①은 옳다.

$A\triangle A=(A\cup A)\cap(A\cap A)^C=A\cap A^C=\varnothing$

②도 옳다.

$A\triangle\varnothing=(A\cup\varnothing)\cap(A\cap\varnothing)^C=A\cap\varnothing^C=A\cap U=A$

③도 옳다.

$A\triangle U=(A\cup U)\cap(A\cap U)^C=U\cap A^C=A^C$

④도 옳다.

$A\triangle A^C=(A\cup A^C)\cap(A\cap A^C)^C$

$=U\cap\varnothing^C=U\cap U=U$

⑤는 옳지 않다.

$\varnothing\triangle U=(\varnothing\cup U)\cap(\varnothing\cap U)^C=U\cap\varnothing^C=U\cap U=U$

정답_ ⑤

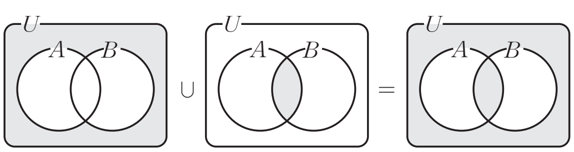
059

$X\triangle Y=(X\cap Y)\cup(X\cup Y)^C$이므로

$A^C\triangle B^C=(A^C\cap B^C)\cup(A^C\cup B^C)^C$

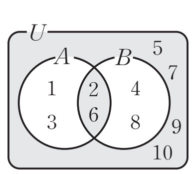
$=(A\cup B)^C\cup(A\cap B)$

따라서 $A^C\triangle B^C$을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



$(A\cup B)^C$ $A\cap B$ $A^C\triangle B^C$

이때, $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$, $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore A^C\triangle B^C=\{2,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10\}$ 정답_ $\{2,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10\}$

060

ㄱ은 옳다.

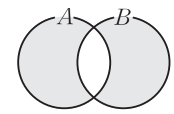
$A\circledcirc B=(A-B)\cup(B-A)$

$=(B-A)\cup(A-B)$

$=B\circledcirc A$

ㄴ도 옳다.

오른쪽 벤 다이어그램에서



$(A-B)\cup(B-A)$

$=(A\cup B)-(A\cap B)$

임을 쉽게 관찰할 수 있다.

식을 이용하여 엄밀하게 설명하면 다음과 같다.

$(A-B)\cup(B-A)$

$=(A\cap B^C)\cup(B\cap A^C)$

$=(A\cup B)\cap(A\cup A^C)\cap(B^C\cup B)\cap(B^C\cup A^C)$

$=(A\cup B)\cap U\cap U\cap(B^C\cup A^C)$

$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$

$=(A\cup B)-(A\cap B)$

ㄷ도 옳다.

$A^C\circledcirc B^C=(A^C-B^C)\cup(B^C-A^C)$

$=\{A^C\cap(B^C)^C\}\cup\{B^C\cap(A^C)^C\}$

$=(A^C\cap B)\cup(B^C\cap A)$

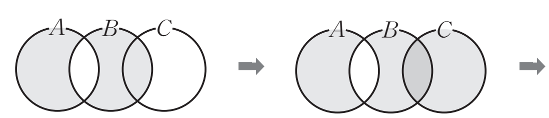
$=(B-A)\cup(A-B)=A\circledcirc B$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

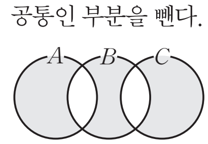
061

$A\circ B$는 전체에서 공통인 부분을 빼는 연산이다. ㄱ, ㄴ, ㄷ을 모두 벤 다이어그램으로 나타내어 주어진 부분과 같은지 알아본다.

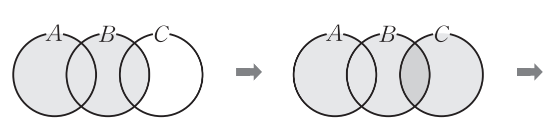
ㄱ. $A\circ B$를 칠한다. C를 칠한다.



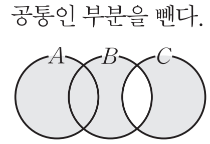
공통인 부분을 뺀다.



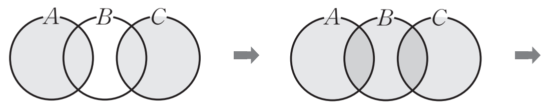
ㄴ. $A\cup B$를 칠한다. C를 칠한다.



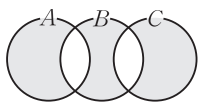
공통인 부분을 뺀다.



ㄷ. $A\cup C$를 칠한다. B를 칠한다.



공통인 부분을 뺀다.



따라서 주어진 부분과 같은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_③

062

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)=30$

$n(U)=50$이므로 $n(A\cup B)=20$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$20=10+15-n(A\cap B)$

$\therefore n(A\cap B)=5$ 정답_⑤

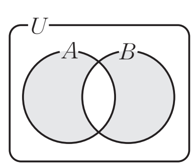
063

벤 다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합은 $(A\cup B)^C$이다.

$\therefore n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$
$=n(U)-\{n(A)+n(B-A)\}$
$=80-(45+25)=10$ 정답_10

064

오른쪽 벤 다이어그램에서



$(A-B)\cup(B-A)$
$=(A\cup B)-(A\cap B)$

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A^C\cap B^C)$
$=50-5=45$

$\therefore n((A-B)\cup(B-A))=n(A\cup B)-n(A\cap B)$
$=45-12=33$ 정답_④

065

$A_2\cap(A_3\cup A_4)=(A_2\cap A_3)\cup(A_2\cap A_4)=A_6\cup A_4$

$\therefore n(A_2\cap(A_3\cup A_4))=n(A_6\cup A_4)$
$=n(A_6)+n(A_4)-n(A_6\cap A_4)$
$=n(A_6)+n(A_4)-n(A_{12})$

1부터 100까지의 자연수 중에서

4의 배수는 25개이므로 $n(A_4)=25$

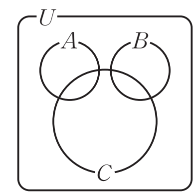
6의 배수는 16개이므로 $n(A_6)=16$

12의 배수는 8개이므로 $n(A_{12})=8$

$\therefore n(A_2\cap(A_3\cup A_4))=n(A_6)+n(A_4)-n(A_{12})$
$=16+25-8=33$ 정답_④

066

두 집합 A, B가 서로소이므로 $A\cap B=\varnothing$이고, 오른쪽 벤 다이어그램과 같은 상황이다. $A\cap B=\varnothing$, $A\cap B\cap C=\varnothing$이므로



$n(A\cap B)=0$, $n(A\cap B\cap C)=0$

$n(C^C)=n(U)-n(C)=11$에서

$21-n(C)=11$ $\therefore n(C)=10$

$n(A\cup C)=n(A)+n(C)-n(A\cap C)$에서

$11=3+10-n(A\cap C)$ $\therefore n(A\cap C)=2$

$n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$에서

$14=7+10-n(B\cap C)$ $\therefore n(B\cap C)=3$

$\therefore n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=3+7+10-0-3-2+0$
$=15$ 정답_15

067

$34\le n(A\cup B)\le 50$이고

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$34\le n(A)+n(B)-n(A\cap B)\le 50$

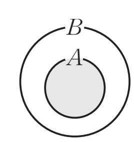
$34\le 34+n(B)-11\le 50$ $\therefore 11\le n(B)\le 27$

따라서 $n(B)$의 최댓값은 27, 최솟값은 11이므로 그 합은

$11+27=38$ 정답_38

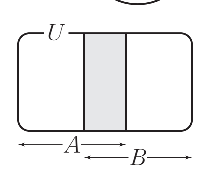
068

A의 원소가 모두 B의 원소일 때, 즉 $A\subset B$일 때, 교집합은 최대가 된다.



$\therefore M=25$

A의 원소 25개, B의 원소 30개를 더하면 55개이다. 그런데 전체집합의 원소가 50개이므로 최소한 5개는 A, B에 공통인 원소이다.



$\therefore m=5$

$\therefore Mm=25\cdot 5=125$ 정답_⑤

069

국내 체험활동에 참가한 학생의 집합을 A, 해외 체험활동에 참가한 학생의 집합을 B라고 하면

$n(A\cup B)=32$, $n(A)=29$, $n(B)=7$

이때, 구하려는 값은 $n(A\cap B)$이다.

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$32=29+7-n(A\cap B)$ $\therefore n(A\cap B)=4$

따라서 국내 체험활동과 해외 체험활동에 모두 참가한 학생은 4명이다. 정답_②

070

전체 학생의 집합을 U, 사물놀이반을 신청한 학생의 집합을 A, 클래식기타반을 신청한 학생의 집합을 B라고 하면

$n(U)=35,\ n(A)=25,\ n(A\cap B)=8,\ n(A^C\cap B^C)=4$

이때, 구하려는 값은 $n(B)$이다.

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)=4$

$n(U)=35$이므로 $\quad n(A\cup B)=31$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$31=25+n(B)-8$

$\therefore\ n(B)=14$

따라서 클래식기타반을 신청한 학생은 14명이다. 정답_ 14

071

전체 신입사원의 집합을 U, 소방안전 교육을 받은 사원의 집합을 A, 심폐소생술 교육을 받은 사원의 집합을 B라고 하면

$n(U)=200,\ n(A)=115,\ n(B)=110$

두 교육을 모두 받지 않은 사원의 수는

$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)=12$

이때, 구하려는 값은 $n(B-A)$이다.

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)=200-12=188$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$188=115+110-n(A\cap B)$

$\therefore\ n(A\cap B)=37$

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=110-37=73$

따라서 심폐소생술 교육만을 받은 사원은 73명이다. 정답_ ②

072

전체 약수터의 집합을 U, 대장균, 일반세균, 암모니아성 질소의 허용 기준치를 초과한 약수터의 집합을 각각 $A,\ B,\ C$라고 하면

$n(U)=25,\ n(A\cap B\cap C)=1,\ n(A\cap C)=1,$

$n(B\cap C)=2,\ n(A\cap B)=2,\ n(C)=3,\ n(B)=5,$

$n(A)=6$

이때, 구하려는 값은 $n(A^C\cap B^C\cap C^C)$이다.

$$\begin{aligned} n(A\cup B\cup C)&=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)\\ &\quad -n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)\\ &=6+5+3-2-2-1+1=10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n(A^C\cap B^C\cap C^C)&=n((A\cup B\cup C)^C)\\ &=n(U)-n(A\cup B\cup C)\\ &=25-10=15 \end{aligned}$$

따라서 세 가지 항목 모두에서 허용 기준치를 초과하지 않은 약수터는 15곳이다. 정답_ ③

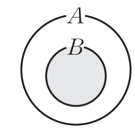
073

전체 학생의 집합을 U, 토요일에 축구 경기를 시청한 학생의 집합을 A, 일요일에 축구 경기를 시청한 학생의 집합을 B라고 하면

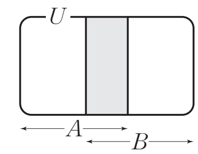
$n(U)=35,\ n(A)=23,\ n(B)=15$

이때, 구하려는 값은 $n(A\cap B)$의 최댓값과 최솟값의 합이다.

B의 원소가 모두 A의 원소일 때, 즉 $B\subset A$일 때, $n(A\cap B)$는 최댓값 15를 갖는다.



A의 원소 23개, B의 원소 15개를 더하면 38개이다. 그런데 전체집합의 원소가 35개이므로 최소한 3개는 $A,\ B$에 공통인 원소이다. 즉, $n(A\cap B)$는 최솟값 3을 갖는다.



$\therefore\ 3\le n(A\cap B)\le 15$

따라서 $M=15,\ m=3$이므로

$M+m=15+3=18$ 정답_ ②

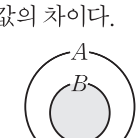
074

전체 학생의 집합을 U, A문제를 푼 학생의 집합을 A, B를 푼 학생의 집합을 B라고 하면

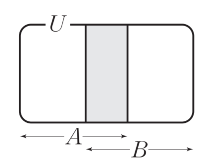
$n(U)=70,\ n(A)=55,\ n(B)=30$

이때, 구하려는 값은 $n(A-B)$의 최댓값과 최솟값의 차이다.

B의 원소가 모두 A의 원소일 때, 즉 $B\subset A$일 때, $n(A\cap B)$는 최댓값 30을 갖는다.



A의 원소 55개, B의 원소 30개를 더하면 85개이다. 그런데 전체집합의 원소가 70개이므로 최소한 15개는 $A,\ B$에 공통인 원소이다.



따라서 $n(A\cap B)$는 최솟값 15를 갖는다.

$\therefore\ 15\le n(A\cap B)\le 30$

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=55-n(A\cap B)$이므로

$55-30\le n(A-B)\le 55-15$

$\therefore\ 25\le n(A-B)\le 40$

따라서 $M=40,\ m=25$이므로

$M-m=40-25=15$ 정답_ 15

075

전체 학생의 집합을 U, 문학 체험, 역사 체험, 과학 체험을 신청한 학생의 집합을 각각 $A,\ B,\ C$라고 하면

$n(U)=212$

조건 (가)에서 $n(A)=80,\ n(B)=90$ ……㉠

조건 (나)에서 $n(A\cap B)=45$ ……㉡

조건 (다)에서 $n((A\cap B\cap C)^C)=12$ ……㉢

㉠, ㉡에서

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

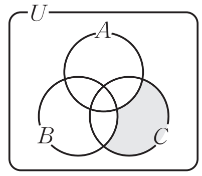
$=80+90-45=125$

㉢에서

$n(A\cup B\cup C)=n(U)-((A\cup B\cup C)^C)$

$=212-12=200$

따라서 과학 체험만 신청한 학생 수는 오른쪽 벤 다이어그램의 색칠한 부분이므로



$n(A\cup B\cup C)-n(A\cup B)$

$=200-125=75$

따라서 과학 체험만 신청한 학생은 75명이다. 정답_ 75

076

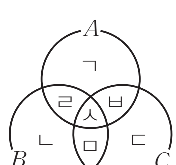
후보 A, B, C를 지지한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하고, 주어진 조건을 이용하여 아래 벤 다이어그램의 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ, ㅂ, ㅅ부분의 원소의 개수를 각각 구하면

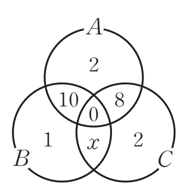
(i) 한 명 또는 두 명의 이름을 투표용지에 기입하므로 ㅅ부분의 원소의 개수는 0

(ii) A와 B가 동시에 적힌 투표용지는 10장이므로 ㄹ부분의 원소의 개수는 10

(iii) A와 C가 동시에 적힌 투표용지는 8장이므로 ㅂ부분의 원소의 개수는 8

(iv) A, B, C 한 명씩만 적힌 투표용지는 각각 2, 1, 2장이므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ부분의 원소의 개수는 각각 2, 1, 2





(v) 전체 학생이 35명이므로 ㄱ+ㄴ+⋯+ㅅ$=35$

$2+1+2+10+x+8+0=35$

$\therefore x=12$

A가 얻은 표는 $2+10+8=20$

B가 얻은 표는 $1+10+12=23$

C가 얻은 표는 $2+8+12=22$

따라서 표를 많이 얻은 후보의 순서는 B, C, A이다. 정답_ ④

077

$(6,\ 2)\in A$이므로 $x=6$, $y=2$를 $ax-by=12$에 대입하면

$6a-2b=12$ …… ㉠

…… ❶

$(-3,\ -2)\in A$이므로 $x=-3$, $y=-2$를 $ax-by=12$에 대입하면 $-3a+2b=12$ …… ㉡

…… ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=8$, $b=18$ …… ❸

정답_ $a=8$, $b=18$

단계	채점 기준	비율
❶	$(6,\ 2)\in A$를 만족시키는 식 세우기	40%
❷	$(-3,\ -2)\in A$를 만족시키는 식 세우기	40%
❸	a, b의 값 구하기	20%

078

$A=B$이므로 두 집합 A, B의 원소는 같다.

(i) $a+2=2$일 때, $a=0$

$A=\{-2,\ 2\}$, $B=\{2,\ 6\}$이므로

$A\neq B$ …… ❶

(ii) $a+2=6-a$일 때, $2a=4$ $\therefore a=2$

$\therefore A=B=\{2,\ 4\}$ …… ❷

따라서 구하는 값은 $a=2$ …… ❸

정답_ 2

단계	채점 기준	비율
❶	$a+2=2$인 경우 $A=B$인지 확인하기	40%
❷	$a+2=6-a$인 경우 $A=B$인지 확인하기	40%
❸	a의 값 구하기	20%

079

(i) 1이 포함된 원소가 2개 이상인 부분집합의 개수는

$2^{5-1}-1=15$

(ii) 1은 포함되지 않고 2는 포함된 원소가 2개 이상인 부분집합의 개수는 $2^{5-2}-1=7$

(iii) 1, 2는 포함되지 않고 3은 포함된 원소가 2개 이상인 부분집합의 개수는 $2^{5-3}-1=3$

(iv) 1, 2, 3은 포함되지 않고 4는 포함된 원소가 2개 이상인 부분집합의 개수는 $2^{5-4}-1=1$

(v) 1, 2, 3, 4는 포함되지 않고 5는 포함된 원소가 2개 이상인 부분집합은 없다. …… ❶

따라서 각 집합의 가장 작은 원소를 모두 더한 값은

$1\cdot15+2\cdot7+3\cdot3+4\cdot1=42$ …… ❷

정답_ 42

단계	채점 기준	비율
❶	집합의 가장 작은 원소가 1, 2, 3, 4, 5인 경우의 각 부분집합의 개수 구하기	80%
❷	각 집합의 가장 작은 원소를 모두 더한 값 구하기	20%

080

$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이므로

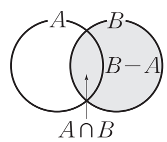
$(A\cap B)^C=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

$\therefore A\cap B=\{1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10\}$ …… ㉠

…… ❶

$(A-B)^C \cap \{B-(A\cap B)\}$
$=(A\cap B^C)^C \cap \{B\cap (A\cap B)^C\}$
$=(A^C\cup B)\cap \{B\cap (A^C\cup B^C)\}$
$=\{(A^C\cup B)\cap B\}\cap (A^C\cup B^C)$
$=B\cap (A^C\cup B^C)=(B\cap A^C)\cup (B\cap B^C)$
$=(B-A)\cup\varnothing=B-A$
이므로 $B-A=\{2,\ 5\}$ ······ ㉡

········· ❷

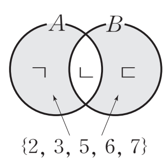


벤 다이어그램을 떠올리면
$B=(B-A)\cup(B\cap A)$이므로
㉠, ㉡에서
$B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10\}$
따라서 집합 B의 원소의 개수는 8이다. ········· ❸

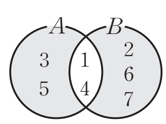
정답_ 8

단계	채점 기준	비율
❶	$A\cap B$의 원소 구하기	20%
❷	$(A-B)^C\cap\{B-(A\cap B)\}$ 간단히 하기	50%
❸	집합 B의 원소의 개수 구하기	30%

081



$A*B=\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$은 전체에서 공통인 부분을 빼는 연산으로 오른쪽 벤 다이어그램의 ㄱ, ㄷ부분에 해당한다. ········· ❶
$A=\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 원소 중 $A*B$의 원소 3, 5는 ㄱ부분에 속하고, 나머지 원소인 1, 4는 ㄴ부분에 속한다. ········· ❷



$A*B$의 원소 중 A의 원소를 제외한 나머지 원소인 2, 6, 7은 ㄷ부분에 속한다.
$\therefore B=\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 7\}$
따라서 집합 B에 속하는 모든 원소의 합은
$1+2+4+6+7=20$ ········· ❸

정답_ 20

단계	채점 기준	비율
❶	벤 다이어그램에서 집합 $\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$을 나타내는 부분 찾기	30%
❷	벤 다이어그램에서 3, 5와 1, 4가 각각 포함된 부분 찾기	30%
❸	집합 B에 속하는 모든 원소의 합 구하기	40%

082

전체 스티커의 집합을 U, 갑, 을, 병이 모은 스티커의 집합을 각각 A, B, C라고 하면
$n(U)=20,\ n(A)=4,\ n(B)=n(C)=5,$
$n(A\cap B)=n(B\cap C)=n(C\cap A)=3,\ n(A\cap B\cap C)=2$
이때, 구하려는 값은 $20-n(A\cup B\cup C)$ ········· ❶
$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$\qquad -n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$\qquad =4+5+5-3-3-3+2=7$ ········· ❷

$\therefore 20-n(A\cup B\cup C)=13$
따라서 최소로 더 필요한 스티커의 종류의 수는 13이다. ········· ❸

정답_ 13

단계	채점 기준	비율
❶	조건을 기호를 사용하여 나타내기	30%
❷	$n(A\cup B\cup C)$의 값 구하기	40%
❸	최소로 더 필요한 스티커의 종류의 수 구하기	30%

083

'S는 S 자신을 원소로 갖는다.'의 수학적 표현은
$S\in S$
'자기 자신을 원소로 갖지 않는 집합'의 수학적 표현은
$A\notin A$, A는 집합
'자기 자신을 원소로 갖지 않는 집합들 전체의 집합'의 수학적 표현은
$\{A\,|\,A\notin A,\ A$는 집합$\}$

정답_ ①

084

집합 S의 부분집합을 구하면 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{1,\ 2,\ 3\}$이다.
$\varnothing\in X$이면 조건 ㈎에 의해 $S-\varnothing\in X$이어야 한다.
따라서 $\varnothing$과 S는 동시에 X의 원소이어야 한다.
$\{S,\ \varnothing\}$은 $\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$, $S\cup\varnothing=S$, $S\cup S=S$로 조건 ㈏를 만족시키므로 집합 X가 될 수 있다.
이와 같은 방법으로 집합 X에 동시에 있어야 하는 원소를 구하면 $\{1\}$과 $\{2,\ 3\}$, $\{2\}$와 $\{1,\ 3\}$, $\{3\}$과 $\{1,\ 2\}$이고 이들 모두가 될 수 있다.
따라서 집합 X가 될 수 있는 것은 $\{S,\ \varnothing\}$, $\{\{1\},\ \{2,\ 3\},\ S,\ \varnothing\}$, $\{\{2\},\ \{1,\ 3\},\ S,\ \varnothing\}$, $\{\{3\},\ \{1,\ 2\},\ S,\ \varnothing\}$,
$\{\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,\ 2\},\ \{2,\ 3\},\ \{1,\ 3\},\ S,\ \varnothing\}$으로 5개이다.

정답_ ④

085

$X\cup A=X-B$에서 $X\cup A=X\cap B^C$
$X\cup A=X\cap B^C$을 만족시키는 집합 X는 집합 A의 원소인 4, 8을 포함하고 집합 B의 원소인 1, 3, 5를 포함하지 않아야 한다.
이때, $B^C=\{2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8\}$이므로 전체집합 U의 부분집합 X는 $\{4,\ 8\}\subset X\subset\{2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8\}$을 만족시킨다.
이제 다음과 같은 문제로 변신했다.

집합 $\{2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8\}$의 부분집합 중 4, 8을 포함하는 집합의 개수는?

이 개수는 $\{2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8\}$에서 4, 8을 지우고 생각하면 되므로 $2^{5-2}=8$이다.

정답_ ③

086

집합 $S=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^4}\right\}$의 원소는 5개이므로 부분집합은 $2^5=32$(개)이고, 공집합을 제외하면 31개이다. 이 31개의 집합에서 최소인 원소를 각각 뽑아 더하면 된다. 예를 들어, $\left\{1,\ \frac{1}{2}\right\}$에서 최소인 원소는 $\frac{1}{2}$이고, $\left\{\frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^4}\right\}$에서 최소인 원소는 $\frac{1}{2^4}$이다.

$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{2^3}>\frac{1}{2^4}$이므로 집합 S의 공집합이 아닌 서로 다른 부분집합 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_{31}$ 중에서

(i) 최소인 원소가 1인 집합은 1은 포함하고,
$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^4}$은 포함하지 않는 집합이므로
부분집합의 개수는 $2^{5-1-4}=2^0=1$

(ii) 최소인 원소가 $\frac{1}{2}$인 집합은 $\frac{1}{2}$은 포함하고,
$\frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^4}$은 포함하지 않는 집합이므로
부분집합의 개수는 $2^{5-1-3}=2^1=2$

(iii) 최소인 원소가 $\frac{1}{2^2}$인 집합은 $\frac{1}{2^2}$은 포함하고,
$\frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^4}$은 포함하지 않는 집합이므로
부분집합의 개수는 $2^{5-1-2}=2^2=4$

(iv) 최소인 원소가 $\frac{1}{2^3}$인 집합은 $\frac{1}{2^3}$은 포함하고,
$\frac{1}{2^4}$은 포함하지 않는 집합이므로
부분집합의 개수는 $2^{5-1-1}=2^3=8$

(v) 최소인 원소가 $\frac{1}{2^4}$인 집합은 $\frac{1}{2^4}$을 포함하는 집합이므로
부분집합의 개수는 $2^{5-1}=2^4=16$

따라서 1이 1개, $\frac{1}{2}$이 2개, $\frac{1}{2^2}$이 4개, $\frac{1}{2^3}$이 8개, $\frac{1}{2^4}$이 16개이므로 이들을 모두 더하면

$1\cdot1+\frac{1}{2}\cdot2+\frac{1}{2^2}\cdot4+\frac{1}{2^3}\cdot8+\frac{1}{2^4}\cdot16=5$ 정답_ ⑤

087

ㄱ은 옳다.

$A_3=\{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}$이므로

$A_4=A_3\cup\{A_3\}=\{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}\cup\{A_3\}$
$=\{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ A_3\}=\{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}\}$

ㄴ도 옳다.

$A_n=\{\boxed{}\}$라고 하면

$A_{n+1}=A_n\cup\{A_n\}=\{\boxed{}\}\cup\{A_n\}=\{\boxed{},\ A_n\}$

$\therefore A_n\in A_{n+1}$

ㄷ도 옳다.

$A_1=\varnothing$이므로

$A_2=A_1\cup\{A_1\}=\varnothing\cup\{A_1\}=\{A_1\}$

$A_3=A_2\cup\{A_2\}=\{A_1\}\cup\{A_2\}=\{A_1,\ A_2\}$

$A_4=A_3\cup\{A_3\}=\{A_1,\ A_2\}\cup\{A_3\}=\{A_1,\ A_2,\ A_3\}$

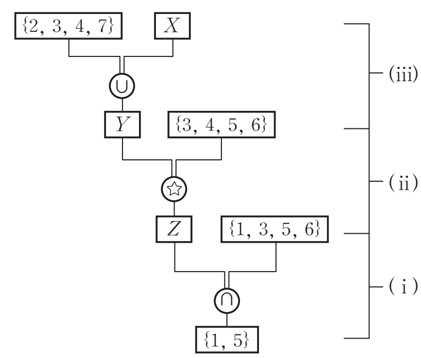
$\vdots$

$\therefore A_{n+1}=\{A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n\}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

088

주어진 연산을 이용하여 집합 Z부터 추측해 본다.



(i) $Z\cap\{1,\ 3,\ 5,\ 6\}=\{1,\ 5\}$이므로 집합 Z는 반드시 1, 5를 원소로 포함하고 3, 6은 포함하지 않아야 한다.

(ii) $Y☆\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}=\{Y-\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}\}\cup\{\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}-Y\}$
$=Z$
이므로 집합 Y는 원소 3, 6을 포함하고 원소 5를 포함하면 안 된다. 그런데 집합 Z가 원소 1을 포함해야 하므로 집합 Y도 원소 1을 포함해야 한다.
$1\in Y,\ 3\in Y,\ 6\in Y,\ 5\notin Y$

(iii) $\{2,\ 3,\ 4,\ 7\}\cup X=Y$이므로 집합 X는 최소한 원소 1, 6을 포함해야 한다.

따라서 $X=\{1,\ 6\}$일 때, 모든 원소의 합 s가 최소가 되므로 s의 최솟값은 $1+6=7$이다. 정답_ 7

089

두 집합 $A,\ B$를 원소나열법으로 나타내면

$A=\left\{\frac{n}{40}\,\middle|\,1\le n\le40,\ n\text{은 자연수}\right\}$
$=\left\{\frac{1}{40},\ \frac{2}{40},\ \frac{3}{40},\ \frac{4}{40},\ \cdots,\ \frac{40}{40}\right\}$

$B=\left\{\frac{n}{60}\,\middle|\,1\le n\le60,\ n\text{은 자연수}\right\}$
$=\left\{\frac{1}{60},\ \frac{2}{60},\ \frac{3}{60},\ \frac{4}{60},\ \cdots,\ \frac{60}{60}\right\}$

40과 60의 최소공배수는 120임에 착안하여 각 원소의 분모가 120이 되도록 통분하면

$A=\left\{\frac{3}{120}, \frac{6}{120}, \frac{9}{120}, \frac{12}{120}, \cdots, \frac{120}{120}\right\}$

$B=\left\{\frac{2}{120}, \frac{4}{120}, \frac{6}{120}, \frac{8}{120}, \cdots, \frac{120}{120}\right\}$

분모가 120일 때, 집합 A의 원소의 분자는 3의 배수이고, 집합 B의 원소의 분자는 2의 배수이므로 집합 $A\cap B$의 원소는 2와 3의 공배수인 6의 배수를 분자로 하는 원소이다. 즉,

$A\cap B=\left\{\frac{6}{120}, \frac{12}{120}, \frac{18}{120}, \frac{24}{120}, \cdots, \frac{120}{120}\right\}$

따라서 집합 $A\cap B$의 원소의 개수는 120 이하의 자연수 중에서 6의 배수의 개수와 같으므로 $n(A\cap B)=20$ 정답_ 20

090

자연수 m, n의 최대공약수가 1일 때, m, n은 서로소라고 한다. 예를 들어, 4와 9는 최대공약수가 1이므로 서로소이고, 4와 6은 최대공약수가 2이므로 서로소가 아니다.

두 자연수를 소인수분해하여 공통인 소인수가 없으면 서로소가 된다. 예를 들어, $4=2^2$과 $9=3^2$은 공통인 소인수가 없으므로 서로소이고, $4=2^2$과 $6=2\times3$은 공통인 소인수가 2로 존재하므로 서로소가 아니다.

ㄱ은 옳다.

2와 서로소인 자연수는 1, 3, 5, 7, ⋯로 2의 배수가 아닌 수이고, 4와 서로소인 자연수도 $4=2^2$이므로 2의 배수가 아닌 수이다.

$\therefore A_2=A_4=\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$

ㄴ은 옳지 않다.

3과 서로소인 자연수는 1, 2, 4, 5, 7, ⋯로 3의 배수가 아닌 수이고, 6과 서로소인 자연수는 $6=2\times3$이므로 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 수로 1, 5, 7, ⋯이다.

$\therefore A_3\neq A_6,\ A_3\supset A_6$

ㄷ은 옳다.

$6=2\times3$과 서로소인 자연수는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 수이고, $A_2=A_4$이다.

$\therefore A_6=A_2\cap A_3=A_4\cap A_3$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_ ④

091

원소의 합도 원소의 개수와 유사한 공식이 성립한다. 벤 다이어그램을 떠올리면 쉽게 이해할 수 있다.

ㄱ은 옳다.

A의 여집합의 원소의 합은 전체집합의 원소의 합에서 A의 원소의 합을 빼면 된다.

ㄴ도 옳다.

$A\subset B$이면 A의 모든 원소가 B에 속하므로 $f(A)\le f(B)$이다. 등호는 $A=B$일 때 성립한다.

ㄷ은 옳지 않다.

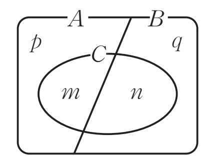
A의 원소의 합과 B의 원소의 합을 더하면 $A\cap B$의 원소를 두 번 더한 것이므로 $A\cap B$의 원소의 합을 빼 주어야 한다.

$\therefore f(A\cup B)=f(A)+f(B)-f(A\cap B)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 정답_ ②

092

참석할 수 있다고 응답한 회원의 집합을 A, 모르겠다고 응답한 회원의 집합을 B, 실제로 전체 회의에 참석한 회원의 집합을 C라 하고 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



벤 다이어그램에서 각 부분에 속하는 원소의 개수를 m, n, p, q라고 하자. 즉, 집합 $A\cap C$의 원소의 개수가 m, 집합 $B\cap C$의 원소의 개수가 n이므로

$p+m=67,\ q+n=33$에서

$p-q=34-m+n$ ⋯⋯ ㉠

이때, 모르겠다고 답한 회원 중 참석한 회원의 수 n의 값의 범위는

$0\le n\le 33$ ⋯⋯ ㉡

$m+n=50$이므로 $n=50-m$을 ㉡에 대입하면

$0\le 50-m\le 33 \quad \therefore 17\le m\le 50$

즉, $p-q$의 최댓값은 ㉠에서 $m=17$, $n=33$일 때이므로

$p-q=34-17+33=50$

또한, $p-q$의 최솟값은 ㉠에서 $m=50$, $n=0$일 때이므로

$p-q=34-50+0=-16$

따라서 $p-q$의 최댓값과 최솟값의 합은

$50+(-16)=34$ 정답_ ②

다른 풀이

참석할 수 있다고 응답한 회원 중 참석한 회원 수를 a명, 참석할 수 있다고 응답한 회원 중 참석하지 않은 회원 수를 p명, 모르겠다고 응답한 회원 중 참석한 회원 수를 b명, 모르겠다고 응답한 회원 중 참석하지 않은 회원 수를 q명이라 하고 표로 나타내면

(단위 : 명)

	참석	불참	합계
참석할 수 있다고 응답	a	p	67
모르겠다고 응답	b	q	33
합계	50	50	100

q는 응답한 회원 중 참석하지 않은 회원 수로

$0\le q\le 33$ ⋯⋯ ㉠

이때, 불참한 회원 수는 50명이므로

$p+q=50$

$q=50-p$를 ㉠에 대입하면

$0\le 50-p\le 33 \quad \therefore 17\le p\le 50$ ⋯⋯ ㉡

㉡$-$㉠을 하면 $-16\le p-q\le 50$

즉, $p-q$의 최댓값은 50이고 최솟값은 -16이므로 $p-q$의 최댓값과 최솟값의 합은

$50+(-16)=34$

02 명제

093

참인지 거짓인지 기준이 확실해야 명제이다. 모든 명제는 참말과 거짓말 중 하나이다.

ㄱ은 명제이다.

울릉도는 섬이다. 참인 명제이다.

ㄴ도 명제이다.

독도는 우리나라에서 가장 큰 섬이 아니다. 거짓인 명제이다.

ㄷ은 명제가 아니다.

'귀엽다.'와 '많다.'의 기준이 확실하지 않다.

ㄹ도 명제가 아니다.

'좋다.'의 기준이 확실하지 않다. 정답_ ②

094

참인지 거짓인지 기준이 확실해야 명제이다. 모든 명제는 참말과 거짓말 중 하나이다.

①은 명제이다.

대응하는 세 내각의 크기가 같은 두 삼각형은 합동이 아니다. 거짓인 명제이다.

②도 명제이다.

$x+3=8$에 $x=5$를 대입하면 등식이 성립한다. 참인 명제이다.

③은 명제가 아니다.

'적다.'의 기준이 확실하지 않다.

④도 명제이다.

사각형은 다각형이다. 참인 명제이다.

⑤ 소수는 모두 홀수이다.

소수 중 2는 짝수이다. 거짓인 명제이다. 정답_ ③

095

조건은 명제의 특정 부분을 문자로 바꿔 놓은 것이다.

①은 조건이 아니다.

참인지 거짓인지 판단할 수 있는 근거가 없으므로 명제도 조건도 아니다.

②는 조건이 아니다.

x의 값에 관계없이 항상 성립하므로 참인 명제이다.

③은 조건이 아니다.

x의 값에 따라 참 또는 거짓이 될 수 있는 조건의 형태이지만, '큰 수'의 기준이 확실하지 않으므로 조건이 아니다.

④는 조건이다.

x의 값에 따라 참 또는 거짓이 될 수 있고, 그 기준도 분명하므로 조건이다.

⑤는 조건이 아니다.

$x^2-4x+4=0$의 해는 $x=2$이므로 참인 명제이다. 정답_ ④

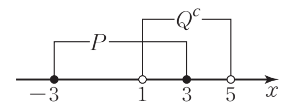
096

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

조건 'p 또는 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cup Q^C$이다.

$p: -3\le x\le 3$, $\sim q: 1<x<5$

이므로 조건 'p 또는 $\sim q$'의 진리집합은



$P\cup Q^C=\{x\,|\,-3\le x<5\}$

이 집합의 원소 중에서 정수인 것은

-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4

로 8개이다. 정답_ ③

097

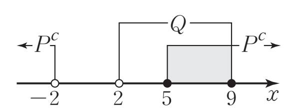
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

조건 '$\sim p$이고 q'의 진리집합은 $P^C\cap Q$이다.

정수 전체의 집합에서 정의되었으므로 x는 정수임에 유의하도록 하자.

$\sim p: x<-2$ 또는 $x\ge 5$,

$q: 2<x\le 9$이므로



조건 '$\sim p$이고 q'의 진리집합은

$P^C\cap Q=\{x\,|\,5\le x\le 9,\ x$는 정수$\}$

이 집합의 원소는 5, 6, 7, 8, 9이므로 구하는 합은

$5+6+7+8+9=35$ 정답_ 35

098

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

조건 '$\sim p$이고 $\sim q$'의 진리집합은 $P^C\cap Q^C$, 즉 $(P\cup Q)^C$이다.

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $P=\{2,\ 4,\ 6\}$, $Q=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

이므로 $P\cup Q=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$

$\therefore (P\cup Q)^C=U-(P\cup Q)$

$=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}-\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$

$=\{5\}$

따라서 구하는 집합은 $\{5\}$이다. 정답_ $\{5\}$

099

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

4의 양의 약수는 1, 2, 4이므로 $P=\{1,\ 2,\ 4\}$

$2x-15\le 0$에서 $x\le\frac{15}{2}$이므로

$Q=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

$P\subset X\subset Q$를 만족시키는 집합 X는 집합 Q의 부분집합 중 원소 1, 2, 4를 포함하는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{7-3}=16$ 정답_ 16

100

'실수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=0$이면 $a=0$ 그리고 $b=0$' 임을 이용한다.

$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=0$은 '$f(x)=0$ 그리고 $g(x)=0$' 임을 의미하므로 진리집합은 $P\cap Q$이다.

$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2\neq0$은 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=0$의 부정이므로 진리집합은 여집합인 $(P\cap Q)^C$이다. 정답_ ⑤

101

①은 거짓이다.

$p: x^2+x-6=0$, $q: 3x-5=1$의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

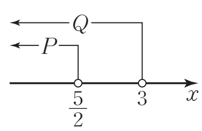
$P=\{-3, 2\}$, $Q=\{2\}$

$P\not\subset Q$이므로 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

②는 참이다.

$p: 2(x+1)<7$, $q: 3x+1<2(x+2)$의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\left\{x \middle| x<\frac{5}{2}\right\}$, $Q=\{x|x<3\}$



$P\subset Q$이므로 $p \longrightarrow q$는 참이다.

③은 거짓이다.

'이면' 뒤에 '반드시'를 끼워 생각해 보자.

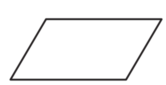
4의 배수이면 반드시 8의 배수일까? 아니다.

4는 4의 배수이지만 8의 배수가 아니다.

④도 거짓이다.

평행사변형이면 반드시 마름모일까? 아니다.

오른쪽 그림과 같은 사각형은 평행사변형이지만 마름모가 아니다.



⑤도 거짓이다.

a, b가 무리수이면 반드시 $a+b$도 무리수일까? 아니다.

$-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$는 무리수이지만 $(-\sqrt{2})+\sqrt{2}=0$은 무리수가 아니다. 정답_ ②

102

ㄱ은 참이다.

$a<b<0$이면 $|a|>|b|$ $\therefore a^2>b^2$

ㄴ은 거짓이다.

$a=-10$, $b=-20$, $c=1$일 때,

$b<a<0$이고 $c\neq0$이지만 $-10=\frac{a}{c}>\frac{b}{c}=-20$

ㄷ은 참이다.

$a^2\geq0$, $b^2\geq0$이므로 $a^2+b^2\geq0$이다.

그러므로 $a^2+b^2\leq0$이면 $a^2+b^2=0$ $\therefore a=0$이고 $b=0$

따라서 참인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_ ③

103

두 조건 $p: x=3$, $q: x^3-k=0$의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, 명제 $p \longrightarrow q$가 참이려면 $P\subset Q$이어야 한다.

즉, $x=3$일 때, $x^3-k=0$이 성립해야 하므로

$3^3-k=0$ $\therefore k=27$ 정답_ 27

104

명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이므로 $P\not\subset Q$ $\therefore a\neq4$

명제 $q \longrightarrow r$는 참이므로 $Q\subset R$

이때, $2\in Q$이므로 $2\in R$ $\therefore b=2$

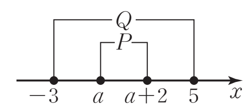
$a\in Q$이므로 $a\in R$ $\therefore a=6$ ($\because a\neq b$, $a\neq4$)

$\therefore a+b=6+2=8$ 정답_ 8

105

두 조건 $p: a\leq x\leq a+2$, $q: -3\leq x\leq5$의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, 명제 $p \longrightarrow q$가 참이려면 $P\subset Q$이어야 한다.

오른쪽 그림에서



$-3\leq a$, $a+2\leq5$

$\therefore -3\leq a\leq3$

따라서 정수 a는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3으로 7개이다.

정답_ ③

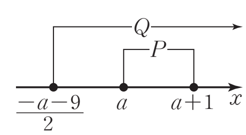
106

$3(x-3)\leq5x+a$에서 $-a-9\leq5x-3x$

$\therefore x\geq\frac{-a-9}{2}$

두 조건 $p: a\leq x\leq a+1$, $q: x\geq\frac{-a-9}{2}$의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, 명제 $p \longrightarrow q$가 참이려면 $P\subset Q$이어야 한다.

오른쪽 그림에서



$\frac{-a-9}{2}\leq a$, $-a-9\leq2a$

$-9\leq3a$ $\therefore a\geq-3$

따라서 실수 a의 최솟값은 -3이다. 정답_ ③

107

ㄱ은 옳다.

$a=0$일 때, $p: 0\times(x-2)(x-3)<0$이므로 이 부등식을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.

$\therefore P=\varnothing$

ㄴ도 옳다.

$a>0$, $b=0$일 때, $p: (x-2)(x-3)<0$에서 $2<x<3$이고 $q: x>0$이다. 즉, $P=\{x|2<x<3\}$이고 $Q=\{x|x>0\}$이므로 $P\subset Q$이다.

ㄷ은 옳지 않다.

$a<0$, $b=4$일 때, p : $(x-2)(x-3)>0$에서 $x<2$ 또는 $x>3$이고 q : $x>4$이다. 즉, $P=\{x|x<2$ 또는 $x>3\}$이므로 $P^C=\{x|2\le x\le 3\}$이고 $Q=\{x|x>4\}$이므로 $P^C \not\subset Q$이다.

그러므로 명제 '$\sim p$이면 q이다.' 는 거짓이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 정답_②

108

명제 '$\sim p$이면 q이다.' 의 반례는 $\sim p$를 만족시키지만 q를 만족시키지 않는 원소이다. 따라서 반례가 될 수 있는 것은 $P^C\cap Q^C$의 원소이다.

드 모르간의 법칙에 의해

$P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C$

이므로 반례가 속하는 집합은 ④이다. 정답_④

109

ㄱ은 참이다.

벤 다이어그램에서 $P\subset R^C$이므로

$p \longrightarrow \sim r$는 참인 명제이다.

ㄴ은 거짓이다.

벤 다이어그램에서 $R\not\subset Q^C$이므로

$r \longrightarrow \sim q$는 거짓인 명제이다.

ㄷ도 거짓이다.

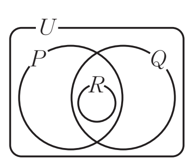
벤 다이어그램에서 $P\not\subset Q$, 즉 $Q^C\not\subset P^C$이므로

$\sim q \longrightarrow \sim p$는 거짓인 명제이다.

따라서 참인 명제는 ㄱ이다. 정답_①

110

$R\subset(P\cap Q)$를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$R\subset P$이므로 $P^C\subset R^C$

$R\subset Q$이므로 $Q^C\subset R^C$

①은 참이다.

$R\subset P$이므로 $r \longrightarrow p$는 참인 명제이다.

②도 참이다.

$R\subset Q$이므로 $r \longrightarrow q$는 참인 명제이다.

③은 거짓이다.

벤 다이어그램에서 $Q\not\subset P$, 즉 $P^C\not\subset Q^C$이므로 $\sim p \longrightarrow \sim q$는 거짓인 명제이다.

④는 참이다.

$P^C\subset R^C$이므로 $\sim p \longrightarrow \sim r$는 참인 명제이다.

⑤도 참이다.

$Q^C\subset R^C$이므로 $\sim q \longrightarrow \sim r$는 참인 명제이다.

정답_③

111

$P\cup Q=P$에서 $Q\subset P$이고 $P^C\subset Q^C$

$Q\cap R=R$에서 $R\subset Q$이고 $Q^C\subset R^C$

$\therefore R\subset Q\subset P$, $P^C\subset Q^C\subset R^C$

①은 참이다.

$Q\subset P$이므로 $q \longrightarrow p$는 참인 명제이다.

②도 참이다.

$R\subset Q$이므로 $r \longrightarrow q$는 참인 명제이다.

③도 참이다.

$R\subset P$이므로 $r \longrightarrow p$는 참인 명제이다.

④도 참이다.

$Q^C\subset R^C$이므로 $\sim q \longrightarrow \sim r$는 참인 명제이다.

⑤는 거짓이다.

$P^C\subset R^C$이므로 $\sim r \longrightarrow \sim p$는 거짓인 명제이다. 정답_⑤

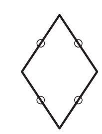
112

①은 참이다.

2가 소수이면서 짝수이기 때문이다.

②도 참이다.

마름모는 모두 두 쌍의 대변이 평행하기 때문이다.



③은 거짓이다.

$x^2<x$를 만족시키는 정수는 없다.

$x^2<x$이려면 $0<x<1$이어야 하기 때문이다.

④는 참이다.

$x^2=2$를 만족시키는 것은 $x=\pm\sqrt{2}$이고 이 값은 모두 무리수이기 때문이다.

⑤도 참이다.

x, y가 실수일 때, $x^2\ge 0$, $y^2\ge 0$이므로 $x^2+y^2\ge 0$이다.

정답_③

113

명제 (가)에서 어떤 $x\in A$에 대하여 $x\notin B$이므로 집합 A의 모든 원소가 집합 B의 원소인 것은 아니다. 즉, $A\not\subset B$이므로 ②는 아니다. 명제 (나)에서 모든 $x\in B$에 대하여 $x\notin C$이므로 $B\cap C=\varnothing$이다. 즉, ①, ④, ⑤는 아니다.

따라서 두 명제를 모두 만족시키는 벤 다이어그램은 ③이다.

정답_③

114

명제 '집합 P의 어떤 원소 x에 대하여 x는 3의 배수이다.' 가 참이 되도록 하려면 집합 P는 적어도 하나의 3의 배수를 원소로 가져야 한다.

(i) $\{3\}\subset P\subset\{1, 2, 3, 6\}$인 경우 집합 P의 개수는 $2^{4-1}=8$

(ii) $\{6\}\subset P\subset\{1, 2, 3, 6\}$인 경우 집합 P의 개수는 $2^{4-1}=8$

(iii) $\{3, 6\}\subset P\subset\{1, 2, 3, 6\}$인 경우 집합 P의 개수는 $2^{4-2}=4$

이때, (iii)은 (i)과 (ii)에 동시에 포함되므로 구하는 집합 P의 개수는 $8+8-4=12$ 정답_12

115

주어진 명제의 부정은 '모든 실수 x에 대하여 $x^2-18x+k\geq 0$이다.' 이므로 이차방정식 $x^2-18x+k=0$의 판별식을 D라고 하면 $D\leq 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(-9)^2-1\cdot k=81-k\leq 0$ $\therefore k\geq 81$

따라서 k의 최솟값은 81이다. 정답_ 81

116

'x, y가 모두 짝수이다.' 의 부정은 'x 또는 y가 홀수이다.' 즉, 'x, y 중 적어도 하나는 홀수이다.' 이다.

또, 'xy는 짝수이다.' 의 부정은 'xy가 홀수이다.' 이다.

따라서 명제 'x, y가 모두 짝수이면 xy는 짝수이다.' 의 대우는 'xy가 홀수이면 x, y 중 적어도 하나는 홀수이다.' 이다.

정답_ ②

117

명제 '$x^2-7x+12\neq 0$이면 $x-a\neq 0$이다.' 의 대우는 '$x-a=0$이면 $x^2-7x+12=0$이다.' 이므로 $x=a$가 $x^2-7x+12=0$의 근이라는 것을 의미한다. 즉, $a^2-7a+12=0$에서 $(a-3)(a-4)=0$ $\therefore a=3$ 또는 $a=4$

따라서 주어진 명제의 대우가 참이 되게 하는 모든 a의 값의 합은 $3+4=7$ 정답_ ②

118

ㄱ의 역 : 실수 a, b에 대하여 $|a|+|b|=0$이면 $a^2+b^2=0$이다.

$|a|+|b|=0$이면 $a=0$, $b=0$ $\therefore a^2+b^2=0$

따라서 ㄱ의 역은 참이다.

ㄴ의 역 : $x=1$이면 $x^2=1$이다.

따라서 ㄴ의 역도 참이다.

ㄷ의 역 : 이등변삼각형이면 정삼각형이다.

이등변삼각형 중에는 정삼각형이 아닌 것도 있으므로 ㄷ의 역은 거짓이다.

따라서 주어진 명제의 역이 참인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 정답_ ②

119

주어진 명제가 참이라는 것은 대우가 참이라는 것이므로 대우가 참이 되게 하는 조건을 구하면 된다.

주어진 명제 대신에 대우를 이용하는 이유는 주어진 명제의 가정과 결론이 '$m\leq x\leq n$' 의 꼴이 아니라 '$x\leq m$ 또는 $x\geq n$' 의 꼴이 되어 포함 관계를 관찰하기 어렵기 때문이다.

대우 : $|x-3|<2$이면 $|x-a|<4$이다.

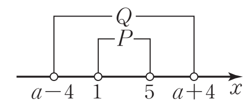
$|x-3|<2$에서 $-2<x-3<2$ $\therefore 1<x<5$

$|x-a|<4$에서 $-4<x-a<4$ $\therefore a-4<x<a+4$

두 조건

$p: 1<x<5$, $q: a-4<x<a+4$

의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되게 하려면 $P\subset Q$이어야 한다.



오른쪽 그림에서

$a-4\leq 1$, $5\leq a+4$이어야 하므로

$1\leq a\leq 5$

이 범위 안의 정수 a는 1, 2, 3, 4, 5로 5개이다. 정답_ 5

120

①은 참이다.

$p \longrightarrow \sim q$의 대우이다.

②는 참이라고 할 수 없다.

$\sim r \longrightarrow q$의 역이다.

③은 참이다.

$\sim r \longrightarrow q$의 대우이다.

④도 참이다.

$p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow r$에 삼단논법을 쓴 것이다.

⑤도 참이다.

$p \longrightarrow r$의 대우이다. 정답_ ②

121

대우의 성질에 의해 $p \Longrightarrow \sim r$에서 $r \Longrightarrow \sim p$이다.

따라서 주어진 조건은 다음과 같은 경로로 정리할 수 있다.

$q \Longrightarrow r \Longrightarrow \sim p$ …(경로 1)

$\Downarrow$

s

대우를 취한 경로는 다음과 같다.

$p \Longrightarrow \sim r \Longrightarrow \sim q$ …(경로 2)

$\Uparrow$

$\sim s$

두 경로에서 출발점과 도착점이 일치하는 것이 참이다.

ㄱ은 참이다.

(경로 2)에서 p를 출발해 $\sim q$로 갈 수 있다.

ㄴ도 참이다.

(경로 1)에서 q를 출발해 s로 갈 수 있다.

ㄷ은 참이라고 할 수 없다.

두 경로에 출발점과 도착점이 일치하는 것이 없다.

따라서 참인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 정답_ ④

122

$r \longrightarrow p$는 r를 출발해 p로 가는 경로에 대응한다.

주어진 조건을 이용해 r를 출발해 p로 가는 경로를 개척해 보자.

$r \longrightarrow \cdots \longrightarrow p$

대우의 성질에 의해 $\sim p \longrightarrow q$가 참이므로 $\sim q \longrightarrow p$도 참이다.

$r \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow p$

따라서 (가)는 $r \longrightarrow \sim q$이어야 한다. 정답_ ④

123

바다라는 것을 조건 p, 물고기가 산다라는 것을 조건 q, 낚시를 할 수 있다라는 것을 조건 r라고 하자.

'바다에는 물고기가 산다.'는 $p \longrightarrow q$

'물고기가 사는 곳에서는 낚시를 할 수 있다.'는 $q \longrightarrow r$

이때, 두 명제가 모두 참이므로 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$, $\sim r \longrightarrow \sim q$도 참이다.

또, 삼단논법에 의해 $p \longrightarrow r$가 참이므로 대우 $\sim r \longrightarrow \sim q$도 참이다.

따라서 '바다에서는 낚시를 할 수 있다.', 즉 $p \longrightarrow r$는 참이고 '물고기가 살지 않으면 바다가 아니다.', 즉 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ이다. 정답_④

124

대우의 성질에 의해 (나)의 대우도 참이다.

(나)의 대우 : B에 가입한 사람은 모두 C에 가입하고 있다.

따라서 주어진 조건은 다음과 같은 경로로 정리할 수 있다.

$\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B} \Longrightarrow \mathrm{C}$ …(경로 1)

대우를 취한 경로는 다음과 같다.

$\sim\mathrm{C} \Longrightarrow \sim\mathrm{B} \Longrightarrow \sim\mathrm{A}$ …(경로 2)

ㄱ은 참이다.

(경로 1)에 의해 $\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{C}$이다.

ㄴ은 참이라고 할 수 없다.

두 경로에서 $\mathrm{C} \Longrightarrow \mathrm{A}$를 얻을 수 없다.

ㄷ은 참이다.

(경로 2)에 의해 $\sim\mathrm{C} \Longrightarrow \sim\mathrm{A}$이다.

따라서 참인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_④

125

두 조건

p : 삼각형 ABC가 정삼각형이다.

q : $\angle\mathrm{A}=60^\circ$이다.

에 대하여

$p \longrightarrow q$: 삼각형 ABC가 정삼각형이면 $\angle\mathrm{A}=60^\circ$이다. (참)

(설명) 정삼각형의 세 내각의 크기는 모두 60°이다.

$q \longrightarrow p$: $\angle\mathrm{A}=60^\circ$이면 삼각형 ABC가 정삼각형이다. (거짓)

(설명) 세 내각의 크기가 모두 60°이어야 정삼각형이다.

참인 명제 $p \longrightarrow q$를 이용해 판정하면 p는 q이기 위한 (가)충분 조건이다.

두 조건

r : 두 삼각형의 넓이가 같다.

s : 두 삼각형이 합동이다.

에 대하여

$r \longrightarrow s$: 두 삼각형의 넓이가 같으면 두 삼각형이 합동이다. (거짓)

(설명) 넓이가 같아도 합동이 아닐 수 있다.

$s \longrightarrow r$: 두 삼각형이 합동이면 두 삼각형의 넓이가 같다. (참)

(설명) 합동이면 모양과 크기가 같다.

참인 명제 $s \longrightarrow r$를 이용해 판정하면 r는 s이기 위한 (나)필요 조건이다. 정답_①

126

$x^2=1$, 즉 $x=\pm1$의 진리집합은 $\{-1,\ 1\}$이다.

ㄱ의 진리집합은 $\{-1\}$

ㄴ의 진리집합은 $\{2\}$

ㄷ의 진리집합은 $\{-1,\ 0,\ 1\}$

ㄹ의 진리집합은 $\{0\}$

필요조건은 큰 집합, 즉 $\{-1,\ 1\}$을 포함하는 것이므로 ㄷ이다.

충분조건은 작은 집합, 즉 $\{-1,\ 1\}$에 포함되는 것이므로 ㄱ이다.

따라서 필요조건과 충분조건을 차례대로 나열하면 ㄷ, ㄱ이다.

정답_②

127

ㄱ. $p \longrightarrow q$: $a^2+b^2=0$이면 $ab=0$ (참)

(증명) $a^2+b^2=0$이면 $a=0,\ b=0$

$\therefore ab=0$

$q \longrightarrow p$: $ab=0$이면 $a^2+b^2=0$ (거짓)

(반례) $a=0,\ b=1$

참인 명제 $p \longrightarrow q$를 이용해 판정하면 p는 q이기 위한 충분 조건이다.

ㄴ. $p \longrightarrow q$: $a\le0$이면 $a^2\ge0$ (참)

(증명) 모든 실수 a에 대하여 $a^2\ge0$

$q \longrightarrow p$: $a^2\ge0$이면 $a\le0$ (거짓)

(반례) $a=1$

참인 명제 $p \longrightarrow q$를 이용해 판정하면 p는 q이기 위한 충분 조건이다.

ㄷ. $p \longrightarrow q$: $|a|>b$이면 $b<0$ (거짓)

(반례) $a=2,\ b=1$

$q \longrightarrow p$: $b<0$이면 $|a|>b$ (참)

(증명) 모든 실수 a에 대하여 $|a|\ge0$

$|a|\ge0>b$에서 $|a|>b$

참인 명제 $q \longrightarrow p$를 이용해 판정하면 p는 q이기 위한 필요 조건이다.

따라서 조건 p가 조건 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ㄷ이다. 정답_③

128

① $p \longrightarrow q$: $|x|>1$이면 $x>1$ (거짓)

(반례) $x=-2$

$q \longrightarrow p$: $x>1$이면 $|x|>1$ (참)
참인 명제 $q \longrightarrow p$를 이용해 판정하면 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

② $p \longrightarrow q$: $x^2=y^2$이면 $x=y$ (거짓)
(반례) $x=2$, $y=-2$
$q \longrightarrow p$: $x=y$이면 $x^2=y^2$ (참)
참인 명제 $q \longrightarrow p$를 이용해 판정하면 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

③ $p \longrightarrow q$: $5x-10<0$이면 $x<2$ (참)
(증명) $5x-10<0$이면 $5x<10$ $\quad\therefore x<2$
$q \longrightarrow p$: $x<2$이면 $5x-10<0$ (참)
(증명) $x<2$이면 $5x<10$ $\quad\therefore 5x-10<0$
참인 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow p$를 이용해 판정하면 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

④ $p \longrightarrow q$: $x>y>0$이면 $x^2>y^2$ (참)
(증명) $x>y>0$인 실수 x, y에 대하여 $x^2>y^2$
$q \longrightarrow p$: $x^2>y^2$이면 $x>y>0$ (거짓)
(반례) $x=-4$, $y=-3$
참인 명제 $p \longrightarrow q$를 이용해 판정하면 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

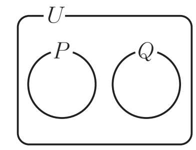
⑤ $p \longrightarrow q$: $x\neq1$이면 $x^2\neq1$ (거짓)
(반례) $x=-1$
$q \longrightarrow p$: $x^2\neq1$이면 $x\neq1$ (참)
참인 명제 $q \longrightarrow p$를 이용해 판정하면 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다. 정답_ ④

129

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $\quad p \Longrightarrow q$
$\sim q$는 r이기 위한 필요조건이므로 $\quad r \Longrightarrow \sim q$
대우의 성질에 의해 $r \Longrightarrow \sim q$에서 $\quad q \Longrightarrow \sim r$
따라서 주어진 조건은 다음과 같은 경로로 정리할 수 있다.
$p \Longrightarrow q \Longrightarrow \sim r$ …(경로 1)
대우를 취한 경로는 다음과 같다.
$r \Longrightarrow \sim q \Longrightarrow \sim p$ …(경로 2)
ㄱ은 옳다.
(경로 2)에 의해 $\quad \sim q \Longrightarrow \sim p$
즉, $\sim q$ 는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.
ㄴ도 옳다.
(경로 1)에 의해 $\quad q \Longrightarrow \sim r$
즉, q는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.
ㄷ도 옳다.
(경로 1)에 의해 $\quad p \Longrightarrow \sim r$
즉, $\sim r$는 p이기 위한 필요조건이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

130

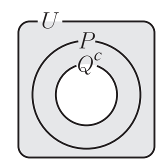
q가 $\sim p$이기 위한 충분조건이므로 $\quad Q \subset P^C$
이것을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같이 Q는 P의 바깥쪽에 있는 상황이다.



따라서 옳은 것은
$P \cap Q = \varnothing$
이다. 정답_ ⑤

131

p가 $\sim q$이기 위한 필요조건이므로 $\quad Q^C \subset P$
이것을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같이 P 안에 Q^C이 포함되는 상황이다.
따라서 색칠한 부분이 Q이므로 옳은 것은



$P \cup Q = U$
이다. 정답_ ⑤

132

①은 옳다.
$P \subset R$이므로 p는 r이기 위한 충분조건이다.
②도 옳다.
$Q \subset R$이므로 r는 q이기 위한 필요조건이다.
③도 옳다.
$P \subset Q^C$이므로 p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.
④도 옳다.
$Q \subset P^C$이므로 $\sim p$는 q이기 위한 필요조건이다.
⑤는 옳지 않다.
$Q \subset R$, 즉 $R^C \subset Q^C$이므로 $\sim q$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.
정답_ ⑤

133

$(P \cup Q) \cap (P^C \cup Q^C)$
$=\{(P \cup Q) \cap P^C\} \cup \{(P \cup Q) \cap Q^C\}$
$=\{(P \cup Q)-P\} \cup \{(P \cup Q)-Q\}$
$=(Q-P) \cup (P-Q)=\varnothing$
즉, $Q-P=\varnothing$, $P-Q=\varnothing$에서 $Q \subset P$, $P \subset Q$이므로
$P=Q$
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다. 정답_ ③

134

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면 p가 q이기 위한 충분조건이므로 $\quad P \subset Q$
$\therefore Q^C \subset P^C$ …… ㉠
$Q^C=\{x \mid x+3=0\}$, $P^C=\{x \mid x^2-ax+3=0\}$이므로 ㉠은

$x=-3$이 $x^2-ax+3=0$의 근이라는 것을 의미한다. 즉,

$(-3)^2+3a+3=0 \qquad \therefore a=-4$ 정답_ ④

135

p가 q이기 위한 필요충분조건이므로 두 조건을 만족시키는 x의 값은 같다.

$x=5$를 $(x-2)^2=a$에 대입하면

$(5-2)^2=a \qquad \therefore a=9$

$x=b$를 $(x-2)^2=9$에 대입하면

$(b-2)^2=9,\ b-2=\pm 3$

$\therefore b=-1\ (\because b\neq 5)$

$\therefore a+b=9+(-1)=8$ 정답_ ①

다른 풀이

조건 p : $(x-2)^2=a,\ x^2-4x+4-a=0$

조건 q : $x=5$ 또는 $x=b$

p는 q이기 위한 필요충분조건이므로 근과 계수의 관계에 의해

$5+b=4,\ 5b=4-a$에서 $a=9,\ b=-1$

$\therefore a+b=9+(-1)=8$

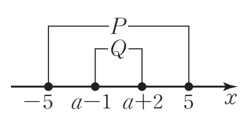
136

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라고 하면

p가 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset P$

$|x|\le 5$에서 $-5\le x\le 5$

오른쪽 그림에서



$-5\le a-1,\ a+2\le 5$

$\therefore -4\le a\le 3$

따라서 실수 a의 최댓값은 3이고, 최솟값은 -4이므로 그 차는

$3-(-4)=7$ 정답_ ②

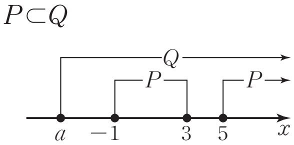
137

세 조건 $p,\ q,\ r$의 진리집합을 각각 $P,\ Q,\ R$라고 하면

q가 p이기 위한 필요조건이므로 $P\subset Q$

오른쪽 그림에서 $a\le -1$

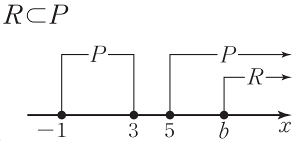
즉, a의 최댓값은 -1이다.



r가 p이기 위한 충분조건이므로 $R\subset P$

오른쪽 그림에서 $b\ge 5$

즉, b의 최솟값은 5이다.



따라서 a의 최댓값과 b의 최솟값의 합은

$(-1)+5=4$ 정답_ ④

138

원래 명제와 그 대우는 참, 거짓이 일치하므로 명제를 증명할 때 대우를 증명해도 된다.

주어진 명제의 대우는

'실수 $x,\ y$에 대하여 $x<1$이고 $y<1$이면 $x+y<2$이다.'

따라서 주어진 명제 대신에 증명해도 되는 명제는 ③이다.

정답_ ③

139

주어진 명제의 $\boxed{\text{(가) 대우}}$를 구해 보면

'$x,\ y$가 모두 유리수이면 $x+y$도 유리수이다.'

이다. $x,\ y$가 모두 유리수이면

$x=\dfrac{b}{a},\ y=\dfrac{d}{c}$ ($a,\ b,\ c,\ d$는 정수, $a\neq 0,\ c\neq 0$)

로 놓을 수 있다. 이때,

$x+y=\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}=\dfrac{bc+ad}{ac}$

$bc+ad$와 ac는 $\boxed{\text{(나) 정수}}$이므로 $x+y$는 $\boxed{\text{(다) 유리수}}$이다.

따라서 주어진 명제의 $\boxed{\text{(가) 대우}}$가 참이므로 주어진 명제도 참이다. 정답_ ④

140

주어진 명제의 대우를 구해 보면 '$m+n$을 3으로 나눈 나머지가 0도 아니고 1도 아니면 m^3+n^3을 3으로 나눈 나머지는 0도 아니고 1도 아니다.' 이다.

한편, 자연수를 3으로 나누었을 때, 나머지는 0 또는 1 또는 2이므로 나머지가 0도 아니고 1도 아니면 나머지는 2이다.

그러므로 위의 대우는 '$m+n$을 3으로 나눈 나머지가 $\boxed{\text{(가) }2}$이면 m^3+n^3을 3으로 나눈 나머지가 $\boxed{\text{(가) }2}$이다.' 이다.

그러므로 이 대우를 증명하면 된다.

$m+n$을 3으로 나눈 나머지가 $\boxed{\text{(가) }2}$이므로

$m+n=3k+\boxed{\text{(가) }2}$ (k는 0 이상의 정수)

로 놓을 수 있다. 한편,

m^3+n^3

$=(m+n)^3-3mn(m+n)$

$=(3k+\boxed{\text{(가) }2})^3-\boxed{\text{(나) }3}mn(3k+\boxed{\text{(가) }2})$

$=\boxed{3}\{9k^3+18k^2+12k+2-mn(3k+\boxed{\text{(가) }2})\}+\boxed{\text{(가) }2}$

그러므로 m^3+n^3을 3으로 나눈 나머지는 $\boxed{\text{(가) }2}$이다.

따라서 $a=2,\ b=3$이므로

$a+b=2+3=5$ 정답_ 5

141

$\sqrt{2}$가 $\boxed{\text{(가) 유리수}}$라고 가정하면

$\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)

으로 나타낼 수 있다. 양변을 제곱하여 정리하면

$2m^2=n^2$ …… ㉠

이때, n^2이 2의 배수이므로 n도 2의 배수이다.

$n=2k$ (k는 자연수)로 놓고 ㉠에 대입하면

$2m^2=4k^2 \quad \therefore m^2=2k^2$

이때, m^2이 2의 배수이므로 m도 2의 배수이다.

즉, m, n은 모두 2의 배수이고, 이것은 m, n이 $\boxed{^{(다)}서로소}$라는 가정에 모순이다.

따라서 $\sqrt{2}$는 $\boxed{^{(라)}무리수}$이다. 정답_ ③

142

$n^2+2n+12$가 121의 배수라고 가정하면 적당한 자연수 k에 대하여

$n^2+2n+12=121k$

이 식을 변형하면

$n^2+2n+1=121k-11$

$(n+1)^2=121k-11$

$(n+1)^2=11(\boxed{^{(가)}11k-1})$ ······ ㉠

이므로 $(n+1)^2$은 11의 배수이다.

이제 $n+1=11l$ (l은 자연수)로 놓고 ㉠에 대입하면

$(11l)^2=11(11k-1)$

$11l^2=11k-1$

$11(k-l^2)=\boxed{^{(나)}1}$

이므로 1이 11의 배수가 되어 모순이다.

따라서 $n^2+2n+12$는 121의 배수가 아니다.

따라서 $f(k)=11k-1$, $a=1$이므로

$f(1)=11\times1-1=10$ 정답_ 10

143

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(\boxed{^{(가)}a+b+c})(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}(\boxed{^{(가)}a+b+c})$

$\times(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)$

$=\frac{1}{2}(\boxed{^{(가)}a+b+c})\{(\boxed{^{(나)}a-b})^2+(\boxed{^{(다)}b-c})^2+(\boxed{^{(라)}c-a})^2\}$

$\geq\boxed{^{(마)}0}$

$\therefore a^3+b^3+c^3-3abc\geq0$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

정답_ ⑤

144

$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$

$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-\boxed{^{(가)}(a+b)^2}$

$=a^2+2\boxed{^{(나)}|ab|}+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$=2(\boxed{^{(나)}|ab|}-ab)$

그런데 $ab\geq0$이면 $|ab|=ab$이므로

$|ab|-ab=ab-ab=0$

$ab<0$이면 $|ab|=-ab$이므로

$|ab|-ab=-ab-ab=-2ab>0$

$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2\geq0$

$\therefore (|a|+|b|)^2\geq|a+b|^2$

그런데 $|a|+|b|\geq0$, $|a+b|\geq0$이므로

$|a|+|b|\geq|a+b|$(단, 등호는 $\boxed{^{(다)}ab\geq0}$일 때 성립)

정답_ ③

145

ㄱ은 옳다.

$a^2+ab+b^2=\left(a^2+ab+\frac{1}{4}b^2\right)+\frac{3}{4}b^2$

$=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geq0$

$\therefore a^2+ab+b^2\geq0$ (단, 등호는 $a=0$, $b=0$일 때 성립)

ㄴ도 옳다.

(i) $|a|\geq|b|$일 때,

$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$

$=(a-b)^2-(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)$

$=a^2-2ab+b^2-(a^2-2|ab|+b^2)$

$=2(|ab|-ab)\geq0$

$\therefore |a-b|^2\geq(|a|-|b|)^2$

그런데 $|a-b|\geq0$, $|a|-|b|\geq0$이므로

$|a-b|\geq|a|-|b|$

(ii) $|a|<|b|$일 때,

$|a-b|>0$, $|a|-|b|<0$이므로

$|a-b|>|a|-|b|$

(i), (ii)에서

$|a-b|\geq|a|-|b|$ (단, 등호는 $ab\geq0$일 때 성립)

ㄷ도 옳다.

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geq0$

$\therefore a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

146

$ab<0$이므로 a, b의 부호는 서로 다르다.

ㄱ은 거짓이다.

(반례) $a=-3$, $b=4$이면 $ab=-3\cdot4=-12<0$이지만

$a+b=-3+4=1>0$이다.

ㄴ은 참이다.

a, b의 부호는 서로 다르므로 $|a-b|=|a|+|b|$

그런데 $|a|+|b|>|a+b|$이므로 $|a-b|>|a+b|$가 성립

한다.

ㄷ도 참이다.

$$\frac{a-b}{a}-\frac{a+b}{b}=1-\frac{b}{a}-\frac{a}{b}-1$$
$$=-\frac{b}{a}-\frac{a}{b}>0\ (\because ab<0)$$

$\therefore \frac{a-b}{a}>\frac{a+b}{b}$

따라서 참인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 정답_④

다른 풀이

ㄴ. $(a-b)^2-(a+b)^2=-4ab>0$이므로

$(a-b)^2>(a+b)^2$

그런데 $|a-b|>0$, $|a+b|>0$이므로

$|a-b|>|a+b|$

ㄷ. $\frac{a-b}{a}-\frac{a+b}{b}=\frac{-(a^2+b^2)}{ab}>0$이므로

$\frac{a-b}{a}>\frac{a+b}{b}$

147

$x>0$, $y>0$에서 $\frac{8y}{x}>0$, $\frac{2x}{y}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$\frac{8y}{x}+\frac{2x}{y}\ge 2\sqrt{\frac{8y}{x}\cdot\frac{2x}{y}}$$
$$=2\cdot 4=8\left(\text{단, 등호는 } \frac{8y}{x}=\frac{2x}{y}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $\frac{8y}{x}+\frac{2x}{y}$의 최솟값은 8이다. 정답_④

148

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{3}{xy} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$xy>0$이므로 x, y는 부호가 같고 $x+y=3>0$이므로 $x>0$, $y>0$이다. 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$x+y\ge 2\sqrt{xy} \quad \cdots\cdots ㉡$$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

㉡에서 $(x+y)^2\ge 4xy$이고 이를 정리하면

$$\frac{1}{xy}\ge\frac{4}{(x+y)^2} \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢에서

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{xy}\ge\frac{12}{(x+y)^2}=\frac{4}{3}$$

따라서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$의 최솟값은 $\frac{4}{3}$이다. 정답_②

149

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)=1+\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}+4$$
$$=\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}+5$$

이때, $\frac{4a}{b}>0$, $\frac{b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}+5\ge 2\sqrt{\frac{4a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+5$$
$$=2\cdot 2+5=9\left(\text{단, 등호는 } \frac{4a}{b}=\frac{b}{a}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)$의 최솟값은 9이다. 정답_④

150

㉠, ㉡은 산술평균과 기하평균의 관계에서 옳다.

㉢, ㉣은 ㉠, ㉡을 변끼리 곱한 것이므로 옳다.

㉤이 옳지 않다. 최솟값이 $4\sqrt{2}$이려면 ㉠, ㉡에서 모두 등호가 성립해야 한다.

㉠에서 등호가 성립하려면 $a=b$

㉡에서 등호가 성립하려면 $\frac{1}{a}=\frac{2}{b}$ $\quad\therefore 2a=b$

위의 두 식을 동시에 만족시키는 양수 a, b의 값이 존재하지 않으므로 최솟값은 $4\sqrt{2}$가 아니다. 정답_⑤

다른 풀이

다음과 같이 전개한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 적용하면 올바른 최솟값을 구할 수 있다.

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)=1+\frac{2a}{b}+\frac{b}{a}+2$$
$$=\frac{2a}{b}+\frac{b}{a}+3$$
$$\ge 2\sqrt{\frac{2a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+3$$
$$=2\sqrt{2}+3\left(\text{단, 등호는 } \frac{2a}{b}=\frac{b}{a}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)$의 최솟값은 $2\sqrt{2}+3$이다.

151

$$\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(b+\frac{8}{a}\right)=ab+8+2+\frac{16}{ab}$$
$$=ab+\frac{16}{ab}+10$$

이때, $ab>0$, $\frac{16}{ab}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$ab+\frac{16}{ab}+10\ge 2\sqrt{ab\cdot\frac{16}{ab}}+10$$
$$=2\cdot 4+10=18$$
$$\left(\text{단, 등호는 } ab=\frac{16}{ab}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(b+\frac{8}{a}\right)\ge 18$에서 $18\ge k$이어야 주어진 부등식이 항상 성립하므로 구하는 상수 k의 최댓값은 18이다.

정답_④

152

$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 두 수의 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\ge 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}}=2\sqrt{\frac{c}{a}} \quad\cdots\cdots ㉠$$

$$\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\ge 2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}}=2\sqrt{\frac{a}{b}} \quad\cdots\cdots ㉡$$

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a}}=2\sqrt{\frac{b}{c}} \quad\cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢을 변끼리 곱하면

$$\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}\right)\ge 8\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}}=8$$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

따라서 주어진 식의 최솟값은 8이다. 정답_ ④

참고

계수가 모두 1일 때에는 전개하지 않고도 최솟값을 구할 수 있다.

153

세 양수의 산술평균과 기하평균의 관계는 다음을 이용한다.

> $a>0,\ b>0,\ c>0$일 때,
> $\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$$
$$=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$
$$=\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)$$

$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 세 수의 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}}=3 \quad\cdots\cdots ㉠$$

$$\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}}=3 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 변끼리 더하면

$$\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\ge 6$$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

따라서 주어진 식의 최솟값은 6이다. 정답_ 6

154

$x>-1$에서 $x+1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$x+\frac{9}{x+1}=(x+1)+\frac{9}{x+1}-1$$
$$\ge 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{9}{x+1}}-1=2\cdot3-1=5 \quad\cdots\cdots ㉠$$

따라서 $x+\frac{9}{x+1}$의 최솟값은 5이다.

㉠에서 등호는 $x+1=\frac{9}{x+1}$일 때 성립하므로

$(x+1)^2=9$에서 $x+1=3$ ($\because x+1>0$) $\therefore x=2$

따라서 $m=5,\ n=2$이므로 $mn=10$ 정답_ ③

155

$x>3$에서 $x-3>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$\frac{x^2-3x+4}{x-3}=x+\frac{4}{x-3}=(x-3)+\frac{4}{x-3}+3$$
$$\ge 2\sqrt{(x-3)\cdot\frac{4}{x-3}}+3=2\cdot2+3=7$$

$\left(\text{단, 등호는 } x-3=\frac{4}{x-3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\frac{x^2-3x+4}{x-3}$의 최솟값은 7이다. 정답_ ③

156

$a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$a+\frac{1}{a}+\frac{4a}{a^2+1}=\frac{a^2+1}{a}+\frac{4a}{a^2+1}$$
$$\ge 2\sqrt{\frac{a^2+1}{a}\cdot\frac{4a}{a^2+1}}=2\cdot2=4$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a^2+1}{a}=\frac{4a}{a^2+1}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $a+\frac{1}{a}+\frac{4a}{a^2+1}$의 최솟값은 4이다. 정답_ ④

157

$2a>0,\ 5b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$2a+5b\ge 2\sqrt{2a\cdot 5b}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$2a+5b=100$이므로 $100\ge 2\sqrt{10ab}$

$50\ge\sqrt{10ab},\ 2500\ge 10ab$ $\therefore 250\ge ab$

따라서 ab의 최댓값은 250이다.

㉠에서 등호는 $2a=5b$일 때 성립하므로

$2a+5b=100$에서 $2a=50,\ 5b=50$ $\therefore a=25,\ b=10$

따라서 $M=250,\ m=25,\ n=10$이므로

$M+m+n=285$ 정답_ ④

158

$a>0,\ b>0$에서 $\frac{4}{a}>0,\ \frac{1}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{\frac{4}{ab}}$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{4}{a}=\frac{1}{b}\text{, 즉 } a=4b\text{일 때 성립}\right)$

$\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=2$이므로 $2\ge 2\sqrt{\frac{4}{ab}},\ 1\ge\frac{2}{\sqrt{ab}}$

$\therefore \sqrt{ab}\ge 2$

$a>0,\ 4b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$a+4b\ge 2\sqrt{4ab}=4\sqrt{ab}\ge 8$ (단, 등호는 $a=4b$일 때 성립)

따라서 $a+4b$의 최솟값은 8이다. 정답_ ④

159

(ⅰ) $A-B=ab-\dfrac{a^2+b^2}{ab}=ab-\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)$

이때, $0<a<b<1$에서 $ab<1$이고

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge 2\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}}=2$이므로

$ab-\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)<0 \qquad \therefore A<B$

(ⅱ) $B-C=\dfrac{a^2+b^2}{ab}-\dfrac{a+b}{b}$

$=\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)-\left(\dfrac{a}{b}+1\right)=\dfrac{b-a}{a}$

이때, $a>0,\ b-a>0$이므로 $\dfrac{b-a}{a}>0 \qquad \therefore B>C$

(ⅲ) $C-A=\dfrac{a+b}{b}-ab=\dfrac{a}{b}+1-ab$

이때, $\dfrac{a}{b}>0$이고 $ab<1$에서 $1-ab>0$이므로

$\dfrac{a}{b}+1-ab>0 \qquad \therefore C>A$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $A<C<B$ 정답_②

다른 풀이

$0<a<b<1$의 각 변을 a, b로 각각 나누면

$0<1<\dfrac{b}{a}<\dfrac{1}{a},\ 0<1<\dfrac{a}{b}<\dfrac{1}{b}$

(ⅰ) $0<a<1,\ 0<b<1$이므로 $A=ab<1$

그런데 $C=\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{a}{b}+1>1$이므로 $C>A$

(ⅱ) $B-C=\dfrac{a^2+b^2}{ab}-\dfrac{a+b}{b}$

$=\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)-\left(\dfrac{a}{b}+1\right)=\dfrac{b}{a}-1>0$

$\therefore B>C$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $A<C<B$

160

전체 직사각형의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 $y\,(x>0, y>0)$라고 하면

(철사의 길이)$=2x+5y=10$

(전체 직사각형의 넓이)$=xy$

이제 다음과 같은 문제로 변신했다.

$2x+5y=10$일 때, xy의 최댓값은?

$x>0,\ y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$2x+5y\ge 2\sqrt{2x\cdot 5y}=2\sqrt{10xy}$ (단, 등호는 $2x=5y$일 때 성립)

$2x+5y=10$이므로 $10\ge 2\sqrt{10xy},\ 25\ge 10xy$

$\therefore \dfrac{5}{2}\ge xy$

따라서 전체 직사각형의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{5}{2}$이다. 정답_②

161

직육면체의 겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$이므로

$2(xy+yz+zx)=2 \qquad \therefore xy+yz+zx=1$

$x>0,\ y>0,\ z>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2\cdot y^2}=2xy$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립) …… ㉠

$y^2+z^2\ge 2\sqrt{y^2\cdot z^2}=2yz$ (단, 등호는 $y=z$일 때 성립) …… ㉡

$z^2+x^2\ge 2\sqrt{z^2\cdot x^2}=2zx$ (단, 등호는 $z=x$일 때 성립) …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 변끼리 더하면 $2(x^2+y^2+z^2)\ge 2(xy+yz+zx)$

$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx=1$

$\left(\text{단, 등호는 } x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ge 1$이므로 직육면체의 대각선의 길이의 최솟값은 1이다. 정답_1

162

$S_1=\dfrac{1}{2}\times 4\times b=2b,\ S_2=\dfrac{1}{2}\times 2\times a=a$이므로

$a+2b=10$에서 $S_1+S_2=10$

이때, $S_1>0,\ S_2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$S_1+S_2\ge 2\sqrt{S_1S_2}$ (단, 등호는 $S_1=S_2$일 때 성립)

$S_1+S_2=10$이므로 $10\ge 2\sqrt{S_1S_2},\ 5\ge\sqrt{S_1S_2} \qquad \therefore 25\ge S_1S_2$

따라서 S_1S_2의 최댓값은 25이다. 정답_⑤

163

a, b가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(a^2+1^2)(b^2+3^2)\ge(ab+3)^2$

$36\ge(ab+3)^2$

$-6\le ab+3\le 6 \qquad \therefore -9\le ab\le 3$

이때, a, b가 양수이므로 $0<ab\le 3$

따라서 ab의 최댓값은 3이다. 정답_3

164

a, b가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+2^2)(a^2+b^2)\ge(a+2b)^2\left(\text{단, 등호는 } a=\dfrac{b}{2}\text{일 때 성립}\right)$

$a^2+b^2=5$이므로 $5\cdot 5\ge(a+2b)^2,\ (a+2b)^2\le 25$

$\therefore -5\le a+2b\le 5$

따라서 $\alpha=5,\ \beta=-5$이므로 $\alpha-\beta=10$ 정답_②

165

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+2^2)\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\}\ge(\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2$

$\therefore 5(a+b)\ge(\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2\left(\text{단, 등호는 } \sqrt{a}=\dfrac{\sqrt{b}}{2}\text{일 때 성립}\right)$

$a+b=5$이므로 $25\ge(\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2$, $-5\le\sqrt{a}+2\sqrt{b}\le5$
$\sqrt{a}\ge0$, $2\sqrt{b}\ge0$이므로 $0\le\sqrt{a}+2\sqrt{b}\le5$
따라서 구하는 최댓값은 5이다. 정답_ ④

166

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의해
$(1^2+2^2)(x^2+y^2)\ge(x+2y)^2$ ……㉠
$x+2y=5$이므로 $5(x^2+y^2)\ge25$
$\therefore x^2+y^2\ge5$
따라서 x^2+y^2의 최솟값은 5이다.
㉠에서 등호는 $x=\frac{y}{2}$일 때 성립하므로 $y=2x$
이것을 $x+2y=5$에 대입하면 $x+4x=5$
$\therefore x=1$
$x=1$을 $y=2x$에 대입하면 $y=2$
따라서 $m=5$, $\alpha=1$, $\beta=2$이므로
$m+\alpha+\beta=8$ 정답_ ②

167

x, y, z가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의해
$\{2^2+(-3)^2+6^2\}(x^2+y^2+z^2)\ge(2x-3y+6z)^2$
$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{6}\text{일 때 성립}\right)$
$2x-3y+6z=14$이므로
$49(x^2+y^2+z^2)\ge196$ $\therefore x^2+y^2+z^2\ge4$
따라서 $x^2+y^2+z^2$의 최솟값은 4이다. 정답_ ③

168

a, b, c가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의해
$\{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2\}(a^2+b^2+c^2)\ge(\sqrt{2}a-\sqrt{3}b+\sqrt{5}c)^2$
$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{b}{-\sqrt{3}}=\frac{c}{\sqrt{5}}\text{일 때 성립}\right)$
$a^2+b^2+c^2=10$이므로
$10\cdot10\ge(\sqrt{2}a-\sqrt{3}b+\sqrt{5}c)^2$
$100\ge(\sqrt{2}a-\sqrt{3}b+\sqrt{5}c)^2$
$\therefore -10\le\sqrt{2}a-\sqrt{3}b+\sqrt{5}c\le10$
따라서 $\sqrt{2}a-\sqrt{3}b+\sqrt{5}c$의 최댓값은 10, 최솟값은 -10이므로
그 곱은 -100이다. 정답_ ①

169

a, b, c가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의해
$\{1^2+2^2+(-3)^2\}\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\}$
$\ge(\sqrt{a}+2\sqrt{b}-3\sqrt{c})^2$
$\left(\text{단, 등호는 } \sqrt{a}=\frac{\sqrt{b}}{2}=\frac{\sqrt{c}}{-3}\text{일 때 성립}\right)$
$\sqrt{a}+2\sqrt{b}-3\sqrt{c}=7$이므로 $14(a+b+c)\ge49$
$\therefore a+b+c\ge\frac{7}{2}$
따라서 $a+b+c$의 최솟값은 $\frac{7}{2}$이다. 정답_ ①

170

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 x, y, z라고 하면 직육면체의 대각선의 길이가 1이므로 $x^2+y^2+z^2=1$
직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은 $4x+4y+4z$
x, y, z가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의해
$(4^2+4^2+4^2)(x^2+y^2+z^2)\ge(4x+4y+4z)^2$
$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{4}=\frac{y}{4}=\frac{z}{4}\text{일 때 성립}\right)$
$x^2+y^2+z^2=1$이므로 $48\ge(4x+4y+4z)^2$
$\therefore 4\sqrt{3}\ge4x+4y+4z$
따라서 구하는 최댓값은 $4\sqrt{3}$이다. 정답_ ②

171

삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라고 하면
(i) 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 12이므로 $a+b+c=12$
(ii) $S_1=a^2$, $S_2=b^2$, $S_3=c^2$이므로 $S_1+S_2+S_3=a^2+b^2+c^2$
a, b, c가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의해
$(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2$ ……㉠
$a+b+c=12$이므로 $3(a^2+b^2+c^2)\ge144$
$\therefore a^2+b^2+c^2\ge48$
$a^2+b^2+c^2$의 값이 최솟값인 48이 될 때에는 ㉠에서 등호가 성립할 때이므로 $\frac{a}{1}=\frac{b}{1}=\frac{c}{1}$
$a+b+c=12$이므로 $a=b=c=4$
따라서 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로 구하는 넓이는
$\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=4\sqrt{3}$ 정답_ ⑤

172

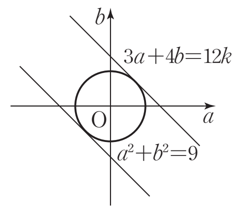
원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원의 방정식은
$x^2+y^2=9$
이때, 점 $P(a, b)$가 이 원 위를 움직이므로
$a^2+b^2=9$
$\frac{a}{4}+\frac{b}{3}=k$에서 $3a+4b=12k$
a, b가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의해
$(a^2+b^2)(3^2+4^2)\ge(3a+4b)^2$
$9\times25\ge(3a+4b)^2$, $225\ge(12k)^2$
$-15\le12k\le15$ $\therefore -\frac{5}{4}\le k\le\frac{5}{4}$
따라서 k의 최댓값은 $\frac{5}{4}$이다. 정답_ ②

다른 풀이

원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원의 방정식은
$x^2+y^2=9$

a, b를 좌표축으로 하는 좌표평면을 생각하면

직선 $\frac{a}{4}+\frac{b}{3}=k$, 즉 $3a+4b=12k$가 오른쪽 그림과 같이 원에 접할 때, k의 값이 최대 또는 최소가 된다. 이때, 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $3a+4b=12k$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 3과 같으므로



$\frac{|-12k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$, $|12k|=15$

$12k=\pm15$ $\quad\therefore k=\pm\frac{15}{12}=\pm\frac{5}{4}$

따라서 k의 최댓값은 $\frac{5}{4}$이다.

173

$x^2-12x+32\geq0$에서 $(x-4)(x-8)\geq0$

$\therefore x\leq4$ 또는 $x\geq8$

$x^2-12x+27\leq0$에서 $(x-3)(x-9)\leq0$

$\therefore 3\leq x\leq9$

두 조건

p : $x\leq4$ 또는 $x\geq8$, q : $3\leq x\leq9$

의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 9,\ 10\}$

$Q=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ ·································· ❶

이때, 조건 $\sim(\sim p$ 또는 $q)$는 'p이고 $\sim q$' 이므로

조건 $\sim(\sim p$ 또는 $q)$의 진리집합은

$P\cap Q^C=P-Q=\{1,\ 2,\ 10\}$ ·································· ❷

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$1+2+10=13$ ·································· ❸

정답_ 13

단계	채점 기준	비율
❶	두 조건 p, q의 진리집합 구하기	40%
❷	조건 $\sim(\sim p$ 또는 $q)$의 진리집합 구하기	40%
❸	조건 $\sim(\sim p$ 또는 $q)$의 진리집합의 모든 원소의 합 구하기	20%

174

$|x-8|<5$에서 $-5<x-8<5$

$\therefore 3<x<13$ ·································· ❶

두 조건

p : $k+1<x<2k+3$, q : $3<x<13$

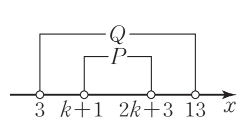
의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, 명제 $p \longrightarrow q$가 참이려면

$P\subset Q$이어야 한다. ·································· ❷

오른쪽 그림에서

$3\leq k+1$, $2k+3\leq13$

$\therefore 2\leq k\leq5$ ·································· ❸



따라서 자연수 k는 2, 3, 4, 5이므로 이 값들의 합은

$2+3+4+5=14$ ·································· ❹

정답_ 14

단계	채점 기준	비율
❶	조건 q가 참이 되는 x의 값의 범위 구하기	10%
❷	명제 $p \rightarrow q$가 참이 되는 진리집합 P, Q 사이의 포함 관계 구하기	40%
❸	진리집합 P, Q 사이의 포함 관계를 만족시키는 k의 값의 범위 구하기	40%
❹	자연수 k의 값의 합 구하기	10%

175

명제 '두 실수 x, y에 대하여 $x+y\neq2$이면 $x\neq3$ 또는 $y\neq3$이다.' 의 대우는 '두 실수 x, y에 대하여 $x=3$이고 $y=3$이면 $x+y=2$이다.' 이다. ·································· ❶

$x=3$이고 $y=3$이면 $x+y=3+3=6\neq2$이다.

따라서 대우가 거짓이므로 주어진 명제도 거짓이다. ··················· ❷

정답_ 풀이 참조

단계	채점 기준	비율
❶	명제의 대우 구하기	50%
❷	명제의 참, 거짓을 판별하기	50%

176

$|x|\leq a$에서 $-a\leq x\leq a$

$|x|\leq b$에서 $-b\leq x\leq b$ ·································· ❶

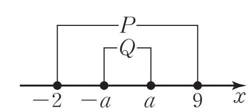
세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라고 하면

p가 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset P$

오른쪽 그림에서

$-2\leq-a$, $a\leq9$

$a\leq2$, $a\leq9$



$\therefore 0<a\leq2$ ($\because$ a는 양수)

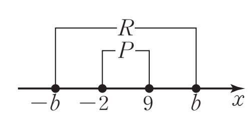
따라서 a의 최댓값은 2이다. ·································· ❷

p가 r이기 위한 충분조건이므로 $P\subset R$

오른쪽 그림에서

$-b\leq-2$, $9\leq b$

$b\geq2$, $b\geq9$



$\therefore b\geq9$

따라서 b의 최솟값은 9이다. ·································· ❸

그러므로 a의 최댓값과 b의 최솟값의 합은

$2+9=11$ ·································· ❹

정답_ 11

단계	채점 기준	비율
❶	조건 q, r를 절댓값이 없는 부등식으로 나타내기	10%
❷	a의 최댓값 구하기	40%
❸	b의 최솟값 구하기	40%
❹	a의 최댓값과 b의 최솟값의 합 구하기	10%

177

$x^2+\dfrac{25}{x^2-16}=(x^2-16)+\dfrac{25}{x^2-16}+16$ ❶

$x>4$에서 $x^2-16>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$(x^2-16)+\dfrac{25}{x^2-16}+16\geq 2\sqrt{(x^2-16)\cdot\dfrac{25}{x^2-16}}+16$

$=2\cdot5+16=26$ (단, 등호는 $x=\sqrt{21}$일 때 성립) ❷

따라서 주어진 식의 최솟값은 26이다. ❸

정답_ 26

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 식 변형하기	40%
❷	산술평균과 기하평균의 관계 이용하기	40%
❸	주어진 식의 최솟값 구하기	20%

178

원에 외접하는 정사각형의 한 변의 길이는 원의 지름의 길이인 2와 같으므로 정사각형의 둘레의 길이는

$S=4\cdot2=8$ ❶

원에 내접하는 직사각형의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라 고 하면 직사각형의 대각선의 길이는 원의 지름의 길이인 2이므로 피타고라스 정리에 의해 $x^2+y^2=2^2$

또, 직사각형의 둘레의 길이는 $T=2x+2y$ ❷

x, y는 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(2^2+2^2)(x^2+y^2)\geq(2x+2y)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{2}\text{일 때 성립}\right)$

$x^2+y^2=2^2$이므로 $32\geq(2x+2y)^2$, $4\sqrt{2}\geq 2x+2y>0$

$\dfrac{1}{2x+2y}\geq\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$ $\quad\therefore \dfrac{S}{T}=\dfrac{8}{2x+2y}\geq\dfrac{8}{4\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

따라서 $\dfrac{S}{T}$의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다. ❸

정답_ $\sqrt{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	정사각형의 둘레의 길이 S 구하기	10%
❷	직사각형의 둘레의 길이 T 구하기	30%
❸	$\dfrac{S}{T}$의 최솟값 구하기	60%

179

두 조건

p : $k-1\leq x\leq k+3$, q : $0\leq x\leq 2$

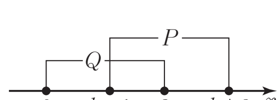
의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, 명제 $p \longrightarrow q$가 참이려면 집합 P에 속하는 원소 중에서 집합 Q에 속하는 원소가 존재하면 된다.

즉, $P\cap Q\neq\varnothing$이어야 한다.

(i) $k-1\geq0$, 즉 $k\geq1$인 경우

$k-1\leq2$이어야 하므로 $k\leq3$

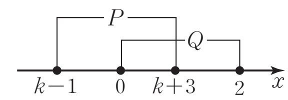
$\therefore 1\leq k\leq3$



(ii) $k-1<0$, 즉 $k<1$인 경우

$k+3\geq0$이어야 하므로

$k\geq-3$ $\quad\therefore -3\leq k<1$



(i), (ii)에서 $-3\leq k\leq3$

따라서 정수 k는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3으로 7개이다.

정답_ ④

180

(i) 우석이가 1등이라고 가정해 보자.

A : 우석이가 1등이라면 ㄱ에 의해 종현이는 2등이 아니다.

C : 우석이는 3등이 아니므로 ㄱ에 의해 상섭이는 4등이다.

B : 상섭이는 2등이 아니므로 ㄱ에 의해 기훈이는 4등이다.

이 경우 4등이 두 명이므로 ㄴ에 모순이다.

따라서 우석이는 1등이 아니다.

(ii) A : 우석이는 1등이 아니므로 ㄱ에 의해 종현이는 2등이다.

B : ㄴ에 의해 상섭이는 2등이 아니므로 ㄱ에 의해 기훈이는 4등이다.

C : ㄴ에 의해 상섭이는 4등이 아니므로 ㄱ에 의해 우석이는 3등이다.

종현이가 2등, 우석이가 3등, 기훈이가 4등이므로 1등은 상섭이다.

이상으로부터 1등을 한 학생과 4등을 한 학생을 차례대로 나열하면 상섭, 기훈이이다.

정답_ ①

181

ㄱ은 옳지 않다.

L_1이 켜지려면 S_1, S_3만 닫히면 되므로

> (가) S_1, S_2, S_3이 닫히면 L_1이 켜진다. (참)
> (나) L_1이 켜지면 S_1, S_2, S_3이 닫힌다. (거짓)

참인 명제 (가)에 의해 S_1, S_2, S_3이 모두 닫히는 것은 L_1이 켜지기 위한 충분조건이다.

ㄴ은 옳다.

L_3이 켜지려면 S_1, S_3 또는 S_2, S_3이 닫히면 되므로

> (다) S_2, S_3이 닫히면 L_3이 켜진다. (참)
> (라) L_3이 켜지면 S_2, S_3이 닫힌다. (거짓)

참인 명제 (다)에 의해 S_2, S_3이 닫히는 것은 L_3이 켜지기 위한 충분조건이다.

ㄷ은 옳지 않다.

L_2와 L_3이 모두 켜지려면 S_2와 S_3이 모두 닫히면 되므로

> (마) S_2 또는 S_3이 닫히면 L_2와 L_3이 모두 켜진다. (거짓)
> (바) L_2와 L_3이 모두 켜지면 S_2 또는 S_3이 닫힌다. (참)

참인 명제 (바)에 의해 S_2 또는 S_3이 닫히는 것은 L_2와 L_3이 모두 켜지기 위한 필요조건이다.
따라서 옳은 것은 ㄴ이다. 정답_ ②

182

두 실수 a, b에 대하여 $|a|\ge 0$, $|b|\ge 0$이므로
p : $|a|+|b|=0$에서 $a=0$이고 $b=0$
q : $a^2-2ab+b^2=0$에서 $(a-b)^2=0$ $\quad\therefore a=b$
r : $|a+b|=|a-b|$에서 $a+b=\pm(a-b)$
$\therefore a=0$ 또는 $b=0$
세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라고 하면 $P\subset Q$, $P\subset R$가 성립하고 두 집합 Q, R는 $Q\cap R\neq\varnothing$이지만 포함 관계는 성립하지 않는다.
ㄱ은 옳다.
$P\subset Q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
ㄴ도 옳다
$P\subset R$이므로 $R^C\subset P^C$이다. 즉, $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.
ㄷ도 옳다.
(q이고 r)를 만족시키는 것은 $a=0$이고 $b=0$이다.
즉, (q이고 r)는 p이기 위한 필요충분조건이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 정답_ ⑤

183

(i) $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \boxed{^{(가)}=} 0$일 때,
$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$이므로 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \boxed{^{(나)}>} 0$일 때,
x에 대한 이차부등식이 항상 성립하므로
$$\frac{D}{4}=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$
$$-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$
$$\boxed{^{(다)}\le} 0$$
정답_ ③

184

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해
$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab} \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$a+b=50$이므로 $\frac{50}{2}\ge\sqrt{ab}$ $\quad\therefore 25\ge\sqrt{ab}$
주어진 식을 제곱하면
$(\sqrt{a}+\sqrt{b}\,)^2=a+b+2\sqrt{ab}=50+2\sqrt{ab}$
$\le 50+2\cdot 25=100$
$\therefore 0<\sqrt{a}+\sqrt{b}\le 10$
따라서 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$의 최댓값 M은 10이다.
㉠에서 등호는 $a=b$일 때 성립하므로
$a+b=50$에서 $a=25$, $b=25$
$\therefore M+m-n=10+25-25=10$ 정답_ 10

185

(A의 부피)$=3xy-1=47$이므로
$3xy=48$ $\quad\therefore xy=16$
$\therefore$ (A의 겉넓이)$=2(xy+3x+3y)$
$=2xy+6(x+y)$
$=2\cdot 16+6(x+y)$
$=32+6(x+y)$
이때, $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해
$32+6(x+y)\ge 32+12\sqrt{xy}$
$=32+12\sqrt{16}=80$
(단, 등호는 $x=y=4$일 때 성립)
따라서 A의 겉넓이의 최솟값은 80이다. 정답_ 80

186

$x+y+z=5$, $x^2+y^2+z^2=11$에서
$y+z=5-x$, $y^2+z^2=11-x^2$ $\cdots\cdots$ ㉠
이때, y, z는 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의해
$(1^2+1^2)(y^2+z^2)\ge(y+z)^2$ (단, 등호는 $y=z$일 때 성립)
$\cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$2(11-x^2)\ge(5-x)^2$, $\quad 3x^2-10x+3\le 0$
$(3x-1)(x-3)\le 0$ $\quad\therefore \frac{1}{3}\le x\le 3$
따라서 x의 최댓값은 3, 최솟값은 $\frac{1}{3}$이므로 그 합은
$3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$ 정답_ ③

187

세 개의 정삼각형의 한 변의 길이를 각각 x, y, z라고 하면 둘레의 길이의 합이 21이므로
$3x+3y+3z=21$ $\quad\therefore x+y+z=7$ $\cdots\cdots$ ㉠
넓이의 합이 $\frac{19\sqrt{3}}{4}$이므로
$$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{\sqrt{3}}{4}y^2+\frac{\sqrt{3}}{4}z^2=\frac{19\sqrt{3}}{4} \qquad \cdots\cdots ㉡$$
$\therefore x^2+y^2+z^2=19$
㉠, ㉡에서 $y+z=7-x$, $y^2+z^2=19-x^2$ $\cdots\cdots$ ㉢
이때, y, z는 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의해
$(1^2+1^2)(y^2+z^2)\ge(y+z)^2$ (단, 등호는 $y=z$일 때 성립)
$\cdots\cdots$ ㉣
㉢을 ㉣에 대입하면
$2(19-x^2)\ge(7-x)^2$, $\quad 3x^2-14x+11\le 0$
$(x-1)(3x-11)\le 0$ $\quad\therefore 1\le x\le\frac{11}{3}$
따라서 가장 큰 정삼각형의 한 변의 길이의 최댓값은 $\frac{11}{3}$이다.
정답_ $\frac{11}{3}$

V 함수와 그래프

03 함수

188

(1) ㄱ. X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

ㄴ. X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 5, 6으로 2개이므로 함수가 아니다.

ㄷ. X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩만 대응하므로 함수이다.

따라서 함수인 것은 ㄷ이다.

(2) 함수 ㄷ에 대하여

정의역 : $\{1,\ 2,\ 3\}$

공역 : $\{4,\ 5,\ 6\}$

치역 : $\{5,\ 6\}$

정답_(1) ㄷ (2) 정의역 : $\{1,\ 2,\ 3\}$, 공역 : $\{4,\ 5,\ 6\}$, 치역 : $\{5,\ 6\}$

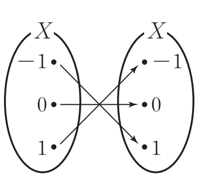
189

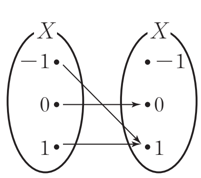
함수의 치역은 항상 공역의 부분집합이므로 $Z \subset Y$이다.

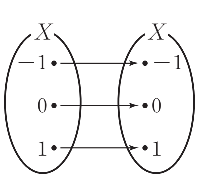
정답_④

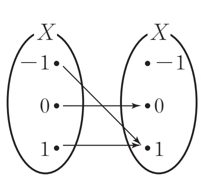
190

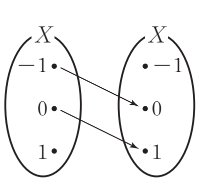
각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

①


②


③


④


⑤


따라서 함수가 아닌 것은 ⑤이다. 정답_⑤

191

$f(-1)=-(-1)=1$

$f(2)=2\cdot 2-1=3$

$\therefore f(-1)+f(2)=1+3=4$ 정답_④

192

(i) x가 유리수일 때, $1-x$도 유리수이므로

$f(x)+f(1-x)=1-x+1-(1-x)=1$

(ii) x가 무리수일 때, $1-x$도 무리수이므로

$f(x)+f(1-x)=x+1-x=1$

(i), (ii)에 의해 $f(x)+f(1-x)=1$ 정답_③

193

(i) $x=n$ (n은 정수)일 때, $[x]=n$

또, $-x=-n$이므로 $[-x]=-n$

$\therefore f(x)=[x]+[-x]=n+(-n)=0$

(ii) $n<x<n+1$ (n은 정수)일 때, $[x]=n$

또, $-n-1<-x<-n$이므로 $[-x]=-n-1$

$\therefore f(x)=[x]+[-x]=n+(-n-1)=-1$

(i), (ii)에 의해 함수 $f(x)$의 치역은 $\{-1,\ 0\}$이다. 정답_④

194

$a<0$이므로 함수 $y=ax+b$는 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소한다.

즉, $f(-2)=4$, $f(2)=0$이므로 $-2a+b=4$, $2a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$

$\therefore 2a+b=2\cdot(-1)+2=0$ 정답_③

195

$f(x)=g(x)$에서 $2x^2+3x=x^3$

$x^3-2x^2-3x=0$, $x(x-3)(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

따라서 세 실수를 원소로 하는 집합 X는 $\{-1,\ 0,\ 3\}$이므로 모든 원소의 합은

$-1+0+3=2$ 정답_③

196

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 서로 같으므로

$f(-1)=g(-1)$, $f(1)=g(1)$

$\therefore -a+b=-1$, $a+b=-3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-2$

$\therefore ab=(-1)\cdot(-2)=2$ 정답_⑤

197

두 함수 f와 g가 서로 같으므로

$f(0)=g(0)$, $f(1)=g(1)$, $f(2)=g(2)$이어야 한다.

이때, $f(0)=3$, $f(1)=1$, $f(2)=3$이고

$g(0)=a+b$, $g(1)=b$, $g(2)=a+b$이므로

$a+b=3$, $b=1$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore a+b=2+1=3$ 정답_④

198

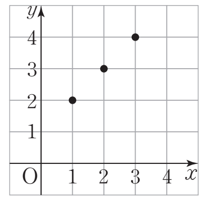
$X=\{1,\ 2,\ 3\}$이므로 $f(x)=x+1$에 대하여

$f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=4$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는

$\{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4)\}$

이것을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

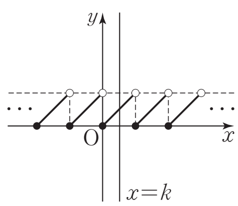


정답_ 풀이 참조

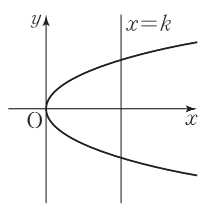
199

함수의 그래프가 되려면 임의의 k에 대하여 직선 $x=k$와 오직 한 점에서 만나야 한다.

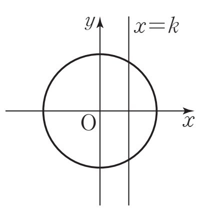
ㄱ.



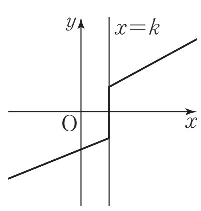
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.

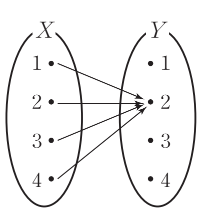


따라서 함수의 그래프인 것은 ㄱ이다. 정답_ ①

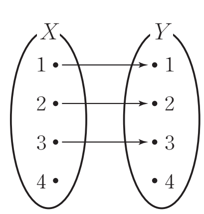
200

주어진 함수의 그래프를 이용하여 각 함수의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

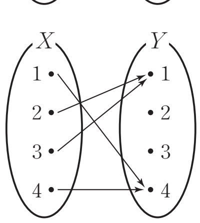
ㄱ.



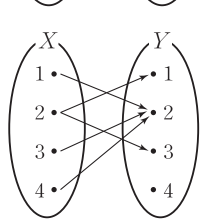
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.

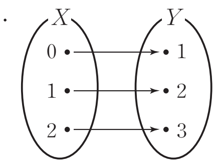


따라서 함수의 그래프가 아닌 것은 ㄴ, ㄹ이다. 정답_ ②

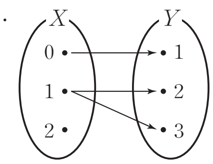
201

주어진 함수의 그래프를 이용하여 각 함수의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

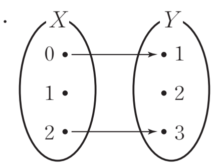
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



따라서 함수의 그래프가 될 수 있는 것은 ㄱ이다. 정답_ ①

202

ㄱ은 옳다.

주어진 등식의 양변에 $x=1,\ y=1$을 대입하면

$f(1)=f(1)+f(1) \qquad \therefore f(1)=0$

ㄴ은 옳지 않다.

주어진 등식의 양변에 $x=3,\ y=3$을 대입하면

$f(9)=f(3)+f(3)=2f(3)$

ㄷ은 옳다.

$f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$이므로 $0=f(1)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$

$\therefore f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

ㄹ은 옳지 않다.

$f(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x})=f(\sqrt{x})+f(\sqrt{x})$이므로 $f(x)=2f(\sqrt{x})$

$\therefore f(\sqrt{x})=\frac{1}{2}f(x)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_ ①

203

①은 옳다.

주어진 등식의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)f(0)$

$f(x)>0$이므로 $f(0)=1$

②는 옳지 않다.

주어진 등식의 양변에 $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}$을 대입하면

$f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f(1)=4$이므로 $\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2=4$

$f(x)>0$이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$

③은 옳다.

$f(2)=f(1+1)=f(1)f(1)=4\cdot4=16$

$f(3)=f(1+2)=f(1)f(2)=4\cdot16=64$

④는 옳다.

$f(x)=f((x-y)+y)=f(x-y)f(y)$

$\therefore f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$

⑤는 옳다.

$f(2x)=f(x+x)=f(x)f(x)=\{f(x)\}^2$ 정답_②

204

(가)에 의해

$f(2)=2,\ f(3)=3$

(나)에 의해

$f(6)=f(2\cdot3)=f(2)+f(3)=2+3=5$

$\therefore f(36)=f(6\cdot6)=f(6)+f(6)$

$=2f(6)=2\cdot5=10$ 정답_③

205

주어진 등식의 좌변에 $x=a$를 대입하면

$f(a)+3f\left(\dfrac{1}{a}\right)=4$ …… ㉠

또, 주어진 등식의 좌변에 $x=\dfrac{1}{a}$을 대입하면

$f\left(\dfrac{1}{a}\right)+3f(a)=4$ …… ㉡

㉡×3−㉠을 하면 $8f(a)=8$

$\therefore f(a)=1 \qquad \therefore f(x)=1$

$\therefore f(4)=1$ 정답_③

206

함수 f가 일대일함수일 조건은

$x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이다.

그런데 위의 명제의 대우인

$f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다.

도 참이므로 함수 f가 일대일함수일 필요충분조건은 ㄴ, ㄹ이다.

정답_ㄴ, ㄹ

207

① $f(1)=f(3)=1$이므로 $f(x)=|x-2|$는 일대일함수가 아니다.

② $f(0)=f(2)=4$이므로 $f(x)=(x-2)^2+3$은 일대일함수가 아니다.

③ $f(1)=f(2)=7$이므로 $f(x)=7$은 일대일함수가 아니다.

④ $f(0)=f(0.1)=0$이므로 $f(x)=[x]$는 일대일함수가 아니다.

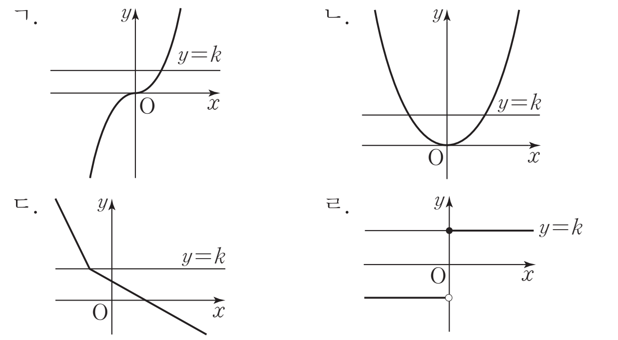
⑤ 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1\neq x_2$이면

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)\neq0$

따라서 $f(x)=x^3$은 일대일함수이다. 정답_⑤

208

일대일함수가 되려면 치역의 임의의 원소 k에 대하여 함수의 그래프가 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만나야 한다.



따라서 일대일함수는 ㄱ, ㄷ이다. 정답_②

209

함수 $f(x)$가 집합 X에서 집합 Y로의 일대일함수이고 $f(2)=4$이므로 집합 Y의 4가 아닌 서로 다른 두 원소 $a,\ b$에 대하여

$f(1)=a,\ f(3)=b$

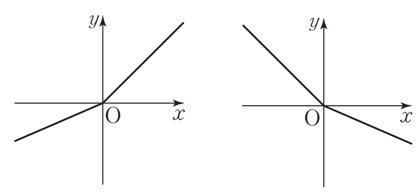
라고 할 수 있다.

이때, $f(1)+f(3)$의 값이 최대이려면 $a=2,\ b=3$ 또는 $a=3,\ b=2$이어야 한다.

따라서 $f(1)+f(3)$의 최댓값은 5이다. 정답_③

210

함수 f가 일대일대응이 되려면 다음 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 계속 증가하거나 계속 감소해야 한다.



따라서 두 직선 $y=-ax,\ y=(a-5)x$의 기울기가 모두 양수이거나 모두 음수이어야 한다.

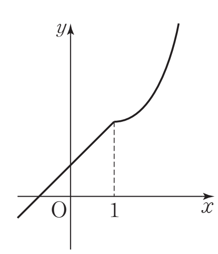
즉, 두 직선의 기울기의 부호가 같아야 하므로

$-a(a-5)>0,\ a(a-5)<0 \qquad \therefore 0<a<5$

따라서 정수 a는 1, 2, 3, 4로 4개이다. 정답_④

211

함수 f가 일대일대응이 되려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 두 함수 $y=x^2+a,\ y=bx+5$의 그래프가 $x=1$에서 만나야 하므로

$1+a=b+5$

$\therefore b=a-4$ …… ㉠

(ii) 직선 $y=bx+5$의 기울기가 양수이어야 하므로

$b>0$ …… ㉡

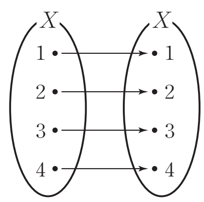
㉠, ㉡에서

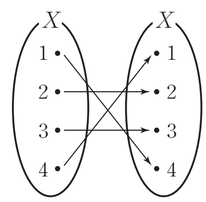
$a-4>0 \qquad \therefore a>4$

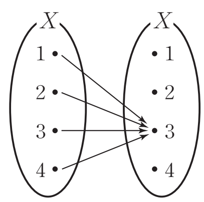
따라서 자연수 a의 최솟값은 5이다. 정답_⑤

212

주어진 함수의 그래프를 이용하여 각 함수의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

ㄱ.


ㄴ.


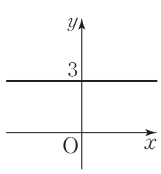
ㄷ.


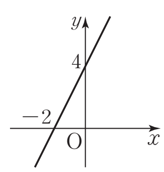
(1) 항등함수인 것은 ㄱ이다.

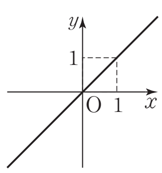
(2) 상수함수인 것은 ㄷ이다. 정답_(1) ㄱ (2) ㄷ

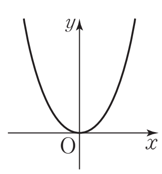
213

주어진 함수의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


ㄹ.


(1) 항등함수인 것은 ㄷ이다.

(2) 상수함수인 것은 ㄱ이다. 정답_(1) ㄷ (2) ㄱ

214

$f(x)$가 항등함수이므로

$f(x)=x$

$\therefore f(5)=5$

$g(x)$가 상수함수이고, $g(3)=3$이므로

$g(x)=3$

$\therefore g(5)=3$

$\therefore f(5)+g(5)=5+3=8$ 정답_③

215

$f(x)$가 항등함수이므로 $f(x)=x$

$x^2-6=x$, $x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$ $\qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=3$

따라서 집합 X는 $\{-2\}$, $\{3\}$, $\{-2, 3\}$으로 3개이다.

정답_③

216

1의 함숫값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4로 4개

2의 함숫값이 될 수 있는 것은 1의 함숫값을 제외한 3개

3의 함숫값이 될 수 있는 것은 1, 2의 함숫값을 제외한 2개

4의 함숫값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 함숫값을 제외한 1개

이므로 일대일대응의 개수는 $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

또, 항등함수는 1개이고 상수함수는 4개이므로

$a=24$, $b=1$, $c=4$

$\therefore a+b+c=24+1+4=29$ 정답_④

217

$\{f(-1)+1\}\{f(1)-1\}\neq0$에서 $f(-1)\neq-1$, $f(1)\neq1$이므로 X의 원소 -1, 0, 1에 대응할 수 있는 X의 원소는 각각 2개, 3개, 2개이다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는 $2\cdot3\cdot2=12$ 정답_②

218

(가)에 의해 함수 f는 일대일함수이다.

(나)에 의해 함숫값은 $-2\le f(x)\le2$이다.

-1의 함숫값이 될 수 있는 것은 -2, -1, 0, 1, 2로 5개

0의 함숫값이 될 수 있는 것은 -1의 함숫값을 제외한 4개

1의 함숫값이 될 수 있는 것은 -1, 0의 함숫값을 제외한 3개

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$5\cdot4\cdot3=60$ 정답_③

219

$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(2)=5$ 정답_⑤

220

$$\begin{aligned}(g\circ f)(1)+(f\circ g)(1)&=g(f(1))+f(g(1))\\&=g(3)+f(-1)\\&=1+2=3\end{aligned}$$

정답_③

221

주어진 조건에 의하여

$f(x)=3x-2$, $(h\circ g)(x)=x^2-x+1$

$$\begin{aligned}\therefore (h\circ(g\circ f))(2)&=((h\circ g)\circ f)(2)\\&=(h\circ g)(f(2))\\&=(h\circ g)(4)\\&=16-4+1=13\end{aligned}$$

정답_④

222

$f_1(1)=f(1)=1+1=2$

$f_2(1)=(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=2+1=3$

$f_3(1)=(f\circ f\circ f)(1)=f(f(2))=f(3)=3+1=4$

$\vdots$

함수 $f(x)$를 합성할 때마다 함숫값이 1씩 증가한다.

즉, $f_n(1)=n+1$이므로

$f_{2000}(1)=2000+1=2001$ 정답_⑤

223

$f^1(2)=f(2)=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$

$f^2(2)=(f\circ f^1)(2)=f(f^1(2))=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}}=-1$

$f^3(2)=(f\circ f^2)(2)=f(f^2(2))=f(-1)=\frac{-1-1}{-1}=2$

$f^4(2)=(f\circ f^3)(2)=f(f^3(2))=f(2)=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$

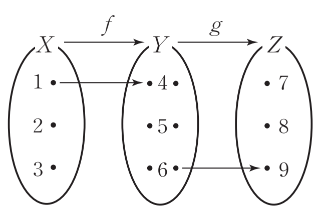
⋮

즉, $f^n(2)$의 값은 $\frac{1}{2}$, -1, 2가 이 순서대로 반복됨을 관찰할 수 있다.

$\therefore f^{2010}(2)=f^{3\cdot670}(2)=f^3(2)=2$ 정답_④

224

두 함수 f, g가 일대일대응이고, $f(1)=4$, $g(6)=9$이므로 두 함수 f, g의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



$(g\circ f)(2)=7$이므로 위의 그림에서 X의 원소 2에 대응하는 Z의 원소는 7이다.

$f(2)=4$라고 하면 일대일대응이라는 조건에 모순이고, $f(2)=6$이라고 하면 $(g\circ f)(2)=7$이라는 조건에 모순이므로 $f(2)=5$이다.

또, 함수 f는 일대일대응이므로 $f(3)=6$이다.

$\therefore 2f(2)-f(3)=2\cdot5-6=4$ 정답_④

225

함수 $f(x)$를 '$2x$를 5로 나눈 나머지'로 정의하므로

$f(0)=0$, $f(1)=2$, $f(2)=4$, $f(3)=1$, $f(4)=3$이다.

함수 $g: X \longrightarrow X$는 집합 X의 모든 원소 x에 대하여

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$를 만족시키므로

$(f\circ g)(1)=(g\circ f)(1)$에서 $f(3)=g(2)=1$

$(f\circ g)(2)=(g\circ f)(2)$에서 $f(1)=g(4)=2$

$(f\circ g)(4)=(g\circ f)(4)$에서 $f(2)=g(3)=4$

$(f\circ g)(0)=(g\circ f)(0)$에서 $f(g(0))=g(0)$

$f(0)=0$이므로 $g(0)=0$이어야 한다.

$\therefore g(0)+g(3)=0+4=4$ 정답_④

226

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=f(-x+k)$

$=2(-x+k)+k=-2x+3k$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=g(2x+k)$

$=-(2x+k)+k=-2x$

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$이므로

$-2x+3k=-2x$ $\quad\therefore k=0$ 정답_①

227

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=f(bx+a)$

$=a(bx+a)+b=abx+a^2+b$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=g(ax+b)$

$=b(ax+b)+a=abx+b^2+a$

$f\circ g=g\circ f$에서 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$이므로

$abx+a^2+b=abx+b^2+a$

$a^2-b^2-(a-b)=0$

$(a-b)(a+b)-(a-b)=0$

$(a-b)(a+b-1)=0$

$\therefore a+b=1$ ($\because a\neq b$) 정답_③

228

$(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=g(x^2-2x)$

$=2(x^2-2x)-1=2x^2-4x-1$

$g(2)=2\cdot2-1=3$

$(g\circ f)(x)=g(2)$이므로 $2x^2-4x-1=3$

$\therefore x^2-2x-2=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 모든 x의 값의 두 근의 합은 2이다. 정답_⑤

229

$\frac{x+1}{x}=2$에서 $x+1=2x$ $\quad\therefore x=1$

$x=1$을 주어진 식의 양변에 대입하면

$f(2)=1+1=2$ 정답_④

230

$(f\circ g)(x)=h(x)$에서 $f(g(x))=h(x)$이므로

$f(3x-2)=x+1$ ……㉠

$3x-2=4$에서 $3x=6$ $\quad\therefore x=2$

$x=2$를 ㉠의 양변에 대입하면

$f(4)=2+1=3$ 정답_③

231
$(f\circ g)(x)=h(x)$에서 $f(g(x))=h(x)$이므로

$2g(x)-3=4x^2+1,\ 2g(x)=4x^2+4$

$\therefore g(x)=2x^2+2$ 정답_④

232
$(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$

$=(h\circ g)(f(x))$

$=2f(x)-3$

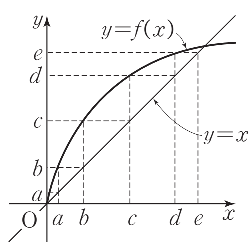
$(h\circ(g\circ f))(x)=-x+5$이므로

$2f(x)-3=-x+5$

$2f(x)=-x+8 \quad \therefore f(x)=-\frac{1}{2}x+4$

$\therefore f(2)=-\frac{1}{2}\cdot 2+4=3$ 정답_③

233
직선 $y=x$ 위의 점의 x좌표와 y좌표는 같으므로 주어진 그림의 x좌표를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore (f\circ f\circ f\circ f)(a)$

$=f(f(f(f(a))))$

$=f(f(f(b)))$

$=f(f(c))$

$=f(d)=e$ 정답_⑤

234
주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 y의 값이 3이 되는 x의 값이 2, 4, 6이므로

$f(f(x))=3$에서 $f(x)=2,\ 4,\ 6$

(i) $f(x)=2$일 때, $x=1,\ 3,\ 7$

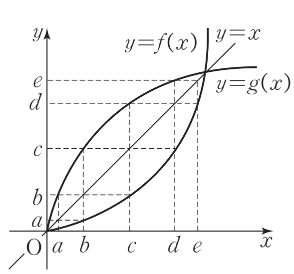
(ii) $f(x)=4$일 때, $x=5$

(iii) $f(x)=6$일 때, x의 값은 없다.

따라서 주어진 방정식의 실근은 1, 3, 5, 7이므로 모든 실근의 합은

$1+3+5+7=16$ 정답_⑤

235
직선 $y=x$ 위의 점의 x좌표와 y좌표는 같으므로 주어진 그림의 y좌표를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore (f\circ f)(c)+(g\circ f)(d)$

$=f(f(c))+g(f(d))$

$=f(b)+g(c)$

$=a+d$ 정답_③

236
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=2(ax+b)+c$

$=2ax+2b+c=4x+1$

$\therefore a=2,\ 2b+c=1$ ······ ㉠

$f^{-1}(-1)=1$에서 $f(1)=-1$이므로 $a+b=-1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=-3,\ c=7$

$\therefore abc=2\cdot(-3)\cdot 7=-42$ 정답_②

237
$g^{-1}(f^{-1}(x)-2)=0$에서 $f^{-1}(x)-2=g(0)$

$g(0)=1$이므로 $f^{-1}(x)-2=1,\ f^{-1}(x)=3$

$\therefore x=f(3)=\dfrac{g(3)}{g(3)+1}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+1}=\dfrac{1}{5}$ 정답_④

238
$f^{-1}(4)=1$이므로 $f(1)=4$에서 $2+a=4 \quad \therefore a=2$

$\therefore f(x)=2x+2$

또, $f^{-1}(8)=b$이므로 $f(b)=8$에서 $2b+2=8$

$\therefore b=3$ 정답_③

239
$f^{-1}(3)=k$로 놓으면 $f(k)=3$

(i) $k\geq 0$일 때, $f(k)=k+4=3 \quad \therefore k=-1$

이때, $k\geq 0$이므로 모순이다.

(ii) $k<0$일 때, $f(k)=-k^2+5=3,\ k^2=2$

$\therefore k=-\sqrt{2}\ (\because k<0)$

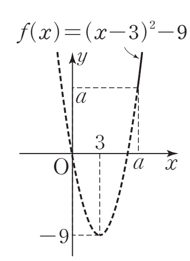
(i), (ii)에 의해 $f^{-1}(3)=-\sqrt{2}$ 정답_②

240
함수 f의 역함수 f^{-1}가 존재하려면 함수 f가 일대일대응이어야 한다.

따라서 일대일대응인 것은 ㄷ이다. 정답_ㄷ

241
$x\geq a$에서

함수 $f(x)=x^2-6x=(x-3)^2-9$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



역함수를 가지려면 함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 $a\geq 3,\ f(a)=a$이어야 한다.

$f(a)=a$에서

$a^2-6a=a,\ a^2-7a=0$

$a(a-7)=0 \quad \therefore a=7\ (\because a\geq 3)$ 정답_④

242

$f(x)=x+2-k|x-1|$에서

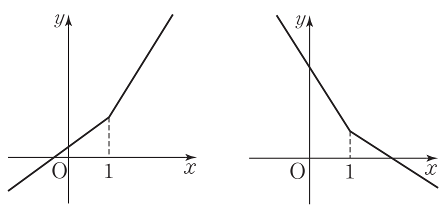
(i) $x\geq1$일 때,

$f(x)=x+2-k(x-1)=(1-k)x+2+k$

(ii) $x<1$일 때,

$f(x)=x+2+k(x-1)=(1+k)x+2-k$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 다음 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 계속 증가하거나 계속 감소해야 한다.



따라서 $x\geq1$일 때와 $x<1$일 때의 직선의 기울기가 모두 양수이거나 모두 음수이어야 한다.

즉, 두 직선의 기울기의 부호가 같아야 하므로

$(1-k)(1+k)>0$, $(k-1)(k+1)<0$

$\therefore -1<k<1$ 정답_ ③

243

(1) $y=2x-3$의 x와 y를 서로 바꾸면 $x=2y-3$

y를 x에 대한 식으로 나타내면

$2y=x+3 \quad \therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

(2) $y=-\frac{1}{2}x+1$의 x와 y를 서로 바꾸면 $x=-\frac{1}{2}y+1$

y를 x에 대한 식으로 나타내면

$\frac{1}{2}y=-x+1 \quad \therefore y=-2x+2$

정답_ (1) $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ (2) $y=-2x+2$

244

(1) $x\geq1$에서 $3x+1\geq4 \quad \therefore y\geq4$

$\therefore y=3x+1\ (x\geq1,\ y\geq4)$

x와 y를 서로 바꾸면 $x=3y+1\ (y\geq1,\ x\geq4)$

y를 x에 대한 식으로 나타내면

$3y=x-1 \quad \therefore y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

따라서 구하는 역함수는

$y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\ (x\geq4)$

(2) $x\geq0$에서 $x^2+1\geq1 \quad \therefore y\geq1$

$\therefore y=x^2+1\ (x\geq0,\ y\geq1)$

x와 y를 서로 바꾸면 $x=y^2+1\ (y\geq0,\ x\geq1)$

y를 x에 대한 식으로 나타내면

$y^2=x-1 \quad \therefore y=\sqrt{x-1}\ (\because y\geq0)$

따라서 구하는 역함수는

$y=\sqrt{x-1}\ (x\geq1)$

정답_ (1) $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\ (x\geq4)$ (2) $y=\sqrt{x-1}\ (x\geq1)$

245

$y=ax+2$의 x와 y를 서로 바꾸면 $x=ay+2$

y를 x에 대한 식으로 나타내면

$ay=x-2 \quad \therefore y=\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{2}{a}=2x+b$이므로

$\frac{1}{a}=2,\ -\frac{2}{a}=b$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2},\ b=-4$

$\therefore ab=\frac{1}{2}\cdot(-4)=-2$ 정답_ ①

246

③ $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$ 정답_ ③

247

$(f\circ g^{-1})^{-1}=g\circ f^{-1}$이므로 $(f\circ g^{-1})(x)$의 역함수는 $(g\circ f^{-1})(x)$이다.

$\therefore h(x)=(g\circ f^{-1})(x)=g(f^{-1}(x))$

$f(x)=3x-1$에서 $y=3x-1$로 놓고 x와 y를 서로 바꾸면

$x=3y-1 \quad \therefore y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

따라서 구하는 역함수 $h(x)$는

$h(x)=g(f^{-1}(x))=g\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)$

$=6\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)+3=2x+5$ 정답_ ④

248

$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$이므로

$(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(1)=(f\circ(f^{-1}\circ g^{-1})\circ f)(1)$

$=((f\circ f^{-1})\circ(g^{-1}\circ f))(1)$

$=(I\circ(g^{-1}\circ f))(1)=(g^{-1}\circ f)(1)$

$=g^{-1}(f(1))=g^{-1}(4)$

$g^{-1}(4)=k$로 놓으면 $g(k)=4$

$2k-4=4 \quad \therefore k=4$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(1)=4$ 정답_ ④

249

$f^{-1}(x)=x^2$에서 $f(x^2)=x$ …… ㉠

$(f\circ g^{-1})(x^2)=x$에서 $f(g^{-1}(x^2))=x$ …… ㉡

이때, 함수 f는 일대일대응이므로 ㉠, ㉡에서

$g^{-1}(x^2)=x^2 \qquad \therefore g(x^2)=x^2$

따라서 $(f\circ g)(20)=f(g(20))$에서 $g(20)=20$이므로

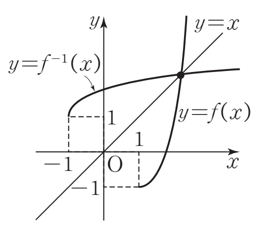
$(f\circ g)(20)=f(g(20))=f(20)=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ 정답_ ①

250

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $\boxed{y=x}$에 대하여 대칭이다. 정답_ $y=x$

251

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$가 증가하는 함수일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.



따라서 구하는 교점의 좌표는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다.

$f(x)=x$에서 $(x-1)^2-1=x,\ x^2-3x=0$

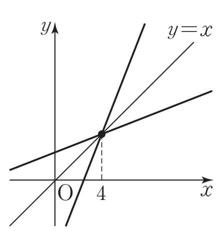
$x(x-3)=0 \qquad \therefore x=3\ (\because x\ge 1)$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(3,\ 3)$이므로

$a=3,\ b=3 \qquad \therefore a+b=3+3=6$ 정답_ ③

252

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$가 증가하는 함수일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.



따라서 구하는 교점의 좌표는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다.

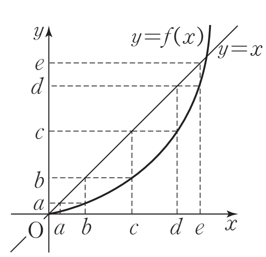
$f(x)=x$에서 $\frac{1}{2}x+a=x,\ \frac{1}{2}x=a \qquad \therefore x=2a$

그런데 교점의 x좌표가 4이므로

$2a=4 \qquad \therefore a=2$ 정답_ ⑤

253

직선 $y=x$ 위의 점의 x좌표와 y좌표는 같으므로 주어진 그림의 y좌표를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



(i) $f^{-1}(c)=k$로 놓으면 $f(k)=c$

$f(d)=c$이므로 $k=d$

$\therefore f^{-1}(c)=d$

(ii) $f^{-1}(d)=l$로 놓으면 $f(l)=d$

$f(e)=d$이므로 $l=e$

$\therefore f^{-1}(d)=e$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))$

$=f^{-1}(d)=e$ 정답_ ⑤

254

$(f^{-1}\circ g\circ f)(c)=f^{-1}(g(f(c)))$

$=f^{-1}(g(d))$

$=f^{-1}(0)$

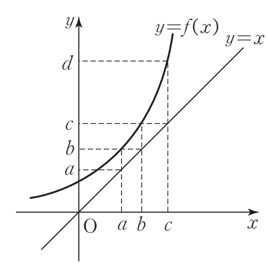
$f^{-1}(0)=k$로 놓으면 $f(k)=0$

$f(a)=0$이므로 $k=a$

$\therefore f^{-1}(0)=a$ 정답_ ①

255

직선 $y=x$ 위의 점의 x좌표와 y좌표는 같으므로 주어진 그림의 x좌표를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$(f\circ f\circ f)^{-1}(d)$

$=(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(d)$

$=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(d)))$

(i) $f^{-1}(d)=k$라고 하면 $f(k)=d$이므로 $k=c$

$\therefore f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(d)))=f^{-1}(f^{-1}(c))$

(ii) $f^{-1}(c)=l$이라고 하면 $f(l)=c$이므로 $l=b$

$\therefore f^{-1}(f^{-1}(c))=f^{-1}(b)$

(iii) $f^{-1}(b)=m$이라고 하면 $f(m)=b$이므로 $m=a$

$\therefore f^{-1}(b)=a$

$\therefore (f\circ f\circ f)^{-1}(d)=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(d)))$

$=f^{-1}(f^{-1}(c))=f^{-1}(b)=a$ 정답_ ②

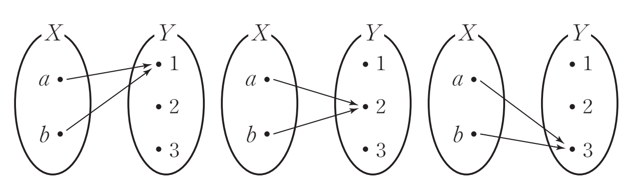
256

a의 함숫값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3으로 3개

b의 함숫값이 될 수 있는 것은 a의 함숫값을 제외한 2개

따라서 일대일함수의 개수는 $3\cdot 2=6$ ······ ❶

또, 상수함수는 다음 그림과 같이 3개이다.



······ ❷

따라서 $m=6,\ n=3$이므로 $m+n=6+3=9$ ······ ❸

정답_ 9

단계	채점 기준	비율
❶	m의 값 구하기	50%
❷	n의 값 구하기	40%
❸	$m+n$의 값 구하기	10%

257

$2x+1=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t-1}{2}$ ...... ㉠

.... ❶

㉠을 $f(2x+1)=4x-1$의 양변에 대입하면

$f(t)=4\cdot\dfrac{t-1}{2}-1=2t-3$ ...... ㉡

.... ❷

㉡의 양변에 $t=3x-1$을 대입하면

$f(3x-1)=2(3x-1)-3=6x-5$ .... ❸

정답_ $f(3x-1)=6x-5$

단계	채점 기준	비율
❶	$2x+1=t$로 치환하여 x를 t에 대한 식으로 나타내기	40%
❷	$f(t)$ 구하기	40%
❸	$f(3x-1)$ 구하기	20%

258

$(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$=f(|x-1|)$

$=||x-1|-1|$ .... ❶

$(f\circ f)(x)=1$이므로 $||x-1|-1|=1$

$|x-1|-1=\pm1$ $\quad\therefore |x-1|=0,\ 2$

(i) $|x-1|=0$일 때, $x=1$

(ii) $|x-1|=2$일 때, $x-1=\pm2$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$ .... ❷

(i), (ii)에 의해 주어진 방정식의 해는 $-1,\ 1,\ 3$이므로 모든 해의 합은 $-1+1+3=3$ .... ❸

정답_ 3

단계	채점 기준	비율
❶	함수 $f\circ f$ 구하기	30%
❷	방정식 $(f\circ f)(x)=1$의 모든 해 구하기	60%
❸	모든 해의 합 구하기	10%

259

다항식 $g(x)$의 차수를 n이라고 하면 $g(g(x))$의 차수는 n^2이다.

$g(g(x))=x$의 양변의 차수를 비교하면

$n^2=1$ $\quad\therefore n=1$

따라서 다항식 $g(x)$는 일차식이므로

$g(x)=ax+b$ (a, b는 상수) ...... ㉠

로 놓을 수 있다. .... ❶

$g(0)=1$, $g(g(x))=x$에서 $g(g(0))=g(1)=0$

$\therefore g(0)=1,\ g(1)=0$ ...... ㉡

.... ❷

㉠, ㉡에서 $g(0)=b=1$, $g(1)=a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

$\therefore g(x)=-x+1$ $\quad\therefore g(-1)=-(-1)+1=2$ .... ❸

정답_ 2

단계	채점 기준	비율
❶	다항식 $g(x)$가 일차식임을 알기	40%
❷	$g(1)$의 값 구하기	40%
❸	$g(-1)$의 값 구하기	20%

260

$2x+1=7$에서 $x=3$

$f^{-1}(x)=g(2x+1)$의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f^{-1}(3)=g(7)$ .... ❶

이때, $f^{-1}(3)=a$로 놓으면 $f(a)=3$

즉, $2a-1=3$에서 $2a=4$ $\quad\therefore a=2$ .... ❷

$\therefore g(7)=f^{-1}(3)=2$ .... ❸

정답_ 2

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 조건을 이용하여 $f^{-1}(3)$, $g(7)$ 사이의 관계식 구하기	30%
❷	$f^{-1}(3)$의 값 구하기	50%
❸	$g(7)$의 값 구하기	20%

261

$f^{-1}(g(40))=f^{-1}(40+25)=f^{-1}(65)$

$f^{-1}(65)=k$로 놓으면 $f(k)=65$

$5k+20=65$ $\quad\therefore k=9$

$\therefore f^{-1}(g(40))=9$ .... ❶

$g^{-1}(40)=l$로 놓으면 $g(l)=40$

(i) $l<25$일 때, $g(l)=2l=40$ $\quad\therefore l=20$

(ii) $l\geq25$일 때, $g(l)=l+25=40$ $\quad\therefore l=15$

이때, $l\geq25$이므로 모순이다.

(i), (ii)에 의해 $g^{-1}(40)=20$

$\therefore f(g^{-1}(40))=f(20)=5\cdot20+20=120$ .... ❷

$\therefore f^{-1}(g(40))+f(g^{-1}(40))=9+120=129$ .... ❸

정답_ 129

단계	채점 기준	비율
❶	$f^{-1}(g(40))$의 값 구하기	40%
❷	$f(g^{-1}(40))$의 값 구하기	50%
❸	$f^{-1}(g(40))+f(g^{-1}(40))$의 값 구하기	10%

262

ㄱ은 옳다.

$f(3)=f(f(7))=f(6)=5$

ㄴ은 옳지 않다.

$f(1)=f(f(5))=f(4)=f(f(8))=f(7)=6$

ㄷ도 옳지 않다.

ㄱ에서 $f(3)=f(6)$이므로 $f(x)$는 일대일대응이 아니다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 정답_ ①

263

ㄱ은 옳다.

$f(\sqrt{2})=[2]=2,\ g(\sqrt{2})=[\sqrt{2}]^2=1^2=1$

$\therefore f(\sqrt{2})>g(\sqrt{2})$

ㄴ도 옳다.

$x=n$ (n은 정수)이면

$f(x)=[n^2]=n^2,\ g(x)=[n]^2=n^2$

$\therefore f(x)=g(x)$

ㄷ은 옳지 않다.

(반례) $x=0.5$일 때,

$f(x)=[0.5^2]=[0.25]=0,$

$g(x)=[0.5]^2=0^2=0$

으로 $f(x)=g(x)$이지만 x는 정수가 아니다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 정답_②

264

$g(x)=\begin{cases} 1 & (x\ge 0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$ 이므로

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases} 1 & (f(x)\ge 0) \\ -1 & (f(x)<0) \end{cases}$

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$f(x)\ge 0 \iff x\le -1$ 또는 $x\ge 1$

$f(x)<0 \iff -1<x<1$

$\therefore (g\circ f)(x)=\begin{cases} 1 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ -1 & (-1<x<1) \end{cases}$

따라서 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프로 옳은 것은 ③이다. 정답_③

265

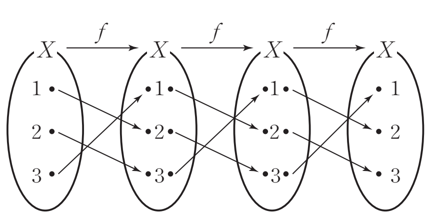
주어진 대응 관계를 이용하여 합성함수의 함숫값을 구하면

$f^3(1)=f(f(f(1)))$

$=f(f(2))=f(3)=1$

같은 방법으로 $f^3(2)=2,\ f^3(3)=3$이다.

$\therefore f^3(x)=x$



$f^{100}(x)=(f\circ f^{3\cdot 33})(x)=f(x)$

$f^{200}(x)=(f^2\circ f^{3\cdot 66})(x)=f^2(x)$

$\therefore f^{100}(1)=f(1)=2$

$f^{200}(3)=f^2(3)=f(f(3))=f(1)=2$

$\therefore f^{100}(1)-f^{200}(3)=2-2=0$ 정답_③

266

함수 $g(x)$는 자연수 x를 4로 나눈 나머지이므로 함수 $g(x)$의 치역은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$이다.

(ⅰ) $m=1$인 경우

$f(x)=x$이므로 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x)$

즉, 함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$이다.

(ⅱ) $m=2$인 경우

$f(x)=2x$이므로 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x)$

이때, $2x$는 2의 배수이고 2의 배수를 4로 나눈 나머지는 0 또는 2이므로 함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0,\ 2\}$이다.

(ⅲ) $m=3$인 경우

$f(x)=3x$이므로 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x)$

이때, $3x$는 3의 배수이고 3의 배수를 4로 나눈 나머지는 0 또는 1 또는 2 또는 3이므로 함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$이다.

(ⅳ) $m=4$인 경우

$f(x)=4x$이므로 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(4x)$

이때, $4x$는 4의 배수이고 4의 배수를 4로 나눈 나머지는 항상 0이므로 함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0\}$이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 자연수 m의 값이 4의 배수가 아닌 경우에는 치역의 원소의 개수가 2 이상임을 알 수 있다.

따라서 치역의 원소의 개수가 1이 되도록 하는 자연수 m의 값은 4의 배수이므로 최솟값은 4이다. 정답_4

267

$f(f(x+2))=4$에서 $f(x+2)=t$로 놓으면 $f(t)=4$ ······ ㉠

방정식 ㉠의 실근은 주어진 함수의 그래프로부터

$t=6,\ 11,\ 15,\ 17$

그런데 주어진 함수의 그래프에서 $f(x)\le 6$이므로

$f(x+2)=t\le 6 \quad \therefore f(x+2)=6$ ······ ㉡

방정식 ㉡의 실근은 주어진 함수의 그래프로부터

$x+2=8,\ 16 \quad \therefore x=6,\ 14$

따라서 구하는 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 그 합은 $6+14=20$이다. 정답_①

268

$2g(x)-\dfrac{4x+7}{2x-5}=h(x)$로 놓으면

$f(h(x))=(f\circ h)(x)=x$이므로 $h(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$\therefore h(x)=f^{-1}(x)=g(x)$

즉, $2g(x)-\dfrac{4x+7}{2x-5}=g(x)$에서 $g(x)=\dfrac{4x+7}{2x-5}$

이때, $y=\dfrac{4x+7}{2x-5}$의 x와 y를 서로 바꾸면 $x=\dfrac{4y+7}{2y-5}$

$2xy-5x=4y+7,\ (2x-4)y=5x+7$

$\therefore y=g^{-1}(x)=f(x)=\dfrac{5x+7}{2x-4}$

$\therefore f(3)=\dfrac{15+7}{6-4}=11$ 정답_②

269

ㄱ은 옳다.

$f(a)+f(b)=f(ab)$의 양변에 $a=1,\ b=1$을 대입하면

$f(1)+f(1)=f(1)\qquad \therefore f(1)=0$

$\therefore g(0)=1$

ㄴ도 옳다.

$f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$f(ab)=f(a)+f(b)$에서 $ab=g(f(a)+f(b))$ ⋯⋯ ㉠

이때, $f(a)=a',\ f(b)=b'$으로 놓으면

$a=g(a'),\ b=g(b')$

이것을 ㉠에 대입하면 $g(a')g(b')=g(a'+b')$

ㄷ은 옳지 않다.

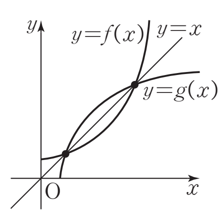
(반례) $p=0,\ q=0$일 때,

$g(0)+g(0)=1+1=2,\ g(0\cdot 0)=g(0)=1$

$\therefore g(0)+g(0)\neq g(0\cdot 0)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 정답_④

270



함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$가 증가하는 함수일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

따라서 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 방정식 $f(x)=x$의 실근과 같다.

$f(x)=x$에서 $\dfrac{x^2}{4}+a=x$

$\therefore x^2-4x+4a=0$

위의 이차방정식이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 두 실근을 $\alpha,\ \beta$라 하고 판별식을 D라고 하면

(i) $\dfrac{D}{4}=2^2-4a>0\qquad \therefore a<1$

(ii) $\alpha+\beta=4>0$

(iii) $\alpha\beta=4a\geq 0\qquad \therefore a\geq 0$

(i), (ii), (iii)에 의해 $0\leq a<1$ 정답_ $0\leq a<1$

04 유리식과 유리함수

271

분자를 상수로 만든 후 플러스와 마이너스 둘씩 묶어 통분하면

$$(\text{좌변})=\frac{2(x+3)-1}{x+3}+\frac{(x+5)-1}{x+5}-\frac{2(x+1)-1}{x+1}-\frac{(x+7)-1}{x+7}$$

$$=\left(2-\frac{1}{x+3}\right)+\left(1-\frac{1}{x+5}\right)-\left(2-\frac{1}{x+1}\right)-\left(1-\frac{1}{x+7}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+5}\right)$$

$$=\frac{2}{(x+1)(x+3)}+\frac{-2}{(x+7)(x+5)}$$

$$=\frac{16x+64}{(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)}$$

따라서 $f(x)=16x+64$이므로 $f\left(\dfrac{1}{8}\right)=2+64=66$ 정답_④

272

곱셈 공식 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$을 이용하여 둘씩 연쇄적으로 통분해 가면

$$(\text{주어진 식})=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}$$

$$=\frac{4}{1-x^4}+\frac{4}{1+x^4}=\frac{8}{1-x^8}$$ 정답_④

273

분자, 분모를 인수분해하여 약분한 후 $x=5$를 대입하면

$$(\text{주어진 식})=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x-3)}\times\frac{x(x+2)}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{(x+1)(x+2)}{x-3}=\frac{6\times 7}{2}=21$$ 정답_①

274

나눗셈을 곱셈으로 고친 후 분자, 분모를 인수분해하면

(주어진 식)

$$=\frac{6x^2-7x-20}{x^2-4}\times\frac{x^2-x-2}{5x-2x^2}\times\frac{x^2+2x}{3x^2+7x+4}$$

$$=\frac{(2x-5)(3x+4)}{(x+2)(x-2)}\times\frac{(x-2)(x+1)}{-x(2x-5)}\times\frac{x(x+2)}{(x+1)(3x+4)}$$

$=-1$ 정답_②

275

$$\frac{x-3}{x^2(x+1)}=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}-\frac{c}{x+1}$$

$$=\frac{ax(x+1)-b(x+1)-cx^2}{x^2(x+1)}$$

$$=\frac{ax^2+ax-bx-b-cx^2}{x^2(x+1)}$$

$$=\frac{(a-c)x^2+(a-b)x-b}{x^2(x+1)}$$

위 등식은 x에 대한 항등식이므로

$a-c=0,\ a-b=1,\ -b=-3$

세 식을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=3,\ c=4$

$\therefore a+b+c=4+3+4=11$ 정답_ 11

276

양변에 $(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$을 곱하면

$$1=a_1(x-2)(x-3)\cdots(x-10)$$
$$+a_2(x-1)(x-3)\cdots(x-10)+\cdots$$
$$+a_{10}(x-1)(x-2)\cdots(x-9)$$

$\therefore 1=(a_1+a_2+\cdots+a_{10})x^9+\cdots$

따라서 x^9의 계수를 비교하면

$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=0$ 정답_ ③

277

주어진 식의 각 항을 부분분수로 변형하여 연쇄적으로 소거하면

$$(\text{주어진 식})=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$
$$=1-\frac{1}{10}$$
$$=\frac{9}{10}$$

정답_ ③

278

$f(x)$를 부분분수로 변형하면

$$f(x)=\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)$$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{101}\right)$$
$$=\frac{50}{101}$$

정답_ ①

279

$$\frac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}=\frac{\frac{(x+1)+(x-1)}{(x-1)(x+1)}}{\frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}}$$
$$=\frac{x+1+x-1}{x+1-x+1}$$
$$=\frac{2x}{2}=x$$

정답_ ②

280

주어진 식을 간단히 한 후 $x=2010$을 대입하면

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x^2-1}{x^2}}$$
$$=\frac{x^2(x+1)}{x(x^2-1)}$$
$$=\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{x}{x-1}=\frac{2010}{2009}$$

정답_ ①

281

좌변의 번분수식을 간단히 하면

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x-1}}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{2x-2+1}{x-1}}}$$
$$=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{x-1}{2x-1}}$$
$$=2+\cfrac{1}{\cfrac{4x-2+x-1}{2x-1}}$$
$$=2+\frac{2x-1}{5x-3}$$
$$=\frac{10x-6+2x-1}{5x-3}$$
$$=\frac{12x-7}{5x-3}$$

$\dfrac{12x-7}{5x-3}=\dfrac{bx+c}{ax-3}$이므로

$a=5,\ b=12,\ c=-7$

$\therefore a+b+c=10$ 정답_ ④

282

$\dfrac{26}{11}$을 분자에 1이 나올 때까지 번분수로 고치면

$$\frac{26}{11}=2+\frac{4}{11}=2+\cfrac{1}{\cfrac{11}{4}}$$
$$=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{4}{3}}}$$
$$=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}$$

$\therefore a=2,\ b=2,\ c=1,\ d=3$

$\therefore a^2+b^2+c^2+d^2=2^2+2^2+1^2+3^2=18$ 정답_ ③

283

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\frac{1}{x}$

$=3^2-2\cdot1=7$

(2) $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=3^3-3\cdot1\cdot3=18$

(3) $x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2x^2\cdot\frac{1}{x^2}$

$=7^2-2\cdot1=47$

정답_ (1) 7 (2) 18 (3) 47

284

$x\neq0$이므로 $x^2-2x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-2-\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\frac{1}{x}=2$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x^2-2+\frac{1}{x^2}=4 \qquad \therefore x^2+\frac{1}{x^2}=6$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x^4+2+\frac{1}{x^4}=36 \qquad \therefore x^4+\frac{1}{x^4}=34$

정답_ 34

다른 풀이

$x\neq0$이므로 $x^2-2x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-2-\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\frac{1}{x}=2$

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2x\cdot\frac{1}{x}$

$=2^2+2\cdot1=6$

$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2x^2\cdot\frac{1}{x^2}$

$=6^2-2\cdot1=34$

285

$a+b+c=0$이므로

$b+c=-a,\ c+a=-b,\ a+b=-c$

$\therefore$ (주어진 식)$=a\cdot\frac{b+c}{bc}+b\cdot\frac{c+a}{ca}+c\cdot\frac{a+b}{ab}$

$=a\cdot\frac{-a}{bc}+b\cdot\frac{-b}{ca}+c\cdot\frac{-c}{ab}$

$=-\frac{a^2}{bc}-\frac{b^2}{ca}-\frac{c^2}{ab}$

$=-\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$

한편, 곱셈 공식의 변형에서

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=3abc$

$\therefore$ (주어진 식)$=-\frac{3abc}{abc}=-3$

정답_ ①

다른 풀이

$a+b+c=0$이므로

$b+c=-a,\ c+a=-b,\ a+b=-c$

$\therefore$ (주어진 식)$=\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)$

$=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{b}{a}\right)$

$=\frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c}+\frac{c+b}{a}$

$=\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+\frac{-a}{a}$

$=-3$

286

$a+b+c=0$이면 곱셈 공식의 변형에서

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=-2(ab+bc+ca)$

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=3abc$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{-2(ab+bc+ca)}{3abc}+\frac{2}{3}\cdot\frac{ab+bc+ca}{abc}$

$=0$

정답_ ②

287

$x+\frac{1}{y}=1$에서 $x=1-\frac{1}{y}=\frac{y-1}{y}$ …… ㉠

$y+\frac{1}{2z}=1$에서 $\frac{1}{2z}=1-y,\ 2z=\frac{1}{1-y}$

$\therefore z=\frac{1}{2(1-y)}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 주어진 식에 대입하면

$z+\frac{1}{2x}=\frac{1}{2(1-y)}+\frac{y}{2(y-1)}$

$=\frac{1-y}{2(1-y)}=\frac{1}{2}$

정답_ ②

288

$\frac{2x+2y}{5x+6y}=\frac{1}{2}$에서

$4x+4y=5x+6y$

$\therefore x=-2y$

위의 식을 주어진 식에 대입하면

$\frac{3x^2+2xy-5y^2}{x^2+y^2}=\frac{12y^2-4y^2-5y^2}{4y^2+y^2}$

$=\frac{3y^2}{5y^2}=\frac{3}{5}$

정답_ ①

289

$x^2-4xy-5y^2=0$에서

$(x-5y)(x+y)=0$

$\therefore x=5y$ ($\because x, y$는 양수)

위의 식을 주어진 식에 대입하면

$$\frac{x^2+3y^2}{xy-y^2}=\frac{25y^2+3y^2}{5y^2-y^2}$$

$$=\frac{28y^2}{4y^2}=7$$

정답_④

290

$$\begin{cases} x-y+z=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-3y+z=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡$-$㉠을 하면 $x-2y=0$

$\therefore y=\frac{1}{2}x$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x-\frac{1}{2}x+z=0$

$\therefore z=-\frac{1}{2}x$

$$\therefore \frac{x^2-y^2+2z^2}{2xy+yz-3zx}=\frac{x^2-\left(\frac{1}{2}x\right)^2+2\left(-\frac{1}{2}x\right)^2}{2x\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x\cdot\left(-\frac{1}{2}x\right)-3\left(-\frac{1}{2}x\right)x}$$

$$=\frac{x^2-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x^2}{x^2-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x^2}$$

$$=\frac{\frac{5}{4}x^2}{\frac{9}{4}x^2}=\frac{5}{9}\ (\because x\neq 0)$$

정답_③

291

$\frac{x-y}{2}=\frac{x+y}{3}=k\ (k\neq 0)$로 놓으면

$x-y=2k,\ x+y=3k$

두 식을 연립하여 풀면

$x=\frac{5}{2}k,\ y=\frac{1}{2}k$

$$\therefore \frac{x^2-5y^2}{xy}=\frac{\frac{25}{4}k^2-\frac{5}{4}k^2}{\frac{5}{4}k^2}$$

$$=\frac{\frac{20}{4}k^2}{\frac{5}{4}k^2}=4$$

정답_④

다른 풀이

$\frac{x-y}{2}=\frac{x+y}{3}$에서 $3(x-y)=2(x+y)$ $\quad\therefore x=5y$

$$\therefore \frac{x^2-5y^2}{xy}=\frac{25y^2-5y^2}{5y^2}$$

$$=\frac{20y^2}{5y^2}=4$$

292

$\frac{x+y}{3}=\frac{y+z}{4}=\frac{z+x}{5}=k\ (k\neq 0)$로 놓으면

$x+y=3k,\ y+z=4k,\ z+x=5k$ ······ ㉠

변끼리 더하면 $2(x+y+z)=12k$

$\therefore x+y+z=6k$ ······ ㉡

㉡에서 ㉠의 세 식을 각각 빼면

$x=2k,\ y=k,\ z=3k$

$$\therefore \frac{3xy+4yz+5zx}{(x-y)^2}=\frac{6k^2+12k^2+30k^2}{(2k-k)^2}$$

$$=\frac{48k^2}{k^2}=48$$

정답_③

293

(1) 가비의 리에 의하여

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=\frac{x+y+z}{2+3+4}=\frac{x+y+z}{9}$$

$\therefore a=9$

(2) 가비의 리에 의하여

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4}=\frac{6x-4y+2z}{6\times3-4\times2+2\times4}$$

$$=\frac{6x-4y+2z}{18}$$

$\therefore a=18$

정답_(1) 9 (2) 18

다른 풀이

(1) $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=\frac{x+y+z}{a}=k\ (k\neq 0)$로 놓으면

$x=2k,\ y=3k,\ z=4k$ ······ ㉠

$x+y+z=ak$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2k+3k+4k=ak,\ 9k=ak$

$\therefore a=9$

(2) $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4}=\frac{6x-4y+2z}{a}=k\ (k\neq 0)$로 놓으면

$x=3k,\ y=2k,\ z=4k$ ······ ㉠

$6x-4y+2z=ak$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$18k-8k+8k=ak,\ 18k=ak$

$\therefore a=18$

294

$\frac{3x-y}{2}=\frac{5y-z}{3}=\frac{2z+x}{5}=\frac{10x+100y+1000z}{a}=k$

$(k\neq0)$로 놓으면

$3x-y=2k$ …… ㉠

$5y-z=3k$ …… ㉡

$2z+x=5k$ …… ㉢

$10x+100y+1000z=ak$ …… ㉣

㉠$\times5+$㉡을 하면 $15x-z=13k$ …… ㉤

㉤$\times2+$㉢을 하면 $31x=31k$ $\quad\therefore x=k$

$x=k$를 ㉠, ㉢에 각각 대입하면 $y=k$, $z=2k$

$\therefore x=k$, $y=k$, $z=2k$

이것을 ㉣에 대입하면

$10k+100k+2000k=ak$, $2110k=ak$

$\therefore a=2110$

정답_ ⑤

295

(i) $a+3b+2c\neq0$일 때, 가비의 리에 의하여

$$\frac{3b+2c}{a}=\frac{2c+a}{3b}=\frac{a+3b}{2c}$$
$$=\frac{(3b+2c)+(2c+a)+(a+3b)}{a+3b+2c}$$
$$=\frac{2(a+3b+2c)}{a+3b+2c}=2$$

(ii) $a+3b+2c=0$일 때,

$$\frac{3b+2c}{a}=\frac{-a}{a}=-1$$

(i), (ii)에 의해 주어진 비례식의 값이 될 수 있는 것은 -1 또는 2이다.

정답_ ④

다른 풀이

$\frac{3b+2c}{a}=\frac{2c+a}{3b}=\frac{a+3b}{2c}=k$ $(k\neq0)$로 놓으면

$3b+2c=ak$, $2c+a=3bk$, $a+3b=2ck$

변끼리 더하면

$2(a+3b+2c)=(a+3b+2c)k$

$\therefore (a+3b+2c)(k-2)=0$

(i) $a+3b+2c\neq0$일 때,

$k=2$

(ii) $a+3b+2c=0$일 때,

$k=\frac{3b+2c}{a}=\frac{-a}{a}=-1$

(i), (ii)에 의해 주어진 비례식의 값이 될 수 있는 것은 -1 또는 2이다.

296

농도가 a %인 소금물 100 g에 녹아 있는 소금의 양은

$100\times\frac{a}{100}$ (g)

농도가 b %인 소금물 200 g에 녹아 있는 소금의 양은

$200\times\frac{b}{100}$ (g)

그러므로 p %인 소금물 300 g에 녹아 있는 소금의 양은

$100\times\frac{a}{100}+200\times\frac{b}{100}=a+2b$ (g)

$\therefore p=\frac{a+2b}{300}\times100=\frac{a+2b}{3}$

농도가 a %인 소금물 200 g에 녹아 있는 소금의 양은

$200\times\frac{a}{100}$ (g)

농도가 b %인 소금물 100 g에 녹아 있는 소금의 양은

$100\times\frac{b}{100}$ (g)

그러므로 q %인 소금물 300 g에 녹아 있는 소금의 양은

$200\times\frac{a}{100}+100\times\frac{b}{100}=2a+b$ (g)

$\therefore q=\frac{2a+b}{300}\times100=\frac{2a+b}{3}$

$p:q=\frac{a+2b}{3}:\frac{2a+b}{3}=2:3$에서

$3a+6b=4a+2b$ $\quad\therefore a=4b$

$\therefore \frac{3a^2+4b^2}{ab}=\frac{3\cdot(4b)^2+4b^2}{4b\cdot b}=\frac{52b^2}{4b^2}=13$

정답_ ③

297

① a의 r %는 $\quad a\times\frac{r}{100}$

② a가 r % 증가한 후의 양은

$a+a\times\frac{r}{100}=a\left(1+\frac{r}{100}\right)$

2012년의 인구를 a라고 하면 2012년에서 2013년까지의 인구가 x % 증가하였으므로 2013년의 인구는

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)$

2013년에서 2014년까지의 인구가 y % 증가하였으므로 2014년의 인구는

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{y}{100}\right)$ …… ㉠

2012년에서 2014년까지의 인구의 증가율을 z %라고 하면 2014년의 인구는

$a\left(1+\frac{z}{100}\right)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a\left(1+\frac{z}{100}\right)=a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{y}{100}\right)$

$$1+\frac{z}{100}=\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{y}{100}\right)$$

$$1+\frac{z}{100}=1+\frac{x}{100}+\frac{y}{100}+\frac{xy}{10000}$$

$$\therefore z=x+y+\frac{xy}{100}$$

정답_ ①

298

A학교와 B학교의 남학생 수의 비가 $3:4$이므로 각각 $3a$, $4a$ $(a\neq0)$로 놓을 수 있다.

A학교와 B학교의 여학생 수의 비가 $3:2$이므로 각각 $3b$, $2b$ $(b\neq0)$로 놓을 수 있다.

	남학생	여학생
A학교	$3a$	$3b$
B학교	$4a$	$2b$

A학교와 B학교의 전체 학생 수의 비가 $4:3$이므로

$(3a+3b):(4a+2b)=4:3$

$4(4a+2b)=3(3a+3b)$

$\therefore b=7a$

이상으로부터 A학교의 남학생과 여학생 수의 비는

$3a:3b=3a:21a=1:7=m:n$

$\therefore m+n=1+7=8$

정답_ ⑤

299

ㄱ. $\frac{x+2}{3}$가 다항식이고, 유리식이므로 $y=\frac{x+2}{3}$는 다항함수이고 동시에 유리함수이다.

ㄴ. $\frac{2}{x-1}$가 유리식이므로 $y=\frac{2}{x-1}$는 유리함수이다.

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{x+5}$가 유리식이므로 $y=\frac{\sqrt{2}}{x+5}$는 유리함수이다.

ㄹ. $\frac{\sqrt{x-1}}{2}$은 유리식이 아니므로 $y=\frac{\sqrt{x-1}}{2}$은 유리함수가 아니다.

(1) 다항함수 : ㄱ (2) 유리함수 : ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답_ (1) ㄱ (2) ㄱ, ㄴ, ㄷ

300

(1) $2x-1=0$에서 $x=\frac{1}{2}$

따라서 주어진 유리함수의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{1}{2}\text{인 실수}\right\}$

(2) $x^2-9=0$에서 $x=\pm3$

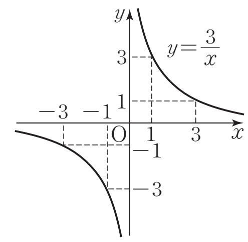
따라서 주어진 유리함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq\pm3\text{인 실수}\}$

(3) $x^2+1>0$이므로 주어진 유리함수의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

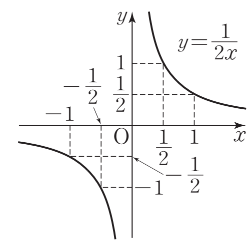
정답_ (1) $\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{1}{2}\text{인 실수}\right\}$ (2) $\{x\,|\,x\neq\pm3\text{인 실수}\}$ (3) 실수 전체의 집합

301

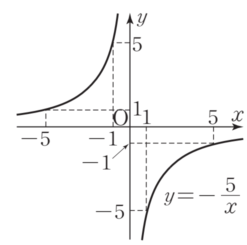
(1) $y=\frac{3}{x}$의 그래프는 $3>0$이므로 제1, 3사분면에 있고, 오른쪽 그림과 같다.



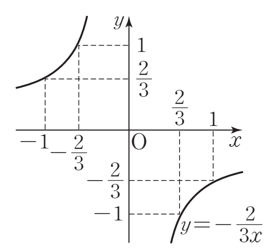
(2) $y=\frac{1}{2x}$의 그래프는 $\frac{1}{2}>0$이므로 제1, 3사분면에 있고, 오른쪽 그림과 같다.



(3) $y=-\frac{5}{x}$의 그래프는 $-5<0$이므로 제2, 4사분면에 있고, 오른쪽 그림과 같다.



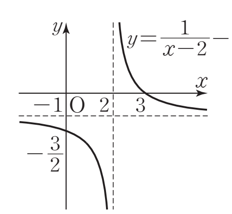
(4) $y=-\frac{2}{3x}$의 그래프는 $-\frac{2}{3}<0$이므로 제2, 4사분면에 있고, 오른쪽 그림과 같다.



정답_ 풀이 참조

302

(1) $y=\frac{1}{x-2}-1$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

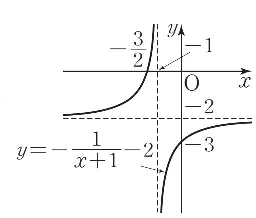


정의역은 $\{x\,|\,x\neq2\text{인 실수}\}$

치역은 $\{y\,|\,y\neq-1\text{인 실수}\}$

점근선의 방정식은 $x=2$, $y=-1$

(2) $y=-\frac{1}{x+1}-2$의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



정의역은 $\{x\,|\,x\neq-1\text{인 실수}\}$

치역은 $\{y\,|\,y\neq-2\text{인 실수}\}$

점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=-2$

정답_ 풀이 참조

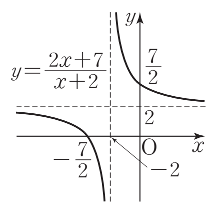
303

(1) $y=\dfrac{2x+7}{x+2}=\dfrac{2(x+2)+3}{x+2}=2+\dfrac{3}{x+2}$

$\therefore y=\dfrac{3}{x+2}+2$

위의 함수의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은

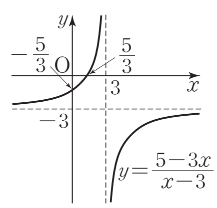
$x=-2,\ y=2$



(2) $y=\dfrac{5-3x}{x-3}=\dfrac{-3(x-3)-4}{x-3}=-3-\dfrac{4}{x-3}$

$\therefore y=-\dfrac{4}{x-3}-3$

위의 함수의 그래프는 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $x=3,\ y=-3$



정답_ 풀이 참조

304

$f(x)=\dfrac{2x-3}{x-5}=\dfrac{2(x-5)+7}{x-5}=2+\dfrac{7}{x-5}$

$\therefore f(x)=\dfrac{7}{x-5}+2$

따라서 점근선은 두 직선 $x=5,\ y=2$이므로

$p=5,\ q=2$

$\therefore pq=5\cdot2=10$

정답_ 10

305

$y=\dfrac{-5x+3}{x+a}=\dfrac{-5(x+a)+5a+3}{x+a}$

$=-5+\dfrac{5a+3}{x+a}$

$\therefore y=\dfrac{5a+3}{x+a}-5$

따라서 점근선의 방정식은 $x=-a,\ y=-5$이므로

$a=4,\ b=-5 \quad \therefore a+b=-1$

정답_ ②

다른 풀이

$y=\dfrac{-5x+3}{x+a}$의 점근선의 방정식은

$x+a=0,\ y=\dfrac{-5}{1}$, 즉 $x=-a,\ y=-5$

이므로 $a=4,\ b=-5$

$\therefore a+b=-1$

306

점근선의 방정식이 $x=-2,\ y=3$이므로

$y=\dfrac{k}{x+2}+3$ ...... ㉠

으로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(3,\ 1)$을 지나므로

$1=\dfrac{k}{3+2}+3 \quad \therefore k=-10$

이 값을 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{-10}{x+2}+3=\dfrac{-10+3(x+2)}{x+2}$

$=\dfrac{3x-4}{x+2}$

따라서 $a=3,\ b=-4,\ c=2$이므로

$a+b+c=3+(-4)+2=1$

정답_ ①

다른 풀이

$y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 점 $(3,\ 1)$을 지나므로

$1=\dfrac{3a+b}{3+c} \quad \therefore 3a+b=3+c$ ...... ㉡

$y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x+c=0,\ y=\dfrac{a}{1}$, 즉 $x=-c,\ y=a$

이므로 $a=3,\ c=2$

이 값을 ㉡에 대입하여 정리하면 $b=-4$

$\therefore a+b+c=3+(-4)+2=1$

307

점근선의 방정식이 $x=1,\ y=-3$이므로

$y=\dfrac{k}{x-1}-3$ ...... ㉠

으로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프의 y절편이 -1이므로 $x=0,\ y=-1$을 대입하면

$-1=\dfrac{k}{0-1}-3 \quad \therefore k=-2$

이 값을 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{-2}{x-1}-3=\dfrac{-2-3(x-1)}{x-1}$

$=\dfrac{-3x+1}{x-1}$

$\therefore y=\dfrac{3x-1}{1-x}$

따라서 $a=1,\ b=3,\ c=-1$이므로

$abc=1\cdot3\cdot(-1)=-3$

정답_ ①

다른 풀이

$y=\dfrac{bx+c}{1-ax}$의 그래프의 y절편이 -1이므로 $x=0,\ y=-1$을 대입하면

$-1=\frac{0+c}{1-0}\qquad \therefore c=-1$

$y=\frac{bx+c}{1-ax}=\frac{bx+c}{-ax+1}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$-ax+1=0,\ y=\frac{b}{-a}$, 즉 $x=\frac{1}{a},\ y=-\frac{b}{a}$

이므로 $\frac{1}{a}=1,\ -\frac{b}{a}=-3\qquad \therefore a=1,\ b=3$

$\therefore abc=1\cdot3\cdot(-1)=-3$

308

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1,\ y=-2$이므로

$y=\frac{k}{x+1}-2$ …… ㉠

㉠의 그래프가 점 $(0,\ -3)$을 지나므로

$-3=\frac{k}{0+1}-2\qquad \therefore k=-1$

이 값을 ㉠에 대입하면

$y=\frac{-1}{x+1}-2$

따라서 $k=-1,\ p=1,\ q=-2$이므로

$kpq=(-1)\cdot1\cdot(-2)=2$

정답_⑤

309

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2,\ y=1$이므로

$y=\frac{k}{x-2}+1$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{1-2}+1\qquad \therefore k=1$

이 값을 ㉠에 대입하면

$y=\frac{1}{x-2}+1=\frac{1+x-2}{x-2}$

$=\frac{x-1}{x-2}$

따라서 $a=1,\ b=-2,\ c=-1$이므로

$a+b+c=1+(-2)+(-1)=-2$

정답_①

310

함수 $y=\frac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이므로

$y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{k}{x-2}+1=\frac{x+k-2}{x-2}$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(3,\ 3)$을 지나므로

$3=\frac{3+k-2}{3-2}\qquad \therefore k=2$

이 값을 ㉠에 대입하면

$y=\frac{x}{x-2}$

따라서 $a=1,\ b=0,\ c=-2$이므로

$a+b-c=1+0-(-2)=3$

정답_③

311

$y=\frac{-3x+7}{x-2}=\frac{-3(x-2)+1}{x-2}=\frac{1}{x-2}-3$

따라서 유리함수 $y=\frac{-3x+7}{x-2}$의 그래프는 점 $(2,\ -3)$을 지나고, 기울기가 ±1인 두 직선에 대하여 대칭이다.

(ⅰ) 기울기가 1인 직선의 방정식을 $y=x+m$으로 놓으면
점 $(2,\ -3)$을 지나므로
$-3=2+m\qquad \therefore m=-5\qquad \therefore y=x-5$

(ⅱ) 기울기가 -1인 직선의 방정식을 $y=-x+n$으로 놓으면
점 $(2,\ -3)$을 지나므로
$-3=-2+n\qquad \therefore n=-1\qquad \therefore y=-x-1$

$\therefore a+b+c+d=1+(-5)+(-1)+(-1)=-6$

정답_①

312

$y=\frac{7-4x}{2x-3}=\frac{-4\left(x-\frac{3}{2}\right)-6+7}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}$

$=-2+\frac{1}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}$

$\therefore y=\frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{3}{2}}-2$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $\left(\frac{3}{2},\ -2\right)$를 지나고, 기울기가 ±1인 두 직선에 대하여 대칭이다.

두 직선의 방정식을 각각

$y=x+a,\ y=-x+b$ …… ㉠

로 놓으면 ㉠의 두 직선이 점 $\left(\frac{3}{2},\ -2\right)$를 지나므로

$-2=\frac{3}{2}+a,\ -2=-\frac{3}{2}+b$

$\therefore a=-\frac{7}{2},\ b=-\frac{1}{2}$

이 값을 ㉠에 대입하면

$y=x-\frac{7}{2},\ y=-x-\frac{1}{2}$

따라서 주어진 함수의 그래프는 ③에 대하여 대칭이다.

정답_③

313

함수 $y=-\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$$y=-\frac{3}{x-2}-1=\frac{-3-(x-2)}{x-2}$$

$$=\frac{-x-1}{x-2}$$

의 그래프가 되므로

$a=-1,\ b=-1$　　정답_ $a=-1,\ b=-1$

314

함수 $y=\frac{a}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$y-2=\frac{a}{x-3}$　　$\therefore y=\frac{a}{x-3}+2$　　…… ㉠

㉠의 그래프가 점 $(4, 6)$을 지나므로

$6=\frac{a}{4-3}+2$　　$\therefore a=4$　　정답_ ④

315

$$y=\frac{3x+5}{x+1}=\frac{3(x+1)+2}{x+1}$$

$$=\frac{2}{x+1}+3$$

이 함수의 그래프는 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

$p=-1,\ q=3$　　정답_ $p=-1,\ q=3$

316

① $y=\frac{x}{x+1}=\frac{(x+1)-1}{x+1}$

$=1-\frac{1}{x+1}$

$\therefore y=-\frac{1}{x+1}+1$

위의 함수의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

② $y=\frac{2x}{x+1}=\frac{2(x+1)-2}{x+1}$

$=2-\frac{2}{x+1}$

$\therefore y=-\frac{2}{x+1}+2$

위의 함수의 그래프는 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

③ $y=\frac{x-2}{x-1}=\frac{(x-1)-1}{x-1}$

$=1-\frac{1}{x-1}$

$\therefore y=-\frac{1}{x-1}+1$

위의 함수의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=\frac{x+3}{x+1}=\frac{(x+1)+2}{x+1}$

$=1+\frac{2}{x+1}$

$\therefore y=\frac{2}{x+1}+1$

위의 함수의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\frac{2-x}{x-1}=\frac{-(x-1)+1}{x-1}$

$=-1+\frac{1}{x-1}$

$\therefore y=\frac{1}{x-1}-1$

위의 함수의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동에 의해 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프와 겹쳐질 수 있는 것은 ⑤이다.　　정답_ ⑤

317

유리함수 $y=\frac{4}{x+3}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면

$y=\frac{4}{x+3-m}+1+n$　　…… ㉠

$y=\frac{-2x+8}{x-2}=\frac{-2(x-2)+4}{x-2}$

$=\frac{4}{x-2}-2$　　…… ㉡

㉠과 ㉡이 같으므로

$3-m=-2,\ 1+n=-2$

$\therefore m=5,\ n=-3$

$\therefore m-n=5-(-3)=8$　　정답_ ④

318

$y=\dfrac{bx-5}{x+a}$의 그래프는 점근선의 방정식이

$x+a=0,\ y=\dfrac{b}{1}$, 즉 $x=-a,\ y=b$

이므로 점 $(-a,\ b)$에 대하여 대칭이고, $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프는 점 $(0,\ 0)$에 대하여 대칭이다.

따라서 점 $(-a,\ b)$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면 점 $(0,\ 0)$이 되어야 하므로

$-a-2=0,\ b-3=0$

$\therefore a=-2,\ b=3$

$\therefore a+b=1$

정답_ ①

다른 풀이

함수 $y=\dfrac{bx-5}{x+a}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면

$$y+3=\frac{b(x+2)-5}{x+2+a}=\frac{bx+2b-5}{x+2+a}$$

$$\therefore y=\frac{bx+2b-5}{x+2+a}-3$$

$$=\frac{bx+2b-5-3(x+2+a)}{x+2+a}$$

$$=\frac{(b-3)x+2b-3a-11}{x+2+a}$$

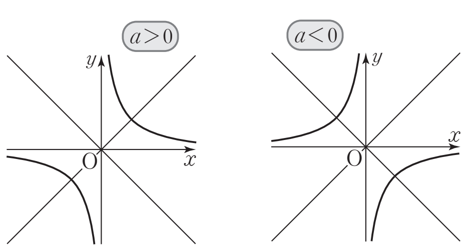
이 함수의 그래프가 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프와 일치해야 하므로

$b-3=0,\ 2b-3a-11=1,\ 2+a=0$

$\therefore a=-2,\ b=3 \qquad \therefore a+b=1$

319

함수 $y=\dfrac{a}{x}\ (a\neq 0)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



④ $a<0$이면 그래프는 제2, 4사분면에 있다.

정답_ ④

320

$$y=\frac{-3x+7}{x-2}=\frac{-3(x-2)-6+7}{x-2}$$

$$=-3+\frac{1}{x-2}$$

$$\therefore y=\frac{1}{x-2}-3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

①은 옳다.

㉠의 그래프는 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

②도 옳다.

㉠의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2,\ y=-3$이다.

③도 옳다.

$y=\dfrac{-3x+7}{x-2}$에 $y=0$을 대입하면 $\quad 0=\dfrac{-3x+7}{x-2}$

$\therefore x=\dfrac{7}{3}$

따라서 x축과 만나는 점은 $\left(\dfrac{7}{3},\ 0\right)$이다.

④도 옳다.

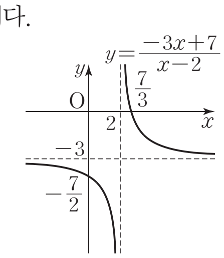
$y=\dfrac{-3x+7}{x-2}$에 $x=0$을 대입하면

$y=\dfrac{0+7}{0-2}=-\dfrac{7}{2}$

따라서 y축과 만나는 점은 $\left(0,\ -\dfrac{7}{2}\right)$이다.

⑤는 옳지 않다.

㉠의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 3, 4사분면에 있다.



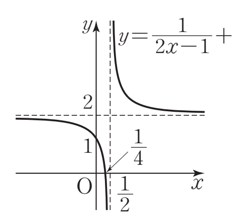
정답_ ⑤

321

$$y=\frac{1}{2x-1}+2=\frac{1}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}+2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

ㄱ은 옳다.

㉠의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 4사분면을 지난다.



ㄴ도 옳다.

㉠의 그래프는 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ 2\right)$를 지나고, 기울기가 ± 1인 직선에 대하여 대칭이다.

이때, 기울기가 1인 직선을 $y=x+a$로 놓으면 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ 2\right)$를 지나므로

$2=\dfrac{1}{2}+a \qquad \therefore a=\dfrac{3}{2}$

따라서 직선 $y=x+\dfrac{3}{2}$에 대하여 대칭이다.

ㄷ은 옳지 않다.

㉠의 그래프는 $y=\dfrac{1}{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ②

322

$y=\dfrac{a}{x}$, $y=\dfrac{b}{x}$의 그래프는 제2사분면을 지나므로

$a<0$, $b<0$

이때, $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프가 $y=\dfrac{b}{x}$의 그래프보다 원점에서 멀리 떨어져 있으므로

$|a|>|b|$

$\therefore a<b<0$ ······ ㉠

$y=\dfrac{c}{x}$, $y=\dfrac{d}{x}$의 그래프는 제1사분면을 지나므로

$c>0$, $d>0$

이때, $y=\dfrac{d}{x}$의 그래프가 $y=\dfrac{c}{x}$의 그래프보다 원점에서 멀리 떨어져 있으므로

$d>c$

$\therefore 0<c<d$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서

$a<b<c<d$

정답_ ①

323

$y=\dfrac{ax+5}{2x+b}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$2x+b=0$, $y=\dfrac{a}{2}$, 즉 $x=-\dfrac{b}{2}$, $y=\dfrac{a}{2}$

따라서 정의역은 $\left\{x \,\middle|\, x\neq-\dfrac{b}{2}\text{인 실수}\right\}$,

치역은 $\left\{y \,\middle|\, y\neq\dfrac{a}{2}\text{인 실수}\right\}$이므로

$-\dfrac{b}{2}=-3$, $\dfrac{a}{2}=\dfrac{3}{2}$ $\quad\therefore a=3$, $b=6$

$\therefore ab=3\cdot6=18$

정답_ ⑤

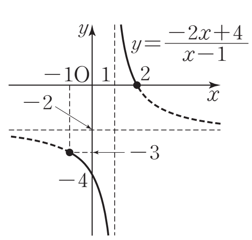
324

$y=\dfrac{-2x+4}{x-1}=\dfrac{-2(x-1)+2}{x-1}=-2+\dfrac{2}{x-1}$

$\therefore\ y=\dfrac{2}{x-1}-2$

따라서 주어진 함수의 그래프는

$y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 $-1\leq x<1$ 또는 $1<x\leq2$의 부분만 잘라내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은

$\{y\,|\,y\leq-3$ 또는 $y\geq0\}$

정답_ ④

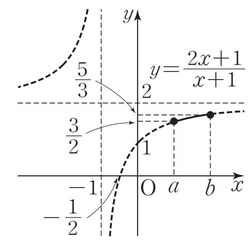
325

$y=\dfrac{2x+1}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-1}{x+1}=2-\dfrac{1}{x+1}$

$\therefore y=-\dfrac{1}{x+1}+2$

따라서 주어진 함수의 그래프는

$y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $\dfrac{3}{2}\leq y\leq\dfrac{5}{3}$의 부분만 잘라내면 오른쪽 그림과 같다.



$y=\dfrac{2x+1}{x+1}$의 그래프가 두 점 $\left(a,\ \dfrac{3}{2}\right)$, $\left(b,\ \dfrac{5}{3}\right)$를 지나므로

$\dfrac{2a+1}{a+1}=\dfrac{3}{2}$, $2(2a+1)=3(a+1)$

$\therefore a=1$

$\dfrac{2b+1}{b+1}=\dfrac{5}{3}$, $3(2b+1)=5(b+1)$

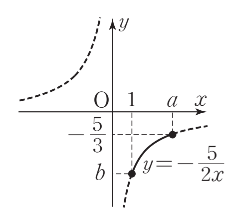
$\therefore b=2$

$\therefore ab=1\cdot2=2$

정답_ ①

326

함수 $y=-\dfrac{5}{2x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=1$일 때 최솟값, $x=a$일 때 최댓값을 가진다.



$y=-\dfrac{5}{2x}$의 그래프가 두 점 $(1,\ b)$, $\left(a,\ -\dfrac{5}{3}\right)$를 지나므로

$-\dfrac{5}{2}=b$, $-\dfrac{5}{2a}=-\dfrac{5}{3}$

$\therefore a=\dfrac{3}{2}$, $b=-\dfrac{5}{2}$

$\therefore a+b=-1$

정답_ ②

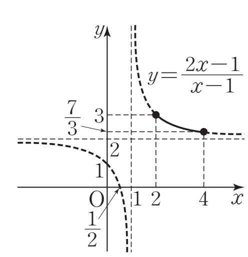
327

$y=\dfrac{2x-1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+1}{x-1}=2+\dfrac{1}{x-1}$

$\therefore\ y=\dfrac{1}{x-1}+2$

따라서 주어진 함수의 그래프는

$y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $2\leq x\leq4$의 부분만 잘라내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서

$x=2$일 때 최댓값 $M=3$,

$x=4$일 때 최솟값 $m=\frac{7}{3}$

을 가지므로

$M-3m=3-7=-4$ 정답_②

328

$f^1(x)=f(x)=\frac{x}{1-x}$

$f^2(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}$

$f^3(x)=f(f^2(x))=\frac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}}=\frac{x}{1-3x}$

⋮

$\therefore f^n(x)=\frac{x}{1-nx}$

따라서 $f^{30}(x)=\frac{x}{1-30x}$이므로

$a=1,\ b=0,\ c=-30$

$\therefore a+b+c=1+0+(-30)=-29$ 정답_④

329

$f^1(x)=f(x)=\frac{x}{x+1}$

$f^2(x)=f^1(f(x))=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}=\frac{x}{2x+1}$

$f^3(x)=f^2(f(x))=\frac{\frac{x}{x+1}}{2\cdot\frac{x}{x+1}+1}=\frac{x}{3x+1}$

$f^4(x)=f^3(f(x))=\frac{\frac{x}{x+1}}{3\cdot\frac{x}{x+1}+1}=\frac{x}{4x+1}$

⋮

$\therefore f^n(x)=\frac{x}{nx+1}$

따라서 $f^{10}(x)=\frac{x}{10x+1}$이므로 $a=1,\ b=0,\ c=10$

$\therefore a+b+c=1+0+10=11$ 정답_③

330

$f^1(x)=f(x)=-\frac{1}{2x}+1=\frac{2x-1}{2x}$

$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f^1(x))$

$=\frac{2\cdot\frac{2x-1}{2x}-1}{2\cdot\frac{2x-1}{2x}}=\frac{x-1}{2x-1}$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$

$=\frac{2\cdot\frac{x-1}{2x-1}-1}{2\cdot\frac{x-1}{2x-1}}=\frac{-1}{2x-2}$

$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))$

$=\frac{2\cdot\frac{-1}{2x-2}-1}{2\cdot\frac{-1}{2x-2}}=x$

따라서 $f^n(x)=x$를 만족시키는 최소의 자연수 n의 값은 4이다.

정답_③

331

$y=\frac{x+2}{3x+a}$의 x와 y를 서로 바꾸면 $x=\frac{y+2}{3y+a}$

$3xy+ax=y+2,\ (3x-1)y=-ax+2$

$\therefore y=\frac{-ax+2}{3x-1}$

따라서 주어진 함수의 역함수 $f^{-1}(x)$는

$f^{-1}(x)=\frac{-ax+2}{3x-1}$

$f(x)=\frac{x+2}{3x+a}$와 $f^{-1}(x)=\frac{-ax+2}{3x-1}$가 일치하므로

$a=-1$ 정답_②

332

$f^{-1}(x)=g(x)$이므로 $g(3)=a$로 놓으면 $g^{-1}(a)=f(a)=3$

즉, $\frac{3a+1}{2a-1}=3$이므로 $3a+1=3(2a-1)$ $\quad\therefore a=\frac{4}{3}$

$\therefore g(3)=\frac{4}{3}$ 정답_④

333

$f(x)$가 다항함수가 아닌 유리함수이므로 $c\neq0$

조건 (나)에서 유리함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1,\ y=-2$이므로

$f(x)=y=\frac{k}{c(x-1)}-2$ ⋯⋯ ㉠

로 놓을 수 있다.

또, 조건 (가)에서 유리함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로 ㉠에 $x=0,\ y=0$을 대입하면 $k=-2c$

$\therefore f(x)=\frac{-2}{x-1}-2=\frac{-2x}{x-1}$

$f^{-1}(-4)=t$로 놓으면 $f(t)=-4$이므로

$\frac{-2t}{t-1}=-4,\ -2t=-4t+4,\ t=2$

$\therefore f^{-1}(-4)=2$

정답_⑤

334

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $f(x)$는 $g(x)$의 역함수이다.

$y=\frac{1+x}{2-x}$의 x와 y를 서로 바꾸면 $x=\frac{1+y}{2-y}$

$2x-xy=1+y,\ (x+1)y=2x-1$

$\therefore y=\frac{2x-1}{x+1}$

위의 식이 $y=\frac{ax+b}{x+c}$와 일치해야 하므로

$a=2,\ b=-1,\ c=1$

$\therefore a+b+c=2$

정답_③

335

$(g\circ f)(x)=x$를 만족시키는 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$y=\frac{-2x+1}{x+a}$의 x와 y를 서로 바꾸면 $x=\frac{-2y+1}{y+a}$

$xy+ax=-2y+1,\ (x+2)y=-ax+1$

$\therefore y=\frac{-ax+1}{x+2}$

위의 식이 $y=\frac{bx+1}{cx+2}$과 일치해야 하므로

$-a=b,\ c=1$

$\therefore a+b+c=a+(-a)+1=1$

정답_③

336

점 $(1,\ 2)$가 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위에 존재하므로

$f(1)=2,\ f^{-1}(1)=2$

$\therefore f(1)=2,\ f(2)=1$

$f(x)=\frac{-2x+a}{x+b}$에서 $\frac{-2+a}{1+b}=2,\ \frac{-4+a}{2+b}=1$

$-2+a=2+2b,\ -4+a=2+b$

$\therefore a-2b=4,\ a-b=6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=8,\ b=2$

$\therefore a+b=10$

정답_⑤

337

함수 $y=-\frac{2}{x}+2$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 한 점에서 만나려면

$-\frac{2}{x}+2=2x+k$에서 $-2+2x=2x^2+kx$

$\therefore 2x^2+(k-2)x+2=0$

위의 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(k-2)^2-16=0$

$k^2-4k-12=0,\ (k+2)(k-6)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=6$

따라서 한 점에서 만나도록 하는 모든 상수 k의 값의 합은

$-2+6=4$

정답_②

338

함수 $y=\frac{x+1}{x-1}$의 그래프가 직선 $y=mx+1$과 만나지 않으려면

$\frac{x+1}{x-1}=mx+1$에서 $x+1=mx^2+x-mx-1$

$\therefore mx^2-mx-2=0$ ······ ㉠

㉠의 실근이 존재하지 않아야 하므로

(ⅰ) $m\neq0$일 때, ㉠의 판별식을 D라고 하면

$D=m^2+8m<0,\ m(m+8)<0$

$\therefore -8<m<0$

(ⅱ) $m=0$일 때, ㉠에 대입하면 $-2=0$이므로

㉠의 실근이 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 m의 값의 범위는

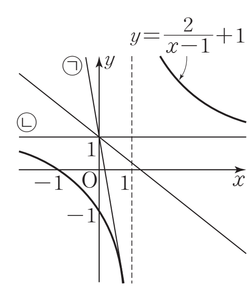
$-8<m\le0$

정답_⑤

다른 풀이

$y=\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x-1)+2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$

$\therefore y=\frac{2}{x-1}+1$



위의 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=mx+1$이 ㉠과 ㉡ 사이를 지날 때 만나지 않는다.

㉠은 함수의 그래프와 직선이 접할 때이므로 $\frac{x+1}{x-1}=mx+1$에서

$mx^2-mx-2=0$

위의 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=m^2+8m=0,\ m(m+8)=0$

$\therefore m=-8\ (\because m<0)$

㉡은 직선이 x축에 평행할 때이므로 $m=0$

따라서 m의 값의 범위는

$-8<m\le0$

339

분모를 통분하면

(주어진 식)

$$=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}-\frac{b^2}{(b-c)(a-b)}+\frac{c^2}{(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} \cdots\cdots ❶$$

위의 식의 분자를 a에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

(분자)$=a^2b-a^2c-b^2a+b^2c+c^2a-c^2b$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b-c)(b+c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$ ⋯⋯ ❷

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=1$ ⋯⋯ ❸

정답_ 1

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 식을 통분하기	30%
❷	분자를 인수분해하기	60%
❸	주어진 식을 간단히 하기	10%

340

분자에 1이 등장할 때까지 번분수로 고친 후 $\frac{1}{1}$을 분리하면

$$\frac{165}{98}=1+\frac{67}{98}=1+\frac{1}{\frac{98}{67}}$$

$$=1+\frac{1}{1+\frac{31}{67}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{67}{31}}}$$

$$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{5}{31}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{31}{5}}}}$$

$$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{6+\frac{1}{5}}}}$$

$$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{6+\frac{1}{4+\frac{1}{1}}}}} \cdots\cdots ❶$$

주어진 정의에 의해

$\frac{165}{98}=<1\,;\,1,\ 2,\ 6,\ 4,\ 1>$ ⋯⋯ ❷

$\therefore a+b+c+d=1+2+6+4=13$ ⋯⋯ ❸

정답_ 13

단계	채점 기준	비율
❶	$\frac{165}{98}$를 번분수로 나타내기	70%
❷	번분수를 주어진 기호로 나타내기	20%
❸	$a+b+c+d$의 값 구하기	10%

341

$x\neq0$이므로 $x^4-6x^2+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-6+\frac{1}{x^2}=0$ $\quad\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=6$ ⋯⋯ ❶

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=6-2=4$이므로

$x-\frac{1}{x}=-2$ 또는 $x-\frac{1}{x}=2$ ⋯⋯ ❷

이때, $0<x<1$에서 $\frac{1}{x}>1$이므로 $x-\frac{1}{x}<0$

$\therefore x-\frac{1}{x}=-2$ ⋯⋯ ❸

정답_ -2

단계	채점 기준	비율
❶	$x^2+\frac{1}{x^2}$의 값 구하기	20%
❷	$x-\frac{1}{x}$의 값 구하기	50%
❸	조건을 만족시키는 $x-\frac{1}{x}$의 값 구하기	30%

342

유리함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이므로

$f(x)=\frac{k}{x-2}+1$ ⋯⋯ ㉠

로 놓을 수 있다. ⋯⋯ ❶

㉠의 그래프의 x절편이 1이므로

$f(1)=\frac{k}{1-2}+1=0$ $\quad\therefore k=1$ ⋯⋯ ❷

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$f(x)=\frac{1}{x-2}+1=\frac{x-1}{x-2}$ $\quad\therefore f(3)=\frac{3-1}{3-2}=2$ ⋯⋯ ❸

정답_ 2

단계	채점 기준	비율
❶	주어진 함수를 $f(x)=\frac{k}{x-p}+q$의 꼴로 나타내기	40%
❷	k의 값 구하기	30%
❸	$f(3)$의 값 구하기	30%

343

$(f\circ g)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다. ⋯⋯ ❶

$y=f(x)$의 그래프와 그 역함수인 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $f(x)=x$에서

$\frac{2x+6}{x+1}=x,\ x^2-x-6=0,\ (x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$ ⋯⋯ ❷

따라서 $f(x)=g(x)$를 만족시키는 모든 x의 값의 합은

$-2+3=1$ ⋯⋯ ❷

정답_ 1

단계	채점 기준	비율
❶	$f(x)$와 $g(x)$ 사이의 관계 알기	20%
❷	주어진 조건을 만족시키는 x의 값 구하기	60%
❸	모든 x의 값의 합 구하기	20%

344

$f^{-1}(3)=2$에서 $f(2)=3$이므로

$\dfrac{8+a}{2b-2}=3$, $8+a=6b-6$

$\therefore a-6b=-14$ …… ㉠

…… ❶

$f(2)=3$, $(f\circ f)(2)=\dfrac{16}{7}$이므로

$f(f(2))=f(3)=\dfrac{16}{7}$

$\dfrac{12+a}{3b-2}=\dfrac{16}{7}$, $84+7a=48b-32$

$\therefore 7a-48b=-116$ …… ㉡

…… ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=3$

$\therefore a+b=7$ …… ❸

정답_ 7

단계	채점 기준	비율
❶	a, b 사이의 관계식 세우기 1	30%
❷	a, b 사이의 관계식 세우기 2	40%
❸	$a+b$의 값 구하기	30%

345

$\dfrac{p(x)}{(x-1)(x-3)(x-5)}$

$=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-3}+\dfrac{c}{x-5}$

$=\dfrac{a(x-3)(x-5)+b(x-1)(x-5)+c(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)(x-5)}$

즉, $p(x)=a(x-3)(x-5)+b(x-1)(x-5)$
$\quad +c(x-1)(x-3)$

이므로 $p(2)=3a-3b-c$, $p(4)=-a-3b+3c$

$\therefore p(2)-p(4)=3a-3b-c-(-a-3b+3c)$
$\quad =4a-4c=4(a-c)$

따라서 $p(2)-p(4)$는 $a=6$, $c=2$일 때, 최댓값 $4\cdot4=16$을 갖는다.

정답_ ④

346

ㄱ은 옳다.

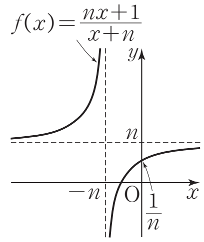
$f(x)=\dfrac{nx+1}{x+n}=\dfrac{n(x+n)+1-n^2}{x+n}=n+\dfrac{1-n^2}{x+n}$

$\therefore f(x)=\dfrac{1-n^2}{x+n}+n$

위의 함수의 그래프는 $y=\dfrac{1-n^2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-n$만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.

또, y절편이 $\dfrac{1}{n}$이므로 오른쪽 그림과 같이 제4사분면을 지나지 않는다.

$f(x)=\dfrac{nx+1}{x+n}$



ㄴ도 옳다.

$y=\dfrac{nx+1}{x+n}$의 x와 y를 서로 바꾸면 $x=\dfrac{ny+1}{y+n}$

$xy+nx=ny+1$, $(x-n)y=-nx+1$

$\therefore y=\dfrac{-nx+1}{x-n}$

즉, 역함수는 $f^{-1}(x)=\dfrac{-nx+1}{x-n}$로 항상 존재한다.

ㄷ도 옳다.

$\dfrac{nx+1}{x+n}=x$에서 $nx+1=x^2+nx$, $x^2=1$

$\therefore x=\pm1$

즉, $x=1$과 $x=-1$일 때, 2개의 교점을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답_ ⑤

347

ㄱ, ㄴ은 옳다.

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{c(ax+b)}{c(cx+d)}$

$\quad=\dfrac{a(cx+d)-ad+bc}{c(cx+d)}$

$\quad=\dfrac{a}{c}-\dfrac{ad-bc}{c^2\left(x+\dfrac{d}{c}\right)}$

$\therefore y=-\dfrac{ad-bc}{c^2\left(x+\dfrac{d}{c}\right)}+\dfrac{a}{c}$

위의 함수의 그래프는 $y=-\dfrac{ad-bc}{c^2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{d}{c}$만큼, y축의 방향으로 $\dfrac{a}{c}$만큼 평행이동한 것이므로 점근선은 두 직선 $x=-\dfrac{d}{c}$, $y=\dfrac{a}{c}$이다.

따라서 주어진 그래프에서 $-\dfrac{d}{c}<0$, $\dfrac{a}{c}>0$이므로

$ac>0$, $cd>0$

ㄷ도 옳다.

주어진 함수의 그래프에서 $y=-\dfrac{ad-bc}{c^2x}$의 그래프는 제2, 4사분면을 지나야 하므로

$-(ad-bc)<0$ $\quad\therefore ad-bc>0$

ㄹ은 옳지 않다.

주어진 함수의 그래프의 y절편이 양수이므로 $x=0$을 대입하면 $\dfrac{b}{d}>0$이다.

즉, $b>0$이면 $d>0$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

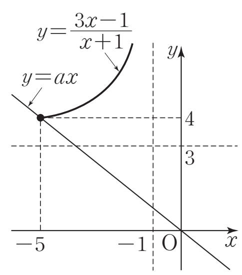
정답_ ④

348

$-5\le x<-1$에서 부등식 $ax\le\dfrac{3x-1}{x+1}$이 항상 성립하려면 직선 $y=ax$가 함수 $y=\dfrac{3x-1}{x+1}$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있어야 한다.

$y=\dfrac{3x-1}{x+1}=\dfrac{3(x+1)-4}{x+1}=3-\dfrac{4}{x+1}$

$\therefore y=-\dfrac{4}{x+1}+3$



위의 함수의 그래프는 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 점근선은 두 직선 $x=-1$, $y=3$이고, $x=-5$일 때 $y=4$이므로 점 $(-5,\ 4)$를 지난다.

직선 $y=ax$가 점 $(-5,\ 4)$를 지날 때,

$4=-5a \qquad \therefore a=-\dfrac{4}{5}$

따라서 $-5\le x<-1$에서 부등식 $ax\le\dfrac{3x-1}{x+1}$이 항상 성립하기 위한 실수 a의 값의 범위는

$a\ge-\dfrac{4}{5}$

이므로 구하는 a의 최솟값은 $-\dfrac{4}{5}$이다. 정답_ ④

349

$f(x)=\dfrac{2x+1}{x-a}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x-a=0,\ y=\dfrac{2}{1}$, 즉 $x=a,\ y=2$

이므로 두 점근선의 교점은 $\mathrm{P}(a,\ 2)$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점이 된다.

따라서 점 $\mathrm{P}(a,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$\mathrm{Q}(2,\ a)$

점 $\mathrm{P}(a,\ 2)$에서 직선 $y=x-2$, 즉 $x-y-2=0$에 이르는 거리가 $2\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{|a-2-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2},\ \dfrac{|a-4|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2},\ |a-4|=4$

$a-4=\pm4 \qquad \therefore a=8\ (\because a>4)$

따라서 $\mathrm{P}(8,\ 2)$, $\mathrm{Q}(2,\ 8)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=(8-2)^2+(2-8)^2=72$ 정답_ 72

05 무리식과 무리함수

350

①은 옳지 않다.

3의 제곱근은 $\pm\sqrt{3}$이다.

②도 옳지 않다.

$2<\sqrt{5}$에서 $2-\sqrt{5}<0$이므로

$\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}=|2-\sqrt{5}|=-(2-\sqrt{5})=\sqrt{5}-2$

③도 옳지 않다.

$\sqrt{a^2}=|a|$, $(\sqrt{a})^2=a\ (a\ge0)$이므로

$a<0$일 때, $\sqrt{a^2}\ne(\sqrt{a})^2$

④도 옳지 않다.

$a<0,\ b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

⑤는 옳다.

$\sqrt{a}+\sqrt{2-a}$가 실수이려면

$a\ge0,\ 2-a\ge0 \Rightarrow a\ge0,\ a\le2$

$\therefore 0\le a\le2$ 정답_ ⑤

351

$\dfrac{1}{2}<a<1$일 때,

$a-1<0,\ 2a-1>0$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(2a-1)^2}$

$=|a-1|+|2a-1|$

$=-(a-1)+(2a-1)$

$=a$ 정답_ ①

352

$1<\sqrt{2}<2,\ 1<\sqrt{3}<2$이므로

$a+b=(2-\sqrt{3})+\sqrt{2}>0$

$a-b=2-\sqrt{3}-\sqrt{2}=(1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{2})<0$

$\therefore$ (주어진 식)$=|a+b|+|a-b|$

$=|2-\sqrt{3}+\sqrt{2}|+|2-\sqrt{3}-\sqrt{2}|$

$=(2-\sqrt{3}+\sqrt{2})-(2-\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$=2\sqrt{2}$ 정답_ ③

353

$\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=-\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$이므로 $x+1\ge0,\ x-1<0$

$\therefore -1\le x<1$

$\therefore \sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-2x+1}$

$=\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(x-1)^2}$

$=|x+1|-|x-1|$

$=x+1+(x-1)\ (\because -1\le x<1)$

$=2x$ 정답_ ③

354

$x=a^2+1$, $y=2a$를 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\sqrt{(a^2+1)+2a}+\sqrt{(a^2+1)-2a}\\&=\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(a-1)^2}\\&=|a+1|+|a-1|\\&=(a+1)-(a-1) \quad \Leftarrow 0<a<1\\&=2\end{aligned}$$

정답_ ②

355

주어진 식의 각 항의 분모를 유리화하면

(i) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1-2}=-1+\sqrt{2}$

(ii) $\dfrac{2009}{\sqrt{2}+\sqrt{2011}}=\dfrac{2009(\sqrt{2}-\sqrt{2011})}{(\sqrt{2}+\sqrt{2011})(\sqrt{2}-\sqrt{2011})}=\dfrac{2009(\sqrt{2}-\sqrt{2011})}{2-2011}=-\sqrt{2}+\sqrt{2011}$

(iii) $\dfrac{2}{\sqrt{2011}+\sqrt{2013}}=\dfrac{2(\sqrt{2011}-\sqrt{2013})}{(\sqrt{2011}+\sqrt{2013})(\sqrt{2011}-\sqrt{2013})}=\dfrac{2(\sqrt{2011}-\sqrt{2013})}{2011-2013}=-\sqrt{2011}+\sqrt{2013}$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{주어진 식})&=1+(-1+\sqrt{2})+(-\sqrt{2}+\sqrt{2011})\\&\quad+(-\sqrt{2011}+\sqrt{2013})\\&=\sqrt{2013}\end{aligned}$$

정답_ ⑤

356

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\frac{(\sqrt{21}-\sqrt{5})^2+(\sqrt{21}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{21}+\sqrt{5})(\sqrt{21}-\sqrt{5})}\\&=\frac{(21-2\sqrt{105}+5)+(21+2\sqrt{105}+5)}{21-5}\\&=\frac{52}{16}=3.25\end{aligned}$$

정답_ ④

357

맨 아래쪽의 분모부터 유리화해 나가면

$$\begin{aligned}1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\sqrt{2}}}&=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{\sqrt{2}}{2}}=1-\cfrac{1}{\cfrac{2-\sqrt{2}}{2}}\\&=1-\frac{2}{2-\sqrt{2}}\\&=1-\frac{2(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}\\&=1-\frac{2(2+\sqrt{2})}{4-2}\\&=1-(2+\sqrt{2})\\&=-1-\sqrt{2}\end{aligned}$$

정답_ ①

다른 풀이

분자, 분모에 $\sqrt{2}$를 곱하면

$$\begin{aligned}1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\sqrt{2}}}&=1-\cfrac{1\times\sqrt{2}}{\left(1-\cfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\times\sqrt{2}}=1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\\&=1-\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\\&=1-(2+\sqrt{2})\\&=-1-\sqrt{2}\end{aligned}$$

358

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)}&=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\\&=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}\\&=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{x-(x+1)}\\&=-(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore k&=\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(7)}\\&=-\{(\sqrt{1}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{4})+\cdots\\&\quad+(\sqrt{7}-\sqrt{8})\}\\&=-(\sqrt{1}-\sqrt{8})=\sqrt{8}-1\end{aligned}$$

$1<\sqrt{8}-1<2$이므로 $1<k<2$

따라서 $n<k<n+1$을 만족시키는 자연수 n의 값은 1이다.

정답_ ①

359

$$\begin{aligned}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})(1+x)}{x}&=\frac{(1-x)(1+x)}{x}\\&=\frac{1-x^2}{x}\end{aligned}$$

위의 식에 $x=\sqrt{2}$를 대입하면

$$\frac{1-x^2}{x}=\frac{1-(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}}=\frac{1-2}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

정답_ ②

360

$$\begin{aligned}x&=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\\&=\frac{2+2\sqrt{2}+1}{2-1}=3+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\frac{(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\\&=\frac{(x-2\sqrt{x}+1)+(x+2\sqrt{x}+1)}{x-1}\\&=\frac{2x+2}{x-1}\end{aligned}$$

$x=3+2\sqrt{2}$를 대입하면

$$(\text{주어진 식})=\frac{2(3+2\sqrt{2})+2}{(3+2\sqrt{2})-1}$$
$$=\frac{4\sqrt{2}+8}{2\sqrt{2}+2}=\frac{4(\sqrt{2}+2)}{2(\sqrt{2}+1)}$$
$$=\frac{2(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$
$$=\frac{2(2-\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2)}{2-1}=2\sqrt{2}$$

정답_ ②

361

$$x=\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\frac{5(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})}=\sqrt{7}-\sqrt{2}$$
$$y=\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}=\frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})}=\sqrt{7}+\sqrt{2}$$

$\therefore x+y=2\sqrt{7},\ xy=5$

$$\therefore \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}}{\frac{x+y}{xy}}=\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)}$$
$$=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy(x+y)}$$
$$=\frac{(2\sqrt{7})^2-2\cdot5}{5\cdot2\sqrt{7}}=\frac{18}{10\sqrt{7}}=\frac{9\sqrt{7}}{35}$$

정답_ ④

362

$x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$에서

$x-1=\sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $x^2-2x+1=2$ $\quad\therefore x^2=2x+1$ ...... ㉠

㉠의 양변에 x를 곱하면

$x^3=2x^2+x=2(2x+1)+x=5x+2$ ...... ㉡

주어진 식에 ㉠, ㉡을 대입하면

$x^3-x^2-3x+4=(5x+2)-(2x+1)-3x+4$
$=5$

정답_ ②

363

$x=2-\sqrt{3}$에서 $x-2=-\sqrt{3}$

양변을 제곱하면 $x^2-4x+4=3$ $\quad\therefore x^2=4x-1$ ...... ㉠

㉠의 양변에 x를 곱하면

$x^3=4x^2-x=4(4x-1)-x=15x-4$ ...... ㉡

주어진 식에 ㉠, ㉡을 대입하면

$$\frac{x^3-6x^2+4x-7}{x^2-4x+6}=\frac{(15x-4)-6(4x-1)+4x-7}{(4x-1)-4x+6}$$
$$=\frac{-5x-5}{5}=-x-1$$
$$=-(2-\sqrt{3})-1$$
$$=-3+\sqrt{3}$$

정답_ ②

364

좌변을 전개하여 $\sqrt{3}$에 대하여 정리하면

$a+2a\sqrt{3}+b-b\sqrt{3}=6$

$(a+b)+(2a-b)\sqrt{3}=6$

$\therefore a+b=6,\ 2a-b=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=4$

$\therefore ab=2\cdot4=8$

정답_ ④

365

좌변을 전개하여 $\sqrt{2}$에 대하여 정리하면

$x-y\sqrt{2}+x\sqrt{2}-2y=-2+3\sqrt{2}$

$(x-2y)+(x-y)\sqrt{2}=-2+3\sqrt{2}$

$\therefore x-2y=-2,\ x-y=3$

두 식을 연립하여 풀면

$x=8,\ y=5$

$\therefore x+y=13$

정답_ 13

366

조건 (가)에서 좌변을 전개하여 $\sqrt{2}$에 대하여 정리하면

$a(a+1)-a^2\sqrt{2}+(a+1)\sqrt{2}-2a=4-a-b\sqrt{2}$

$(a^2-a)-(a^2-a-1)\sqrt{2}=4-a-b\sqrt{2}$

$\therefore a^2-a=4-a,\ a^2-a-1=b$ ...... ㉠

조건 (나)에서 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$이므로 $a<0,\ b\geq0$

㉠의 $a^2-a=4-a$에서 $a^2=4$이므로

$a=-2$ ($\because a<0$)

$\therefore b=a^2-a-1=4+2-1=5$

$\therefore ab=(-2)\cdot5=-10$

정답_ -10

367

(1) $x+2\geq0$에서 $x\geq-2$

따라서 주어진 무리함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\geq-2\}$

(2) $3-2x\geq0$에서 $x\leq\frac{3}{2}$

따라서 주어진 무리함수의 정의역은

$\left\{x\,\middle|\,x\leq\frac{3}{2}\right\}$

(3) $4-x^2\geq0$에서 $x^2-4\leq0,\ (x+2)(x-2)\leq0$

$\therefore -2\leq x\leq2$

따라서 주어진 무리함수의 정의역은

$\{x\,|\,-2\leq x\leq2\}$

정답_ (1) $\{x\,|\,x\geq-2\}$ (2) $\left\{x\,\middle|\,x\leq\frac{3}{2}\right\}$ (3) $\{x\,|\,-2\leq x\leq2\}$

368

$y-a=\sqrt{-3x+6}$에서 $-3x+6\geq 0$, $y-a\geq 0$

$\therefore x\leq 2$, $y\geq a$

따라서 정의역은 $\{x\,|\,x\leq 2\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\geq a\}$이므로

$b=2$, $a=-1$ $\quad\therefore a+b=1$ 정답_ ⑤

369

주어진 함수는 정의역이 $\{x\,|\,x\leq 2\}$, 치역이 $\{y\,|\,y\geq -1\}$이므로

$y=\sqrt{a(x-2)}-1$ ······ ㉠

㉠의 함수의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{a(1-2)}-1$, $\sqrt{-a}=2$ $\quad\therefore a=-4$

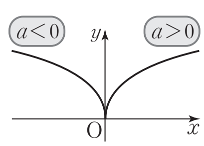
이 값을 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{-4(x-2)}-1=\sqrt{-4x+8}-1$

따라서 $a=-4$, $b=8$, $c=1$이므로 $a+b+c=5$ 정답_ ⑤

370

$y=\sqrt{ax}$ $(a\neq 0)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



ㄱ은 옳다.

치역은 $\{y\,|\,y\geq 0\}$이다.

ㄴ도 옳다.

$a>0$일 때, 그래프는 제1사분면을 지난다.

ㄷ은 옳지 않다.

$|a|$의 값이 커질수록 y의 값이 커지므로 그래프는 x축에서 멀어진다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 정답_ ㄱ, ㄴ

371

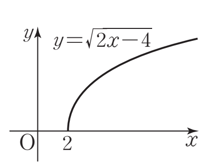
무리함수 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프가 주어진 그림과 같으려면 $a<0$이어야 한다.

$\therefore \dfrac{|a|}{a}=\dfrac{-a}{a}=-1$ 정답_ -1

372

(1) $y=\sqrt{2x-4}=\sqrt{2(x-2)}$

위의 함수의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

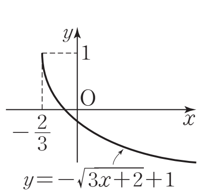


정의역은 $\{x\,|\,x\geq 2\}$

치역은 $\{y\,|\,y\geq 0\}$

(2) $y=-\sqrt{3x+2}+1=-\sqrt{3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)}+1$

위의 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{2}{3}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

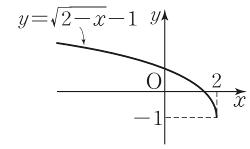


정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\geq -\dfrac{2}{3}\right\}$

치역은 $\{y\,|\,y\leq 1\}$

(3) $y=\sqrt{2-x}-1=\sqrt{-(x-2)}-1$

위의 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고

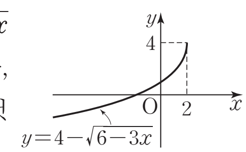


정의역은 $\{x\,|\,x\leq 2\}$

치역은 $\{y\,|\,y\geq -1\}$

(4) $y=4-\sqrt{6-3x}=-\sqrt{-3(x-2)}+4$

위의 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고



정의역은 $\{x\,|\,x\leq 2\}$

치역은 $\{y\,|\,y\leq 4\}$ 정답_ 풀이 참조

373

주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$y=\sqrt{a\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}-1$ ······ ㉠

위의 함수의 그래프가 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=\sqrt{a\left(0+\dfrac{1}{2}\right)}-1$

$\sqrt{\dfrac{a}{2}}=1$, $\dfrac{a}{2}=1$ $\quad\therefore a=2$

이 값을 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}-1=\sqrt{2x+1}-1$

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=-1$이므로

$a+b+c=2$ 정답_ ④

374

무리함수 $y=\sqrt{-2x+4}+a$의 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$x=0$, $y=3$을 대입하면 $3=\sqrt{4}+a$ $\quad\therefore a=1$

무리함수 $y=\sqrt{-2x+4}+1$의 그래프가 점 $(b,\ 1)$을 지나므로

$x=b$, $y=1$을 대입하면 $1=\sqrt{-2b+4}+1$

$\sqrt{-2b+4}=0$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore a+b=1+2=3$ 정답_ ①

375

$y=-\sqrt{ax+b}+c=-\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+c$

위의 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

(i) 주어진 함수의 그래프의 출발점이 제1사분면에 있으므로
$-\frac{b}{a}>0$, $c>0$이다.
(ii) 주어진 함수의 그래프가 왼쪽으로 뻗어가므로 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프의 모양이 $a<0$일 때이다.
$\therefore a<0,\ b>0,\ c>0$ 정답_③

376

$y=\sqrt{2x-4}+1=\sqrt{2(x-2)}+1$
위의 함수의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로
$m=2,\ n=1 \qquad \therefore m-n=1$ 정답_③

377

$y=a\sqrt{x}+4$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 $y=a\sqrt{x-m}+4+n$
위의 함수의 그래프가 함수 $y=\sqrt{9x-18}$, 즉 $y=3\sqrt{x-2}$의 그래프와 일치하므로 $a=3,\ m=2,\ 4+n=0$
$\therefore a=3,\ m=2,\ n=-4$
$\therefore a+m+n=3+2+(-4)=1$ 정답_①

378

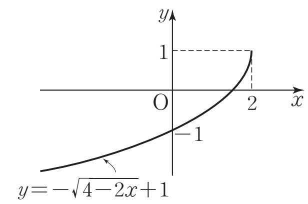
$y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동하면
$y=\sqrt{a(x-2)}$
이것을 다시 y축에 대하여 대칭이동하면
$y=\sqrt{a(-x-2)}$
위의 함수의 그래프가 점 $(1,\ 3)$을 지나므로
$3=\sqrt{a(-1-2)}$, $3=\sqrt{-3a}$, $9=-3a$
$\therefore a=-3$ 정답_①

379

함수 $y=\sqrt{2x+3}+4$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면
$y=\sqrt{2(x-m)+3}+4+n=\sqrt{2x+(3-2m)}+(4+n)$
위의 함수의 그래프가 $y=\sqrt{2x-3}-4$의 그래프와 일치하므로
$3-2m=-3,\ 4+n=-4 \qquad \therefore m=3,\ n=-8$
$\therefore m^2+n^2=9+64=73$ 정답_③

380

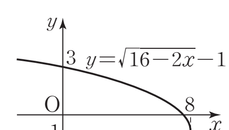
①은 옳다.
$4-2x\geq 0$에서 $x\leq 2$
따라서 정의역은 $\{x\,|\,x\leq 2\}$이다.
②도 옳다.
$y-1=-\sqrt{4-2x}\leq 0$에서 $y\leq 1$
따라서 치역은 $\{y\,|\,y\leq 1\}$이다.
③은 옳지 않다.
$y=-\sqrt{4-2x}+1=-\sqrt{-2(x-2)}+1$
따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
④는 옳다.
오른쪽 그림에서 주어진 함수의 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.



⑤도 옳다.
주어진 식에 $y=0$을 대입하면
$0=-\sqrt{4-2x}+1$, $\sqrt{4-2x}=1$, $4-2x=1$
$\therefore x=\frac{3}{2}$
따라서 점 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$을 지난다.
그러므로 옳지 않은 것은 ③이다. 정답_③

381

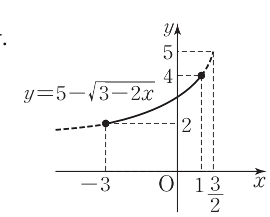
①은 옳다.
$16-2x\geq 0$에서 $x\leq 8$이므로 정의역은 $\{x\,|\,x\leq 8\}$이다.
②도 옳다.
$y+1=\sqrt{16-2x}\geq 0$에서 $y\geq -1$
따라서 치역은 $\{y\,|\,y\geq -1\}$이다.
③도 옳다.
$y=\sqrt{16-2x}-1=\sqrt{-2(x-8)}-1$
따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 8만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
④도 옳다.
오른쪽 그림에서 주어진 함수의 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다.



⑤는 옳지 않다.
주어진 식에 $x=0$을 대입하면 $y=\sqrt{16-0}-1=4-1=3$
따라서 y절편은 3이다.
그러므로 옳지 않은 것은 ⑤이다. 정답_⑤

382

$y=5-\sqrt{3-2x}=-\sqrt{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)}+5$
위의 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로 $-3\leq x\leq 1$의 부분만 잘라내면 다음 그림과 같다.
따라서
$x=1$일 때 최댓값 $M=4$,
$x=-3$일 때 최솟값 $m=2$
를 가지므로 $Mm=4\cdot 2=8$



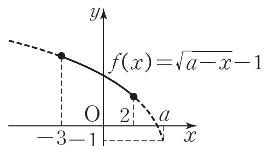
정답_③

383

$f(x)=\sqrt{a-x}-1=\sqrt{-(x-a)}-1$

위의 함수의 그래프는

$f(x)=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로



$-3\le x\le 2$의 부분만 잘라내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=-3$일 때 최댓값, $x=2$일 때 최솟값을 가진다.

주어진 조건에서 최댓값이 2이므로

$f(-3)=\sqrt{a+3}-1=2,\ \sqrt{a+3}=3,\ a+3=9$

$\therefore a=6$

따라서 구하는 최솟값은

$f(2)=\sqrt{a-2}-1=\sqrt{6-2}-1=2-1=1$

정답_ ①

384

(1) $y=\sqrt{x}$에서 $x\ge 0,\ y\ge 0$

위의 식의 x와 y를 서로 바꾸면 $x=\sqrt{y}\ (y\ge 0,\ x\ge 0)$

양변을 제곱하면 $x^2=y$

$\therefore y=x^2\ (x\ge 0)$

(2) $y=\sqrt{2-x}$에서 $x\le 2,\ y\ge 0$

위의 식의 x와 y를 서로 바꾸면 $x=\sqrt{2-y}\ (y\le 2,\ x\ge 0)$

양변을 제곱하면 $x^2=2-y$

$\therefore y=-x^2+2\ (x\ge 0)$

(3) $y=-\sqrt{2x}-1$, 즉 $y+1=-\sqrt{2x}$에서 $x\ge 0,\ y\le -1$

위의 식의 x와 y를 서로 바꾸면

$x+1=-\sqrt{2y}\ (y\ge 0,\ x\le -1)$

양변을 제곱하면 $(x+1)^2=2y$

$\therefore y=\frac{1}{2}(x+1)^2\ (x\le -1)$

(4) $y=1-\sqrt{1-x}$, 즉 $y-1=-\sqrt{1-x}$에서 $x\le 1,\ y\le 1$

위의 식의 x와 y를 서로 바꾸면

$x-1=-\sqrt{1-y}\ (y\le 1,\ x\le 1)$

양변을 제곱하면 $(x-1)^2=1-y$

$\therefore y=-(x-1)^2+1\ (x\le 1)$

정답_ (1) $y=x^2\ (x\ge 0)$ (2) $y=-x^2+2\ (x\ge 0)$

(3) $y=\frac{1}{2}(x+1)^2\ (x\le -1)$ (4) $y=-(x-1)^2+1\ (x\le 1)$

385

$y=\sqrt{x-2}+2\ (x\ge 2,\ y\ge 2)$의 x와 y를 서로 바꾸면

$x-2=\sqrt{y-2}\ (x\ge 2,\ y\ge 2)$

양변을 제곱하여 정리하면 $y=x^2-4x+6\ (x\ge 2)$

따라서 $a=-4,\ b=6,\ c=2$이므로

$a+b+c=-4+6+2=4$

정답_ ④

386

$y=\sqrt{x+1}+2$의 정의역이 $\{x\,|\,0\le x\le 3\}$일 때, 치역은 $\{y\,|\,3\le y\le 4\}$이다.

$y=\sqrt{x+1}+2\ (0\le x\le 3,\ 3\le y\le 4)$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 x와 y를 서로 바꾸면

$x=\sqrt{y+1}+2\ (0\le y\le 3,\ 3\le x\le 4)$

$\therefore x-2=\sqrt{y+1}$

양변을 제곱하면

$(x-2)^2=y+1 \qquad \therefore y=x^2-4x+3$

따라서 주어진 함수의 역함수는

$y=x^2-4x+3\ (3\le x\le 4)$

정답_ ①

387

$y=\sqrt{2x+6}$에서 $x\ge -3,\ y\ge 0$

위의 식의 x와 y를 서로 바꾸면

$x=\sqrt{2y+6}\ (y\ge -3,\ x\ge 0)$

양변을 제곱하면 $x^2=2y+6$

$\therefore y=\frac{1}{2}x^2-3\ (x\ge 0)$ ⋯⋯ ㉠

㉠과 $y=\frac{1}{2}x$를 연립하면

$\frac{1}{2}x^2-3=\frac{1}{2}x,\ x^2-x-6=0,\ (x+2)(x-3)=0$

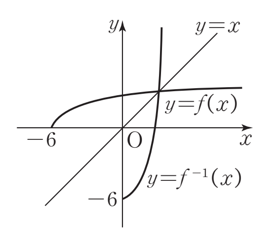
$\therefore x=3\ (\because x\ge 0)$

따라서 ㉠의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x$의 교점의 x좌표는 3이다.

정답_ ⑤

388

함수의 그래프와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{x+6}=x$의 양변을 제곱하면 $x+6=x^2$

$x^2-x-6=0,\ (x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=3\ (\because x\ge 0)$

따라서 교점의 좌표는 $(3,\ 3)$이므로 $a=3,\ b=3$

$\therefore a+b=6$

정답_ ⑤

389

$f^{-1}(2)=k$로 놓으면 $f(k)=2$

$\therefore \sqrt{3k-5}=2$

양변을 제곱하면 $3k-5=4$

$\therefore k=3 \qquad \therefore f^{-1}(2)=3$

정답_ 3

다른 풀이

$y=\sqrt{3x-5}$의 x와 y를 서로 바꾸면 $x=\sqrt{3y-5}$

양변을 제곱하면 $x^2=3y-5$ $\therefore y=\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{3}$

따라서 $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{3}$이므로 $f^{-1}(2)=\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=3$

390

함수 $g(x)$가 $f(x)$의 역함수이므로

$g(5)=10$에서 $f(10)=5$

$f(2)=\sqrt{2a+b}=3$ $\therefore 2a+b=9$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(10)=\sqrt{10a+b}=5$ $\therefore 10a+b=25$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=5$

$\therefore a+b=2+5=7$

정답_①

391

$f^{-1}(1)=a$로 놓으면 $f(a)=1$

$\sqrt{7-3a}=1,\ 7-3a=1$ $\therefore a=2$

$\therefore f^{-1}(1)=2$

$(f^{-1}\circ f^{-1})(1)=f^{-1}(f^{-1}(1))=f^{-1}(2)$이므로

$f^{-1}(2)=b$로 놓으면 $f(b)=2$

$\sqrt{7-3b}=2,\ 7-3b=4$ $\therefore b=1$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(1)=(f^{-1}(f^{-1}(1))=f^{-1}(2)=1$

정답_①

392

$(g\circ f^{-1})^{-1}(1)=(f\circ g^{-1})(1)=f(g^{-1}(1))$이므로

$g^{-1}(1)=k$로 놓으면 $g(k)=1$

$\sqrt{2k-3}=1,\ 2k-3=1$ $\therefore k=2$

$\therefore g^{-1}(1)=2$

$\therefore (g\circ f^{-1})^{-1}(1)=f(g^{-1}(1))=f(2)$

$=\frac{2}{2-1}=2$

정답_②

393

$(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(3)$

$=(g^{-1}\circ f)(3)\ (\because (f\circ f^{-1})(x)=x)$

$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$이므로

$f(3)=\frac{3+1}{3-1}=\frac{4}{2}=2$

$g^{-1}(2)=a$로 놓으면 $g(a)=\sqrt{2a-1}=2$이므로

$2a-1=4$에서 $a=\frac{5}{2}$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(3)=(g^{-1}\circ f)(3)$

$=g^{-1}(f(3))$

$=g^{-1}(2)=\frac{5}{2}$

정답_③

394

$\sqrt{4x+5}=x+k$의 양변을 제곱하면

$4x+5=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+2(k-2)x+k^2-5=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

함수 $y=\sqrt{4x+5}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접하려면 ㉠이 중근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라고 하면

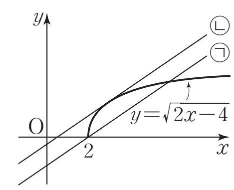
$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(k^2-5)=0$

$k^2-4k+4-k^2+5=0,\ -4k+9=0$

$\therefore k=\frac{9}{4}$

정답_⑤

395



함수 $y=\sqrt{2x-4}=\sqrt{2(x-2)}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 직선 $y=\frac{1}{2}x+a$가 오른쪽 그림의 ㉠과 ㉡ 사이에 있을 때 서로 다른 두 점에서 만난다.

㉠은 직선 $y=\frac{1}{2}x+a$가 점 $(2,\ 0)$을 지날 때이므로

$0=\frac{1}{2}\cdot 2+a$ $\therefore a=-1$

㉡은 함수 $y=\sqrt{2x-4}$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x+a$가 접할 때이므로

$\sqrt{2x-4}=\frac{1}{2}x+a$에서 $2x-4=\left(\frac{1}{2}x+a\right)^2$

$2x-4=\frac{1}{4}x^2+ax+a^2,\ 8x-16=x^2+4ax+4a^2$

$\therefore x^2+2(2a-4)x+4a^2+16=0$

위 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(2a-4)^2-4a^2-16=0$

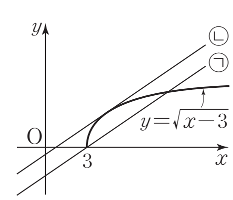
$\therefore a=0$

따라서 상수 a의 값의 범위는

$-1\le a<0$

정답_③

396



함수 $y=\sqrt{x-3}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 직선 $y=x+k$가 오른쪽 그림의 ㉠의 아래쪽에 있을 때 또는 ㉡일 때 한 점에서 만난다.

㉠은 직선 $y=x+k$가 점 $(3,\ 0)$을 지날 때이므로

$0=3+k$ $\therefore k=-3$

따라서 $k<-3$이면 한 점에서 만난다.

㉡은 함수 $y=\sqrt{x-3}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때이므로

$\sqrt{x-3}=x+k$에서 $x-3=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2+3=0$

위 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2+3)=0$

$-4k-11=0 \qquad \therefore k=-\frac{11}{4}$

따라서 한 점에서 만나도록 하는 상수 k의 값의 범위는

$k<-3$ 또는 $k=-\frac{11}{4}$

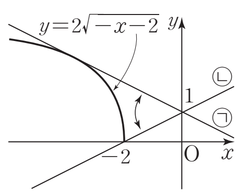
이므로 주어진 수 중에서 상수 k의 값이 될 수 없는 것은 -3이다.

정답_ ④

397

$A=\{x|ax+1=2\sqrt{-x-2}\}\neq\varnothing$이려면 직선 $y=ax+1$과 함수 $y=2\sqrt{-x-2}$의 그래프가 만나야 한다.

함수 $y=2\sqrt{-x-2}=2\sqrt{-(x+2)}$의 그래프는 $y=2\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=ax+1$은 a의 값에 관계없이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 만나려면 직선이 오른쪽 그림의 ㉠과 ㉡ 사이에 있어야 한다.



㉠은 직선 $y=ax+1$과 함수 $y=2\sqrt{-x-2}$의 그래프가 접할 때이므로 $ax+1=2\sqrt{-x-2}$의 양변을 제곱하면

$a^2x^2+2ax+1=-4x-8$

$\therefore a^2x^2+2(a+2)x+9=0$

위 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(a+2)^2-9a^2=0$

$-8a^2+4a+4=0,\ 2a^2-a-1=0$

$(a-1)(2a+1)=0$

$\therefore a=-\frac{1}{2}\ (\because a<0)$

㉡은 직선 $y=ax+1$이 점 $(-2,\ 0)$을 지날 때이므로

$0=-2a+1 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 실수 a의 값의 범위는

$-\frac{1}{2}\le a\le\frac{1}{2}$

정답_ ③

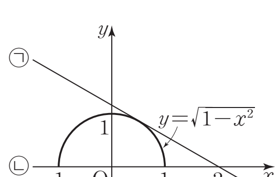
398

$y=\sqrt{1-x^2}$의 양변을 제곱하면 $\quad y^2=1-x^2$

$\therefore x^2+y^2=1$

따라서 함수 $y=\sqrt{1-x^2}$의 그래프는 원 $x^2+y^2=1$의 위쪽 반원이다.

또, 직선 $y=m(x-2)$는 m의 값에 관계없이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선이 오른쪽 그림의 ㉠과 ㉡ 사이에 있어야 한다.



㉠일 때, 직선 $mx-y-2m=0$이 원 $x^2+y^2=1$에 접하므로 원의 중심 $(0,\ 0)$에서 직선까지의 거리는 원의 반지름의 길이인 1과 같다.

$\frac{|0-0-2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$에서 $\quad |-2m|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $\quad 4m^2=m^2+1,\ m^2=\frac{1}{3}$

$\therefore m=-\frac{\sqrt{3}}{3}\ (\because m<0)$

㉡일 때, 직선 $y=m(x-2)$의 기울기가 0이므로 $m=0$이다.

따라서 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 상수 m의 값의 범위는

$-\frac{\sqrt{3}}{3}<m\le 0$

정답_ $-\frac{\sqrt{3}}{3}<m\le 0$

399

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{kx^2-kx+3}$의 값이 실수가 되어야 하므로

$kx^2-kx+3\ge 0$

이어야 한다. ❶

(ⅰ) $k=0$일 때,

$3\ge 0$이므로 성립한다.

(ⅱ) $k\neq 0$일 때,

$k>0$이고 이차방정식 $kx^2-kx+3=0$의 판별식을 D라고 하면 $D\le 0$이어야 한다.

즉, $D=(-k)^2-4\cdot k\cdot 3=k^2-12k\le 0,\ k(k-12)\le 0$

$\therefore 0<k\le 12\ (\because k>0)$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $0\le k\le 12$ ❷

따라서 정수 k는 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 12$로 13개이다. ❸

정답_ 13

단계	채점 기준	비율
❶	모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{kx^2-kx+3}$의 값이 실수가 되는 조건 알기	30%
❷	k의 값의 범위 구하기	60%
❸	정수 k의 개수 구하기	10%

400

$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$에서 $\quad 2x-1=-\sqrt{5}$

양변을 제곱하면 $4x^2-4x+1=5$

$\therefore x^2=x+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

❶

㉠의 양변에 x를 곱하면

$x^3=x^2+x=(x+1)+x=2x+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

❷

주어진 식의 좌변에 ㉠, ㉡을 대입하면

$$\begin{aligned} x^3-x^2+3x &= (2x+1)-(x+1)+3x \\ &= 4x \\ &= 4\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ &= 2-2\sqrt{5} \\ &= a+b\sqrt{5} \end{aligned}$$

$\therefore a=2,\ b=-2$

$\therefore a-b=2-(-2)=4$ ❸

정답_ 4

단계	채점 기준	비율
❶	x^2을 x에 대한 일차식으로 나타내기	20%
❷	x^3을 x에 대한 일차식으로 나타내기	20%
❸	$a-b$의 값 구하기	60%

401

함수 $y=\sqrt{-2x+a}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$y=\sqrt{-2(x-1)+a}+b$

$=\sqrt{-2x+2+a}+b$ ······ ㉠

❶

㉠이 $y=\sqrt{-2x+4}-3$과 일치해야 하므로

$2+a=4,\ b=-3$

$\therefore a=2,\ b=-3$ ❷

정답_ $a=2,\ b=-3$

단계	채점 기준	비율
❶	$y=\sqrt{-2x+a}$의 그래프를 평행이동한 그래프의 식 구하기	50%
❷	$a,\ b$의 값 구하기	50%

402

유리함수 $y=\dfrac{5x+14}{x+3}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x+3=0,\ y=\dfrac{5}{1}$, 즉 $x=-3,\ y=5$

$\therefore a=-3,\ b=5$ ❶

$y=\sqrt{ax+b}=\sqrt{-3x+5}$에서 $-3x+5\ge 0$

$x\le\dfrac{5}{3}$

따라서 무리함수 $y=\sqrt{-3x+5}$의 정의역은

$\left\{x\,\middle|\,x\le\dfrac{5}{3}\right\}$ ❷

정답_ $\left\{x\,\middle|\,x\le\dfrac{5}{3}\right\}$

단계	채점 기준	비율
❶	$a,\ b$의 값 구하기	50%
❷	$y=\sqrt{ax+b}$의 정의역 구하기	50%

403

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2,\ y=3$이므로

$y=\dfrac{k}{x-2}+3$ ······ ㉠

으로 놓으면 ㉠의 그래프가 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{k}{0-2}+3,\ \dfrac{k}{2}=3$

$\therefore k=6$

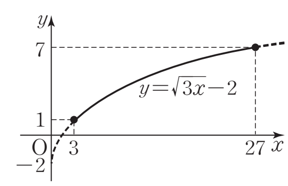
이 값을 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{6}{x-2}+3=\dfrac{3x}{x-2}$

$\therefore a=3,\ b=0,\ c=-2$ ❶

$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{3x}-2$

위의 함수의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 $3\le x\le 27$의 부분만 잘라내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서

$x=27$일 때 최댓값 7,

$x=3$일 때 최솟값 1

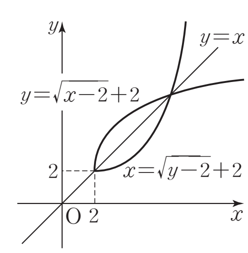
을 가지므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 8이다. ❷

정답_ 8

단계	채점 기준	비율
❶	$a,\ b,\ c$의 값 구하기	50%
❷	최댓값과 최솟값의 합 구하기	50%

404

함수의 그래프와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 주어진 두 함수의 그래프의 교점은 오른쪽 그림과 같이 $y=\sqrt{x-2}+2$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



❶

$\sqrt{x-2}+2=x$에서 $\sqrt{x-2}=x-2$

양변을 제곱하면 $x-2=(x-2)^2$

$x^2-5x+6=0,\ (x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

따라서 두 교점의 좌표는 $(2,\ 2),\ (3,\ 3)$이다. ❷

두 점 $(2,\ 2),\ (3,\ 3)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(3-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$ ❸

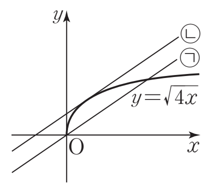
정답_ $\sqrt{2}$

단계	채점 기준	비율
❶	함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 함수의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같음을 알기	30%
❷	교점의 좌표 구하기	40%
❸	두 교점 사이의 거리 구하기	30%

405

방정식 $\sqrt{4x}=x+a$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=\sqrt{4x}$의 그래프와 직선 $y=x+a$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다. ······ ❶

함수 $y=\sqrt{4x}$의 그래프와 직선 $y=x+a$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선이 오른쪽 그림의 ㉠과 ㉡ 사이에 있어야 한다. ······ ❷



㉠은 직선 $y=x+a$가 점 $(0,\ 0)$을 지날 때이므로

$0=0+a \qquad \therefore a=0$

㉡은 함수 $y=\sqrt{4x}$의 그래프와 직선 $y=x+a$가 접할 때이므로

$\sqrt{4x}=x+a$에서 $4x=x^2+2ax+a^2$

$\therefore x^2+2(a-2)x+a^2=0$

위 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(a-2)^2-a^2=0,\ -4a+4=0$

$\therefore a=1$

따라서 상수 a의 값의 범위는

$0\le a<1$ ······ ❸

정답_ $0\le a<1$

단계	채점 기준	비율
❶	방정식 $\sqrt{4x}=x+a$가 서로 다른 두 실근을 가질 조건을 두 함수에 대한 조건으로 이해하기	20%
❷	함수 $y=\sqrt{4x}$의 그래프와 직선 $y=x+a$가 서로 다른 두 점에서 만나는 조건 알기	20%
❸	a의 값의 범위 구하기	60%

406

$n^2<n^2+n<(n+1)^2$에서 $n<\sqrt{n^2+n}<n+1$이므로

$\sqrt{n^2+n}$의 정수부분은 n이고, 소수부분은

$a_n=\sqrt{n^2+n}-n$

$$\begin{aligned}\frac{n}{a_n}&=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}-n}\\&=\frac{n(\sqrt{n^2+n}+n)}{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}\\&=\sqrt{n^2+n}+n\end{aligned}$$

$\sqrt{n^2+n}$의 정수부분이 n이므로 $\dfrac{n}{a_n}=\sqrt{n^2+n}+n$의 정수부분은 $\boxed{2}\,n$이다.

정답_ ②

407

주어진 함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서

(i) ∪자 모양이므로 $a>0$

(ii) 축이 y축의 오른쪽에 있으면 $a,\ b$의 부호는 다르므로 $b<0$

(iii) y절편이 음수이므로 $c<0$

$y=\sqrt{cx+b}+a=\sqrt{c\left(x+\dfrac{b}{c}\right)}+a$

구하는 함수의 그래프는 $y=\sqrt{cx}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{b}{c}$만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

이때, $a>0,\ b<0,\ c<0$에서 $-\dfrac{b}{c}<0,\ a>0$이므로 그래프는 제2사분면에서 출발해야 한다.

또, $c<0$에서 $y=\sqrt{cx}$의 그래프는 제2사분면을 지나야 하므로 구하는 그래프의 개형은 ①이다.

정답_ ①

408

함수 $f(x)$의 역함수를 구하면

$y=\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{1}{5}k\ (x\ge0)$에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x=\dfrac{1}{5}y^2+\dfrac{1}{5}k\ (y\ge0)$

$y^2=5x-k$

$y=\sqrt{5x-k}\ (\because y\ge0) \qquad \therefore f^{-1}(x)=\sqrt{5x-k}$

즉, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수 관계에 있다.

따라서 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{1}{5}k=x$

즉, 이차방정식 $x^2-5x+k=0$이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$k\ge0,\ D=(-5)^2-4k>0$에서 $k<\dfrac{25}{4}$

따라서 $0\le k<\dfrac{25}{4}$이므로 정수 k는 $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$으로 7개이다.

정답_ ②

409

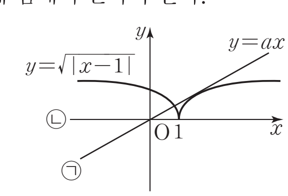
집합 $A\cap B$의 원소의 개수가 3이므로 함수 $y=\sqrt{|x-1|}$의 그래프와 직선 $y=ax$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$y=\sqrt{|x-1|}$에서

$x<1$일 때, $y=\sqrt{-x+1}$

$x\ge1$일 때, $y=\sqrt{x-1}$

따라서 $y=\sqrt{|x-1|}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $y=\sqrt{|x-1|}$의 그래프와 직선 $y=ax$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 위의 그림의 ㉠과 ㉡ 사이에 있어야 한다.

㉠은 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프와 직선 $y=ax$가 접할 때이므로

$\sqrt{x-1}=ax$에서 양변을 제곱하면

$x-1=a^2x^2,\ a^2x^2-x+1=0$

위 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(-1)^2-4a^2=0 \qquad \therefore a=\pm\dfrac{1}{2}$

$a>0$이어야 하므로 $a=\dfrac{1}{2}$

㉡일 때, 직선 $y=ax$의 기울기가 0이므로 $a=0$

따라서 구하는 상수 a의 값의 범위는 $0<a<\dfrac{1}{2}$

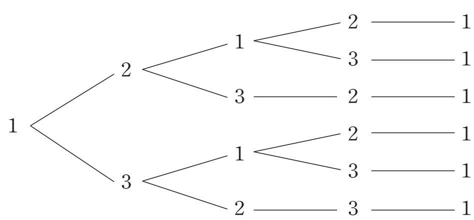
정답_ ④

VI 경우의 수

06 순열

410

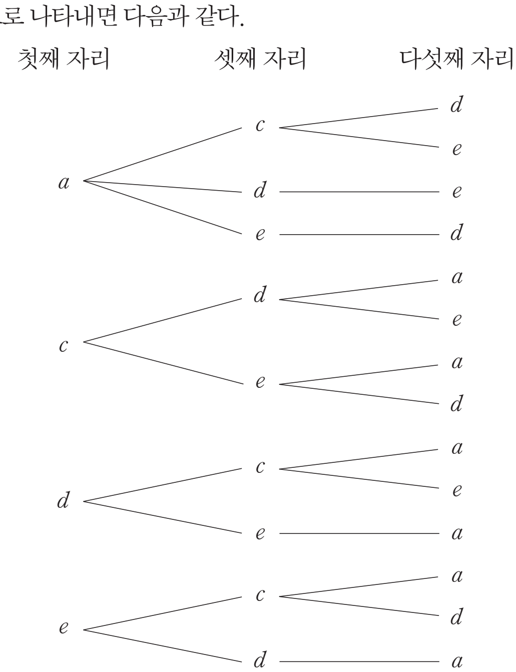
만의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자가 같은 다섯 자리 자연수는 1□□□1, 2□□□2, 3□□□3 꼴의 3가지이다.
1□□□1 꼴의 자연수들을 크기가 작은 순서대로 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 1□□□1 꼴의 자연수들은 6가지이므로 2□□□2, 3□□□3 꼴의 자연수들도 각각 6가지이다.
∴ (전체 경우의 수)$=3\cdot6=18$ 정답_ 18

411

조건 (가), (나), (다)에 의해 첫째, 셋째, 다섯째 자리를 채우는 것을 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 첫째, 셋째, 다섯째 자리를 채우는 방법이
$4+4+3+3=14$(가지)이고, 남은 둘째, 넷째 자리를 남은 두 개의 문자로 채우는 방법은 각각 2가지씩 있다.
∴ (구하는 문자열의 개수)$=14\cdot2=28$ 정답_ ②

412

A, B, C, D, E의 우산을 각각 a, b, c, d, e라고 하자.
A는 B의 우산을 가지고 나오고 B, C, D, E는 모두 다른 사람의 우산을 가지고 나오는 경우를 나열하면 다음과 같다.

(A, B, C, D, E)$=\{(b, a, d, e, c), (b, a, e, c, d),$
$(b, c, a, e, d), (b, c, d, e, a),$
$(b, c, e, a, d), (b, d, a, e, c),$
$(b, d, e, a, c), (b, d, e, c, a),$
$(b, e, a, c, d), (b, e, d, a, c),$
$(b, e, d, c, a)\}$

따라서 구하는 경우의 수는 11이다. 정답_ ④

413

주어진 육면체의 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 B로 움직인 후 꼭짓점 E에 도착하는 경우를 나열하면 다음과 같다.
A−B−C−D−E, A−B−C−E, A−B−D−C−E,
A−B−D−E, A−B−E
같은 방법으로 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 C 또는 D로 움직인 후 꼭짓점 E에 도착하는 경우도 각각 5가지씩이다.
따라서 구하는 방법의 수는 $5\cdot3=15$ 정답_ ①

414

주사위의 두 눈의 수를 a, b라고 하자.
(1) (i) $a+b=4$일 때, 순서쌍 (a, b)는
$(1, 3), (2, 2), (3, 1)$로 3가지
(ii) $a+b=8$일 때, 순서쌍 (a, b)는
$(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$로 5가지
(iii) $a+b=12$일 때, 순서쌍 (a, b)는 $(6, 6)$으로 1가지
(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $3+5+1=9$
(2) 전체 경우의 수는 $6\cdot6=36$
두 눈의 수가 서로 같은 경우는
$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$의 6가지
따라서 구하는 경우의 수는 $36-6=30$ 정답_ (1) 9 (2) 30

415

(1) 1부터 100까지의 자연수 중에서 2의 배수는 50개, 3의 배수는 33개, 6의 배수는 16개이므로 구하는 경우의 수는
$50+33-16=67$
(2) $6=2\cdot3$이므로 6과 서로소인 수는 2의 배수도 아니고, 3의 배수도 아닌 수이다.
그런데 2의 배수 또는 3의 배수인 수가 67개이므로 구하는 경우의 수는
$100-67=33$ 정답_ (1) 67 (2) 33

416

세 주사위 A, B, C를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b, c라고 할 때, 세 수 a, b, c 중 짝수가 하나라도 있으면 abc는 짝수이고, 세 수 a, b, c가 모두 홀수인 경우에만 abc는 홀수이다.

∴ (구하는 경우의 수)=(전체 경우의 수)

−(세 수 a, b, c의 곱이 홀수인 경우의 수)

$=6\cdot6\cdot6-3\cdot3\cdot3$

$=216-27=189$ 정답_ 189

417

100원, 200원, 500원짜리 우표를 각각 x, y, z장 산다고 하면

$100x+200y+500z=1500$ ∴ $x+2y+5z=15$

(i) $z=1$일 때, $x+2y=10$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(2, 4)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$, $(8, 1)$로 4가지

(ii) $z=2$일 때, $x+2y=5$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 2)$, $(3, 1)$로 2가지

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $4+2=6$ 정답_ ③

418

500원, 1000원짜리 공책을 각각 x, y권 산다고 하면

$500x+1000y\le3000$ ∴ $x+2y\le6$

(i) $y=1$일 때, $x\le4$이므로 $x=1, 2, 3, 4$로 4가지

(ii) $y=2$일 때, $x\le2$이므로 $x=1, 2$로 2가지

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $4+2=6$ 정답_ ③

419

(1) 3개의 문자 a, b, c의 각각에 3개의 문자 x, y, z가 곱해지므로 구하는 항의 개수는 $3\cdot3=9$

(2) 2개의 문자 a, b의 각각에 3개의 문자 c, d, e가 곱해지고, 그 각각에 4개의 문자 f, g, h, i가 곱해지므로 구하는 항의 개수는 $2\cdot3\cdot4=24$ 정답_ (1) 9 (2) 24

420

$(a+b+c)(p+q+r)$를 전개하면 $3\cdot3=9$(개)의 항이 나온다.

또, $(a+b)(s+t)$를 전개하면 $2\cdot2=4$(개)의 항이 나온다.

이때, 동류항이 없으므로 다항식

$(a+b+c)(p+q+r)-(a+b)(s+t)$를 전개할 때 나타나는 항의 개수는 $9+4=13$이다. 정답_ ⑤

421

1184를 소인수분해하면 $1184=2^5\cdot37$

2^5의 양의 약수는 $1, 2, 2^2, \cdots, 2^5$으로 $1+5=6$(개)

37의 양의 약수는 1, 37로 $1+1=2$(개)

따라서 1184의 양의 약수의 개수는

$6\cdot2=12$ 정답_ ②

422

$540=2^2\cdot3^3\cdot5$이므로 540의 양의 약수의 개수는

$(2+1)(3+1)(1+1)=24$

이 중 2의 배수가 아닌 약수의 개수는 $3^3\times5$의 약수의 개수와 같으므로 $(3+1)(1+1)=8$

따라서 구하는 2의 배수의 개수는 $24-8=16$ 정답_ ③

423

420과 480의 최대공약수는 60이므로 420과 480의 공약수 중 양수의 개수는 60의 양의 약수의 개수와 같다.

$60=2^2\cdot3\cdot5$이므로 60의 양의 약수의 개수는

$(2+1)(1+1)(1+1)=12$ 정답_ ②

424

500원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 방법은 0개, 1개로 2가지

100원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개로 3가지

50원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개로 4가지

이때, (0개, 0개, 0개)인 경우는 지불하지 않은 것과 같으므로 지불할 수 있는 방법의 수는 $2\cdot3\cdot4-1=23$ 정답_ ③

425

5000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액과 10000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 10000원짜리 지폐 1장을 5000원짜리 지폐 2장으로 바꾸어서 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 1000원짜리 지폐 2장과 5000원짜리 지폐 5장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

1000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 1000원, 2000원으로 3가지

5000원짜리 지폐 5장으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 5000원, 10000원, …, 25000원으로 6가지

이때, 0원을 지불하는 것은 지불하지 않은 것과 같으므로 구하는 금액의 수는 $3\cdot6-1=17$ 정답_ ①

426

(i) 지불할 수 있는 방법의 수

10원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개로 4가지

50원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개로 5가지

100원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개로 3가지

이때, 모두 0개를 지불하는 것은 지불하지 않은 것과 같으므로

지불할 수 있는 방법의 수는 $4\cdot5\cdot3-1=59$

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

50원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 100원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 100원짜리 동전 2개를 50원짜리 동전 4개로 바꾸어서 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 10원짜리 동전 3개와 50원짜리 동전 8개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

10원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 10원, 20원, 30원으로 4가지

50원짜리 동전 8개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50원, 100원, ⋯, 400원으로 9가지

이때, 0원을 지불하는 것은 지불하지 않은 것과 같으므로 구하는 금액의 수는 $4\cdot9-1=35$

(i), (ii)에서 $m=59$, $n=35$이므로 $m+n=94$ 정답_③

427

(1) A에서 B로 가는 방법이 2가지, B에서 C로 가는 방법이 3가지, C에서 D로 가는 방법이 4가지이므로 구하는 방법의 수는

$2\cdot3\cdot4=24$

(2) A에서 D로 가려면 B를 통과하거나 C를 통과해야 한다.

(i) A → B → D로 가는 방법의 수는 $3\cdot2=6$

(ii) A → C → D로 가는 방법의 수는 $2\cdot4=8$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$6+8=14$ 정답_(1) 24 (2) 14

428

A→P→B로 가는 방법의 수는 $4\cdot2=8$

A→Q→B로 가는 방법의 수는 $2\cdot3=6$

(i) 주리는 A→P→B, 충헌이는 A→Q→B로 가는 방법의 수는 $8\cdot6=48$

(ii) 주리는 A→Q→B, 충헌이는 A→P→B로 가는 방법의 수는 $6\cdot8=48$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $48+48=96$ 정답_③

429

A에서 C를 왕복하는데 B를 꼭 한 번만 지나는 방법은

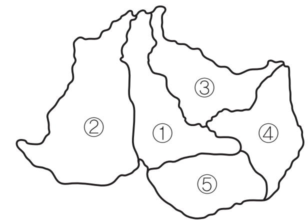
A→B→C→A, A→C→B→A

(i) A→B→C→A로 가는 방법의 수는 $5\cdot3\cdot2=30$

(ii) A→C→B→A로 가는 방법의 수는 $2\cdot3\cdot5=30$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $30+30=60$ 정답_④

430



(①을 칠하는 경우의 수)=4

②에는 ①에 칠한 색을 제외한 색 중에서 골라 칠하게 되므로

(②를 칠하는 경우의 수)=3

세 구역 ③, ④, ⑤는 어떤 순서로 칠해도 상관없다.

(④를 칠하는 경우의 수)=3

(③을 칠하는 경우의 수)=2

(⑤를 칠하는 경우의 수)=2

∴ (구하는 모든 경우의 수)$=4\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2=144$ 정답_②

431

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지

(i) A, C를 같은 색으로 칠할 때,

C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, D에 칠할 수 있는 색은 A(C)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 방법의 수는 $4\cdot3\cdot1\cdot3=36$

(ii) A, C를 다른 색으로 칠할 때,

C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 방법의 수는 $4\cdot3\cdot2\cdot2=48$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $36+48=84$ 정답_②

432

O에 칠할 수 있는 색은 5가지, A에 칠할 수 있는 색은 O에 칠한 색을 제외한 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 O, A에 칠한 색을 제외한 3가지

(i) A, C를 같은 색으로 칠할 때,

C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, D에 칠할 수 있는 색은 O, A(C)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 방법의 수는 $5\cdot4\cdot3\cdot1\cdot3=180$

(ii) A, C를 다른 색으로 칠할 때,

C에 칠할 수 있는 색은 O, A, B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 O, A, C에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 방법의 수는 $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot2=240$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $180+240=420$ 정답_③

433

(1) ${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60$ (2) ${}_6P_0=1$

(3) ${}_3P_3=3\cdot2\cdot1=6$　　(4) $4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

정답_(1) 60　(2) 1　(3) 6　(4) 24

434

(좌변)$={}_nP_2+{}_nP_1=n(n-1)+n=n^2-n+n=n^2$

(우변)$=64$이므로　$n^2=64$

$\therefore n=8$ ($\because$ n은 자연수)

정답_②

435

${}_nP_4 : {}_{n+1}P_3=10:3$에서　$3\times{}_nP_4=10\times{}_{n+1}P_3$

$3n(n-1)(n-2)(n-3)=10(n+1)n(n-1)$

$n\ge4$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$3(n-2)(n-3)=10(n+1)$

$3n^2-25n+8=0$, $(3n-1)(n-8)=0$

$\therefore n=8$ ($\because$ n은 자연수)

정답_③

436

${}_{n-1}P_r+r\cdot{}_{n-1}P_{r-1}$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-1-r)!}+r\cdot\frac{(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$=\frac{(n-r)(n-1)!}{(n-r)(n-1-r)!}+r\cdot\frac{(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$=\frac{(\boxed{\text{(가)}\ n-r})(n-1)!}{(n-r)!}+r\cdot\frac{(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$=\frac{\{(n-r)+r\}(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$=\frac{\boxed{\text{(나)}\ n}(n-1)!}{(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!}={}_nP_r$$

정답_④

437

(1) 5명의 학생 중 3명을 뽑아 한 줄로 세우는 경우의 수는

${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60$

(2) 5명의 학생을 한 줄로 세우는 경우의 수는

$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

정답_(1) 60　(2) 120

438

6명을 일렬로 배열한 후 앞의 4명은 첫째 날에, 뒤의 2명은 둘째 날에 순서대로 상담하면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

$6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$

정답_⑤

439

여학생 3명을 한 사람으로 생각하여 5명을 한 줄로 세우는 경우의 수는　$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

여학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는　$3!=3\cdot2\cdot1=6$

따라서 구하는 경우의 수는　$120\cdot6=720$

정답_⑤

440

소설책 3권을 한 권, 수필집 2권을 한 권으로 생각하여 5권의 책을 책꽂이에 나란히 꽂는 경우의 수는　$5!$

소설책 3권의 자리를 바꾸는 경우의 수는　$3!$

수필집 2권의 자리를 바꾸는 경우의 수는　$2!$

따라서 구하는 경우의 수는　$5!\times3!\times2!$

정답_①

441

국어참고서 4권을 책꽂이에 나란히 꽂는 경우의 수는

$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

오른쪽과 같이 국어참고서 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리 중 3개의 자리에 수학참고서를 꽂는 경우의 수는　${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60$

○국○국○국○국○

따라서 구하는 경우의 수는　$24\cdot60=1440$

정답_④

442

초등학생 1명, 중학생 2명을 한 줄로 세우는 경우의 수는

$3!=3\cdot2\cdot1=6$

오른쪽과 같이 초등학생과 중학생들 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리 중 3개의 자리에 고등학생을 세우는 경우의 수는　${}_4P_3=4\cdot3\cdot2=24$

○초○중○중○

따라서 구하는 경우의 수는　$6\cdot24=144$

정답_⑤

443

먼저 남학생 12명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $12!$이다.

이때, 남학생을 2명씩 묶어서 그 사이사이와 양 끝에 여학생 2명을 세우는 경우의 수는　${}_7P_2=7\cdot6=42$

따라서 구하는 경우의 수는　$42\times12!$

$\therefore N=42$

정답_④

444

자음은 T, S, D, Y의 4개이고, 모음은 U, E, A의 3개이므로 오른쪽과 같이 자음 4개를 한 줄로 나열하고 그 사이사이에 모음 3개를 넣으면 된다.

자○자○자○자

따라서 구하는 경우의 수는　$4!\times3!=144$

정답_③

445

남자, 여자의 순서로 교대로 서는 경우의 수는　$3!\times3!$

여자, 남자의 순서로 교대로 서는 경우의 수는　$3!\times3!$

따라서 구하는 경우의 수는　$2\times3!\times3!=72$

정답_④

446

3명의 남자 중 2명을 뽑아 일렬로 세우는 경우의 수는

${}_3P_2=3\cdot2=6$

남은 5명을 중간 부분에 일렬로 세우는 경우의 수는

$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\cdot120=720$ 정답_ ④

447

a와 n을 제외한 6개의 문자 중에서 2개를 뽑아 한 줄로 나열하는 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

${}_6P_2=6\cdot5=30$ 정답_ ④

448

q와 t 사이에 3개의 문자를 나열하는 방법의 수는

${}_6P_3=6\cdot5\cdot4=120$

q○○○t를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 한 줄로 나열하는 방법의 수는 $4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

q와 t의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2\cdot1=2$

따라서 구하는 경우의 수는 $120\cdot24\cdot2=5760$ 정답_ ④

449

6개의 문자를 한 줄로 나열하는 모든 경우의 수는

$6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$

모음은 e, i, o의 3개이므로 양쪽 끝에 모두 모음이 오는 경우의 수는 ${}_3P_2\times4!=144$

따라서 구하는 경우의 수는 $720-144=576$ 정답_ ④

450

5개의 문자를 한 줄로 나열하는 모든 경우의 수는

$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

s, m, l 중 어느 것도 이웃하지 않는 경우의 수는 s, m, l을 한 줄로 나열하고 그 사이사이에 i, e가 오도록 나열하는 경우의 수와 같으므로 $3!\times2!=12$

따라서 구하는 경우의 수는 $120-12=108$ 정답_ ②

451

(1) 5개의 숫자 중에서 3개를 뽑는 순열의 수와 같으므로

${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60$

(2) 짝수가 되는 경우는 일의 자리의 숫자가 2 또는 4이다.

(i) 일의 자리의 숫자가 2인 경우

□□2 꼴이므로 2를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 한 줄로 나열하는 방법의 수와 같다. 즉,

${}_4P_2=4\cdot3=12$

(ii) 일의 자리의 숫자가 4인 경우

□□4 꼴이므로 4를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 한 줄로 나열하는 방법의 수와 같다. 즉,

${}_4P_2=4\cdot3=12$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$12+12=24$ 정답_ (1) 60 (2) 24

452

네 개의 숫자 1, 2, 3, 4를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

24개의 네 자리의 정수에 대하여 각 자리에 사용된 1, 2, 3, 4의 개수는 각각 6개로 동일하다.

따라서 구하는 모든 수들의 총합은

$1000\times(1+2+3+4)\times6+100\times(1+2+3+4)\times6$

$+10\times(1+2+3+4)\times6+1\times(1+2+3+4)\times6$

$=6666\times(1+2+3+4)$

$=66660$ 정답_ ③

453

일의 자리의 수와 백의 자리의 수가 모두 3의 배수인 경우는 다음의 두 가지 형태이다.

□□□3□6, □□□6□3

나머지 네 자리에 네 개의 숫자 1, 2, 4, 5를 배열하는 방법의 수는

$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $2\cdot24=48$ 정답_ 48

454

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3의 3가지이고, 그 다음 자리부터 나머지 세 개의 숫자를 나열하는 방법은 $3!$가지이므로 구하는 정수의 개수는 $3\times3!=18$ 정답_ ③

455

짝수가 되는 경우는 일의 자리의 숫자가 0, 2, 4이다.

즉, □□□0, □□□2, □□□4 꼴이다.

(i) □□□0 꼴인 경우

0을 제외한 나머지 5개의 숫자에서 3개를 택하여 한 줄로 나열하는 방법의 수와 같으므로 ${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60$

(ii) □□□2 꼴인 경우

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 천의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 1, 3, 4, 5의 4개이고, 천의 자리와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 4개의 숫자에서 2개를 택하여 한 줄로 나열하는 방법의 수와 같으므로 $4\times{}_4P_2=48$

(iii) □□□4 꼴인 경우

(ii)와 같은 방법으로 $4\times{}_4P_2=48$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 정수의 개수는

$60+48+48=156$ 정답_ ④

456

4의 배수가 되는 경우는 끝의 두 자리의 숫자의 배열이 04, 20, 40 또는 12, 24, 32이다.

(i) 끝의 두 자리의 숫자의 배열이 04, 20, 40일 때, 나머지 3개의 숫자 중 2개를 택하여 한 줄로 나열하면 되므로

${}_3P_2=3\cdot2=6$

(ⅱ) 끝의 두 자리의 숫자의 배열이 12, 24, 32일 때, 천의 자리에는 나머지 3개의 숫자 중 0을 제외한 2개의 숫자가 올 수 있고, 백의 자리에는 0과 나머지 1개의 숫자가 올 수 있으므로
$2\cdot2=4$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 4의 배수의 개수는
$6\cdot3+4\cdot3=18+12=30$ 정답_ ②

457
31000보다 큰 정수는 31□□□, 32□□□, 34□□□, 35□□□, 4□□□□, 5□□□□ 꼴이다.
31□□□, 32□□□, 34□□□, 35□□□ 꼴인 정수는 각각 3과 1, 3과 2, 3과 4, 3과 5를 제외한 나머지 3개의 숫자를 나열하면 되므로 그 개수는 각각 $3!=3\cdot2\cdot1=6$
4□□□□, 5□□□□ 꼴인 정수는 각각 4, 5를 제외한 나머지 4개의 숫자를 나열하면 되므로 그 개수는 각각
$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$
따라서 구하는 정수의 개수는 $4\cdot6+2\cdot24=72$ 정답_ ④

458
1로 시작하는 정수의 개수는 $3!=3\cdot2\cdot1=6$
2로 시작하는 정수의 개수는 $3!=3\cdot2\cdot1=6$
이때, $6+6=12$이므로 13번째의 수는 3으로 시작하는 정수 중 가장 작은 수이다.
따라서 13번째의 수는 3124이다. 정답_ ②

459
k, o, r, e, a를 사전에 배열된 순서로 나열하면 a, e, k, o, r
a로 시작하는 단어의 개수는 $4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$
e로 시작하는 단어의 개수는 $4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$
ka로 시작하는 단어의 개수는 $3!=3\cdot2\cdot1=6$
kea로 시작하는 단어의 개수는 $2!=2\cdot1=2$
이때, $24+24+6+2=56$이므로 57번째 단어는 keoar, 58번째 단어는 keora이다. 정답_ ④

460
a, b로 시작하는 단어의 개수는 각각 $4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$
이때, $24\times2=48$이므로 52번째에 있는 단어는 c로 시작하는 단어 중 4번째에 있다.
cabde, cabed, cadbe, cadeb, ⋯
따라서 52번째에 있는 단어는 cadeb이다. 정답_ ②

461
집합 Y의 모든 원소의 곱이 $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot9=36^2$이므로
조건을 만족시키는 경우는 $1\cdot4\cdot9=2\cdot3\cdot6$이다.
따라서 (1, 4, 9), (2, 3, 6)에 각각 대응하는 경우의 수는 3!이고 서로 바뀌는 경우의 수가 2!이므로 구하는 함수 f의 개수는
$3!\times3!\times2!=72$ 정답_ ⑤

462
$f(n+1)-f(n)=5$이므로 $f(n)=1$, $f(n+1)=6$이다.
$n=1$일 때 $f(1)=1$, $f(2)=6$이므로 조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 f의 개수는 4!이고, $n=2$, 3, 4, 5일 때도 마찬가지이므로 구하는 함수의 개수는 $5\times4!=120$ 정답_ 120

463
조건 (가)에 의해 함수 f는 일대일함수이다.
조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 5, 최솟값이 2이므로 5와 2는 반드시 치역에 속해야 하고, 치역의 다른 한 원소는 3과 4 중 하나이다.
(ⅰ) 치역이 {2, 3, 5}인 일대일함수 f의 개수는 $3!=3\cdot2\cdot1=6$
(ⅱ) 치역이 {2, 4, 5}인 일대일함수 f의 개수는 $3!=3\cdot2\cdot1=6$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수 f의 개수는 $6+6=12$ 정답_ ④

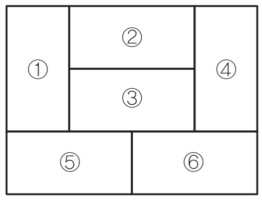
464
50원, 100원, 500원짜리 동전을 각각 x, y, z개 사용한다고 하면 $50x+100y+500z=1200$
$\therefore x+2y+10z=24$ ⋯⋯ ❶
(ⅰ) $z=0$일 때, $x+2y=24$이므로 순서쌍 (x, y)는
(0, 12), (2, 11), (4, 10), (6, 9), (8, 8), (10, 7), (12, 6), (14, 5), (16, 4), (18, 3), (20, 2), (22, 1), (24, 0)으로 13가지
(ⅱ) $z=1$일 때, $x+2y=14$이므로 순서쌍 (x, y)는
(0, 7), (2, 6), (4, 5), (6, 4), (8, 3), (10, 2), (12, 1), (14, 0)으로 8가지
(ⅲ) $z=2$일 때, $x+2y=4$이므로 순서쌍 (x, y)는
(0, 2), (2, 1), (4, 0)으로 3가지 ⋯⋯ ❷
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 방법의 수는 $13+8+3=24$ ⋯⋯ ❸
정답_ 24

단계	채점 기준	비율
❶	각 동전의 개수에 대한 방정식 세우기	30%
❷	방정식의 해의 개수 구하기	60%
❸	동전을 지불하는 방법의 수 구하기	10%

465
(ⅰ) A → B → D로 가는 방법의 수는 $3\cdot2=6$
(ⅱ) A → B → C → D로 가는 방법의 수는 $3\cdot2\cdot3=18$
(ⅲ) A → C → D로 가는 방법의 수는 $2\cdot3=6$
(ⅳ) A → C → B → D로 가는 방법의 수는
$2\cdot2\cdot2=8$ ⋯⋯ ❶
(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 방법의 수는
$6+18+6+8=38$ ⋯⋯ ❷
정답_ 38

단계	채점 기준	비율
❶	각 경우에 대하여 A에서 D까지 가는 방법의 수 구하기	각 20%
❷	방법의 수 구하기	20%

466



서로 이웃한 2개의 지역을 1명의 조사원이 담당한다고 했으므로 위의 그림과 같이 각각의 지역을 ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥이라고 하고 서로 이웃한 2개의 지역을 짝지어 보자.

(①, ②), (①, ③), (①, ⑤), (②, ③), (②, ④)

(③, ④), (③, ⑤), (③, ⑥), (④, ⑥), (⑤, ⑥)

모두 10가지의 경우가 나오므로 서로 이웃한 2개의 지역을 하나로 묶어서 생각할 수 있다. ❶

6개의 지역 중 서로 이웃한 2개의 지역을 하나로 생각하면 5개의 지역을 5명의 조사원이 담당하는 경우가 되므로 구하는 경우의 수는

$10\times5!=1200$ ❷

정답_ 1200

단계	채점 기준	비율
❶	서로 이웃한 2개의 지역을 짝지어 나타내기	70%
❷	조사원 5명의 담당 지역을 정하는 경우의 수 구하기	30%

467

자연수 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 다섯 자리의 자연수를 만들 때

11□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3\cdot3\cdot3=3^3$

12□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3\cdot3\cdot3=3^3$

13□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3\cdot3\cdot3=3^3$

⋮

33□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3\cdot3\cdot3=3^3$ ❶

$a_1=11333$, $a_2=12333$, $a_3=13333$, $a_4=21333$, $a_5=22333$, $a_6=23333$, $a_7=31333$, $a_8=32333$, $a_9=33333$

따라서 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_9$ 중에서 3의 배수는 $a_2=12333$, $a_4=21333$, $a_9=33333$으로 3개이다. ❷

정답_ 3

단계	채점 기준	비율
❶	자연수 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수 구하기	70%
❷	만든 다섯 자리의 자연수 중에서 3의 배수인 것의 개수 구하기	30%

468

서로 다른 5개의 알파벳을 한 줄로 나열하는 모든 경우의 수는

$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ …… ㉠

❶

자음의 개수를 n이라고 하면 양쪽 끝에 모두 자음이 오는 경우의 수는 ${}_n\mathrm{P}_2\times3!$ …… ㉡

❷

㉠, ㉡에서 적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 경우의 수는

$120-{}_n\mathrm{P}_2\times3!=84$, ${}_n\mathrm{P}_2\times6=36$, ${}_n\mathrm{P}_2=6$

$n(n-1)=3\times2$ $\quad\therefore n=3$

따라서 자음의 개수가 3이므로 모음의 개수는 $5-3=2$ ❸

정답_ 2

단계	채점 기준	비율
❶	서로 다른 5개의 알파벳을 한 줄로 나열하는 모든 경우의 수 구하기	10%
❷	양쪽 끝에 모두 자음이 오는 경우의 수 구하기	30%
❸	모음의 개수 구하기	60%

469

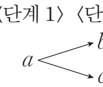
(ⅰ) 주어진 조건에서 〈단계 1〉의 전자는 a상태에 있다.

〈단계 1〉

a

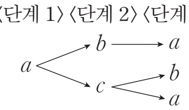
(ⅱ) 주어진 조건에서 에너지가 증가하여 〈단계 2〉가 된 상황은 규칙 1을 따른 것이다.

〈단계 1〉 〈단계 2〉



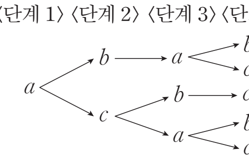
(ⅲ) 주어진 조건에서 에너지가 감소하여 〈단계 3〉이 된 상황은 규칙 2를 따른 것이다.

〈단계 1〉 〈단계 2〉 〈단계 3〉



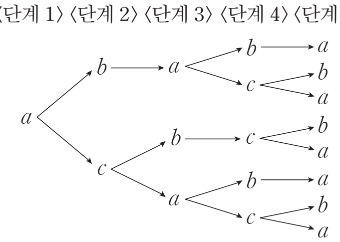
(ⅳ) 에너지가 증가하여 규칙 1에 따라 변환된 상황인 〈단계 4〉를 확인하면 다음과 같다.

〈단계 1〉 〈단계 2〉 〈단계 3〉 〈단계 4〉



(ⅴ) 에너지가 감소하여 규칙 2에 따라 변환된 상황인 〈단계 5〉를 확인하면 다음과 같다.

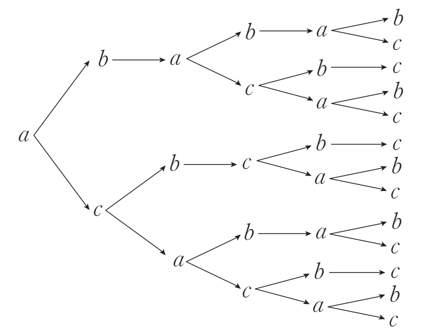
〈단계 1〉 〈단계 2〉 〈단계 3〉 〈단계 4〉 〈단계 5〉



(ⅵ) 에너지가 증가하여 규칙 1에 따라 변환된 상황인 〈단계 6〉을

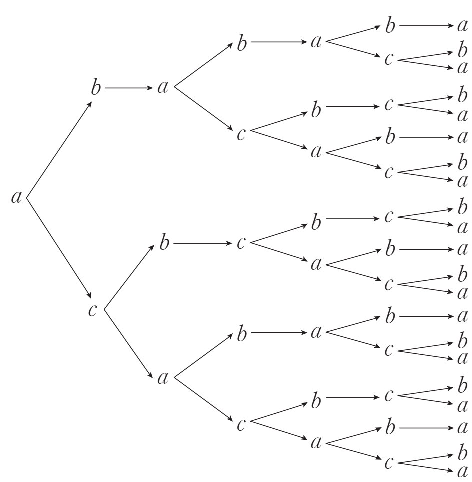
확인하면 다음과 같다.

〈단계 1〉〈단계 2〉〈단계 3〉〈단계 4〉〈단계 5〉〈단계 6〉



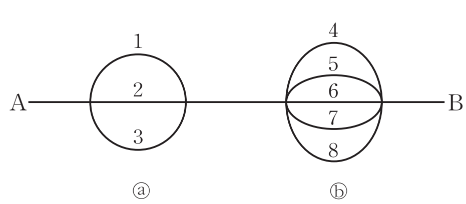
(vii) 에너지가 감소하여 규칙 2에 따라 변환된 상황인 〈단계 7〉을 확인하면 다음과 같다.

〈단계 1〉〈단계 2〉〈단계 3〉〈단계 4〉〈단계 5〉〈단계 6〉〈단계 7〉



따라서 구하는 경로의 수는 21이다. 정답_ ④

470



ⓐ의 3개의 도로를 지나는 방법의 수는 1, 2, 3을 한 줄로 나열하는 방법의 수와 같으므로 $3!=3\cdot2\cdot1=6$

ⓑ의 5개의 도로를 지나는 방법의 수는 4, 5, 6, 7, 8을 한 줄로 나열하는 방법의 수와 같으므로 $5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

따라서 구하는 방법의 수는 $6\cdot120=720$ 정답_ ⑤

471

서로 다른 3가지 색을 빨강, 파랑, 노랑이라고 하고 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에 서로 다른 색을 칠하는 방법의 수는

${}_3P_2=3\cdot2=6$

위에서 구한 6가지 경우 중 1가지를 구체적으로 살펴보자.

맨 위의 사다리꼴에 빨강, 맨 아래의 사다리꼴에 파랑을 칠한 경우 이웃한 사다리꼴에 서로 다른 색을 칠하려면

빨강 — 파랑 — 빨강 — 노랑 — 파랑
빨강 — 파랑 — 노랑 — 빨강 — 파랑
빨강 — 노랑 — 빨강 — 노랑 — 파랑
빨강 — 노랑 — 파랑 — 빨강 — 파랑
빨강 — 노랑 — 파랑 — 노랑 — 파랑

으로 5가지가 가능하다.

따라서 나머지 5가지 경우들도 각각 5가지가 가능하므로 구하는 방법의 수는

$6\cdot5=30$ 정답_ 30

472

1부에 독창 2팀 중 1팀, 중창 2팀 중 1팀, 합창 3팀 중 1팀이 차례로 공연을 하고, 2부에 나머지 독창 1팀, 나머지 중창 1팀, 나머지 합창 2팀 중 1팀, 나머지 합창 1팀이 차례로 공연을 하면 된다.

1부	2부
독→중→합	독→중→합→합

따라서 구하는 방법의 수는

$(2\cdot2\cdot3)\times(1\cdot1\cdot2\cdot1)=12\cdot2=24$ 정답_ ④

473

주어진 그림에서 네 개의 점을 연결하여 사각형을 만들려면 아래쪽 직선에서 두 점, 위쪽 직선에서 두 점을 택하면 된다.

이 사각형은 사다리꼴이므로 윗변과 아랫변의 길이를 각각 a, b라고 하면

$\frac{1}{2}\times(a+b)\times1=3 \qquad \therefore a+b=6$

a, b의 값은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 위의 방정식의 해는

$a=2$, $b=4$ 또는 $a=3$, $b=3$ 또는 $a=4$, $b=2$

(i) $a=2$, $b=4$일 때, $a=2$인 경우는 3가지이고, $b=4$인 경우는 1가지이므로 네 점을 택하는 방법의 수는 $3\cdot1=3$

(ii) $a=3$, $b=3$일 때, $a=3$인 경우는 2가지이고, $b=3$인 경우는 2가지이므로 네 점을 택하는 방법의 수는 $2\cdot2=4$

(iii) $a=4$, $b=2$일 때, $a=4$인 경우는 1가지이고, $b=2$인 경우는 3가지이므로 네 점을 택하는 방법의 수는 $1\cdot3=3$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는 $3+4+3=10$ 정답_ 10

474

세 자리의 자연수를 $100a+10b+c$라고 하자.

(단, $1\le a\le9$, $0\le b\le9$, $0\le c\le9$인 정수)

b, c 중 하나가 0이면 나머지 두 수가 같으면 되므로 이 경우는

$9\cdot2=18$(가지)

(i) $a=b+c$인 경우

$a=2$일 때, $(b,\ c)$는 $(1,\ 1)$로 1가지

$a=3$일 때, $(b,\ c)$는 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$로 2가지

$a=4$일 때, $(b,\ c)$는 $(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$로 3가지

⋮

$a=9$일 때, 8가지

$\therefore\ 1+2+\cdots+8=36$(가지)

(ii) $b=a+c$와 $c=a+b$의 경우도 같은 방법으로 구하면 각각 36가지이다.

$\therefore\ 36\cdot3=108$(가지)

따라서 구하는 자연수의 개수는 $18+108=126$ 정답_ ⑤

475

[그림 1]과 [그림 2]의 액정에 표시된 기호가 모두 ≡이므로

[그림 1]의 두 자리의 수와 [그림 2]의 세 자리의 수는 모두

$2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9$ …… ㉠

중에서 뽑은 숫자로 이루어진 수이다.

A의 십의 자리 숫자를 a, 일의 자리 숫자를 b라고 하면

$A=10a+b$이고, 이 수에 5를 곱한 $(10a+b)\times5$가 [그림 2]의 세 자리의 수가 된다.

이때, $(10a+b)\times5=50a+5b$이므로 [그림 2]의 백의 자리 숫자는 $50a$의 백의 자리 숫자와 같다.

$2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9$에 50을 곱하면 각각

$100,\ 150,\ 250,\ 300,\ 400,\ 450$

이므로 백의 자리 숫자가 ㉠으로 이루어진 수를 고르면 a가 될 수 있는 숫자는 $5,\ 6$이다.

한편, [그림 2]의 일의 자리 숫자는 $5b$의 일의 자리 숫자와 같다.

$2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9$에 5를 곱하면 각각

$10,\ 15,\ 25,\ 30,\ 40,\ 45$

이므로 일의 자리 숫자가 ㉠으로 이루어진 수를 고르면 b가 될 수 있는 숫자는 $3,\ 5,\ 9$이다.

십의 자리 숫자가 $a=5,\ 6$, 일의 자리 숫자가 $b=3,\ 5,\ 9$인 6가지의 수에 5를 곱하면 다음과 같다.

$53\cdot5=265,\ 55\cdot5=275,\ 59\cdot5=295$

$63\cdot5=315,\ 65\cdot5=325,\ 69\cdot5=345$

이 중에서 결과가 ㉠으로 이루어진 수는 $53,\ 59,\ 65$뿐이다.

이 세 수가 A가 될 수 있는 모든 수들이므로 구하는 합은

$53+59+65=177$ 정답_ ④

476

네 수 $a,\ b,\ c,\ d$ 중 하나라도 짝수이면 네 수의 곱 $abcd$는 짝수이므로 전체 경우의 수에서 $abcd$가 홀수인 경우의 수를 빼서 구한다.

집합 A에서 두 원소를 뽑아 일렬로 세우고 집합 B에서 두 원소를 뽑아 일렬로 세우는 것이 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$를 만드는 것과 같으므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

${}_5P_2\times{}_4P_2=20\cdot12=240$

집합 A에는 홀수가 3개, 집합 B에는 홀수가 2개 있으므로 홀수로만 이루어진 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

${}_3P_2\times{}_2P_2=6\cdot2=12$

따라서 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$ 중에서 네 수의 곱 $abcd$가 짝수인 것의 개수는

$240-12=228$ 정답_ 228

477

함수 f가 일대일대응이고, $f(1)=7$이므로 구하는 함수 f의 개수는 집합 $\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에서 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$으로의 일대일대응의 개수와 같다.

조건 (다)에서 $k\geq2$이면 $f(k)\leq k$이므로

(i) $f(2)$의 값은 1, 2 중의 하나로 2가지

(ii) $f(3)$의 값은 1, 2, 3 중 $f(2)$를 제외한 2가지

(iii) 같은 방법으로 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값도 각각 2가지

(iv) $f(7)$의 값은 남은 하나의 수에 대응하므로 1가지

(i)~(iv)에서 구하는 함수 f의 개수는

$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot1=32$ 정답_ ④

07 조합

478

(1) ${}_7C_3=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$

(2) ${}_8C_6={}_8C_2=\dfrac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$

(3) ${}_9C_0=1$

(4) ${}_{10}C_{10}={}_{10}C_0=1$ 정답_ (1) 35 (2) 28 (3) 1 (4) 1

479

(1) ${}_nC_3=20$에서 $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}=20$

$n(n-1)(n-2)=6\times5\times4 \quad \therefore\ n=6$

(2) ${}_{2n+1}C_2=10$에서 $\dfrac{(2n+1)\times2n}{2\cdot1}=10$

$2n^2+n-10=0,\ (2n+5)(n-2)=0$

이때, n은 자연수이므로 $n=2$

(3) ${}_nC_6={}_nC_{n-6}$이므로 $n-6=8 \quad \therefore\ n=14$

(4) ${}_{10}C_3={}_{10}C_7$이므로 $r=3$ 또는 $r=7$

정답_ (1) $n=6$ (2) $n=2$ (3) $n=14$ (4) $r=3$ 또는 $r=7$

480

${}_nC_2+{}_{n+1}C_3=2\cdot{}_nP_2$에서

$\dfrac{n(n-1)}{2\cdot1}+\dfrac{(n+1)n(n-1)}{3\cdot2\cdot1}=2n(n-1)$

$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{6}=2n(n-1)$

$n\geq 2$이므로 $n(n-1)\neq 0$

양변에 $\frac{6}{n(n-1)}$을 곱하면 $3+(n+1)=12$

$n+4=12 \qquad \therefore n=8$ 정답_ ④

481

${}_{n+3}C_2={}_nC_2+{}_{n-2}C_2$에서

$\frac{(n+3)(n+2)}{2\cdot 1}=\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}+\frac{(n-2)(n-3)}{2\cdot 1}$

$n^2+5n+6=n^2-n+n^2-5n+6$

$n(n-11)=0 \qquad \therefore n=11\ (\because n\geq 4)$ 정답_ ④

482

ㄱ은 옳다.

${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}$에서 ${}_nC_r\times r!={}_nP_r$

ㄴ은 옳지 않다.

${}_nC_1=\frac{{}_nP_1}{1!}=n,\ {}_nC_n=\frac{{}_nP_n}{n!}=1$이므로 ${}_nC_1\neq{}_nC_n$

ㄷ도 옳다.

$r\times{}_nC_r=r\times\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$

$n\times{}_{n-1}C_{r-1}=n\times\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$

$\therefore r\times{}_nC_r=n\times{}_{n-1}C_{r-1}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 정답_ ④

483

${}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

$=\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$

$=\frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)(n-1-r)!}+\frac{r(n-1)!}{r(r-1)!(n-r)!}$

$=\frac{(\boxed{(가)\ n-r})(n-1)!}{r!(n-r)!}+\frac{\boxed{(나)\ r}(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\frac{\{(n-r)+r\}(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\frac{\boxed{(다)\ n}(n-1)!}{r!(n-r)!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}={}_nC_r$ 정답_ ⑤

484

악수의 총 횟수는 10명 중에서 2명을 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_{10}C_2=\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}=45$ 정답_ 45

485

집합 A의 원소인 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개 중에서 4개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_7C_4={}_7C_3=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}=35$ 정답_ 35

486

(1) 10명 중에서 5명을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_5=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=252$

(2) 남학생 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_2=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}=6$

여학생 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_3=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\cdot 20=120$ 정답_ (1) 252 (2) 120

487

남자 10명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

${}_{10}C_3=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120$

여자 8명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는 ${}_8C_2=\frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}=28$

따라서 구하는 방법의 수는 $120\cdot 28=3360$ 정답_ ③

488

1학년 학생 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=10$

2학년 학생 7명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_7C_3=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}=35$

따라서 구하는 경우의 수는 $10+35=45$ 정답_ ④

489

10개의 팀이 서로 다른 팀과 1번씩 경기를 치르는 경우의 수는

${}_{10}C_2=\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}=45$

그런데 각 팀이 다른 모든 팀과 6번씩 경기를 치르므로 전체 경기 수는 $45\cdot 6=270$ 정답_ ④

490

11명의 학생 중에서 반장 1명을 뽑는 방법의 수는 ${}_{11}C_1=11$

나머지 10명의 학생 중에서 부반장 2명을 뽑는 방법의 수는

${}_{10}C_2=\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}=45$

따라서 구하는 방법의 수는 $11\cdot 45=495$ 정답_ ③

491

(1) 빨강과 주황은 미리 뽑아 놓고 나머지 5가지 색 중에서 2가지 색을 뽑으면 되므로 그 경우의 수는

$_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$

(2) 노랑과 초록을 제외한 나머지 5가지 색 중에서 4가지 색을 뽑으면 되므로 그 경우의 수는

$_5C_4={_5C_1}=5$

(3) 남색과 보라는 미리 뽑아 놓고 파랑을 제외한 나머지 4가지 색 중에서 2가지 색을 뽑으면 되므로 그 경우의 수는

$_4C_2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$ 정답_ (1) 10 (2) 5 (3) 6

492

특정한 2명을 미리 뽑아 놓고, 나머지 11명에서 3명을 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는 $_{11}C_3$ 정답_ ②

493

(i) 빨강이 포함되고, 파랑이 포함되지 않는 경우의 수는 빨강을 미리 뽑아 놓고, 빨강, 파랑을 제외한 나머지 10개 중에서 4개를 뽑으면 되므로 $_{10}C_4=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210$

(ii) 파랑이 포함되고, 빨강이 포함되지 않는 경우의 수는 파랑을 미리 뽑아 놓고, 빨강, 파랑을 제외한 나머지 10개 중에서 4개를 뽑으면 되므로 $_{10}C_4=210$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $210+210=420$ 정답_ ②

494

5쌍의 부부 중에서 포함되는 부부 한 쌍을 뽑는 경우의 수는

$_5C_1=5$

나머지 8명 중에서 부부가 아닌 2명을 뽑는 경우의 수는

$_8C_2-{_4C_1}=28-4=24$

따라서 구하는 경우의 수는 $5\cdot24=120$ 정답_ ④

495

(1) 10명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$_{10}C_3=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120$

(2) 남자 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$

(3) 전체 경우의 수에서 모두 남자인 경우의 수를 빼면 되므로

$120-20=100$ 정답_ (1) 120 (2) 20 (3) 100

496

전체 10명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$_{10}C_3=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120$

모두 의사를 뽑는 경우, 즉 의사 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 $_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$

따라서 구하는 경우의 수는 $120-20=100$ 정답_ ③

497

지원자 9명 중에서 4명을 선발하는 경우의 수는

$_9C_4=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=126$

모두 남학생 또는 모두 여학생만으로 4명을 선발하는 경우의 수는

$_5C_4+{_4C_4}={_5C_1}+{_4C_4}=5+1=6$

따라서 남학생과 여학생이 적어도 한 명씩은 포함되도록 하는 경우의 수는 $126-6=120$ 정답_ 120

498

10개의 자연수 중에서 3개를 선택하는 경우의 수는

$_{10}C_3=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120$

선택된 세 개의 수의 곱이 홀수가 되기 위해서는 세 개의 수가 모두 홀수이어야 한다.

그런데 1에서 10까지의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개이므로 이 중에서 3개를 선택하는 경우의 수는

$_5C_3={_5C_2}=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$

따라서 구하는 경우의 수는 $120-10=110$ 정답_ ②

499

(i) 판사 7명, 검사 5명 중에서 판사 3명, 검사 2명을 뽑는 방법의 수는 $_7C_3\times{_5C_2}$

(ii) 뽑은 5명을 한 줄로 세우는 방법의 수는 $5!$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$_7C_3\times{_5C_2}\times5!=35\cdot10\cdot120=42000$ 정답_ ③

500

(i) 부모가 모두 포함되도록 5명을 뽑는 경우의 수는 부모를 미리 뽑아 놓고, 나머지 4명 중에서 3명을 뽑으면 되므로 $_4C_3$

(ii) 5명을 한 줄로 세우는 경우의 수는 $5!$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$_4C_3\times5!=4\cdot120=480$ 정답_ ②

501

(i) 투수와 포수가 모두 포함되도록 4명을 뽑는 경우의 수는 투수와 포수를 미리 한 명씩 뽑아 놓고, 나머지 7명에서 2명을 뽑으면 되므로 $_7C_2$

(ⅱ) 4명을 투수와 포수가 서로 이웃하도록 한 줄로 세우는 경우의 수는 투수와 포수를 한 사람으로 생각하여 3명을 한 줄로 세운 후 투수와 포수의 자리를 바꾸면 되므로 $3!\times 2!$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

${}_7C_2\times 3!\times 2!=21\cdot 6\cdot 2=252$ 정답_ ①

502

서로 다른 평행선 위의 점을 한 개씩 택하여 연결하면 한 개의 직선을 만들 수 있으므로 그 직선의 개수는

${}_3C_1\times {}_4C_1=3\cdot 4=12$

여기에 주어진 두 평행선을 포함하면 만들 수 있는 직선의 개수는 $12+2=14$ 정답_ ④

503

10개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_{10}C_2$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2$

그런데 일직선 위에 있는 점으로 만들 수 있는 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수는

${}_{10}C_2-{}_4C_2+1=45-6+1=40$ 정답_ ③

504

구하는 대각선의 개수는 8개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 8을 뺀 값과 같으므로

${}_8C_2-8=28-8=20$ 정답_ ②

505

구하는 꼭짓점의 개수를 n이라고 하면 n각형의 대각선의 개수는 n개의 꼭짓점에서 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 n을 뺀 값과 같으므로

${}_nC_2-n=35,\ \dfrac{n(n-1)}{2\cdot 1}-n=35,\ n^2-3n-70=0$

$(n-10)(n+7)=0 \quad \therefore n=10$ ($\because$ n은 자연수) 정답_ ②

506

꼭짓점을 제외한 서로 다른 대각선의 교점은 꼭짓점을 공유하지 않는 두 대각선에 의해 결정되고, 이 두 대각선은 4개의 꼭짓점에 의해 결정된다.

따라서 구하는 서로 다른 대각선의 교점의 최대 개수는 10개의 꼭짓점 중에서 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_{10}C_4=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=210$ 정답_ ⑤

507

7개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_7C_3$

이때, 일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_3$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

${}_7C_3-{}_4C_3=35-4=31$ 정답_ ④

508

9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_9C_3$

이때, 일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 $3\times {}_4C_3$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

${}_9C_3-3\times {}_4C_3=84-12=72$ 정답_ ③

509

가로로 나열된 4개의 평행선 중에서 2개, 세로로 나열된 6개의 평행선 중에서 2개를 택하면 하나의 평행사변형이 결정되므로 구하는 평행사변형의 개수는

${}_4C_2\times {}_6C_2=6\cdot 15=90$ 정답_ ④

510

12개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는 ${}_{12}C_4$

(ⅰ) 일직선 위의 6개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_4$

(ⅱ) 일직선 위의 6개의 점 중에서 3개를 택하고, 반원 위의 6개의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_3\times {}_6C_1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 사각형의 개수는

${}_{12}C_4-({}_6C_4+{}_6C_3\times {}_6C_1)=495-(15+120)=360$ 정답_ ④

511

조건 (나)에 의해 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$는 홀수인데 네 자연수의 합이 홀수가 되려면 네 자연수 중 홀수가 1개 또는 3개 있어야 한다.

집합 B의 원소에서 짝수는 4개, 홀수는 5개이므로

(ⅰ) 홀수가 1개인 경우

${}_4C_3\times {}_5C_1=20$

(ⅱ) 홀수가 3개인 경우

${}_4C_1\times {}_5C_3=40$

이때, 조건 (가)에 의해 $f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$이므로 (ⅰ), (ⅱ)에서 구한 집합 B의 원소 중 크기가 작은 것부터 차례로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$20+40=60$ 정답_ 60

512

조건 (가)는 X의 원소 x의 값이 커지면 그에 대응하는 Y의 원소 $f(x)$의 값도 커짐을 의미하므로

$f(1)<f(2)<f(3)<f(4)<f(5)$ …… ㉠

조건 (나)에 의해 $f(4)=5$이므로 ㉠에 의해 $f(5)$의 값이 될 수 있는 집합 Y의 원소는 6 또는 7의 2가지이다.

또, $f(1)<f(2)<f(3)$이므로 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4 중 크기가 작은 것부터 차례로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는 $2\times{}_4C_3=2\cdot4=8$ 정답_②

513

10명의 주주 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}C_2$ ❶

남자를 n명이라고 하면 남자 주주 중에서만 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_nC_2$ ❷

적어도 한 명의 여자가 뽑히는 경우의 수가 30이므로

$${}_{10}C_2-{}_nC_2=30,\ \frac{10\cdot9}{2\cdot1}-\frac{n(n-1)}{2\cdot1}=30$$

$$n(n-1)=30,\ n^2-n-30=0,\ (n-6)(n+5)=0$$

$$\therefore n=6\ (\because n\ge1)$$

따라서 남자가 6명이므로 여자는 $10-6=4$(명) ❸

정답_4명

단계	채점 기준	비율
❶	10명의 주주 중에서 2명을 뽑는 경우의 수 구하기	10%
❷	남자 주주 n명 중에서만 2명을 뽑는 경우의 수 구하기	30%
❸	주주 중 여자의 수 구하기	60%

514

(i) $a>b>c>d$를 만족시키는 네 자리의 자연수는 0부터 9까지 10개의 숫자 중 4개를 택한 후 크기 순서에 맞게 각 자리의 수를 정하면 되므로

$${}_{10}C_4=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210 \ ❶$$

(ii) $a<b<c<d$를 만족시키는 네 자리의 자연수에서 천의 자리의 숫자는 0일 수 없으므로 1부터 9까지 9개의 숫자 중 4개를 택한 후 크기의 순서에 맞게 각 자리의 수를 정하면 되므로

$${}_9C_4=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=126 \ ❷$$

(i), (ii)에서 $m=210$, $n=126$이므로

$m+n=210+126=336$ ❸

정답_336

단계	채점 기준	비율
❶	m의 값 구하기	40%
❷	n의 값 구하기	40%
❸	$m+n$의 값 구하기	20%

515

12개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_{12}C_2$ ❶

주어진 도형에는 4개의 점으로 이루어진 일직선이 3개가 있고, 3개의 점으로 이루어진 일직선이 8개가 있다.

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2$

일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2$ ❷

그런데 일직선 위에 있는 점으로 만들 수 있는 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수는

${}_{12}C_2-({}_4C_2\times3+{}_3C_2\times8)+3+8$

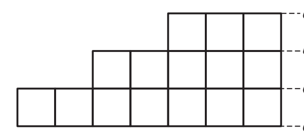
$=66-(18+24)+3+8=35$ ❸

정답_35

단계	채점 기준	비율
❶	12개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수 구하기	20%
❷	일직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수 구하기	40%
❸	직선의 개수 구하기	40%

516

가로줄에 따라 경우를 나누고 각각의 경우의 수를 구한다.



가로줄은 총 4개가 있으므로 차례대로 a, b, c, d라고 하자.

직사각형을 만들려면 가로줄 2개와 세로줄 2개가 필요하다.

가로줄을 택하는 경우를 나누고 각각의 경우마다 세로줄 2개를 택하는 경우의 수를 구하면

(i) a, b인 경우 ${}_4C_2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$

(ii) a, c인 경우 ${}_4C_2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$

(iii) a, d인 경우 ${}_4C_2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$

(iv) b, c인 경우 ${}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$

(v) b, d인 경우 ${}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$

(vi) c, d인 경우 ${}_8C_2=\frac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$ ❶

따라서 구하는 직사각형의 개수는

$6+6+6+15+15+28=76$ ❷

정답_76

단계	채점 기준	비율
❶	가로줄을 택하는 경우를 나누고 각각의 경우마다 세로줄 2개씩 택하는 경우의 수 구하기	80%
❷	직사각형의 개수 구하기	20%

517

9개의 점으로 만들 수 있는 삼각형의 개수는 9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_9C_3=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84 \ ❶$$

일직선 위에 있는 3개의 점을 택하는 경우 삼각형이 만들어지지 않는다.

직선 AF 위에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$$

직선 CI 위에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는 $_4C_3={}_4C_1=4$

…… ❷

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$84-20-4=60$ …… ❸

정답_ 60

단계	채점 기준	비율
❶	9개의 점으로 만들 수 있는 삼각형의 개수 구하기	30%
❷	직선 AF, CI 위의 세 점을 고른 경우의 수 구하기	60%
❸	삼각형의 개수 구하기	10%

518

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 8개의 수 중에서 5개를 뽑으면 그중 가장 작은 수는 집합 A의 원소가 된다.

나머지 4개의 수 중에서 집합 A의 다른 두 원소를 택하면 집합 B의 두 원소가 정해지므로 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$_8C_5\times{}_4C_2=336$

정답_ ④

519

(i) $f(a)<f(b)<f(c)<f(d)$인 경우

Y의 원소 5개 중에서 4개를 뽑으면 되므로 $_5C_4={}_5C_1=5$

(ii) $f(a)<f(b)=f(c)<f(d)$ 또는

$f(a)<f(b)<f(c)=f(d)$인 경우

Y의 원소 5개 중에서 3개를 뽑으면 되므로

$_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$

$\therefore\ 2\cdot10=20$

(iii) $f(a)<f(b)=f(c)=f(d)$인 경우

Y의 원소 5개 중에서 2개를 뽑으면 되므로

$_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$5+20+10=35$

정답_ 35

520

n명이 서로 악수할 수 있는 모든 경우의 수는 n명 중에서 2명을 택하는 경우의 수와 같으므로

$f(n)={}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$

ㄱ은 옳다.

$f(5)={}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2}=10$

ㄴ도 옳다.

$f(n)+n=\dfrac{n(n-1)}{2}+n+=\dfrac{n(n+1)}{2}=f(n+1)$

ㄷ은 옳지 않다.

$f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(10)$

$=\dfrac{2\cdot1}{2}+\dfrac{3\cdot2}{2}+\dfrac{4\cdot3}{2}+\cdots+\dfrac{10\cdot9}{2}$

$=1+3+6+\cdots+45=381$

$f(11)=\dfrac{11\cdot10}{2}=55$

$\therefore f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(10)\neq f(11)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답_ ③

521

5의 배수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이다.

e는 1부터 9까지의 자연수이므로 다섯 자리의 자연수 $abcde$가 5의 배수이려면 $e=5$이어야 한다.

두 조건 $a>b>c$, $c<d<e$에 공통으로 c가 있으므로 c를 기준으로 a, b, d의 값을 찾는다.

$e=5$이므로 $c<d<e$가 성립하려면 $c=3$ 또는 $c=2$ 또는 $c=1$이다.

(i) $c=3$ $(a>b>3,\ 3<d<5)$일 때,

$d=4$, $e=5$이고 a와 b는 각각 6, 7, 8, 9 중 하나이다.

따라서 6, 7, 8, 9 중에서 두 개를 택하는 경우의 수는

$_4C_2=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$

(ii) $c=2$ $(a>b>2,\ 2<d<5)$일 때,

① $d=3$인 경우 $c=2, d=3, e=5$이므로 a와 b는 각각 4, 6, 7, 8, 9 중 하나이다. 이 중에서 두 개를 택하는 경우의 수는

$_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$

② $d=4$인 경우 $c=2, d=4, e=5$이므로 a와 b는 각각 3, 6, 7, 8, 9 중 하나이다. 이 중에서 두 개를 택하는 경우의 수는

$_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$

(iii) $c=1$ $(a>b>1,\ 1<d<5)$일 때,

① $d=2$인 경우 a와 b는 각각 3, 4, 6, 7, 8, 9 중 하나이다.

이 중에서 두 개를 택하는 경우의 수는

$_6C_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$

② $d=3$인 경우 a와 b는 각각 2, 4, 6, 7, 8, 9 중 하나이다.

이 중에서 두 개를 택하는 경우의 수는

$_6C_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$

③ $d=4$인 경우 a와 b는 각각 2, 3, 6, 7, 8, 9 중 하나이다.

이 중에서 두 개를 택하는 경우의 수는

$_6C_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$6+20+45=71$

정답_ ③