수학Ⅱ

01 집합과 명제

정답 본문 6~13쪽

01 ④	02 ②	03 ④	04 10	05 ③
06 202	07 17	08 ⑤	09 ④	10 ①
11 4	12 13	13 48	14 ③	15 19
16 13	17 12	18 17	19 ③	20 ⑤
21 ②	22 ①	23 ①	24 ②	25 ④
26 ②	27 12			

01

$A=B$일 때, $2\in A$이므로 $2\in B$이다.
$x^2+x+b=0$에 $x=2$를 대입하면
$4+2+b=0$에서 $b=-6$
$x^2+x-6=0$에서 $(x-2)(x+3)=0$
$x=2$ 또는 $x=-3$
즉, $B=\{2, -3\}$이다.
이때 $A=\{2, a\}$이고 $A=B$이므로 $a=-3$
따라서 $a+b=-3+(-6)=-9$

답 ④

02

부등식 $x^2+2kx-k+2\le0$의 해의 개수가 1이 되려면
방정식 $x^2+2kx-k+2=0$이 중근을 가져야 한다.
$x^2+2kx-k+2=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=k^2+k-2=0$
$(k+2)(k-1)=0$
$k=-2$ 또는 $k=1$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은 -1이다.

답 ②

03

홀수는 1, 3, 5, 7, 9이므로 원소가 모두 홀수인 부분집합의 개수는
$a=2^5-1=31$
짝수는 2, 4, 6, 8이므로 원소가 모두 짝수인 부분집합의 개수는
$b=2^4-1=15$
따라서 $a+b=31+15=46$

답 ④

04

조건 (나)에서 $\frac{36}{x}\in A$이면 $\frac{36}{x}$은 자연수, x는 36의 양의 약수이다.
$1\in A$이면 $\frac{36}{1}=36\in A$이다.
$2\in A$이면 $\frac{36}{2}=18\in A$이다.
$3\in A$이면 $\frac{36}{3}=12\in A$이다.
$4\in A$이면 $\frac{36}{4}=9\in A$이다.
1과 36, 2와 18, 3과 12, 4와 9는 집합 A에 동시에 포함되거나 동시에 포함되지 않아야 한다.
이때 $n(A)=3$인 집합 A는
$\{1, 6, 36\}$, $\{2, 6, 18\}$, $\{3, 6, 12\}$, $\{4, 6, 9\}$
이므로 $a_3=4$
또한 $n(A)=5$인 집합 A는
$\{1, 2, 6, 18, 36\}$, $\{1, 3, 6, 12, 36\}$, $\{1, 4, 6, 9, 36\}$,
$\{2, 3, 6, 12, 18\}$, $\{2, 4, 6, 9, 18\}$, $\{3, 4, 6, 9, 12\}$
이므로 $a_5=6$
따라서 $a_3+a_5=4+6=10$

답 10

05

(ⅰ) 6이 아닌 짝수 2, 4, 8 중에서 반드시 한 개 이상 포함되어야 하므로 2, 4, 8로 만든 부분집합에서 공집합을 제외한 개수는
$2^3-1=7$
(ⅱ) 6이 아닌 3의 배수인 3과 9 중에서 반드시 한 개 이상 포함되어야 하므로 3, 9로 만든 부분집합에서 공집합을 제외한 개수는
$2^2-1=3$
(ⅲ) 짝수도 아니고 3의 배수도 아닌 1, 5, 7로 만든 부분집합의 개수는
$2^3=8$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 집합 X의 개수는
$7\times3\times8=168$

답 ③

06

집합 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$의 부분집합 A_k $(k=1, 2, 3, \cdots, n)$의 원소의 개수가 2 이상이므로 집합 A_k의 원소 중 가장 큰 수인 m_k가 가질 수 있는 값은 3, 5, 7, 9이다.
(ⅰ) $m_k=3$인 부분집합은 $\{1, 3\}$ 하나뿐이다.
(ⅱ) $m_k=5$인 부분집합은 5는 반드시 포함하고, 1, 3 중에서 한 개 이상 포함하고, 7, 9는 포함하지 않으므로 이를 만족시키는 부분집합의 개수는
$2^2-1=3$
(ⅲ) $m_k=7$인 부분집합은 7은 반드시 포함하고, 1, 3, 5 중에서 한 개 이상 포함하고, 9는 포함하지 않으므로 이를 만족시키는 부분집합의 개수는
$2^3-1=7$
(ⅳ) $m_k=9$인 부분집합은 9는 반드시 포함하고, 1, 3, 5, 7 중에서 한 개 이상 포함하므로 이를 만족시키는 부분집합의 개수는
$2^4-1=15$

따라서 $n=1+3+7+15=26$이고

$m_1+m_2+m_3+\cdots+m_{26}$

$=3\times1+5\times3+7\times7+9\times15$

$=3+15+49+135$

$=202$

답 202

07

$A\cup B=\{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$,

$A\cap B=\{2, 4, 8\}$이므로

$(A\cup B)-(A\cap B)=\{1, 6, 10\}$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$1+6+10=17$

답 17

08

$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$이므로

$A\cap B^C=A-B=\{1, 9\}$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$1+9=10$

답 ⑤

09

$A\cup B=A$이면 $B\subset A$이다.

$x^2+ax-a-1=0$에서

$x^2+ax-(a+1)=0$

$(x-1)(x+a+1)=0$

$x=1$ 또는 $x=-a-1$

(i) $-a-1=1$, 즉 $a=-2$일 때

$B=\{1\}$로 조건을 만족시킨다.

(ii) $-a-1=2$, 즉 $a=-3$일 때

$B=\{1, 2\}$로 조건을 만족시킨다.

(iii) $-a-1=3$, 즉 $a=-4$일 때

$B=\{1, 3\}$으로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$-2+(-3)+(-4)=-9$

답 ④

10

$B-A=\{2\}$이므로 $2\in B$

(i) $4-x=2$, 즉 $x=2$일 때,

$A=\{2, 5\}$, $B=\{2, 5\}$이므로

$B-A=\varnothing$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x^2+1=2$일 때,

$x^2=1$이므로 $x=1$ 또는 $x=-1$

㉠ $x=1$일 때,

$A=\{1, 5\}$, $B=\{2, 3\}$이므로

$B-A=\{2, 3\}$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

㉡ $x=-1$일 때,

$A=\{-1, 5\}$, $B=\{2, 5\}$이므로

$B-A=\{2\}$가 되어 조건을 만족시킨다.

이때 $A\cup B=\{-1, 2, 5\}$

따라서 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은

$-1+2+5=6$

답 ①

11

$n(A)=10$이므로 집합 X의 개수가 $16=2^4$이 되려면 $n(A-B)=6$이어야 한다.

즉, n의 양의 약수 중 10 이하의 원소가 4개이어야 하고, 이를 만족시키는 경우는 다음과 같다.

$n=6$일 때, $B=\{1, 2, 3, 6\}$

$n=8$일 때, $B=\{1, 2, 4, 8\}$

$n=10$일 때, $B=\{1, 2, 5, 10\}$

$n=16$일 때, $B=\{1, 2, 4, 8, 16\}$

따라서 구하는 자연수 n의 개수는 4이다.

답 4

12

$(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)=(A-B)\cup(B-A)=\{a, c\}$

a와 a^2-1은 9 이하의 자연수이므로 $a=2$ 또는 $a=3$이다.

(i) $a=2$일 때,

$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 2, b\}$

이때 $a\in A$이고 $a\in B$이므로

$(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)=\{a, c\}$라는 조건에 모순이다.

(ii) $a=3$일 때,

$A=\{1, 3, 8\}$, $B=\{1, 2, b\}$

이때 집합 $(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)$의 원소의 개수가 2이므로

집합 $A\cap B$의 원소의 개수는 2이어야 한다.

또 $3\notin B$이다.

즉, $b=8$이고 $(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)=\{2, 3\}$이므로

$c=2$

따라서 $a+b+c=3+8+2=13$

답 13

13

$U=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

$(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B^C)=(A\cup A^C)\cap B^C=U\cap B^C=B^C$

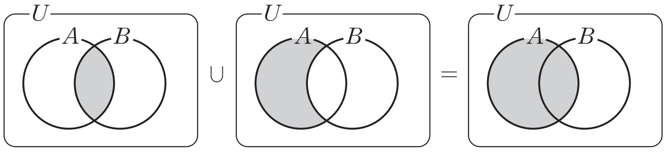
$B^C=\{2, 4, 8, 12, 16, 20\}$이므로

$B=U-B^C=\{6, 10, 14, 18\}$

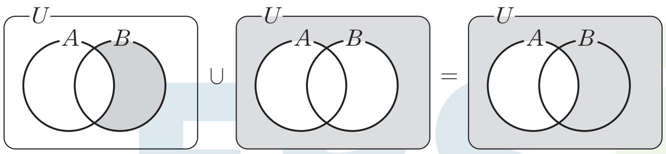
따라서 집합 B의 모든 원소의 합은 48이다.

답 48

14



$A\cap B$ $\quad$ $A\cap B^C$ $\quad$ A



$A^C\cap B$ $\quad$ $A^C\cap B^C$ $\quad$ A^C

$[(A\cap B)\cup(A\cap B^C)]\cup[(A^C\cap B)\cup(A^C\cap B^C)]$
$=A\cup A^C=U$

답 ③

다른 풀이

$(A\cap B)\cup(A\cap B^C)=A\cap(B\cup B^C)=A\cap U=A$
$(A^C\cap B)\cup(A^C\cap B^C)=A^C\cap(B\cup B^C)=A^C\cap U=A^C$
따라서
$[(A\cap B)\cup(A\cap B^C)]\cup[(A^C\cap B)\cup(A^C\cap B^C)]$
$=A\cup A^C$
$=U$

15

전체집합 U의 모든 원소의 합은
$1+2+3+4+5=15$
$A\cap B=\{4\}$에서
$S(A\cap B)=4$
$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\varnothing$에서 $A\cup B=\varnothing^C=U$이므로
$S(A\cup B)=15$
따라서
$S(A)+S(B)=S(A\cup B)+S(A\cap B)$
$=15+4=19$

답 19

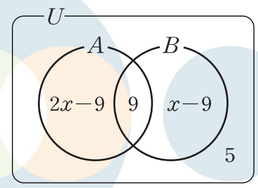
16

이 영화 감상 동호회 회원 전체의 집합을 U, 영화 A를 관람한 회원의 집합을 A, 영화 B를 관람한 회원의 집합을 B라 하면
$n(U)=35,\ n(A\cap B)=9,\ n(A^C\cap B^C)=5,\ n(A)=2\times n(B)$
이때 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로
$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)=35-5=30$
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로
$30=2\times n(B)+n(B)-9$
$3\times n(B)=39$
따라서 $n(B)=13$

답 13

다른 풀이

이 영화 감상 동호회 회원 전체의 집합을 U, 영화 A를 관람한 회원의 집합을 A, 영화 B를 관람한 회원의 집합을 B라 하면
$n(U)=35,\ n(A\cap B)=9,\ n(A^C\cap B^C)=5,\ n(A)=2\times n(B)$
$n(B)=x$라 하면 $n(A)=2x$이고
$n(A-B)=2x-9,\ n(B-A)=x-9$
이므로 두 집합 A, B의 관계를 벤 다이어그램으로 나타내고 각 영역이 나타내는 집합의 원소의 개수를 나타내면 그림과 같다.



이때 $n(U)=35$이므로
$(2x-9)+9+(x-9)+5=35$
$3x=39$
따라서 $x=13$

17

$n(A)+n(B)=n(A\cup B)+n(A\cap B)$
$=14+8=22$
$n(B)=22-n(A)$
$n(A)-n(B)=n(A)-22+n(A)$
$=2\times n(A)-22$
$n(A\cup B)=14,\ n(A\cap B)=8$이므로
$8\le n(A)\le 14$
$-6\le 2\times n(A)-22\le 6$
따라서 $M=6,\ m=-6$이므로
$M-m=6-(-6)=12$

답 12

18

집합 $A\cap B$의 원소는 200 이하의 6의 배수이다.
집합 $(A\cap B)-C$의 원소는 200 이하의 6의 배수 중에서 4의 배수인 것을 제외한 것이다.
6의 배수이면서 4의 배수인 것은 12의 배수이다.
$6\times1=6,\ 6\times33=198$이므로 200 이하의 6의 배수는 33개이다.
$12\times1=12,\ 12\times16=192$이므로 200 이하의 12의 배수는 16개이다.
따라서 집합 $(A\cap B)-C$의 원소의 개수는
$33-16=17$

답 17

19

조건 '$ab=a+b$'의 부정은 '$ab\neq a+b$'이고,
조건 '$a=1$ 또는 $b=1$'의 부정은 '$a\neq1$이고 $b\neq1$'이므로
명제 '$ab=a+b$이면 $a=1$ 또는 $b=1$이다.'의 대우는
'$a\neq1$이고 $b\neq1$이면 $ab\neq a+b$이다.'

답 ③

20

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{1, 2, 3, 6\}$

$Q=\{1, 2, 4, 8\}$

$R=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

이므로 $P\subset R$

① $P\not\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

② $Q\not\subset R$이므로 명제 $q \longrightarrow r$는 거짓이다.

③ $R\not\subset P$이므로 명제 $r \longrightarrow p$는 거짓이다.

④ $Q^C\not\subset R^C$이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$는 거짓이다.

⑤ $R^C\subset P^C$이므로 명제 $\sim r \longrightarrow \sim p$는 참이다.

이상에서 참인 명제는 ⑤이다.

답 ⑤

21

명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이다.

즉, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$Q^C\subset P^C$이어야 한다.

$\sim p$: $|x-2|\le 4$

$\sim q$: $x^2-2ax-8a^2\le 0$

$|x-2|\le 4$에서

$-4\le x-2\le 4$

$-2\le x\le 6$

$x^2-2ax-8a^2\le 0$에서

$(x-4a)(x+2a)\le 0$ …… ㉠

(i) $a=0$일 때,

부등식 ㉠의 해는 $x=0$

이때 $Q^C\subset P^C$이 성립한다.

(ii) $a>0$일 때,

부등식 ㉠의 해는 $-2a\le x\le 4a$

이때 $Q^C\subset P^C$이 성립하려면

$-2\le -2a$이고 $4a\le 6$이어야 한다.

즉, $a\le 1$이고 $a\le \frac{3}{2}$

그런데 $a>0$이므로 $0<a\le 1$

(iii) $a<0$일 때,

부등식 ㉠의 해는 $4a\le x\le -2a$

이때 $Q^C\subset P^C$이 성립하려면

$-2\le 4a$이고 $-2a\le 6$이어야 한다.

즉, $a\ge -\frac{1}{2}$이고 $a\ge -3$

그런데 $a<0$이므로 $-\frac{1}{2}\le a<0$

(i), (ii), (iii)에서 실수 a의 값의 범위는

$-\frac{1}{2}\le a\le 1$

따라서 실수 a의 최댓값과 최솟값의 합은

$1+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

답 ②

22

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p가 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset P$이다.

이때 $Q=\{2\}$이므로 $2\in P$

$x^2+ax+2a=0$에 $x=2$를 대입하면

$4+2a+2a=0$, $4a=-4$

따라서 $a=-1$

답 ①

23

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p가 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$이다.

p : $\left|\frac{x}{2}-a\right|\le 1$에서

$-1\le \frac{x}{2}-a\le 1$

$2(a-1)\le x\le 2(a+1)$이므로

$P=\{x|2(a-1)\le x\le 2(a+1)\}$

q : $x^2-12x+11\le 0$에서

$(x-1)(x-11)\le 0$

$1\le x\le 11$이므로

$Q=\{x|1\le x\le 11\}$

이때 $P\subset Q$이려면

$1\le 2(a-1)$이고 $2(a+1)\le 11$이므로

$\frac{3}{2}\le a\le \frac{9}{2}$

따라서 실수 a의 최댓값 $M=\frac{9}{2}$, 최솟값 $m=\frac{3}{2}$이므로

$M+m=\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=6$

답 ①

24

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p가 q이기 위한 필요충분조건이므로 $P=Q$이다.

p : $|x|+|x-1|\le 3$에서

(i) $x\ge 1$일 때,

$x+x-1\le 3$에서 $x\le 2$이므로

$1\le x\le 2$

(ii) $0\le x<1$일 때,

$x-x+1\le 3$, 즉 $1\le 3$이므로

$0\le x<1$인 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(iii) $x<0$일 때,

$-x-x+1\le 3$에서 $x\ge -1$이므로

$-1\le x<0$

(i), (ii), (iii)에서 $P=\{x|-1\le x\le 2\}$

q : $|x-a|\le b$에서

$b\le 0$일 때는 p가 q이기 위한 필요충분조건이 될 수 없다.

그러므로 $b>0$일 때,

$-b\le x-a\le b$에서 $a-b\le x\le a+b$이므로

$Q=\{x|a-b\le x\le a+b\}$

이때 $P=Q$이려면

$a+b=2$, $a-b=-1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$

따라서 $a+b=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$

답 ②

25

$2a^2-4ab+4b^2-6a+9=0$에서

$(a^2-4ab+4b^2)+(a^2-6a+9)=0$

$(a-2b)^2+(a-3)^2=0$

a, b가 실수이므로 위 등식이 성립하려면

$a-2b=0$이고 $a-3=0$

따라서 $a=3$, $b=\frac{3}{2}$이므로

$a+b=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

답 ④

26

$$\frac{x^2-2x+5}{x-1}=\frac{(x-1)^2+4}{x-1}$$
$$=x-1+\frac{4}{x-1}$$

$x>1$일 때, $x-1>0$이므로

$$x-1+\frac{4}{x-1}\ge 2\sqrt{(x-1)\times\frac{4}{x-1}}=4$$

$\left(\text{단, 등호는 } x-1=\frac{4}{x-1}\text{, 즉 } x=3\text{일 때 성립한다.}\right)$

즉, $\frac{x^2-2x+5}{x-1}$는 $x=3$일 때 최솟값 4를 갖는다.

따라서 $a=3$, $m=4$이므로

$a+m=3+4=7$

답 ②

27

$\overline{AR}=4$이고 직선의 기울기가 m이므로

$\overline{PR}=\frac{4}{m}$

그러므로 삼각형 APR의 넓이 S_1은

$S_1=\frac{1}{2}\times\frac{4}{m}\times 4=\frac{8}{m}$

$\overline{AS}=3$이고 직선의 기울기가 m이므로

$\overline{QS}=3m$

그러므로 삼각형 ASQ의 넓이 S_2는

$S_2=\frac{1}{2}\times 3\times 3m=\frac{9m}{2}$

이때 $m>0$이므로

$$S_1+S_2=\frac{8}{m}+\frac{9m}{2}\ge 2\sqrt{\frac{8}{m}\times\frac{9m}{2}}=12$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{8}{m}=\frac{9m}{2}\text{, 즉 } m=\frac{4}{3}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 S_1+S_2의 최솟값은 12이다.

답 12

다른 풀이

직선 PQ의 방정식이 $y=m(x+3)+4$이므로

$P\left(-\frac{3m+4}{m},\ 0\right)$, $Q(0,\ 3m+4)$

삼각형 APR의 넓이 S_1과 삼각형 ASQ의 넓이 S_2의 합은 삼각형 OQP의 넓이에서 직사각형 OSAR의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$$S_1+S_2=\frac{1}{2}\times\frac{3m+4}{m}\times(3m+4)-3\times 4$$
$$=\frac{(3m+4)^2}{2m}-12$$
$$=\frac{9m^2+24m+16}{2m}-12$$
$$=\frac{9m}{2}+\frac{8}{m}$$

이때 $m>0$이므로

$$S_1+S_2=\frac{9m}{2}+\frac{8}{m}\ge 2\sqrt{\frac{9m}{2}\times\frac{8}{m}}=12$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{9m}{2}=\frac{8}{m}\text{, 즉 } m=\frac{4}{3}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 S_1+S_2의 최솟값은 12이다.

02 함수

정답 본문 16~25쪽

01 ⑤	02 ④	03 ⑤	04 ③	05 ③
06 ③	07 ④	08 ③	09 112	10 ②
11 ④	12 ②	13 14	14 ③	15 ④
16 ③	17 ④	18 ③	19 ⑤	20 ⑤
21 ⑤	22 ③	23 ④	24 ③	25 ③
26 ①	27 ②	28 ④	29 ④	30 4
31 ⑤	32 ⑤	33 ②	34 3	35 28
36 ⑤	37 ②	38 19	39 39	

01

$y=ax+3$이므로 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에 대응하는 y의 값은 각각 $-a+3$, 3, $a+3$이다.
대응 $y=ax+3$이 집합 X에서 집합 Y로의 함수가 되려면 $-a+3$, 3, $a+3$이 모두 공역 $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 원소이어야 한다.
이를 만족시키는 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2이므로 그 개수는 5이다.

답 ⑤

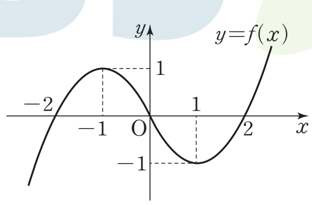
02

$f(x)=-x+b$이므로
$f(-1)=1+b$, $f(2)=-2+b$
이때 f가 일대일 대응이므로 f의 치역과 공역이 서로 같고, 직선 $y=f(x)$의 기울기가 음수이므로
$f(-1)=a$이고 $f(2)=2$이다.
즉, $1+b=a$, $-2+b=2$
두 식을 연립하여 풀면
$a=5$, $b=4$
따라서 $a+b=5+4=9$

답 ④

03

방정식 $\{f(x)\}^2+f(x)=0$에서
$f(x)\{f(x)+1\}=0$
그러므로 $f(x)=0$ 또는 $f(x)=-1$
방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수와 같으므로 3이다.



방정식 $f(x)=-1$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-1$의 교점의 개수와 같으므로 2이다.
따라서 구하는 서로 다른 실근의 개수는
$3+2=5$

답 ⑤

04

f가 항등함수이므로
$f(1)=1$, $f(3)=3$, $f(5)=5$, $f(7)=7$
$f(1)=g(3)$이므로 $g(3)=1$
g가 상수함수이므로 $g(1)=1$, $g(5)=1$, $g(7)=1$
따라서 $f(5)+g(7)=5+1=6$

답 ③

05

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2$ …… ㉠
ㄱ. ㉠에 $x=0$, $y=0$을 대입하면 $f(0)=f(0)+f(0)+2$에서
$f(0)=-2$ (참)
ㄴ. ㉠에 y 대신 $-x$를 대입하면
$f(0)=f(x)+f(-x)+2$
따라서 $f(x)+f(-x)=-4$ (거짓)
ㄷ. ㉠에 $x=1$, $y=1$을 대입하면
$f(2)=f(1)+f(1)+2=2+2+2=6$
㉠에 $x=2$, $y=2$를 대입하면
$f(4)=f(2)+f(2)+2=6+6+2=14$
㉠에 $x=4$, $y=4$를 대입하면
$f(8)=f(4)+f(4)+2=14+14+2=30$
㉠에 $x=8$, $y=2$를 대입하면
$f(10)=f(8)+f(2)+2=30+6+2=38$ (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

참고
함수 $f(x)=4x-2$는 주어진 조건을 만족시킨다.

06

$f(a)=2a^2$, $g(a)=a^2+b$이므로
$f(a)=g(a)$에서 $2a^2=a^2+b$
$a^2=b$ …… ㉠
$f(b)=2b^2$, $g(b)=ab+b$이므로
$f(b)=g(b)$에서 $2b^2=ab+b$
$b\neq0$이므로
$b=\frac{1}{2}(a+1)$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$2a^2-a-1=0$, $(a-1)(2a+1)=0$
$a=1$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$이므로
$a=1$, $b=1$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$
그런데 $a\neq b$이므로
$a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$
따라서 $a+b=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$

답 ③

07

$f(1)=1$이고 직선 $y=a(x-1)+2x-1$과 직선 $y=-a(x-1)+3x-2$는 실수 a의 값에 관계없이 점 $(1, 1)$을 지난다.

(i) $x<1$일 때,

$f(x)=(a+2)x-a-1$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 기울기가 $a+2$인 직선의 일부이다.

(ii) $x\ge 1$일 때,

$f(x)=(-a+3)x+a-2$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 기울기가 $-a+3$인 직선의 일부이다.

함수 $f(x)$가 일대일 대응이 되려면 (i), (ii)의 두 기울기의 부호가 같아야 하므로 기울기의 곱이 양수이어야 한다.

즉, $(a+2)(3-a)>0$이므로 $(a+2)(a-3)<0$

$-2<a<3$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1, 2이므로 그 개수는 4이다.

답 ④

08

$|f(x)|=|f(-x)|$에서

(i) $|f(0)|=|f(-0)|$이므로

$f(0)$의 값은 -2 또는 0 또는 2가 될 수 있다.

따라서 $f(0)$의 값을 정하는 방법의 수는 3이다.

(ii) $|f(2)|=|f(-2)|$이므로

$f(2)=0$일 때, $f(-2)=0$

$f(2)=2$일 때, $f(-2)=2$ 또는 $f(-2)=-2$

$f(2)=-2$일 때, $f(-2)=2$ 또는 $f(-2)=-2$

따라서 $f(2)$의 값과 $f(-2)$의 값을 정하는 방법의 수는

$1+2+2=5$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$3\times 5=15$

답 ③

09

(i) $f(2)=2$인 함수의 개수는 집합 $\{4, 6, 8\}$에서 집합 $Y=\{1, 2, 4, 8\}$로의 함수의 개수와 같으므로

$4^3=64$

(ii) $f(4)=4$인 함수의 개수는 집합 $\{2, 6, 8\}$에서 집합 $Y=\{1, 2, 4, 8\}$로의 함수의 개수와 같으므로

$4^3=64$

(iii) $f(2)=2$이고 $f(4)=4$인 함수의 개수는 집합 $\{6, 8\}$에서 집합 $Y=\{1, 2, 4, 8\}$로의 함수의 개수와 같으므로

$4^2=16$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$64+64-16=112$

답 112

10

$(f\circ g)(2)+(g\circ f)(2)=f(g(2))+g(f(2))=f(1)+g(2)$

$=4+1=5$

답 ②

11

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=f(bx+3)$

$=2(bx+3)+a$

$=2bx+a+6$

$2b=6$에서 $b=3$

$a+6=-2$에서 $a=-8$

따라서 $ab=-8\times 3=-24$

답 ④

12

$f(-1)=-a-2a=-3a$

$(f\circ f)(-1)=f(f(-1))$

$=f(-3a)$

$=a(-3a)-2a$

$=-3a^2-2a$

$-3a^2-2a=-3a$에서

$3a^2-a=0$, $a(3a-1)=0$

이때 $a>0$이므로 $a=\frac{1}{3}$

답 ②

13

$f(2x-1)=a(2x-1)+b$

$=2ax-a+b$

$2a=4$, $-a+b=5$이므로 연립하여 풀면

$a=2$, $b=7$

따라서 $ab=2\times 7=14$

답 14

다른 풀이

$2x-1=t$라 하면 $2x=t+1$이므로

$f(2x-1)=4x+5$에서

$f(t)=2(t+1)+5=2t+7$

즉, $f(x)=2x+7$이므로 $a=2$, $b=7$

따라서 $ab=2\times 7=14$

14

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=f(2x-1)$

$=3(2x-1)-2$

$=6x-5$

이므로

$(h\circ f\circ g)(x)=f(x)$에서

$h(6x-5)=3x-2$

$6x-5=t$라 하면 $x=\dfrac{t+5}{6}$이므로

$h(t)=3\times\dfrac{t+5}{6}-2=\dfrac{t+5}{2}-2=\dfrac{t+1}{2}$

따라서 $h(5)=\dfrac{5+1}{2}=3$

답 ③

15

$f(2)=2f(1)+3$에서

$2a+b=2(a+b)+3$

$b=-3$

$(f\circ f)(1)=f(3)-9$, 즉 $f(f(1))=f(3)-9$에서

$a(a+b)+b=3a+b-9$

$b=-3$을 대입하면

$a^2-3a-3=3a-3-9$

$a^2-6a+9=0$, $(a-3)^2=0$

$a=3$

따라서 $f(x)=3x-3$이므로

$$\begin{aligned}(f\circ f\circ f)(1)&=f(f(f(1)))\\&=f(f(0))\\&=f(-3)\\&=-12\end{aligned}$$

답 ④

16

(i) $x\le-1$일 때

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(1)=-1$

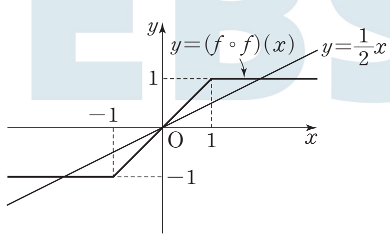
(ii) $-1<x<1$일 때

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(-x)=x$

(iii) $x\ge1$일 때

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(-1)=1$

따라서 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 방정식 $(f\circ f)(x)=\dfrac{1}{2}x$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$의 교점의 개수와 같으므로 구하는 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

답 ③

17

$-1\le x\le3$에서 $0\le f(x)\le3$이므로

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=-f(x)+3$

$(f\circ f)(x)=2$에서 $-f(x)+3=2$, $f(x)=1$

(i) $-1\le x<0$일 때,

$f(x)=3x+3=1$에서 $x=-\dfrac{2}{3}$

(ii) $0\le x\le3$일 때,

$f(x)=-x+3=1$에서 $x=2$

(i), (ii)에서 구하는 모든 실수 x의 값의 합은

$-\dfrac{2}{3}+2=\dfrac{4}{3}$

답 ④

18

ㄱ. $(f\circ f)(3)=3$에서 $f(3)=a$라 하면 $f(a)=3$

$f(1)=3$이고 f가 일대일 대응이므로 $a=1$

따라서 $f(3)=1$ (참)

ㄴ. $f(1)=3$, $f(3)=1$, $f(5)=7$, $f(7)=9$, $f(9)=5$인 경우가 가능하다. (거짓)

ㄷ. (i) $f(5)=5$이면 $f(x)=x$인 x가 존재한다.

(ii) $f(5)=7$이면 $f(7)=5$이므로 $f(9)=9$이다.

(iii) $f(5)=9$이면 $f(9)=5$이므로 $f(7)=7$이다.

따라서 모든 경우에서 $f(x)=x$인 x가 존재한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

19

$f^{-1}(11)=b$라 하면 $f(b)=11$이므로

$f(b)=2b-3=11$에서 $b=7$

즉, $f^{-1}(11)=7$이므로

$f(a)=7$

따라서 $f(a)=2a-3=7$에서 $a=5$

답 ⑤

다른 풀이

$f(a)=f^{-1}(11)$에서

$f(f(a))=f(f^{-1}(11))=11$

$f(x)=2x-3$에서 $f(a)=2a-3$이므로

$f(f(a))=f(2a-3)=2(2a-3)-3=4a-9$

따라서 $4a-9=11$에서 $a=5$

20

$f(2)-f(3)=2$에서

$f(2)=4$, $f(3)=2$ 또는 $f(2)=3$, $f(3)=1$

그런데 $f(1)=3$이고 f가 일대일 대응이므로

$f(2)=4$, $f(3)=2$이다.

따라서 $f(1)=3$, $f(2)=4$, $f(3)=2$, $f(4)=1$이고,

$f^{-1}(1)+f^{-1}(2)=4+3=7$

답 ⑤

21

$(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(5)=7$

$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$이므로

$(g\circ f)^{-1}(5)=k$라 하면 $f^{-1}(g^{-1}(5))=k$

즉, $f(k)=g^{-1}(5)$

이때 $g(3)=5$이므로 $g^{-1}(5)=3$

즉, $f(k)=3$

이때 $f(9)=3$이므로 $k=9$

그러므로 $(g\circ f)^{-1}(5)=9$

따라서 $(f\circ g)(3)+(g\circ f)^{-1}(5)=7+9=16$

답 ⑤

22

함수 $f(x+1)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$g(f(x+1))=x$ …… ㉠

㉠에 $x=4$를 대입하면

$g(f(5))=g(3)=4$

㉠에 $x=2$를 대입하면

$g(f(3))=2$

이때 g는 일대일 대응이고 $g(-4)=2$이므로

$f(3)=-4$

따라서 $f(3)+g(3)=-4+4=0$

답 ③

23

주어진 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 두 점 $(2, 1)$, $(0, -1)$을 지나는 직선이므로 이 그래프의 식은 $y=x-1$이다.

$y=x-1$에서 $x=y+1$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=x+1$

즉, $f(x)=x+1$

따라서 $(f\circ f)(-1)=f(f(-1))=f(0)=1$

답 ④

24

조건 (가)의 $f^{-1}(1)=3$에서 $f(3)=1$이므로

$3a+b=1$ …… ㉠

$f(1)=a+b$이므로

$f^{-1}(-3)=f(1)$에서

$f^{-1}(-3)=a+b$

즉, $f(a+b)=-3$이므로

$a(a+b)+b=-3$

$a^2+ab+b+3=0$ …… ㉡

㉠에서 $b=1-3a$를 ㉡에 대입하면

$a^2+a(1-3a)+1-3a+3=0$

$-2a^2-2a+4=0$

$a^2+a-2=0$

$(a+2)(a-1)=0$

$a=-2$ 또는 $a=1$

이때 $a>0$이므로 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-2$

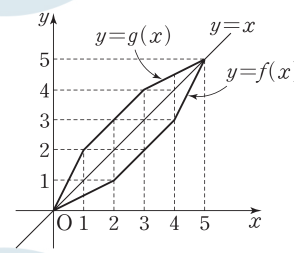
따라서 $f(x)=x-2$이므로

$f(2)=0$

답 ③

25

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(1)=\frac{1}{2}$, $g(1)=2$이므로 $\frac{f(1)+g(1)}{2}\neq 1$

$f(2)=1$, $g(2)=3$이므로 $\frac{f(2)+g(2)}{2}=2$

$f(3)=2$, $g(3)=4$이므로 $\frac{f(3)+g(3)}{2}=3$

$f(4)=3$, $g(4)=\frac{9}{2}$이므로 $\frac{f(4)+g(4)}{2}\neq 4$

$f(5)=g(5)=5$이므로 $\frac{f(5)+g(5)}{2}=5$

따라서 조건을 만족시키는 5 이하의 자연수 k는 2, 3, 5이므로 그 합은

$2+3+5=10$

답 ③

26

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, 0)$을 지나므로 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 y축과 점 $(0, 1)$에서 만난다.

또 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 x축과 점 $(2, 0)$에서 만난다.

따라서 A$(2, 0)$, B$(0, 1)$이므로 직선 AB의 기울기는

$\frac{1-0}{0-2}=-\frac{1}{2}$

답 ①

27

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 함수 $f(x)=\frac{x^2}{4}+1$ $(x\geq 0)$은 x의 값이 증가할 때 y의

값도 증가하므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점과 같다.

$\frac{x^2}{4}+1=x$에서 $x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$

$x=2$

따라서 만나는 점은 P$(2, 2)$이므로 선분 OP의 길이는

$\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

답 ②

28

함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

$y=\frac{1}{x-2}+3=\frac{3x-5}{x-2}$

따라서 $a=-2$, $b=3$, $c=-5$이므로

$a+b+c=-2+3+(-5)=-4$

답 ④

29

함수 $y=\frac{bx+1}{x+a}$의 그래프가 점 $(1, -3)$을 지나므로

$-3=\frac{b+1}{1+a}$에서 $-3a-3=b+1$

$3a+b=-4$ …… ㉠

함수 $y=\frac{bx+1}{x+a}$의 그래프가 점 $(3, 7)$을 지나므로

$7=\frac{3b+1}{3+a}$에서 $7a+21=3b+1$

$7a-3b=-20$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=2$

그러므로 $y=\frac{bx+1}{x+a}=\frac{2x+1}{x-2}=\frac{5}{x-2}+2$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=2$

두 점근선의 교점의 좌표는 $(2, 2)$이고

직선 $y=-x+k$가 점 $(2, 2)$를 지나므로

$2=-2+k$에서 $k=4$

답 ④

30

주어진 조건에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$f(x)=\frac{4}{x-3}+2$

$f^{-1}(6)=a$라 하면 $f(a)=6$이므로

$\frac{4}{a-3}+2=6$

$\frac{4}{a-3}=4$, $a=4$

따라서 $f^{-1}(6)=4$

답 4

31

주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선이 두 직선 $x=-2$, $y=-1$이므로

$f(x)=\frac{k}{x+2}-1$ $(k>0)$으로 놓을 수 있다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{3}-1$에서 $k=3$

그러므로 $f(x)=\frac{3}{x+2}-1=\frac{-x+1}{x+2}$

따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=1$이므로

$f(a+b+c)=f(2)=-\frac{1}{4}$

답 ⑤

32

$y=\frac{3x+5}{x+2}$를 x에 대하여 정리하면

$xy+2y=3x+5$

$x(y-3)=-2y+5$

$x=\frac{-2y+5}{y-3}$

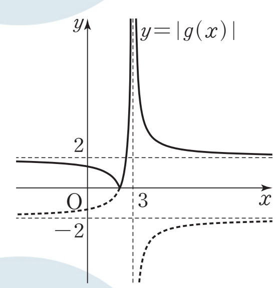
$x=\frac{-1}{y-3}-2$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{-1}{x-3}-2$

그러므로 $g(x)=\frac{-1}{x-3}-2$

이때 함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $|g(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수와 같다.

따라서 $h(1)=2$, $h(2)=1$, $h(3)=2$이므로

$h(1)+h(2)+h(3)=2+1+2=5$

답 ⑤

33

두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$가 점 $(1, 2)$에서 수직으로 만나므로

$ax+b=m(x-1)+2$, $cx+d=-\frac{1}{m}(x-1)+2$ $(m\neq0)$

으로 놓을 수 있다.

$f(x)=\frac{-\frac{1}{m}(x-1)+2}{m(x-1)+2}$

$$=\frac{-\frac{1}{m^2}(x-1)+\frac{2}{m}}{x-1+\frac{2}{m}}$$

$$=\frac{-\frac{1}{m^2}\left(x-1+\frac{2}{m}\right)+\frac{2}{m}+\frac{2}{m^3}}{x-1+\frac{2}{m}}$$

$$=\frac{\frac{2}{m}+\frac{2}{m^3}}{x-1+\frac{2}{m}}-\frac{1}{m^2}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=1-\frac{2}{m}$, $y=-\frac{1}{m^2}$

함수 f의 역함수가 f이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때 두 점근선의 교점이 직선 $y=x$ 위의 점이므로

$1-\frac{2}{m}=-\frac{1}{m^2}$에서

$\left(\frac{1}{m}-1\right)^2=0$

$m=1$

그러므로 $f(x)=\frac{-x+3}{x+1}$이고 두 점근선의 교점의 좌표는

$(-1,\ -1)$이다.

따라서 $p=-1$, $q=-1$이므로

$p+q=-1+(-1)=-2$

답 ②

34

함수 $y=2\sqrt{3x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동하면

$y=2\sqrt{3(x-k)+1}$

점 $(8,\ 8)$을 지나므로

$8=2\sqrt{3(8-k)+1}$

$\sqrt{3(8-k)+1}=4$

$3(8-k)+1=16$

$8-k=5$

따라서 $k=3$

답 3

35

$f(3)=5$에서

$f(3)=\sqrt{3a+b}+1=5$이므로

$3a+b=16$ …… ㉠

$f(3)=5$에서 $f^{-1}(5)=3$이므로

$f^{-1}(5)=f(5)$에서

$f(5)=3$

$f(5)=\sqrt{5a+b}+1=3$이므로

$5a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-6$, $b=34$

따라서 $a+b=-6+34=28$

답 28

36

$y=(x+1)^2-2\ (x\geq-1)$에서

$y+2=(x+1)^2$

$x+1=\sqrt{y+2}$

$x=\sqrt{y+2}-1$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\sqrt{x+2}-1$

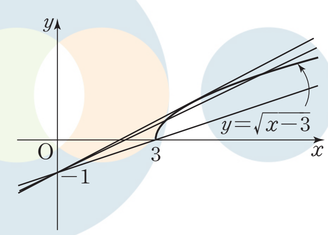
따라서 $a=1$, $b=2$, $c=-1$이므로

$a+b+c=1+2+(-1)=2$

답 ⑤

37

함수 $y=\sqrt{x-3}$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=mx-1$이 점 $(3,\ 0)$을 지나는 경우

$3m-1=0$에서 $m=\frac{1}{3}$

한편, 직선 $y=mx-1$이 함수 $y=\sqrt{x-3}$의 그래프에 접하는 경우

$mx-1=\sqrt{x-3}$에서 양변을 제곱하면

$m^2x^2-2mx+1=x-3$

$m^2x^2-(2m+1)x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2m+1)^2-16m^2=0$

$12m^2-4m-1=0$

$(6m+1)(2m-1)=0$

직선 $y=mx-1$이 함수 $y=\sqrt{x-3}$의 그래프에 접하기 위해서는

$m>0$이므로 $m=\frac{1}{2}$

그러므로 함수 $y=\sqrt{x-3}$의 그래프와 직선 $y=mx-1$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 m의 값의 범위는

$\frac{1}{3}\leq m<\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로

$\beta-\alpha=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

답 ②

38

$\sqrt{2x}=k$에서 $x=\frac{k^2}{2}$이므로

$\mathrm{A}\left(\frac{k^2}{2},\ k\right)$, $\mathrm{C}\left(\frac{k^2}{2},\ 0\right)$

$\sqrt{-2x+8}=k$에서 $x=\frac{8-k^2}{2}$이므로

$\mathrm{B}\left(\frac{8-k^2}{2},\ k\right)$, $\mathrm{D}\left(\frac{8-k^2}{2},\ 0\right)$

$0<k<2$에서 $\overline{\mathrm{AB}}=4-k^2$, $\overline{\mathrm{AC}}=k$이므로

직사각형 ACDB의 둘레의 길이는 $2(4-k^2+k)$이다.

$$\begin{aligned}2(4-k^2+k)&=-2k^2+2k+8\\&=-2\left(k^2-k+\frac{1}{4}\right)+8+\frac{1}{2}\\&=-2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{17}{2}\ (\text{단, } 0<k<2)\end{aligned}$$

즉, 직사각형 ACDB의 둘레의 길이는 $k=\frac{1}{2}$일 때 최대이고 최댓값은 $\frac{17}{2}$이다.

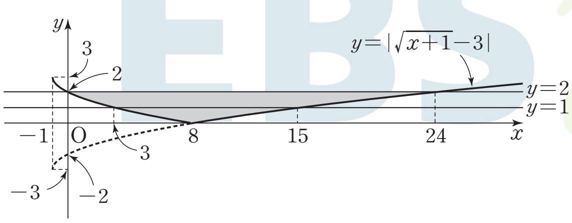
따라서 $p=2$, $q=17$이므로

$p+q=2+17=19$

답 19

39

함수 $y=|\sqrt{x+1}-3|$의 그래프는 그림과 같다.



영역에 속하는 점의 좌표를 $(x,\ y)$ (x, y는 정수)라 하면

(ⅰ) $y=0$일 때, $x=8$이므로 점은 1개이다.

(ⅱ) $y=1$일 때, $|\sqrt{x+1}-3|=1$에서 $x=3$ 또는 $x=15$

즉, $3\le x\le 15$이므로 점은 13개이다.

(ⅲ) $y=2$일 때, $|\sqrt{x+1}-3|=2$에서 $x=0$ 또는 $x=24$

즉, $0\le x\le 24$이므로 점은 25개이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 점의 개수는

$1+13+25=39$

답 39

03 수열

정답 본문 28~39쪽

01 ②	02 ④	03 9	04 ③	05 ②
06 9	07 ②	08 ④	09 ③	10 ②
11 ④	12 ③	13 ③	14 ③	15 ⑤
16 ①	17 ④	18 ②	19 ①	20 ②
21 ③	22 ②	23 ③	24 ②	25 ①
26 ④	27 ②	28 ②	29 ②	30 25
31 ④	32 ②	33 ⑤	34 ②	

01

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1^2+a_2^2=a^2+(a+d)^2=26$ …… ㉠

$a_2+a_4=(a+d)+(a+3d)=2a+4d=6$ …… ㉡

㉡에서 $a=3-2d$이므로 이 식을 ㉠에 대입하면

$(3-2d)^2+(3-d)^2=26$

$5d^2-18d-8=0$, $(5d+2)(d-4)=0$

이때 $d>0$이므로 $d=4$, $a=-5$

따라서

$$\begin{aligned}a_7+a_8&=(a+6d)+(a+7d)\\&=2a+13d\\&=2\times(-5)+13\times 4\\&=42\end{aligned}$$

답 ②

02

방정식 $x^2-2x+m=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=m$

방정식 $x^2-2x+n=0$의 서로 다른 두 실근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\gamma+\delta=2$, $\gamma\delta=n$

그러므로 서로 다른 네 실근의 합은

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=4$

서로 다른 네 실근이 첫째항이 $\frac{1}{4}$인 등차수열을 이루므로 공차를 d라 하면

$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}+d\right)+\left(\frac{1}{4}+2d\right)+\left(\frac{1}{4}+3d\right)=4$

$1+6d=4$, $d=\frac{1}{2}$

즉, 서로 다른 네 실근은 $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$이다.

이때 $\alpha+\beta=2$이고 $\gamma+\delta=2$이므로 $\frac{1}{4}$과 $\frac{7}{4}$, $\frac{3}{4}$과 $\frac{5}{4}$가 서로 짝이 된다.

따라서

$|m-n|=\left|\frac{1}{4}\times\frac{7}{4}-\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right|=\left|\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{7}{4}\right|=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

답 ④

03

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_{10}=a+9d=70$ …… ㉠

$a_{20}=a+19d=40$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면

$10d=-30$

$d=-3$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$a-27=70$, $a=97$

$a_n=97+(n-1)\times(-3)=-3n+100$이므로

$25<-3n+100<85$에서

$-75<-3n<-15$

$5<n<25$

그러므로 자연수 n은 6, 7, 8, …, 24이다.

한편, $a_n=100-3n$에서 100이 짝수이므로 a_n이 홀수가 되려면 $3n$이 홀수이어야 하고, $3n$이 홀수이려면 n이 홀수이어야 한다.

따라서 6에서 24까지의 자연수 중에서 홀수의 개수는 9이다.

답 9

04

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1+a_2+a_3=38$이므로

$a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)=38$ …… ㉠

조건 (가)에서 $a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=142\ (n\geq 3)$이므로

$(a_n-2d)+(a_n-d)+a_n=142$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$3(a_1+a_n)=180$

$a_1+a_n=60$

조건 (나)에서 $S_n=390$이므로

$\frac{n(a_1+a_n)}{2}=390$

$\frac{60n}{2}=390$, $30n=390$

따라서 $n=13$

답 ③

05

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n=\frac{n\{2\times 0+(n-1)d\}}{2}=\frac{n(n-1)d}{2}$

이므로

$S_{3n}-S_n=\frac{3n(3n-1)d}{2}-\frac{n(n-1)d}{2}$

$=\frac{n}{2}(9n-3-n+1)d$

$=n(4n-1)d$

$\frac{S_{3n}-S_n}{S_n}=9$이므로

$\frac{n(4n-1)d}{\frac{n(n-1)d}{2}}=\frac{8n-2}{n-1}=9$

$8n-2=9n-9$

따라서 $n=7$

답 ②

06

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항이 각각 a_1, b_1이고 공차가 각각 d_1, d_2이므로 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 a_1+b_1이고 공차가 $d_1+d_2=6$인 등차수열이다.

이때 수열 $\{a_{3n}+b_{3n}\}$은 첫째항이 a_3+b_3이고 공차가 $3\times 6=18$인 등차수열이므로

$a_{30}+b_{30}=(a_3+b_3)+9\times 18=(a_3+b_3)+162$ …… ㉠

$(a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{30})+(b_3+b_6+b_9+\cdots+b_{30})$

$=(a_3+b_3)+(a_6+b_6)+\cdots+(a_{30}+b_{30})$

$=\frac{10\{(a_3+b_3)+(a_{30}+b_{30})\}}{2}$

$=\frac{10\{2(a_3+b_3)+162\}}{2}$ (㉠에 의해)

$=10(a_3+b_3+81)$

$=900$

따라서 $a_3+b_3=9$

답 9

07

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_n-2a_{n+1}=ar^{n-1}-2ar^n=(a-2ar)r^{n-1}$

수열 $\{a_n-2a_{n+1}\}$은 첫째항이 45, 공비가 5이므로

$r=5$이고

$a-2ar=45$, $-9a=45$

$a=-5$

따라서 $a_n=-5\times 5^{n-1}=-5^n$이므로

$a_3=-5^3=-125$

답 ②

참고

수열 $\{a_n-2a_{n+1}\}$은 첫째항이 a_1-2a_2이고 공비가 5인 등비수열이다.

08

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=ar^2=9$ …… ㉠

$a_5=3\sqrt{3}a_2$에서

$ar^4=3\sqrt{3}ar$

$r^3=3\sqrt{3}$이므로 $r=\sqrt{3}$

$r=\sqrt{3}$을 ㉠에 대입하면

$3a=9$, $a=3$

그러므로 일반항 a_n은

$a_n=3\times(\sqrt{3})^{n-1}=(\sqrt{3})^{n+1}$

이때 $a_n=(\sqrt{3})^{n+1}=3^{20}$에서

$(\sqrt{3})^{n+1}=(\sqrt{3})^{40}$

$n+1=40$

따라서 $n=39$

답 ④

09

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하고,

등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b, 공비를 r_1이라 하면

$a_4=b_6$에서 $ar^3=br_1^5$ ...... ㉠

$a_7=b_{12}$에서 $ar^6=br_1^{11}$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=r_1^6$, $r_1^2=r$

등비수열 $\{b_n\}$의 모든 항이 양수이므로

$r_1=\sqrt{r}$

이것을 ㉠에 대입하면

$ar^3=br^2\sqrt{r}$, $b=a\sqrt{r}$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b=a\sqrt{r}$, 공비가 $\sqrt{r}$이므로

$b_n=a\sqrt{r}\times(\sqrt{r})^{n-1}=a(\sqrt{r})^n$

$a_{15}=b_k$에서

$ar^{14}=a(\sqrt{r})^k$, $r^{14}=(\sqrt{r})^k$

$r^{14}=\{(\sqrt{r})^2\}^{14}=(\sqrt{r})^{28}$

이므로 자연수 k의 값은 28이다.

답 ③

10

등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_{11}=a$, 공비를 r라 하면

$a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{30}=\dfrac{a(r^{20}-1)}{r-1}=210$ ...... ㉠

$a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{30}=\dfrac{ar^{10}(r^{10}-1)}{r-1}=70$ ...... ㉡

㉠÷㉡을 하면

$$\frac{\dfrac{a(r^{20}-1)}{r-1}}{\dfrac{ar^{10}(r^{10}-1)}{r-1}}=\frac{210}{70}$$

$\dfrac{r^{20}-1}{r^{10}(r^{10}-1)}=3$, $\dfrac{(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r^{10}(r^{10}-1)}=3$

$\dfrac{r^{10}+1}{r^{10}}=3$, $r^{10}+1=3r^{10}$

$r^{10}=\dfrac{1}{2}$

따라서 $\dfrac{a_{31}}{a_{11}}=\dfrac{ar^{20}}{a}=r^{20}=(r^{10})^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

답 ②

11

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 각각 $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{r}$이라 하면

$a_n=\dfrac{1}{a}\times\left(\dfrac{1}{r}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{ar^{n-1}}$이므로

$\dfrac{1}{a_n}=ar^{n-1}$

수열 $\left\{\dfrac{1}{a_{2n}}\right\}$은 ar, ar^3, ar^5, $\cdots$이므로

수열 $\left\{\dfrac{1}{a_{2n}}\right\}$도 첫째항이 ar이고 공비가 r^2인 등비수열이다.

(i) $r=1$인 경우

$T_3=3a$, $T_6=6a$이므로

$T_3=\dfrac{1}{6}$, $T_6=1$이 성립하지 않는다.

(ii) $r\neq1$인 경우

$T_3=\dfrac{1}{6}$, $T_6=1$에서

$T_3=\dfrac{ar\{(r^2)^3-1\}}{r^2-1}=\dfrac{ar(r^6-1)}{r^2-1}=\dfrac{1}{6}$ ...... ㉠

$T_6=\dfrac{ar\{(r^2)^6-1\}}{r^2-1}=\dfrac{ar\{(r^6)^2-1\}}{r^2-1}=1$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면

$$\frac{\dfrac{ar\{(r^6)^2-1\}}{r^2-1}}{\dfrac{ar(r^6-1)}{r^2-1}}=\frac{1}{\dfrac{1}{6}}$$

$\dfrac{(r^6)^2-1}{r^6-1}=6$, $\dfrac{(r^6-1)(r^6+1)}{r^6-1}=6$

$r^6+1=6$, $r^6=5$

따라서

$$\begin{aligned}T_9&=\frac{ar\{(r^2)^9-1\}}{r^2-1}\\&=\frac{ar\{(r^6)^3-1\}}{r^2-1}\\&=\frac{ar(r^6-1)\{(r^6)^2+r^6+1\}}{r^2-1}\\&=\frac{1}{6}\{(r^6)^2+r^6+1\}\ (\text{㉠에 의해})\\&=\frac{1}{6}(5^2+5+1)=\frac{31}{6}\end{aligned}$$

답 ④

12

원 C_n의 중심을 $Q_n\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}, 0\right)$이라 하면

$\overline{OQ_n}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$

이고 원의 중심 $Q_n\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}, 0\right)$과 직선 $3x-4y=0$ 사이의 거리는

$$\overline{P_nQ_n}=\frac{3\times\dfrac{1}{2^{n-1}}}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2^{n-1}}$$

두 선분 P_nQ_n, OP_n은 서로 수직이므로

$$\begin{aligned}a_n=\overline{OP_n}&=\sqrt{\overline{OQ_n}^2-\overline{P_nQ_n}^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2\left(1-\frac{9}{25}\right)}\\&=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

따라서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{4}{5}\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2^{k-1}}$

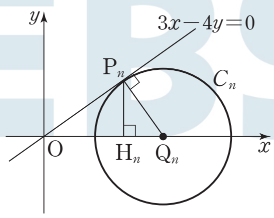
$$=\frac{4}{5}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{8}{5}\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)$$

답 ③

다른 풀이

원 C_n의 중심을 $\mathrm{Q}_n\left(\frac{1}{2^{n-1}},\ 0\right)$이라 하고, 점 P_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자.



직선 $3x-4y=0$의 기울기가 $\frac{3}{4}$이므로

직각삼각형 $\mathrm{OH}_n\mathrm{P}_n$에서 $\overline{\mathrm{OH}_n} : \overline{\mathrm{H}_n\mathrm{P}_n}=4:3$

그러므로 $\overline{\mathrm{OP}_n} : \overline{\mathrm{OH}_n}=5:4$

$\triangle\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n \backsim \triangle\mathrm{OH}_n\mathrm{P}_n$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}_n} : \overline{\mathrm{OP}_n}=\overline{\mathrm{OP}_n} : \overline{\mathrm{OH}_n}=5:4$

$\overline{\mathrm{OP}_n}=\frac{4}{5}\times\overline{\mathrm{OQ}_n}=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2^{n-1}}$

즉, $a_n=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2^{n-1}}$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{4}{5}\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2^{k-1}}$$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{8}{5}\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)$$

13

2, a, b는 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=2b$ …… ㉠

a, b, 12는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b=a+12$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a^2=a+12$

$a^2-a-12=0$

$(a-4)(a+3)=0$

이때 $a>0$이므로

$a=4$, $b=8$

따라서 $a+b=4+8=12$

답 ③

14

$f(x)=x^2+ax-a$로 놓으면 나머지정리에 의하여

$p=f(-2)=4-2a-a=-3a+4$

$q=f(0)=-a$

$r=f(1)=1+a-a=1$

세 수 p, q, r가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$q^2=pr$에서

$(-a)^2=(-3a+4)\times1$

$a^2+3a-4=0$, $(a+4)(a-1)=0$

$a=-4$ 또는 $a=1$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 -3이다.

답 ③

15

ㄱ. 조건 (나)에서

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=28+2\times22=72$

이때 a, b, c는 양수이므로

$a+b+c=6\sqrt{2}$ (참)

ㄴ. 조건 (가)에서

a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a+c=2b$

ㄱ에서

$a+b+c=b+(a+c)=3b=6\sqrt{2}$

따라서 $b=2\sqrt{2}$ (참)

ㄷ. a, k, c가 이 순서대로 등비수열을 이루면 $k^2=ca$이다.

$a+c=2b=4\sqrt{2}$이므로

$ab+bc+ca=b(a+c)+ca$

$=2\sqrt{2}\times4\sqrt{2}+ca=22$

에서 $ca=6$

따라서 $k^2=6$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

16

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 하면

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=\log(n+2)(n+3)-\log(n+1)(n+2)$

$=\log\frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)(n+2)}$

$=\log\frac{n+3}{n+1}$ $(n\geq2)$

이므로 $a_{2k}=\log\frac{2k+3}{2k+1}$

$$\sum_{k=1}^{10}a_{2k}=\sum_{k=1}^{10}\log\frac{2k+3}{2k+1}$$

$$=\log\frac{5}{3}+\log\frac{7}{5}+\log\frac{9}{7}+\cdots+\log\frac{23}{21}$$

$$=\log\left(\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}\times\frac{9}{7}\times\cdots\times\frac{23}{21}\right)$$

$$=\log\frac{23}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=23$이므로

$p+q=3+23=26$

답 ①

17

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=n^2+2^n$에서

$a_1=S_1=1^2+2^1=3$이고

$a_{10}=S_{10}-S_9$

$=(100+2^{10})-(81+2^9)$

$=19+2^9(2-1)$

$=531$

따라서 $a_1+a_{10}=3+531=534$

답 ④

다른 풀이

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$라 하면

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+2^n)-\{(n-1)^2+2^{n-1}\}$

$=(n^2+2^n)-(n^2-2n+1+2^{n-1})$

$=2n-1+2^n-2^{n-1}$

$=2n-1+2^{n-1}(2-1)$

$=2n-1+2^{n-1}\ (n\ge2)$

$a_1=S_1=1^2+2^1=3$이고

$a_{10}=2\times10-1+2^{10-1}=20-1+512=531$

따라서 $a_1+a_{10}=3+531=534$

18

$3^{S_n}=\frac{n+2}{3}$에서 $S_n=\log_3 \frac{n+2}{3}$이므로

$a_1=S_1=\log_3 1=0$

$a_4=S_4-S_3=\log_3 \frac{6}{3}-\log_3 \frac{5}{3}=\log_3 \frac{6}{5}$

따라서 $3^{a_1+a_4}=3^{a_4}=\frac{6}{5}$

답 ②

다른 풀이

$3^{S_n}=\frac{n+2}{3}$에서 $S_n=\log_3 \frac{n+2}{3}$

$n=1$일 때, $a_1=S_1=\log_3 1$

이므로 $3^{a_1}=1$

$n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=\log_3 \frac{n+2}{3}-\log_3 \frac{n+1}{3}$

$=\log_3 \frac{n+2}{n+1}$

즉, $3^{a_n}=\frac{n+2}{n+1}$

이므로 $3^{a_4}=\frac{6}{5}$

따라서 $3^{a_1+a_4}=3^{a_1}\times3^{a_4}=1\times\frac{6}{5}=\frac{6}{5}$

19

$\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{5}(a_k^2+2a_kb_k+b_k^2)$

$=\sum_{k=1}^{5}(a_k^2-2a_kb_k+b_k^2+4a_kb_k)$

$=\sum_{k=1}^{5}(a_k-b_k)^2+4\sum_{k=1}^{5}a_kb_k$

$=80+4\times20=160$

답 ①

20

$\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=\sum_{k=1}^{2n}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}$

$=(2n^2+6n)-2n^2$

$=6n$

이므로

$\sum_{k=1}^{12}a_{2k}=6\times12=72$

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{5}a_{2k}$

$=2\times5^2+6\times5=80$

따라서 $\sum_{k=1}^{12}a_{2k}+\sum_{k=1}^{10}a_k=72+80=152$

답 ②

21

$\sum_{k=1}^{9}(k+2)^2-\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k)$

$=\sum_{k=1}^{9}(k+2)^2-\left\{\sum_{k=1}^{9}(k^2+2k)+10^2+20\right\}$

$=\sum_{k=1}^{9}\{(k+2)^2-(k^2+2k)\}-120$

$=\sum_{k=1}^{9}(2k+4)-120$

$=2\times\frac{9\times10}{2}+4\times9-120$

$=90+36-120$

$=6$

답 ③

22

$1^2+2^2+3^2+\cdots+(k+1)^2=\sum_{i=1}^{k+1}i^2$

$=\frac{(k+1)(k+2)\{2(k+1)+1\}}{6}$

$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

따라서

$\sum_{k=1}^{20}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(k+1)^2}{k^2+3k+2}$

$=\sum_{k=1}^{20}\frac{\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}}{(k+1)(k+2)}$

$=\sum_{k=1}^{20}\frac{2k+3}{6}$

$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{20}(2k+3)$

$=\frac{1}{6}\left(2\sum_{k=1}^{20}k+\sum_{k=1}^{20}3\right)$

$=\frac{1}{6}\left(2\times\frac{20\times21}{2}+3\times20\right)$

$=\frac{480}{6}=80$

답 ②

23

$\sum_{k=1}^{2n}2k=2\times\frac{2n(2n+1)}{2}=2n(2n+1)$

이므로 $2n(2n+1)$을 $2n$으로 나눈 몫은 $2n+1$이다.

따라서 $a_n=2n+1$이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2k+1)$

$=2\times\frac{10\times11}{2}+10=120$

답 ③

24

$\overline{OP_1}=1$

$\overline{OP_2}=\sqrt{1^2+2^2}$

$\overline{OP_3}=\sqrt{\overline{OP_2}^2+3^2}=\sqrt{1^2+2^2+3^2}$

⋮

$\overline{OP_n}=\sqrt{\overline{OP_{n-1}}^2+n^2}=\sqrt{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$

$=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}k^2}=\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

따라서 $\overline{OP_{12}}=\sqrt{\frac{12\times13\times25}{6}}=\sqrt{2\times13\times5^2}=5\sqrt{26}$

답 ②

25

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$a_n=2n$이므로

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k}}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k}}{(\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k})(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k}}{2}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})$

$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})+(\sqrt{8}-\sqrt{6})+\cdots+(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n})\}$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2})$

즉, $\frac{1}{2}(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2})=\frac{3\sqrt{2}}{2}$에서

$\sqrt{2n+2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

$\sqrt{2n+2}=4\sqrt{2}$

$2n+2=32$

따라서 $n=15$

답 ①

26

$18^n=(2\times3^2)^n=2^n\times3^{2n}$이므로

$a_n=(n+1)(2n+1)$

$=2n^2+3n+1\ (n\ge2)$

$\frac{15^n}{9}=\frac{3^n\times5^n}{3^2}=3^{n-2}\times5^n$이므로

$b_n=(n-1)(n+1)$

$=n^2-1\ (n\ge2)$

그러므로

$a_n-b_n=(2n^2+3n+1)-(n^2-1)$

$=n^2+3n+2\ (n\ge2)$

따라서

$\sum_{n=2}^{10}\frac{1}{a_n-b_n}=\sum_{n=2}^{10}\frac{1}{n^2+3n+2}$

$=\sum_{n=2}^{10}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$=\sum_{n=2}^{10}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$

답 ④

27

두 원의 중심이 모두 x축 위에 있으므로 두 원의 교점의 x좌표는 모두 같다.

$C_1: x^2+y^2=4$ …… ㉠

$C_2: (x-2)^2+y^2=\frac{2}{n^2}$ …… ㉡

에서 ㉠−㉡을 하면

$4x-4=4-\frac{2}{n^2}$

$x=2-\frac{1}{2n^2}=\frac{4n^2-1}{2n^2}$

이므로 $a_n=\frac{4n^2-1}{2n^2}$

따라서

$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2k^2a_k}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{4k^2-1}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{21}\right)$

$=\frac{10}{21}$

답 ②

28

조건 (나)에서 $\frac{\log_2 a_n+\log_2 a_{n+2}}{2}=\log_2 a_{n+1}$이므로

$\log_2 a_n a_{n+2}=2\log_2 a_{n+1}=\log_2 a_{n+1}{}^2$

$a_n a_{n+2}=a_{n+1}{}^2$

따라서 주어진 10개의 양수 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{10}은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

이때 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

조건 (가)에서 $a_2 a_9=ar\times ar^8=a^2r^9=16$이므로

$$\begin{aligned}M&=a\times ar\times ar^2\times\cdots\times ar^9\\&=a^{10}r^{1+2+3+\cdots+9}\\&=a^{10}r^{45}=(a^2r^9)^5\\&=16^5=(2^4)^5=2^{20}\end{aligned}$$

따라서 $\log_2 M=\log_2 2^{20}=20$

답 ②

29

$a_1=1$, $a_{n+1}=-2a_n$이므로

$n=1$, 2, 3, 4를 대입하면

$a_2=-2$, $a_3=4$, $a_4=-8$, $a_5=16$

$b_1=1$, $b_{n+1}=|a_n-b_n|$이므로

$n=1$, 2, 3, 4를 대입하면

$b_2=|a_1-b_1|=|1-1|=0$

$b_3=|a_2-b_2|=|-2-0|=2$

$b_4=|a_3-b_3|=|4-2|=2$

$b_5=|a_4-b_4|=|-8-2|=10$

따라서 $b_6=|a_5-b_5|=|16-10|=6$

답 ②

30

$a_na_{n+1}=\frac{n+2}{n}$에서

$n=1$, 3, 5, 7, 9를 차례로 대입하면

$a_1a_2=\frac{3}{1}$, $a_3a_4=\frac{5}{3}$, $\cdots$, $a_9a_{10}=\frac{11}{9}$

이므로

$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_9\times a_{10}=\frac{3}{1}\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}\times\frac{9}{7}\times\frac{11}{9}=11$ …… ㉠

$a_na_{n+1}=\frac{n+2}{n}$에서

$n=2$, 4, 6, 8을 차례로 대입하면

$a_2a_3=\frac{4}{2}$, $a_4a_5=\frac{6}{4}$, $a_6a_7=\frac{8}{6}$, $a_8a_9=\frac{10}{8}$

이므로

$a_2\times a_3\times a_4\times\cdots\times a_9=\frac{4}{2}\times\frac{6}{4}\times\frac{8}{6}\times\frac{10}{8}=5$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면

$a_1a_{10}=\frac{11}{5}$

이때 $a_1=1$이므로

$a_{10}=\frac{11}{5}$

따라서 $\alpha=11$, $\beta=5$, $\gamma=\frac{11}{5}$이므로

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma}=\frac{11\times5}{\frac{11}{5}}=25$$

답 25

31

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{40}a_k&=(a_1+a_2+a_3)+a_4\\&\quad+(a_5+a_6+a_7)+a_8\\&\quad+(a_9+a_{10}+a_{11})+a_{12}+\cdots\\&\quad+(a_{37}+a_{38}+a_{39})+a_{40}\\&=2a_4+2a_8+2a_{12}+\cdots+2a_{40}\\&=2\sum_{k=1}^{10}a_{4k}\\&=2\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{10}k^2\\&=\frac{1}{5}\times\frac{10\times11\times21}{6}=77\end{aligned}$$

답 ④

32

$a_1=1<3$이므로 $a_2=1+1=2$

$a_2=2<3$이므로 $a_3=a_2+1=2+1=3$

$a_3=3\geq3$이므로 $a_4=a_3-2=3-2=1$

$a_4=1<3$이므로 $a_5=a_4+1=1+1=2$

$a_5=2<3$이므로 $a_6=a_5+1=2+1=3$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$은 1, 2, 3이 반복되므로 $3k$ ($k=1$, 2, 3, $\cdots$)번째 항에서 3이 반복적으로 나온다.

$3k$가 30 이하의 자연수가 되는 경우는

$k=1$, 2, 3, $\cdots$, 10이고, 이때 $n=3$, 6, 9, $\cdots$, 30이다.

따라서 구하는 자연수 n의 개수는 10이다.

답 ②

33

ㄱ. 조건 (가)에서 $a_1=1$, $a_2=2$이므로 조건 (나)에서

$a_3=\frac{2+1}{1}=3$, $a_4=\frac{3+1}{2}=2$, $a_5=\frac{2+1}{3}=1$ (참)

ㄴ. 조건 (나)에서

$a_6=\frac{1+1}{2}=1$, $a_7=\frac{1+1}{1}=2$, $a_8=\frac{2+1}{1}=3$, $\cdots$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 1, 2, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, $\cdots$과 같이 1, 2, 3, 2, 1이 반복된다.

따라서 임의의 두 자연수 m, n에 대하여 $a_{5n+2}=a_{5m+4}$이다. (참)

ㄷ. $\sum_{k=1}^{50}a_{2k}=10(a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})$

$=10\times(2+2+1+3+1)$

$=90$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

34

(ⅰ) $n=1$일 때,

$$a_1=\frac{2}{2-1}\times\frac{1}{3^0}=\boxed{2}<3$$

이다.

(ⅱ) $n=k$일 때, $a_k<3$이라 가정하자.

$n=k+1$일 때,

$$a_{k+1}=\sum_{i=1}^{k+1}\left(\frac{k+2}{k+2-i}\times\frac{1}{3^{i-1}}\right)$$

$$=\frac{k+2}{k+1}+\frac{k+2}{k}\times\frac{1}{3}+\frac{k+2}{k-1}\times\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{k+2}{3^k}$$

$$=\frac{k+2}{k+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{k+1}{k}+\frac{k+1}{k-1}\times\frac{1}{3}+\cdots+\frac{k+1}{3^{k-1}}\right)$$

$$+\boxed{\frac{1}{3(k+1)}}\times\left(\frac{k+1}{k}+\frac{k+1}{k-1}\times\frac{1}{3}+\cdots+\frac{k+1}{3^{k-1}}\right)$$

$$=1+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{3}\times a_k+\frac{1}{3(k+1)}\times a_k$$

$$=1+\frac{1}{k+1}+\left(\boxed{\frac{1}{3}+\frac{1}{3k+3}}\right)\times a_k$$

그런데 $k\ge1$, $a_k<3$이므로

$$a_{k+1}<1+\frac{1}{k+1}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3k+3}\right)\times3=2+\frac{2}{k+1}\le3$$

이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<3$이 성립한다.

따라서 $\alpha=2$이고, $f(k)=\frac{1}{3(k+1)}$, $g(k)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3k+3}$이므로

$$\frac{g(\alpha)}{f(\alpha)}=\frac{g(2)}{f(2)}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}}=4$$

답 ②

04 지수와 로그

정답 (본문 42~49쪽)

01 ⑤	02 ⑤	03 ④	04 ②	05 ③
06 ③	07 85	08 ④	09 ④	10 ①
11 ④	12 ④	13 7	14 ③	15 ②
16 ③	17 ③	18 ⑤	19 ②	20 ②
21 ④	22 ④	23 ④	24 ③	25 ③
26 ①	27 ②	28 ④	29 30	30 ⑤

01

$t=\sqrt[3]{50}-\sqrt[3]{20}$에서 양변을 세제곱하면

$$t^3=(\sqrt[3]{50}-\sqrt[3]{20})^3$$

$$=50-3\times(\sqrt[3]{50})^2\times\sqrt[3]{20}+3\times\sqrt[3]{50}\times(\sqrt[3]{20})^2-20$$

$$=30-3\times\sqrt[3]{50}\times\sqrt[3]{20}(\sqrt[3]{50}-\sqrt[3]{20})$$

$$=30-3\times\sqrt[3]{10^3}\times t$$

$$=30-30t$$

따라서 $t^3+30t=30$

답 ⑤

02

$$\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}+\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}-\sqrt[3]{\sqrt{64}}+\sqrt[5]{-32}$$

$$=\sqrt[3]{3\times9}+\sqrt[4]{\frac{243}{3}}-\sqrt[6]{64}+\sqrt[5]{(-2)^5}$$

$$=\sqrt[3]{3^3}+\sqrt[4]{3^4}-\sqrt[6]{2^6}+\sqrt[5]{(-2)^5}$$

$$=3+3-2+(-2)$$

$$=2$$

답 ⑤

03

9의 네제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[4]{9}$, $-\sqrt[4]{9}$의 2개이고,

-9의 네제곱근 중 실수인 것은 없으므로

$f(4)=2$, $g(4)=0$

9의 다섯제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[5]{9}$의 1개이고,

-9의 다섯제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[5]{-9}$의 1개이므로

$f(5)=1$, $g(5)=1$

따라서 $f(4)+g(4)+f(5)+g(5)=2+0+1+1=4$

답 ④

04

$\sqrt[n]{a}$는 n이 홀수인 경우 a의 값에 관계없이 실수이고, n이 짝수인 경우 $a\ge0$일 때는 실수이고 $a<0$일 때는 실수가 아니다.

(ⅰ) n이 홀수일 때,

$\sqrt[3]{-2}$, $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{2}$,

$\sqrt[5]{-2}$, $\sqrt[5]{-1}$, $\sqrt[5]{1}$, $\sqrt[5]{2}$

는 모두 실수이다.

(ii) n이 짝수일 때,

$\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[4]{2}$

의 2개만 실수이다.

그런데 $\sqrt[3]{-1}=\sqrt[5]{-1}=-1$이고 $\sqrt[3]{1}=\sqrt[5]{1}=\sqrt[4]{1}=1$이므로 주어진 집합은 $\{\sqrt[3]{-2}, \sqrt[5]{-2}, -1, 1, \sqrt[5]{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[3]{2}\}$이다.

따라서 집합의 원소의 개수는 7이다.

답 ②

05

$\sqrt[3]{-10}$은 -10의 세제곱근이므로 음의 실수이다.

따라서 $\sqrt[n]{\sqrt[3]{-10}}$이 음의 실수가 되려면 n은 3 이상의 홀수이어야 한다.

또한 $\sqrt[3]{n^2}=n^{\frac{2}{3}}$이 225 이하의 자연수가 되려면 n이 3 이상의 홀수이므로 $n=m^{3k}$ (m은 3 이상의 홀수, k는 자연수)이어야 한다.

$\sqrt[3]{n^2}=n^{\frac{2}{3}}=(m^{3k})^{\frac{2}{3}}=m^{2k}\le 225$

$m^k\le 15$ …… ㉠

따라서 ㉠을 만족시키는 정수 m, k의 값을 순서쌍 (m, k)로 나타내면

$(3, 1)$, $(3, 2)$, $(5, 1)$, $(7, 1)$, $(9, 1)$, $(11, 1)$, $(13, 1)$, $(15, 1)$

이때 $n=m^{3k}$의 값은 각각 3^3, 3^6, 5^3, 7^3, 9^3, 11^3, 13^3, 15^3인데, $3^6=9^3$이므로 구하는 자연수 n의 개수는 7이다.

답 ③

06

$A=\sqrt[4]{\sqrt[3]{32}}\times\sqrt{\sqrt[3]{4}}$

$=\sqrt[12]{32}\times\sqrt[6]{4}$

$=\sqrt[12]{2^5}\times\sqrt[6]{2^2}$

$=2^{\frac{5}{12}}\times 2^{\frac{1}{3}}$

$=2^{\frac{3}{4}}$

$A^n=(2^{\frac{3}{4}})^n=2^{\frac{3n}{4}}$

n이 자연수이고 3과 4는 서로소이므로 n이 4의 배수일 때, A^n이 정수가 된다.

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 4이다.

답 ③

07

$6^{x+1}=8$에서

$6\times 6^x=8$, $6^x=\frac{4}{3}$ …… ㉠

$\left(\frac{1}{36}\right)^{1-x}=(6^{-2})^{1-x}=6^{-2+2x}$

$=\frac{1}{36}\times(6^x)^2=\frac{1}{36}\times\left(\frac{4}{3}\right)^2$ (㉠에 의해)

$=\frac{4}{81}$

따라서 $a=81$, $b=4$이므로

$a+b=81+4=85$

답 85

다른 풀이

$\left(\frac{1}{36}\right)^{1-x}=36^{x-1}=36^{x+1-2}$

$=36^{-2}\times(6^2)^{x+1}$

$=36^{-2}\times(6^{x+1})^2$

$=\frac{1}{36^2}\times 8^2$

$=\frac{4}{81}$

따라서 $a=81$, $b=4$이므로

$a+b=81+4=85$

08

이차방정식 $x^2+5x-3=0$의 두 실근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=-3$

따라서

$\frac{2^\alpha\times 4^\beta}{(2\times 2^\alpha)^\beta}=\frac{2^\alpha\times 2^{2\beta}}{2^\beta\times 2^{\alpha\beta}}=\frac{2^{\alpha+2\beta}}{2^{\beta+\alpha\beta}}$

$=2^{\alpha+2\beta-(\beta+\alpha\beta)}$

$=2^{\alpha+\beta-\alpha\beta}$

$=2^{-5-(-3)}$

$=2^{-2}=\frac{1}{4}$

답 ④

09

$\frac{a^{\frac{3}{2}}-ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b-b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=\frac{a(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})+b(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$

$=\frac{(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a+b)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$

$=a+b$

이때

$a=\frac{3}{\sqrt{2}+1}=3(\sqrt{2}-1)=3\sqrt{2}-3$

$b=\frac{3}{\sqrt{2}-1}=3(\sqrt{2}+1)=3\sqrt{2}+3$

따라서 $a+b=3\sqrt{2}-3+3\sqrt{2}+3=6\sqrt{2}$

답 ④

10

$a^3=3$, $b^5=27$에서 $a=3^{\frac{1}{3}}$, $b=27^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{3}{5}}$이므로

$(\sqrt[3]{a}\sqrt{b})^n=a^{\frac{n}{3}}b^{\frac{n}{2}}$

$=(3^{\frac{1}{3}})^{\frac{n}{3}}(3^{\frac{3}{5}})^{\frac{n}{2}}$

$=3^{\frac{n}{9}}\times 3^{\frac{3n}{10}}$

$=3^{\frac{n}{9}+\frac{3n}{10}}=3^{\frac{37n}{90}}$

$3^{\frac{37n}{90}}$이 자연수가 되기 위해서는 $\frac{37n}{90}$이 자연수이어야 하고 90과 37이 서로소이므로 n은 90의 배수이어야 한다.

따라서 300 이하의 자연수 n은 90, 180, 270이므로 그 개수는 3이다.

답 ①

11

$\sqrt{\frac{2^b\times7^a}{2}}=\sqrt{2^{b-1}\times7^a}=2^{\frac{b-1}{2}}\times7^{\frac{a}{2}}$

이 자연수이기 위해서는 $b-1$과 a가 2의 배수이어야 한다.

$\sqrt[3]{\frac{2^a\times7^b}{2\times7^2}}=\sqrt[3]{2^{a-1}\times7^{b-2}}=2^{\frac{a-1}{3}}\times7^{\frac{b-2}{3}}$

이 자연수이기 위해서는 $a-1$과 $b-2$가 3의 배수이어야 한다.

즉, a는 2의 배수, $a-1$은 3의 배수이어야 하므로 두 조건을 모두 만족시키는 자연수 a의 최솟값은 4이고, $b-1$은 2의 배수, $b-2$는 3의 배수이어야 하므로 두 조건을 모두 만족시키는 자연수 b의 최솟값은 5이다.

따라서 $a+b$의 최솟값은 $4+5=9$

답 ④

12

$4^x=25$에서 $25^{\frac{1}{x}}=4$

$\sqrt{3^y}=3^{\frac{y}{2}}=25$에서 $25^{\frac{2}{y}}=3$

$\sqrt[3]{2^z}=2^{\frac{z}{3}}=25$에서 $25^{\frac{3}{z}}=2$

이때 $25^{\frac{6}{z}}=(25^{\frac{3}{z}})^2=2^2=4$이므로

$$\begin{aligned}25^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{6}{z}}&=25^{\frac{1}{x}}\times25^{\frac{2}{y}}\times25^{\frac{6}{z}}\\&=4\times3\times4\\&=48\end{aligned}$$

답 ④

13

$$\begin{aligned}1+x^2&=1+\left(\frac{7^2-7^{-2}}{2}\right)^2\\&=1+\frac{7^4-2+7^{-4}}{4}\\&=\frac{7^4+2+7^{-4}}{4}\\&=\left(\frac{7^2+7^{-2}}{2}\right)^2\end{aligned}$$

이때 $\frac{7^2+7^{-2}}{2}>0$이므로

$x+\sqrt{1+x^2}=\frac{7^2-7^{-2}}{2}+\frac{7^2+7^{-2}}{2}=7^2$

따라서 $\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{7^2}=7$

답 7

14

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{16}}{16}}&=\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{16^3}}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{1}{16^2}}}\\&=\sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{1}{2^8}}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\sqrt{16}}{\sqrt[3]{16}}}&=\sqrt{\sqrt[6]{\frac{16^3}{16^2}}}=\sqrt[12]{16}\\&=\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4}}=\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

따라서 $M=\sqrt[3]{2}$, $m=\sqrt[3]{\frac{1}{2^2}}$이므로

$\frac{M^3}{m^3}=\frac{2}{\frac{1}{4}}=8$

답 ③

15

처음 무게가 40인 해산물을 90일 동안 양식한 후의 무게가 80이므로

$40\left(1+\frac{r}{100}\right)^{90}=80$, $\left(1+\frac{r}{100}\right)^{90}=2$

$1+\frac{r}{100}=2^{\frac{1}{90}}$

이때 처음 무게가 40인 해산물을 30일, 60일 동안 양식한 후의 무게 a, b는 각각

$a=40\left(1+\frac{r}{100}\right)^{30}$

$b=40\left(1+\frac{r}{100}\right)^{60}$

따라서

$$\begin{aligned}\frac{b}{a}&=\frac{40\left(1+\frac{r}{100}\right)^{60}}{40\left(1+\frac{r}{100}\right)^{30}}\\&=\left(1+\frac{r}{100}\right)^{30}\\&=(2^{\frac{1}{90}})^{30}\\&=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

답 ②

16

$a-1$은 $\log_{a-1}(-a^2+7a-6)$의 밑이므로

$a-1>0$, $a-1\neq1$이어야 한다.

즉, $a>1$, $a\neq2$ …… ㉠

$-a^2+7a-6$은 $\log_{a-1}(-a^2+7a-6)$의 진수이므로

$-a^2+7a-6>0$이어야 한다.

$-a^2+7a-6=-(a^2-7a+6)=-(a-1)(a-6)>0$

에서 $(a-1)(a-6)<0$

이므로 $1<a<6$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $1<a<2$ 또는 $2<a<6$

따라서 자연수 a는 3, 4, 5이므로 그 개수는 3이다.

답 ③

17

$$\begin{aligned}&\log_{\frac{1}{3}}2+\frac{1}{2}\log_3108-\log_3\frac{1}{3\sqrt{3}}\\&=\log_{3^{-1}}2+\log_3\sqrt{108}-\log_3(3\sqrt{3})^{-1}\\&=-\log_32+\log_36\sqrt{3}+\log_33\sqrt{3}\\&=\log_36\sqrt{3}-\log_32+\log_33\sqrt{3}\\&=\log_3\left(\frac{6\sqrt{3}}{2}\times3\sqrt{3}\right)\\&=\log_327\\&=\log_33^3=3\end{aligned}$$

답 ③

18

$\log_{27} a = \log_9 b$에서

$\frac{1}{3}\log_3 a = \frac{1}{2}\log_3 b$

$\log_3 a = \frac{3}{2}\log_3 b = \log_3 b^{\frac{3}{2}}$

$a = b^{\frac{3}{2}}$

따라서

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{b}} a &= \log_{b^{\frac{1}{2}}} b^{\frac{3}{2}}\\ &= \left(2\times\frac{3}{2}\right)\log_b b\\ &= 3\end{aligned}$$

답 ⑤

19

$a^2 = b^3$에서 $b = a^{\frac{2}{3}}$이므로 $\log_a b = \log_a a^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

$b^3 = c^5$에서 $c = b^{\frac{3}{5}}$이므로 $\log_b c = \log_b b^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}$

$a^2 = c^5$에서 $a = c^{\frac{5}{2}}$이므로 $\log_c a = \log_c c^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$

따라서

$$\begin{aligned}\log_a b + \log_{\sqrt{b}} \frac{1}{c} + \log_c \sqrt{a} &= \log_a b + \log_{b^{\frac{1}{2}}} c^{-1} + \log_c a^{\frac{1}{2}}\\ &= \log_a b - 2\log_b c + \frac{1}{2}\log_c a\\ &= \frac{2}{3} - \frac{6}{5} + \frac{5}{4} = \frac{43}{60}\end{aligned}$$

답 ②

20

점 $A(2^{-a},\ -2^a)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면 $A'(-2^a,\ 2^{-a})$이다. 점 B는 점 A'을 x축에 대하여 대칭이동한 점이므로 $B(-2^a,\ -2^{-a})$이다.

직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{-2^{-a}+2^a}{-2^a-2^{-a}} = \frac{1}{2}$ ...... ㉠

㉠의 좌변의 분모와 분자에 각각 2^a을 곱하면

$\frac{-1+4^a}{-4^a-1} = \frac{1}{2}$

$-4^a - 1 = -2 + 2\times 4^a$

$3\times 4^a = 1$

$4^a = \frac{1}{3}$

따라서 $a = \log_4 \frac{1}{3} = \log_{2^2} 3^{-1} = -\frac{1}{2}\log_2 3$

답 ②

21

세포 10개가 분열을 계속할 때, a일 후의 세포의 개수가 b이므로

$b = 10\times 2^a$

$2^a = \frac{b}{10}$

$a = \log_2 \frac{b}{10} = \log_2 b - \log_2 10 = \log_2 b - \log_2 5 - 1$

즉, $f(b) = \log_2 b - \log_2 5 - 1$

따라서

$$\begin{aligned}f(16b) - f(2b) &= \log_2 16b - \log_2 2b\\ &= \log_2 \frac{16b}{2b}\\ &= \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3\end{aligned}$$

답 ④

22

$$\begin{aligned}\log_3 14 - \frac{\log_5 50}{\log_5 3} + \frac{1}{\log_{25} 3} &= \log_3 14 - \log_3 50 + \log_3 25\\ &= \log_3 \frac{14\times 25}{50}\\ &= \log_3 7\end{aligned}$$

즉, $\log_3 7 = k$이므로

$3^k = 7$

답 ④

23

$$\begin{aligned}\log_5 \sqrt{270} &= \log_5 270^{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{2}\log_5 270\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\log 270}{\log 5}\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\log(10\times 3^3)}{\log\frac{10}{2}}\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1+3\log 3}{1-\log 2}\\ &= \frac{1+3b}{2-2a}\end{aligned}$$

답 ④

24

$\sum_{k=1}^{6} \log_3 \{\log_{k+2}(k+1)\}$

$= \log_3(\log_3 2) + \log_3(\log_4 3) + \log_3(\log_5 4) + \cdots + \log_3(\log_8 7)$

$= \log_3(\log_3 2\times\log_4 3\times\log_5 4\times\cdots\times\log_8 7)$

이때

$\log_3 2\times\log_4 3\times\log_5 4\times\cdots\times\log_8 7$

$= \frac{\log 2}{\log 3}\times\frac{\log 3}{\log 4}\times\frac{\log 4}{\log 5}\times\cdots\times\frac{\log 7}{\log 8}$

$= \frac{\log 2}{\log 8} = \log_8 2 = \log_{2^3} 2 = \frac{1}{3}\log_2 2 = \frac{1}{3}$

따라서 $\sum_{k=1}^{6}\log_3\{\log_{k+2}(k+1)\} = \log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1$

답 ③

25

조건 (가)에서 $2^a = 3^b = k^c = t\ (t>0,\ t\neq 1)$이라 하면

$a = \log_2 t,\ b = \log_3 t,\ c = \log_k t$

조건 (나)의 $ab = bc + ca$에서

$\log_2 t\times\log_3 t = \log_3 t\times\log_k t + \log_k t\times\log_2 t$

$$\frac{1}{\log_t 2}\times\frac{1}{\log_t 3}=\frac{1}{\log_t 3}\times\frac{1}{\log_t k}+\frac{1}{\log_t k}\times\frac{1}{\log_t 2}$$

$$\frac{1}{\log_t 2\times\log_t 3}=\frac{1}{\log_t k}\left(\frac{1}{\log_t 3}+\frac{1}{\log_t 2}\right)$$

$$\log_t k=(\log_t 2\times\log_t 3)\left(\frac{1}{\log_t 3}+\frac{1}{\log_t 2}\right)$$

$$=\log_t 2+\log_t 3=\log_t (2\times 3)=\log_t 6$$

따라서 $k=6$

답 ③

다른 풀이

$ab=bc+ca$의 양변을 abc로 나누면

$\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ …… ㉠

$2^a=3^b=k^c=t\ (t>0,\ t\neq 1)$이라 하면

$a=\log_2 t,\ b=\log_3 t,\ c=\log_k t$

이므로 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{\log_k t}=\frac{1}{\log_2 t}+\frac{1}{\log_3 t}$$

$\log_t k=\log_t 2+\log_t 3$

$\log_t k=\log_t 6$

따라서 $k=6$

26

$A=1+\log_4 2=1+\log_{2^2} 2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$B=\log_{\sqrt{2}} 2=\log_{2^{\frac{1}{2}}} 2=2$

$C=\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_3 2}=\frac{1}{\log_2 3}+\log_2 3$

$\log_2 3=a$로 놓으면 $a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 대소 관계에 의하여

$$C=a+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{a\times\frac{1}{a}}=2$$

이때 $a\neq\frac{1}{a}$이므로 $C>2$

따라서 $A<B<C$

답 ①

27

$\frac{1}{\log_{a+b} 2}=3$에서 $\log_2 (a+b)=3$이므로

$a+b=2^3=8$

$\log_2 a=3-\frac{1}{\log_b 2}$에서

$\log_2 a+\frac{1}{\log_b 2}=3$

$\log_2 a+\log_2 b=3$

$\log_2 ab=3$

그러므로 $ab=2^3=8$

따라서 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=8^2-2\times 8=48$

답 ②

참고

$a+b=8$, $ab=8$을 구한 후에 a^2+b^2의 값을 다음과 같이 구할 수 있다.

$b=8-a$이므로 $ab=a(8-a)$에서 $a^2=8a-8$

$a=8-b$이므로 $ab=(8-b)b=8$에서 $b^2=8b-8$

따라서

$$a^2+b^2=(8a-8)\times(8b-8)=8(a+b)-16$$

$$=8\times 8-16=48$$

28

$\log 375=\log (5^3\times 3)$

$=3\log 5+\log 3$

$=3\times(1-\log 2)+\log 3$

$=3\times(1-0.3010)+0.4771$

$=2.0970+0.4771$

$=2.5741$

$\log 375^{10}=10\log 375$

$=10\times 2.5741$

$=25.741$

따라서 $25<\log 375^{10}<26$이므로 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 26이다.

답 ④

29

$72=1\times 72=2\times 36=3\times 24=4\times 18=6\times 12=8\times 9$

12개의 약수가 작은 수부터 차례대로 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{12}$이므로

$a_1\times a_{12}=a_2\times a_{11}=\cdots=a_6\times a_7=72$

$\log a_1+\log a_2+\log a_3+\cdots+\log a_{12}$

$=\log (a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{12})$

$=\log 72^6$

$=6\log 72$

$=6\log (2^3\times 3^2)$

$=6(3\log 2+2\log 3)$

$=18\log 2+12\log 3$

따라서 $p=18,\ q=12$이므로

$p+q=18+12=30$

답 30

30

I_A는 I_0의 1600배이므로

$M_A=6-2.5(\log 1600I_0-\log I_0)=6-2.5\log 1600$

I_B는 I_0의 100배이므로

$M_B=6-2.5(\log 100I_0-\log I_0)=6-2.5\log 100$

따라서

$M_B-M_A=(6-2.5\log 100)-(6-2.5\log 1600)$

$=2.5(\log 1600-\log 100)$

$=2.5\log 16$

$=2.5\log 2^4$

$=10\log 2$

답 ⑤

미적분 I

05 수열의 극한

정답 본문 52~61쪽

01 ③	02 ④	03 ①	04 ⑤	05 ⑤
06 ②	07 ②	08 ③	09 ③	10 ②
11 ⑤	12 ⑤	13 10	14 ①	15 ⑤
16 7	17 ④	18 ③	19 5	20 ①
21 ④	22 ⑤	23 ①	24 8	25 ④
26 ③	27 225			

01

$\dfrac{3a_n+2}{a_n-3}=b_n$이라 하면 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=6$이고

$3a_n+2=(a_n-3)b_n$

$a_n(-b_n+3)=-3b_n-2$

$a_n=\dfrac{3b_n+2}{b_n-3}$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3b_n+2}{b_n-3}=\frac{3\lim\limits_{n\to\infty}b_n+\lim\limits_{n\to\infty}2}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n-\lim\limits_{n\to\infty}3}=\frac{3\times6+2}{6-3}=\frac{20}{3}$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n+4)=3\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}4=3\times\dfrac{20}{3}+4=24$

답 ③

02

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n^2=\lim\limits_{n\to\infty}a_na_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\times\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3\times3=9$

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n^2=\lim\limits_{n\to\infty}b_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n\times\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1\times1=1$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^2-4b_n^2)=\lim_{n\to\infty}a_n^2-4\lim_{n\to\infty}b_n^2=9-4\times1=5$$

답 ④

다른 풀이

$a_n^2-4b_n^2=(a_n-2b_n)(a_n+2b_n)$이고

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-2b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-2\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3-2\times1=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+2\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3+2\times1=5$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^2-4b_n^2)=\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)(a_n+2b_n)=\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)\times\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=1\times5=5$$

03

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(5n^2+1)b_n}{na_n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n^2+2)b_n}{(n+1)a_n}\times\frac{(5n^2+1)(n+1)}{n(n^2+2)}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2)b_n}{(n+1)a_n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3+5n^2+n+1}{n^3+2n}$$
$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+2)b_n}{\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)a_n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{n^2}}$$
$$=\frac{4}{2}\times\frac{5+0+0+0}{1+0}=10$$

답 ①

04

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{2+\frac{3}{n}}=\frac{4}{2+0}=2$$

답 ⑤

05

$$3+6+9+\cdots+3n=3(1+2+3+\cdots+n)=3\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{3}{2}(n^2+n)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{kn^2}{3+6+9+\cdots+3n}=\frac{2}{3}k\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=\frac{2}{3}k\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}k$$

이때 주어진 수열의 극한값이 8이므로

$\dfrac{2}{3}k=8$에서 $k=12$

답 ⑤

06

$n\to\infty$일 때, 주어진 수열의 극한이 존재하려면 $\infty-\infty$ 꼴이어야 하므로 $b>0$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+an}-(bn-4)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{n^2+an}-(bn-4)\}\{\sqrt{n^2+an}+(bn-4)\}}{\sqrt{n^2+an}+(bn-4)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+an-(bn-4)^2}{\sqrt{n^2+an}+(bn-4)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-b^2)n^2+(a+8b)n-16}{\sqrt{n^2+an}+(bn-4)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-b^2)n+(a+8b)-\frac{16}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+\left(b-\frac{4}{n}\right)}$$

이 수열의 극한이 존재하려면 $1-b^2=0$이어야 하므로

$(1-b)(1+b)=0$

이때 $b>0$이므로 $b=1$

그러므로

$$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+an}-(bn-4)\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+8)-\frac{16}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+\left(1-\frac{4}{n}\right)}$$

$$=\frac{a+8}{1+1}=\frac{a+8}{2}$$

이때 주어진 수열의 극한값이 5이므로

$\frac{a+8}{2}=5$에서 $a=2$

따라서 $a+b=2+1=3$

답 ②

07

부등식 $2n-1<na_n<2n+3$의 각 변을 n으로 나누면

$$2-\frac{1}{n}<a_n<2+\frac{3}{n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=2$, $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)=2$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}a_n=2$$

답 ②

08

부등식 $\sqrt{4n^2+4n}\le\sqrt{na_n}\le 2n+1$의 각 변을 제곱한 후 n^2으로 나누면

$$4+\frac{4}{n}\le\frac{a_n}{n}\le 4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{4}{n}\right)=4$, $\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=4$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=4$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^2+na_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$$

$$=4^2+4=20$$

답 ③

09

조건 (나)의 부등식의 각 변에 $4n^2$을 곱하면

$$\frac{4n^2}{2n^2+1}\le a_nb_n\le\frac{4n^2}{2n^2-1}$$

$$\frac{4}{2+\frac{1}{n^2}}\le a_nb_n\le\frac{4}{2-\frac{1}{n^2}}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{4}{2+\frac{1}{n^2}}=2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{4}{2-\frac{1}{n^2}}=2$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=2$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}({a_n}^2+a_nb_n+{b_n}^2)=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-a_nb_n\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)^2-\lim_{n\to\infty}a_nb_n$$

$$=3^2-2=7$$

답 ③

10

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2\times3^n+5)^2}{9^n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2\times3^n)^2+20\times3^n+5^2}{9^n+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times9^n+20\times3^n+25}{9^n+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+20\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+25\times\left(\frac{1}{9}\right)^n}{1+5\times\left(\frac{1}{9}\right)^n}$$

$$=\frac{4+20\times0+25\times0}{1+5\times0}$$

$$=4$$

답 ②

11

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times6^{n+1}-2^n}{2^n(3^n+2^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\times6^{n+1}-2^n}{6^n+4^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a\times6-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{6a-0}{1+0}=6a$$

따라서 $6a=10$에서 $a=\frac{5}{3}$

답 ⑤

12

공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$에서

$a_n=a_1\times2^{n-1}$

$$S_n=\frac{a_1(2^n-1)}{2-1}=a_1(2^n-1)$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(2^n-1)}{a_1\times2^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=2$$

답 ⑤

13

$x+y=2^n$의 양변을 제곱하면

$(x+y)^2=(2^n)^2$

$x^2+y^2+2xy=4^n$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x^2+y^2=5^n$을 ㉠에 대입하면

$5^n+2xy=4^n$

$xy=\frac{1}{2}(4^n-5^n)$

이때 주어진 연립이차방정식의 해가 $x=a_n$, $y=b_n$이므로

$a_nb_n=\frac{1}{2}(4^n-5^n)$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{20a_nb_n}{3^n-5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10(4^n-5^n)}{3^n-5^n}$$

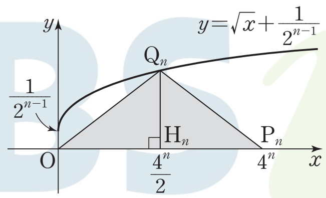
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^n-1\right\}}{\left(\frac{3}{5}\right)^n-1}$$

$$=\frac{10(0-1)}{0-1}=10$$

답 10

14

삼각형 OP_nQ_n은 $\overline{OQ_n}=\overline{P_nQ_n}$인 이등변삼각형이므로 점 Q_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H_n이라 하면 점 H_n의 x좌표는 $\frac{4^n}{2}$이다.



이때 삼각형 OP_nQ_n의 넓이 S_n은

$$S_n=\frac{1}{2}\times\overline{OP_n}\times\overline{Q_nH_n}$$

$$=\frac{1}{2}\times4^n\times\left(\sqrt{\frac{4^n}{2}}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\times8^n+2^n$$

따라서

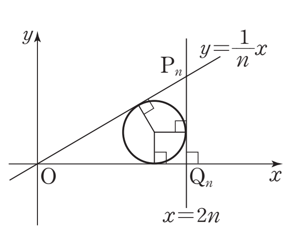
$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{8^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}\times8^n+2^n}{8^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\sqrt{2}}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 ①

15



그림과 같이 삼각형 OP_nQ_n은 직각삼각형이고 점 P_n의 좌표는 $(2n,\ 2)$이므로 이 삼각형에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면 삼각형 OP_nQ_n의 넓이를 구하는 식에서

$$\frac{1}{2}\times\overline{OQ_n}\times\overline{P_nQ_n}=\frac{1}{2}\times r_n\times(\overline{OQ_n}+\overline{P_nQ_n}+\overline{OP_n})$$

$$\frac{1}{2}\times2n\times2=\frac{1}{2}\times r_n\times(2n+2+\sqrt{4n^2+4})$$

$$2n=r_n\times(n+1+\sqrt{n^2+1})$$

$$r_n=\frac{2n}{n+1+\sqrt{n^2+1}}$$

원의 중심의 y좌표는 r_n과 같으므로

$$a_n=\frac{2n}{n+1+\sqrt{n^2+1}}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{2}{1+0+\sqrt{1+0}}=1$$

답 ⑤

16

$$\sum_{n=1}^{\infty}(6a_n-7b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\{3(2a_n+b_n)-10b_n\}$$

$$=3\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)-5\sum_{n=1}^{\infty}2b_n$$

$$=3\times4-5\times1=7$$

답 7

17

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=4n$, $\alpha_n\beta_n=n+2$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n+\beta_n}{n^2\alpha_n\beta_n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{n^2(n+2)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n(n+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k(k+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=2\left(1+\frac{1}{2}-0-0\right)=3$$

답 ④

18

직각삼각형 OC_nP_n에서

$\overline{OP_n}^2=\overline{OC_n}^2-\overline{C_nP_n}^2=(2n+1)^2-1^2=4n(n+1)$

사각형 $OQ_nC_nP_n$의 넓이 S_n에 대하여

$$S_n^2=\left(2\times\frac{1}{2}\times\overline{OP_n}\times\overline{C_nP_n}\right)^2$$
$$=\overline{OP_n}^2$$
$$=4n(n+1)$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n(n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k(k+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}(1-0)=\frac{1}{4}$$

답 ③

19

주어진 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(an+1)^2-4n(n+1)}{n^2+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a^2-4)n^2+2(a-2)n+1}{n^2+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a^2-4)+\frac{2(a-2)}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}$$
$$=\frac{a^2-4+0+0}{1+0}$$
$$=a^2-4=0$$

이때 $a>0$이므로 $a=2$

급수의 합이 b이므로

$$b=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k+1)^2-4k(k+1)}{k^2+2k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-0-0\right)=\frac{3}{4}$$

따라서 $a+4b=2+4\times\frac{3}{4}=5$

답 5

20

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2a_n-\frac{4n}{3n+2}\right)=\frac{1}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(2a_n-\frac{4n}{3n+2}\right)=0$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{3n+2}=\frac{4}{3}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}2a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(2a_n-\frac{4n}{3n+2}\right)+\frac{4n}{3n+2}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(2a_n-\frac{4n}{3n+2}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{3n+2}$$
$$=0+\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}$

답 ①

21

$$\left(\frac{a_1}{2}-1\right)+\left(\frac{a_2}{4}-1\right)+\left(\frac{a_3}{6}-1\right)+\cdots+\left(\frac{a_n}{2n}-1\right)+\cdots$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2n}-1\right)$$

이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2n}-1\right)=0$이어야 한다.

즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n}=2\times1=2$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-2a_n}{4n-3a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-2\times\frac{a_n}{n}}{4-3\times\frac{a_n}{n}}$$
$$=\frac{5-2\times2}{4-3\times2}=-\frac{1}{2}$$

답 ④

22

$\sum_{n=1}^{\infty}(x^2-4)\left(\frac{x-2}{3}\right)^{n-1}$이 수렴하려면

$x^2-4=0$ 또는 $-1<\frac{x-2}{3}<1$

(i) $x^2-4=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$이므로

정수 x는 -2, 2이다.

(ii) $-1<\frac{x-2}{3}<1$에서 $-1<x<5$이므로

정수 x는 0, 1, 2, 3, 4이다.

(i), (ii)에서 구하는 정수 x의 개수는 6이다.

답 ⑤

23

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_2+a_4=r(a_1+a_3)$

이므로 $60=30r$에서 $r=2$

또 $a_1+a_3=30$

이므로 $a_1(1+2^2)=30$에서 $a_1=6$

즉, $a_n=6\times2^{n-1}=3\times2^n$

$$b_n=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{a_k}$$
$$=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{3\times2^k}$$
$$=\frac{\frac{1}{3\times2^n}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$
$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

답 ①

24

$$a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n\left\{5\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+3\times\frac{2}{3}\right\}$$
$$=5\times\left(\frac{4}{9}\right)^n+3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{5\times\left(\frac{4}{9}\right)^n+3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right\}$$
$$=5\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n+3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$
$$=5\times\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}}+3\times\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{2}{3}}$$
$$=5\times\frac{4}{5}+3\times\frac{4}{3}=8$$

답 8

25

두 점 A$(4, 0)$, B$(0, 2)$를 지나는 직선 AB의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x+2$이다.

직선 AB와 수직인 직선 $\mathrm{OP_1}$의 방정식은 $y=2x$이고 점 $\mathrm{P_1}$의 y좌표가 2이므로 점 $\mathrm{P_1}$의 x좌표는 1이다.

즉, 두 점 $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{R_1}$의 x좌표가 1이므로 직선 AB 위의 점 $\mathrm{Q_1}$의 y좌표는 $\frac{3}{2}$이다.

그러므로 $\overline{\mathrm{Q_1R_1}}=\frac{3}{2}$

또 점 R_n의 x좌표를 k $(0<k<4)$라 하면 직선 AB의 방정식으로부터 두 점 Q_n, P_{n+1}의 y좌표는 $-\frac{1}{2}k+2$이므로

$\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n}=-\frac{1}{2}k+2$ ...... ㉠

직선 $\mathrm{R}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 방정식은 $y=2(x-k)$, 즉 $y=2x-2k$이므로 점 P_{n+1}의 x좌표를 구하면

$-\frac{1}{2}k+2=2x-2k$에서 $x=\frac{3}{4}k+1$

즉, 두 점 Q_{n+1}, R_{n+1}의 x좌표가 $\frac{3}{4}k+1$이고, 직선 AB의 방정식으로부터 점 Q_{n+1}의 y좌표는 $-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}k+1\right)+2=-\frac{3}{8}k+\frac{3}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{R}_{n+1}}=-\frac{3}{8}k+\frac{3}{2}$ ...... ㉡

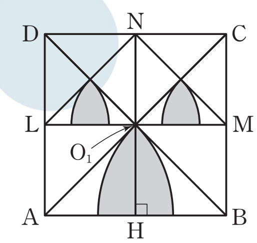
㉠, ㉡에서 $\overline{\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{R}_{n+1}}=\frac{3}{4}\times\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n}$이므로 수열 $\{\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n}\}$은 첫째항이 $\frac{3}{2}$이고 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n}=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{4}}=6$

답 ④

26

그림 R_n에서 새로 색칠된 도형의 넓이를 a_n이라 하자.



그림과 같이 점 $\mathrm{O_1}$에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각이등변삼각형 $\mathrm{AO_1H}$에서 $\overline{\mathrm{AH}}=1$, $\overline{\mathrm{AO_1}}=\sqrt{2}$이므로

$$a_1=2\left\{\pi\times(\sqrt{2})^2\times\frac{45^\circ}{360^\circ}-\frac{1}{2}\times1\times1\right\}$$
$$=\frac{\pi}{2}-1$$

두 정사각형 ABCD, $\mathrm{LO_1ND}$의 닮음비는 $1:\frac{1}{2}$이므로

그림 R_n에서 가장 작은 정사각형 안에 색칠된 도형과 그림 R_{n+1}에서 가장 작은 정사각형 안에 색칠된 도형의 닮음비는 $1:\frac{1}{2}$이고, 넓이의 비는 $1:\frac{1}{4}$이다.

또한 그림 R_{n+1}에서 가장 작은 정사각형의 개수는 그림 R_n에서 가장 작은 정사각형의 개수의 2배이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{\pi}{2}-1$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{\frac{\pi}{2}-1}{1-\frac{1}{2}}=\pi-2$$

답 ③

27

그림 R_n에서 새로 색칠된 도형의 넓이를 a_n이라 하자.

그림 R_1에서 $\overline{\mathrm{A_1E_1}}=1$이므로 부채꼴 $\mathrm{E_1F_1A_1}$의 넓이는

$$\pi\times1^2\times\frac{90^\circ}{360^\circ}=\frac{\pi}{4}$$

$\overline{B_1F_1}=\sqrt{\overline{B_1C_1}^2+\overline{C_1F_1}^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$이므로

$\overline{B_1G_1}=\overline{F_1G_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

그러므로 두 부채꼴 $B_1H_1G_1$과 $F_1G_1I_1$의 넓이의 합은

$2\times\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\times\dfrac{45^\circ}{360^\circ}=\dfrac{\pi}{8}$

또 삼각형 $B_1F_1E_1$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times1\times1=\dfrac{1}{2}$

따라서 $a_1=2\times1-\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{8}\pi$

그림 R_2에서 두 선분 E_1F_1, C_2D_2가 만나는 점을 J라 하고

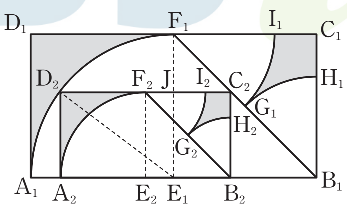
$\overline{E_1J}=\overline{A_2D_2}=x\ (0<x<1)$이라 하면

$\overline{F_1J}=\overline{C_2J}=\overline{B_2E_1}=1-x$이므로

$\overline{A_2E_1}=\overline{A_2B_2}-\overline{B_2E_1}$

$=2x-(1-x)$

$=3x-1$



R_2

이때 직각삼각형 $E_1D_2A_2$에서

$\overline{E_1D_2}=1$이므로 피타고라스 정리에 의하여

$(3x-1)^2+x^2=1^2$

$10x^2-6x=0$

$x(5x-3)=0$

$x=\dfrac{3}{5}$

즉, 두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는 $1:\dfrac{3}{5}$이다.

그러므로 그림 R_n에서 가장 작은 직사각형 안에 색칠된 도형과 그림 R_{n+1}에서 가장 작은 직사각형 안에 색칠된 도형의 닮음비는 $1:\dfrac{3}{5}$이고, 넓이의 비는 $1:\dfrac{9}{25}$이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{8}\pi$이고 공비가 $\dfrac{9}{25}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\dfrac{\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{8}\pi}{1-\dfrac{9}{25}}=\dfrac{300-75\pi}{128}$$

따라서 $a=300$, $b=-75$이므로

$a+b=300+(-75)=225$

답 225

06 함수의 극한과 연속

정답 본문 64~75쪽

01 ④	02 ④	03 ①	04 ⑤	05 13
06 ①	07 ⑤	08 ③	09 ②	10 ②
11 ⑤	12 ②	13 ②	14 ①	15 ⑤
16 8	17 ③	18 10	19 3	20 ④
21 3	22 ②	23 7	24 ④	25 ②
26 ①	27 ④	28 8	29 3	30 ②
31 ④	32 ②	33 8	34 ③	35 ③
36 ③	37 ⑤			

01

주어진 함수의 그래프에서

$x\to0-$일 때, $f(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=2$

$x\to1+$일 때, $f(x)\to1$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1$

따라서 $\lim\limits_{x\to0-}f(x)+\lim\limits_{x\to1+}f(x)=2+1=3$

답 ④

02

$x<0$일 때, $|x|=-x$이므로

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{-x}{x}=\lim\limits_{x\to0-}(-1)=-1$

$x>2$일 때, $|x-2|=x-2$이므로

$\lim\limits_{x\to2+}\dfrac{x^2-4}{|x-2|}=\lim\limits_{x\to2+}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2+}(x+2)=4$

따라서 $\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{|x|}{x}+\lim\limits_{x\to2+}\dfrac{x^2-4}{|x-2|}=-1+4=3$

답 ④

03

$x\geq1$일 때, $f(x)=3x+a$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}(3x+a)=3+a$

$x<1$일 때, $f(x)=-x+2$이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}(-x+2)=1$

따라서 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)$이어야 하므로

$3+a=1$에서

$a=-2$

답 ①

04

$$\lim_{x\to 0}\{f(x)g(x)-2f(x)\}=\lim_{x\to 0}f(x)\{g(x)-2\}$$
$$=\lim_{x\to 0}f(x)\times\lim_{x\to 0}\{g(x)-2\}$$
$$=3\times(4-2)$$
$$=6$$

답 ⑤

05

$f(x)$가 다항함수이므로

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1}f(x)$$

이때 조건 (가)에서

$$\lim_{x\to 1-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1}f(x)+\lim_{x\to 1}f(x)$$
$$=2\lim_{x\to 1}f(x)=8$$

이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=4$

조건 (나)에서 $f(x)-2g(x)=h(x)$라 하면 $\lim_{x\to 1}h(x)=2$이고

$2g(x)=f(x)-h(x)$

$$\lim_{x\to 1}2g(x)=\lim_{x\to 1}\{f(x)-h(x)\}$$
$$=\lim_{x\to 1}f(x)-\lim_{x\to 1}h(x)$$
$$=4-2=2$$

이므로 $\lim_{x\to 1}g(x)=1$

따라서

$$\lim_{x\to 1}\{3f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to 1}3f(x)+\lim_{x\to 1}g(x)$$
$$=3\lim_{x\to 1}f(x)+\lim_{x\to 1}g(x)$$
$$=3\times 4+1$$
$$=13$$

답 13

06

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3$이므로 $\frac{f(x)}{x-2}=g(x)$라 하면

$\lim_{x\to 2}g(x)=3$

$x\neq 2$일 때, $f(x)=(x-2)g(x)$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{xf(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x(x-2)g(x)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{xg(x)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x}\times\lim_{x\to 2}\frac{1}{g(x)}$$
$$=\frac{4+4+4}{2}\times\frac{1}{3}$$
$$=2$$

답 ①

07

$x>0$일 때, $\frac{2x^2-3x}{x^2+1}\le xf(x)\le\frac{2x^2+3x}{x^2+1}$이고

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x}{x^2+1}=2$$

따라서 $\lim_{x\to\infty}xf(x)=2$

답 ⑤

08

$2f(x)+f(1-x)=6x^2$ ······ ㉠

㉠에서 x에 $1-x$를 대입하면

$2f(1-x)+f(x)=6(1-x)^2$ ······ ㉡

㉠$\times 2-$㉡을 하면

$3f(x)=12x^2-6(1-x)^2$

$f(x)=2x^2+4x-2$

따라서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^2}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-2}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}}=\frac{4-0}{1+0}=4$$

답 ③

09

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

조건 (나)에서 $2f(x)+g(x)=h(x)$라 하면

$\lim_{x\to\infty}h(x)=\frac{1}{2}$이고, $g(x)=h(x)-2f(x)$

따라서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3g(x)}{f(x)+g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3\{h(x)-2f(x)\}}{f(x)+\{h(x)-2f(x)\}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7f(x)-3h(x)}{-f(x)+h(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7-3\times\frac{h(x)}{f(x)}}{-1+\frac{h(x)}{f(x)}}$$
$$=\frac{7-0}{-1+0}=-7$$

답 ②

다른 풀이

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

조건 (나)에서

$\lim_{x\to\infty}\{2f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to\infty}f(x)\left\{2+\frac{g(x)}{f(x)}\right\}=\frac{1}{2}$이므로

$\lim_{x\to\infty}\left\{2+\frac{g(x)}{f(x)}\right\}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=-2$

따라서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3g(x)}{f(x)+g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-3\times\frac{g(x)}{f(x)}}{1+\frac{g(x)}{f(x)}}=\frac{1-3\times(-2)}{1+(-2)}=-7$$

10

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+9}-3}$$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x^2+2x+9}+3)}{(\sqrt{x^2+2x+9}-3)(\sqrt{x^2+2x+9}+3)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x^2+2x+9}+3)}{x^2+2x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x+9}+3}{x+2}$

$=\frac{3+3}{2}=3$

답 ②

11

$\lim_{x\to 2}\frac{2x}{x^2-4}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}}-\frac{1}{2}\right)$

$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{2x}{(x-2)(x+2)}\times\frac{2-\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}}\right\}$

$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{x}{(x-2)(x+2)}\times\frac{2-x}{\sqrt{x+2}(2+\sqrt{x+2})}\right\}$

$=\lim_{x\to 2}\left\{-\frac{x}{(x+2)\sqrt{x+2}(2+\sqrt{x+2})}\right\}$

$=-\frac{2}{4\times 2\times 4}=-\frac{1}{16}$

답 ⑤

12

$f(n)=\lim_{x\to n}\frac{x^3-nx^2+2nx-2n^2}{x-n}$

$=\lim_{x\to n}\frac{(x-n)(x^2+2n)}{x-n}$

$=\lim_{x\to n}(x^2+2n)$

$=n(n+2)$

따라서

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.$

$\left.+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

답 ②

13

$x\to 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}(x^2+a)=4+a=0$에서

$a=-4$

$a=-4$를 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-2)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+1}$

$=\frac{4}{3}=b$

따라서 $a+b=-4+\frac{4}{3}=-\frac{8}{3}$

답 ②

14

$x\to 2$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to 0$이므로 (분모) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}(\sqrt{x+a}+b)=\sqrt{2+a}+b=0$에서

$b=-\sqrt{2+a}$ …… ㉠

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})$

$=4\times 2\sqrt{2+a}=16$

즉, $\sqrt{2+a}=2$에서 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$b=-\sqrt{2+2}=-2$

따라서 $a+b=2+(-2)=0$

답 ①

15

(i) $a\neq b$일 때,

$\lim_{x\to a}\frac{x^2-ab}{x-b}=\frac{a^2-ab}{a-b}$

$=\frac{a(a-b)}{a-b}$

$=a$

$a\neq a+4$이므로 모순이다.

(ii) $a=b$일 때,

$\lim_{x\to a}\frac{x^2-ab}{x-b}=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}(x+a)$

$=2a=a+4$

이것을 풀면 $a=4$, $b=4$

따라서 $a+b=4+4=8$

답 ⑤

16

조건 (가)에서 $x \to -2$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2) = 0$ $\cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서 극한값이 2이므로 $f(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차식이어야 한다.

즉, $f(x) = 2x^2 + ax + b$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

㉠에서 $f(-2) = 8 - 2a + b = 0$이므로

$b = 2a - 8$ $\cdots\cdots$ ㉡

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -2} \frac{f(x)}{x^2-4} &= \lim_{x \to -2} \frac{2x^2+ax+b}{x^2-4} \\ &= \lim_{x \to -2} \frac{2x^2+ax+2a-8}{x^2-4} \\ &= \lim_{x \to -2} \frac{2(x+2)(x-2)+a(x+2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \to -2} \frac{2x-4+a}{x-2} \\ &= \frac{-8+a}{-4} = 1\end{aligned}$$

에서 $a = 4$이므로 ㉡에서

$b = 0$

따라서 $f(x) = 2x^2 + 4x$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-6}{x-1} &= \lim_{x \to 1} \frac{2x^2+4x-6}{x-1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{2(x-1)(x+3)}{x-1} \\ &= 2\lim_{x \to 1}(x+3) \\ &= 8\end{aligned}$$

답 8

17

이차함수 $f(x) = x^2 - ax$의 그래프와 직선 $y = ax + 7$이 만나는 서로 다른 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하자.

선분 AB의 중점의 x좌표가 3이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2} = 3$에서 $\alpha + \beta = 6$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 이차방정식 $x^2 - ax = ax + 7$, 즉 $x^2 - 2ax - 7 = 0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = 2a$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$2a = 6$이므로 $a = 3$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x-a} &= \lim_{x \to 3} \frac{x^2-3x}{x-3} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{x(x-3)}{x-3} \\ &= \lim_{x \to 3} x \\ &= 3\end{aligned}$$

답 ③

18

$f(x)$가 다항함수이므로 주어진 조건에 의하여

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$

즉, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$이므로

$f(x) = x(x-1)(ax+b)$ (a, b는 상수, $a \neq 0$)으로 놓을 수 있다.

조건 (가)에서

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{x(x-1)(ax+b)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0}(x-1)(ax+b) = -b\end{aligned}$$

이므로 $-b = 1$에서 $b = -1$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)(ax+b)}{x-1} \\ &= \lim_{x \to 1} x(ax+b) = a+b\end{aligned}$$

이므로 $a + b = 2$에서 $a = 3$

따라서 $f(x) = x(x-1)(3x-1)$이므로

$f(2) = 2 \times 1 \times 5 = 10$

답 10

19

두 점 $\mathrm{P}(3t, 2)$, $\mathrm{Q}(2t, 2\sqrt{t})$에 대하여

$\overline{\mathrm{OQ}}^2 = (2t)^2 + (2\sqrt{t})^2 = 4t^2 + 4t$

$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = (3t-2t)^2 + (2-2\sqrt{t})^2 = t^2 + 4t - 8\sqrt{t} + 4$

$f(t) = \overline{\mathrm{OQ}}^2 - \overline{\mathrm{PQ}}^2 = 3t^2 + 8\sqrt{t} - 4$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{t^2} &= \lim_{t \to \infty} \frac{3t^2+8\sqrt{t}-4}{t^2} \\ &= \lim_{t \to \infty}\left(3 + 8\sqrt{\frac{1}{t^3}} - \frac{4}{t^2}\right) \\ &= 3 + 0 - 0 = 3\end{aligned}$$

답 3

20

직선 OP의 기울기가 t이므로 점 P를 지나고 직선 OP에 수직인 직선의 방정식은

$y = -\frac{1}{t}(x-t) + t^2$

$y = -\frac{1}{t}x + t^2 + 1$

이 직선이 y축과 만나는 점 Q의 좌표는 $(0, t^2+1)$이므로

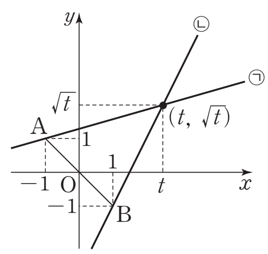
$g(t) = t^2 + 1$

따라서 $\lim_{t \to 0+} g(t) = \lim_{t \to 0+}(t^2+1) = 1$

답 ④

21

직선 $l : y = m(x-t) + \sqrt{t}$는 실수 m의 값에 관계없이 점 $(t, \sqrt{t})$를 지난다.



그림에서 직선 l이 선분 AB와 만나기 위해서는 직선 ㉠ 또는 직선 ㉡과 일치하거나 두 직선 ㉠, ㉡ 사이에 있어야 한다.

(i) 직선 l이 ㉠과 일치할 때

점 A를 지나므로 직선 l의 기울기 m은

$$m=\frac{\sqrt{t}-1}{t-(-1)}=\frac{\sqrt{t}-1}{t+1}$$

(ii) 직선 l이 ㉡과 일치할 때

점 B를 지나므로 직선 l의 기울기 m은

$$m=\frac{\sqrt{t}-(-1)}{t-1}=\frac{\sqrt{t}+1}{t-1}$$

(i), (ii)에서 $\frac{\sqrt{t}-1}{t+1}\le m\le\frac{\sqrt{t}+1}{t-1}$이므로

$f(t)=\frac{\sqrt{t}+1}{t-1}$, $g(t)=\frac{\sqrt{t}-1}{t+1}$

$f(t)g(t)=\frac{\sqrt{t}+1}{t-1}\times\frac{\sqrt{t}-1}{t+1}=\frac{t-1}{(t-1)(t+1)}=\frac{1}{t+1}$이므로

$$\lim_{t\to 1+}f(t)g(t)=\lim_{t\to 1+}\frac{1}{t+1}=\frac{1}{2}$$

따라서 $p=2$, $q=1$이므로

$p+q=2+1=3$

답 3

22

$t>-1$일 때, $f(t)>0$이므로

$\overline{\mathrm{OH}}=|t|$이고 $\overline{\mathrm{PH}}=f(t)=t^2(t+3)+1$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{t\to -1+}\frac{\overline{\mathrm{PH}}-3}{\overline{\mathrm{OH}}-1}&=\lim_{t\to -1+}\frac{t^2(t+3)+1-3}{(-t)-1}\\&=\lim_{t\to -1+}\frac{t^3+3t^2-2}{-(t+1)}\\&=\lim_{t\to -1+}\frac{(t+1)(t^2+2t-2)}{-(t+1)}\\&=\lim_{t\to -1+}(-t^2-2t+2)\\&=3\end{aligned}$$

답 ②

23

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$, $x=-1$에서 연속이어야 한다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$$

이 성립해야 한다.

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}8=8$

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(x^2+a)=1+a$

$f(1)=1+a$

이므로 $8=1+a$, $a=7$

이때 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서도 연속이다.

따라서 $a=7$

답 7

24

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

따라서 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2ax+b}{x-1}=b$이고, $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}(x^2+2ax+b)=1+2a+b=0$에서

$b=-2a-1$ ...... ㉠

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2ax+b}{x-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2ax-2a-1}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2a+1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}(x+2a+1)\\&=2a+2=b\end{aligned}$$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{3}{4}$, $b=\frac{1}{2}$

따라서 $a+b=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

답 ④

25

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

즉, $\lim_{x\to 1-}(x+a)=\lim_{x\to 1+}\{b(x-1)^2+2\}=f(1)$에서

$1+a=2$이므로 $a=1$

또한 $f(x)=f(x+3)$이므로 $f(0)=f(3)=1$이고

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 3}f(x)=f(3)$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 3-}\{b(x-1)^2+2\}=1$에서

$4b+2=1$이므로 $b=-\frac{1}{4}$

따라서 $a+b=1+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$

답 ②

26

곡선 $y=x^2-3|x|+1$과 직선 $y=x+t$에서

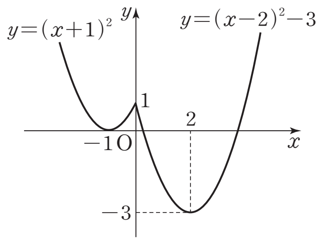
$x^2-3|x|+1=x+t$

$x^2-3|x|-x+1=t$

이 식의 좌변을 $g(x)$라 하면

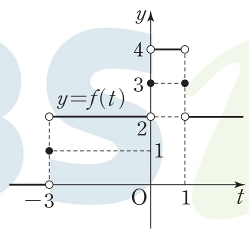
$$g(x)=\begin{cases}(x-2)^2-3 & (x\ge 0)\\ (x+1)^2 & (x<0)\end{cases}$$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같으므로 주어진 곡선과 직선의 서로 다른 교점의 개수는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수와 같다.



[그림 1]

따라서 $f(t)=\begin{cases}0 & (t<-3)\\ 1 & (t=-3)\\ 2 & (-3<t<0)\\ 3 & (t=0)\\ 4 & (0<t<1)\\ 3 & (t=1)\\ 2 & (t>1)\end{cases}$ 이므로



[그림 2]

함수 $y=f(t)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.

이상에서 함수 $f(t)$는 $t=-3$, $t=0$, $t=1$에서 불연속이므로

$a=-3$ 또는 $a=0$ 또는 $a=1$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$-3+0+1=-2$

답 ①

27

$x\neq 1$일 때, $f(x)=\dfrac{x^2+ax-5}{x-1}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$의 값이 존재하려면 $x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax-5)=a-4=0$에서 $a=4$

$f(x)=\dfrac{x^2+4x-5}{x-1}$ $(x\neq 1)$이므로

$f(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+5)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+5)=6$

따라서 $a+f(1)=4+6=10$

답 ④

28

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

즉, $\lim\limits_{x\to a-}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}f(x)=f(a)$에서

$\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}(x+2)=a+2$,

$\lim\limits_{x\to a-}f(x)=\lim\limits_{x\to a-}(x^2-4)=a^2-4$,

$f(a)=b$

이므로 $a+2=a^2-4=b$ ······ ㉠

㉠에서 $a+2=a^2-4$를 풀면

$a^2-a-6=0$, $(a-3)(a+2)=0$

이때 $a>0$이므로 $a=3$

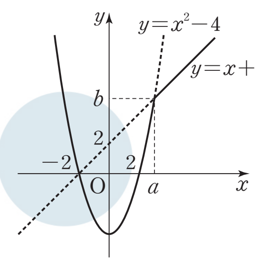
이 값을 ㉠에 대입하면 $b=5$

따라서 $a+b=3+5=8$

답 8

다른 풀이

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같아야 한다.



이때 a는 이차방정식 $x^2-4=x+2$의 양의 실근이어야 한다.

$x^2-x-6=0$에서

$(x+2)(x-3)=0$

$x=-2$ 또는 $x=3$

$a>0$이므로 $a=3$

$y=x+2$에 $x=3$을 대입하면 $y=5$이므로 $b=5$

따라서 $a+b=3+5=8$

29

자연수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$가 $x\neq 0$인 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $y=f(x)-5$와 함수 $y=f(x)+5$도 $x\neq 0$인 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0-}g(x)&=\lim_{x\to 0-}\{f(x)-5\}\{f(x)+5\}\\&=\lim_{x\to 0-}\{f(x)-5\}\times\lim_{x\to 0-}\{f(x)+5\}\\&=(n-5)(n+5)\\&=n^2-25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}g(x)&=\lim_{x\to 0+}\{f(x)-5\}\{f(x)+5\}\\&=\lim_{x\to 0+}\{f(x)-5\}\times\lim_{x\to 0+}\{f(x)+5\}\\&=(-n-5)\times(-n+5)\\&=n^2-25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(0)&=\{f(0)-5\}\{f(0)+5\}\\&=(3-5)(3+5)\\&=-16\end{aligned}$$

에서 $n^2-25=-16$이므로 $n^2=9$

이때 n은 자연수이므로 $n=3$

답 3

30

$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(-x+1)=0$,

$\lim\limits_{x\to 1+}g(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(x^2+a)=1+a$

이므로 $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)g(x)=0\times(1+a)=0$

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}x=1$,

$\lim\limits_{x\to 1-}g(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(x^2+a)=1+a$

이므로 $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)g(x)=1\times(1+a)=1+a$

$f(1)=0$, $g(1)=1+a$이므로 $f(1)g(1)=0$
함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면
$\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=f(1)g(1)$
이어야 하므로
$0=1+a$
따라서 $a=-1$

답 ②

31

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to1-}(x^2+a)=\lim_{x\to1+}(-x+b)=f(1)$에서
$1+a=-1+b$이므로
$a+2=b$ …… ㉠
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $g(x)$의 분모를 $h(x)=3x^2+(a+2)x+b$라 하면 다항함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
함수 $g(x)=\frac{f(x)}{h(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 임의의 실수 x에 대하여 $h(x)=3x^2+(a+2)x+b\neq0$이어야 한다.
이때 이차방정식 $h(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(a+2)^2-12b<0$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$(a+2)^2-12(a+2)<0$
$(a+2)(a-10)<0$
$-2<a<10$
따라서 정수 a는 $-1, 0, 1, 2, \cdots, 9$이므로 그 개수는 11이다.

답 ④

32

ㄱ. $\lim_{x\to1-} h(x)=\lim_{x\to1-} f(x)-2\lim_{x\to1-} g(x)=-2-2\times(-1)=0$
$\lim_{x\to1+} h(x)=\lim_{x\to1+} f(x)-2\lim_{x\to1+} g(x)=-2-2\times1=-4$
따라서 $\lim_{x\to1} h(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄴ. $i(1)=f(1)\times|g(1)|=2\times|-1|=2$
$\lim_{x\to1-} i(x)=\lim_{x\to1-} f(x)\times\lim_{x\to1-}|g(x)|$
$=-2\times|-1|=-2$
$\lim_{x\to1+} i(x)=\lim_{x\to1+} f(x)\times\lim_{x\to1+}|g(x)|$
$=-2\times|1|=-2$
따라서 $i(1)\neq\lim_{x\to1} i(x)$이므로 함수 $i(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $j(1)=\frac{(1-1)\times g(1)}{f(1)}=\frac{0\times(-1)}{2}=0$

$$\lim_{x\to1-} j(x)=\frac{\lim_{x\to1-}(x-1)g(x)}{\lim_{x\to1-} f(x)}=\frac{\lim_{x\to1-}(x-1)\times\lim_{x\to1-} g(x)}{\lim_{x\to1-} f(x)}=\frac{0\times(-1)}{-2}=0$$

$$\lim_{x\to1+} j(x)=\frac{\lim_{x\to1+}(x-1)g(x)}{\lim_{x\to1+} f(x)}=\frac{\lim_{x\to1+}(x-1)\times\lim_{x\to1+} g(x)}{\lim_{x\to1+} f(x)}=\frac{0\times1}{-2}=0$$

따라서 $j(1)=\lim_{x\to1} j(x)$이므로 함수 $j(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
이상에서 $x=1$에서 연속인 함수는 ㄷ이다.

답 ②

33

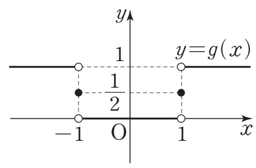
조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x}{x^2-4}=2$이므로
$h(x)=f(x)-4x$로 놓으면 함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.
조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로
$\lim_{x\to2} g(x)=g(2)$에서
$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-4x}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{h(x)}{x^2-4}=a$ …… ㉠
$x\to2$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to2} h(x)=h(2)=0$
또 함수 $g(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로
$\lim_{x\to-2} g(x)=g(-2)$에서
$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-4x}{x^2-4}=\lim_{x\to-2}\frac{h(x)}{x^2-4}=a$
$x\to-2$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to-2} h(x)=h(-2)=0$
따라서 $h(x)=2(x+2)(x-2)$
㉠에서
$a=\lim_{x\to2}\frac{h(x)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{2(x+2)(x-2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2} 2=2$
따라서 $f(x)-4x=2(x^2-4)$에서
$f(x)=2x^2+4x-8$이므로
$f(a)=f(2)=8+8-8=8$

답 8

34

(i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=0$이므로
$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}=0$
(ii) $|x|=1$일 때,
$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}=\frac{1}{2}$
(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$이므로
$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=1$

즉, 함수 $g(x)=\begin{cases} 0 & (|x|<1) \\ \frac{1}{2} & (|x|=1) \\ 1 & (|x|>1) \end{cases}$의 그래프는 그림과 같으므로 함수 $g(x)$는



$x=-1$, $x=1$에서 불연속이다.

$f(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)\{g(x)+1\}$이 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=-1$, $x=1$에서 연속이어야 한다.

$$\lim_{x\to -1-} f(x)\{g(x)+1\}=\lim_{x\to -1+} f(x)\{g(x)+1\}$$
$$=f(-1)\{g(-1)+1\}$$

에서

$$(2-a+b)\times 2=(2-a+b)\times 1=(2-a+b)\times \frac{3}{2}$$

$a-b=2$ ...... ㉠

$$\lim_{x\to 1-} f(x)\{g(x)+1\}=\lim_{x\to 1+} f(x)\{g(x)+1\}$$
$$=f(1)\{g(1)+1\}$$

에서

$$(2+a+b)\times 1=(2+a+b)\times 2=(2+a+b)\times \frac{3}{2}$$

$a+b=-2$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=-2$

따라서 $f(x)=2x^2-2$이므로

$f(2)=8-2=6$

답 ③

35

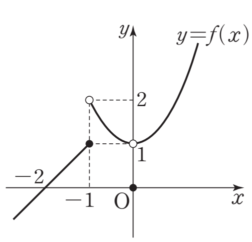
$x>-1$일 때,

$x=0$이면 $x^2=0$이므로 $f(0)=0$이다.

$x\neq 0$이면

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$$
$$=x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots$$
$$=\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}$$
$$=1+x^2$$

그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $\lim_{x\to -1+} f(x)=2$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to 0-} f(x)=2+1=3$ (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x-1)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 $\lim_{x\to 0-} f(x-1)=1$이고

$\lim_{x\to 0+} f(x-1)=2$이므로 $\lim_{x\to 0} f(x-1)$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x-1)$은 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. $h(x)=(x+1)f(x)$라 하면

$h(-1)=0\times f(-1)=0\times 1=0$

$\lim_{x\to -1-} h(x)=\lim_{x\to -1-} (x+1)f(x)=0\times 1=0$

$\lim_{x\to -1+} h(x)=\lim_{x\to -1+} (x+1)f(x)=0\times 2=0$

따라서 $\lim_{x\to -1} h(x)=h(-1)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

36

$f(x)=x^3-x^2-3$이라 하면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$f(-1)=-5<0$

$f(0)=-3<0$

$f(1)=-3<0$

$f(2)=1>0$

$f(3)=15>0$

$f(4)=45>0$

이므로 $f(1)f(2)<0$이다.

따라서 사이값 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $(1, 2)$이다.

답 ③

37

ㄱ. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서 연속이고 $f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)$가 성립한다.

즉, $b=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-6}{x-2}$이고 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이므로

(분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}(x^2+ax-6)=2a-2=0$에서 $a=1$

$$b=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-6}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x+3)=5$$

따라서 함수 $f(x)=\begin{cases} x+3 & (x\neq 2) \\ 5 & (x=2) \end{cases}$이므로

$f(1)+f(2)=4+5=9$ (거짓)

ㄴ. 닫힌 구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$가 연속이므로 함수 $xf(x)$도 닫힌 구간 $[-1, 1]$에서 연속이다.

따라서 최대 · 최소 정리에 의하여 함수 $xf(x)$는 닫힌 구간 $[-1, 1]$에서 최댓값과 최솟값을 갖는다. (참)

ㄷ. $g(x)=(x^2+x-1)f(x)$라 하면 함수 $g(x)$는 닫힌 구간 $[-1, 1]$에서 연속이고

$g(-1)=-1\times f(-1)=-1\times(-1+3)=-2$

$g(1)=1\times f(1)=1\times(1+3)=4$

이므로 사이값 정리에 의하여 방정식 $(x^2+x-1)f(x)=1$을 만족시키는 x의 값이 열린 구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $(x^2+x-1)f(x)=1$은 열린 구간 $(-1, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

07 다항함수의 미분법

정답

본문 78~87쪽

01 ③	02 ③	03 11	04 ④	05 ②
06 ⑤	07 32	08 ②	09 ①	10 3
11 ②	12 ④	13 ⑤	14 ④	15 8
16 ③	17 ①	18 8	19 9	20 ⑤
21 96	22 ③	23 ③	24 ④	25 ④
26 17	27 ⑤	28 ⑤	29 18	

01

x의 값이 -1에서 a까지 변할 때의 평균변화율이 1이므로

$$\frac{f(a)-f(-1)}{a-(-1)}=\frac{(a^3-2a^2)-(-3)}{a+1}$$
$$=\frac{a^3-2a^2+3}{a+1}$$
$$=\frac{(a+1)(a^2-3a+3)}{a+1}$$
$$=a^2-3a+3=1$$

$a^2-3a+2=0$, $(a-1)(a-2)=0$

$a=1$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$1+2=3$

답 ③

02

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f'(1)}{3h}=2$에서 $h\to 0$일 때 극한값이 존재하고

(분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{h\to 0}\{f(1+2h)-f'(1)\}=0$

이때 다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로 $f(1)=f'(1)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f'(1)}{3h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times\frac{2}{3}$$
$$=\frac{2}{3}f'(1)$$

이므로 $\frac{2}{3}f'(1)=2$에서 $f'(1)=3$

따라서 $f(1)=f'(1)=3$이므로

$f'(1)f(1)=3\times 3=9$

답 ③

03

$$a_n=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+nh)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+nh)-f(1)}{nh}\times n$$
$$=nf'(1)$$

이때 $f'(1)=\frac{1}{5}$이므로 $a_n=\frac{1}{5}n$

따라서 $\sum_{n=1}^{10} a_n=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{10} n=\frac{1}{5}\times\frac{10\times 11}{2}=11$

답 11

04

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 1-}(ax^2+1)=\lim_{x\to 1+}(3x+b)=f(1)$에서

$a+1=3+b$

$b=a-2$ …… ㉠

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{(ax^2+1)-(a+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{a(x-1)(x+1)}{x-1}$$
$$=a\lim_{x\to 1-}(x+1)=2a$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(3x+b)-(a+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{3x+(b-a-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{3(x-1)}{x-1}\ (\text{㉠에 의해})$$
$$=3$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$2a=3$에서 $a=\frac{3}{2}$

㉠에서 $b=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$

따라서 $a+b=\frac{3}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

답 ④

05

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

$\lim_{x\to a-}(3x+b)=\lim_{x\to a+}\left(\frac{1}{3}x^3+2x-1\right)=f(a)$에서

$3a+b=\frac{1}{3}a^3+2a-1$ …… ㉠

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{(3x+b)-\left(\frac{1}{3}a^3+2a-1\right)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a-}\frac{(3x+b)-(3a+b)}{x-a}\ (\text{㉠에 의해})$$
$$=\lim_{x\to a-}\frac{3(x-a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a-}3=3$$

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{\left(\frac{1}{3}x^3+2x-1\right)-\left(\frac{1}{3}a^3+2a-1\right)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a+}\frac{\frac{1}{3}(x^3-a^3)+2(x-a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a+}\frac{\frac{1}{3}(x-a)(x^2+ax+a^2)+2(x-a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a+}\left\{\frac{1}{3}(x^2+ax+a^2)+2\right\}$$
$$=a^2+2$$

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로 $3=a^2+2$, $a^2=1$

이때 $a>0$이므로 $a=1$

㉠에 $a=1$을 대입하면 $3+b=\frac{1}{3}+2-1$에서 $b=-\frac{5}{3}$

따라서 $a+b=1+\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{2}{3}$

답 ②

06

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x+2}{x^{2n}+1}$에서

(i) $0<x<1$이면 $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x+2}{x^{2n}+1}=-x+2$$

(ii) $x=1$이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x+2}{x^{2n}+1}=\frac{1-1+2}{1+1}=1$$

(iii) $x>1$이면 $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x+2}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x-\frac{1}{x^{2n-1}}+\frac{2}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=x$$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-x+2 & (0<x<1)\\ 1 & (x=1)\\ x & (x>1)\end{cases}$

ㄱ. $\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(-x+2)=1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}x=1$

$f(1)=1$

즉, $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $g(x)=(x-1)f(x)$라 하면 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)(-x+2)-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}(-x+2)$$
$$=1$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)x-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}x$$
$$=1$$

따라서 $\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

즉, 함수 $(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

07

$f(x)=x^4-x^3+12x+1$에서
$f'(x)=4x^3-3x^2+12$
따라서 $f'(2)=32-12+12=32$

답 32

08

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로
$f(x)=a(x-1)^2+b$
$\quad=a(x^2-2x+1)+b$ (단, a, b는 상수이고 $a\neq0$)
으로 놓을 수 있다.
$f'(x)=a(2x-2)$
$f'(0)=-2a$이고 $f(1)=b$이므로
조건 (나)에 의하여 $b=-2a$
즉, $f(x)=a(x^2-2x+1)-2a=a(x^2-2x-1)$이므로 이차방정식 $f(x)=0$은
$a(x^2-2x-1)=0$
이때 $a\neq0$이므로
$x^2-2x-1=0$에서
$x=1-\sqrt{2}$ 또는 $x=1+\sqrt{2}$
따라서 이차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근의 곱은
$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=1-2=-1$

답 ②

09

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)-2f(2)}{x^3-8}=\dfrac{1}{2}$에서 $x\to2$일 때 극한값이 존재하고
(분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.
즉, $\lim\limits_{x\to2}\{g(x)-2f(2)\}=0$
이때 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.
따라서 $g(2)-2f(2)=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
한편, $g(x)=(x^2-2x+a)f(x)$에서 $g(2)=af(2)$이므로 ㉠에 대입하면
$af(2)-2f(2)=0$, $(a-2)f(2)=0$
이때 $f(2)\neq0$이므로
$a-2=0$에서 $a=2$
또한 ㉠에서 $g(2)=2f(2)$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{g(x)-2f(2)}{x^3-8}=\lim_{x\to2}\left\{\frac{g(x)-g(2)}{x-2}\times\frac{1}{x^2+2x+4}\right\}$$
$$=\frac{1}{12}g'(2)=\frac{1}{2}$$

에서 $g'(2)=6$
한편, $g(x)=(x^2-2x+2)f(x)$에서 곱의 미분법에 의하여
$g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x+2)f'(x)$
이므로
$g'(2)=2f(2)+2f'(2)=6$
$f(2)+f'(2)=3$
따라서 $f(a)+f'(a)=f(2)+f'(2)=3$

답 ①

10

$f(x)=-x^3+2x+1$이라 하면
$f'(x)=-3x^2+2$이므로
$f'(1)=-3+2=-1$
곡선 $y=-x^3+2x+1$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 방정식은
$y-2=-(x-1)$, $y=-x+3$
따라서 이 접선이 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 3)$이므로
$a=3$

답 3

11

곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, 2)$를 지나므로
$f(2)=8+2a+2=2$에서 $a=-4$
$f(x)=x^3-4x+2$에서 $f'(x)=3x^2-4$
$f'(b)=3b^2-4$이므로 점 $\mathrm{P}(b, f(b))$에서의 접선의 방정식은
$y-(b^3-4b+2)=(3b^2-4)(x-b)$
$y=(3b^2-4)x+2-2b^3$
이 접선이 점 $(2, 2)$를 지나므로
$2=6b^2-8+2-2b^3$, $b^3-3b^2+4=0$
$(b-2)^2(b+1)=0$
$b=-1$ 또는 $b=2$
이때 $b\neq2$이므로 $b=-1$
따라서 $ab=-4\times(-1)=4$

답 ②

12

$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)-1}{x+2}=2$에서 $x\to-2$일 때 극한값이 존재하고
(분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.
즉, $\lim\limits_{x\to-2}\{f(x)-1\}=0$
이때 다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로 $f(-2)=1$

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-1}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=f'(-2)=2$$

$g(x)=(x^2-1)f(x)$에서
$g(-2)=3f(-2)=3\times1=3$
$g'(x)=2xf(x)+(x^2-1)f'(x)$이므로
$g'(-2)=-4f(-2)+3f'(-2)=-4\times1+3\times2=-4+6=2$
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(-2, 3)$에서의 접선의 방정식은
$y-3=2(x+2)$, $y=2x+7$
따라서 $a=2$, $b=7$이므로
$a+b=2+7=9$

답 ④

13

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-10x+1$에서

$f'(x)=x^2-3x-10=(x+2)(x-5)$

함수 $f(x)$가 감소하는 구간에서 $f'(x)\le 0$이고

부등식 $(x+2)(x-5)\le 0$의 해는 $-2\le x\le 5$이다.

따라서 열린 구간 (α, β)에서 함수 $f(x)$가 감소하기 위한 $\beta-\alpha$의 최댓값은

$5-(-2)=7$

답 ⑤

14

$f(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}(a-1)x^2+2x$에서

$f'(x)=2x^2+(a-1)x+2$

모든 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 개수가 1이 되려면 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=2x^2+(a-1)x+2\ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $2x^2+(a-1)x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-1)^2-16\le 0$에서

$a^2-2a-15\le 0$, $(a+3)(a-5)\le 0$

$-3\le a\le 5$

따라서 정수 a는 -3, -2, -1, $\cdots$, 5이므로 그 개수는 9이다.

답 ④

15

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=1$이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(-1)=3-2a+b$

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge f'(-1)$이므로

$3x^2+2ax+b\ge 3-2a+b$, 즉 $3x^2+2ax+2a-3\ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $3x^2+2ax+2a-3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=4a^2-12(2a-3)=4(a-3)^2\le 0$에서 $a=3$

조건 (다)에서 함수 $f(x)=x^3+3x^2+bx+1$이 항상 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

이때 조건 (나)에서 $f'(x)\ge f'(-1)\ge 0$이므로

$3-2\times 3+b\ge 0$, $b\ge 3$

따라서 $f(1)=b+5\ge 8$이므로 $f(1)$의 최솟값은 8이다.

답 8

참고

다음과 같이 조건 (나)를 이용하여 실수 a의 값을 구할 수도 있다.

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge f'(-1)$이므로

이차함수 $f'(x)=3x^2+2ax+b$는 $x=-1$에서 최솟값을 가진다.

그러므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이다.

즉, $f'(x)=3\left(x+\frac{a}{3}\right)^2+b-\frac{a^2}{3}$이므로

$-\frac{a}{3}=-1$에서 $a=3$

16

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x+1$에서

$f'(x)=x^3-3x+2$

$=(x-1)(x^2+x-2)$

$=(x+2)(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은

$f(-2)=4-6-4+1=-5$

답 ③

17

$f(x)=(x^2-a^2)(x+a)+b$에서

$f'(x)=2x(x+a)+(x^2-a^2)$

$=2x(x+a)+(x+a)(x-a)$

$=(x+a)\{2x+(x-a)\}$

$=(x+a)(3x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-a$ 또는 $x=\frac{a}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-a)=b$이므로 $b=5$

함수 $f(x)$의 극솟값은

$f\left(\frac{a}{3}\right)=\left(\frac{a^2}{9}-a^2\right)\left(\frac{a}{3}+a\right)+5=-\frac{32}{27}a^3+5$이므로

$-\frac{32}{27}a^3+5=1$에서

$\frac{32}{27}a^3=4$

$a^3=4\times\frac{27}{32}=\frac{27}{8}$

$a=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=\left(x^2-\frac{9}{4}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)+5$이므로

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{4}-\frac{9}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)+5=-2+5=3$

답 ①

18

$f(x)=ax^3-12ax+1$에서

$f'(x)=3ax^2-12a=3a(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $f(-2)=16a+1$, $x=2$에서 극솟값 $f(2)=-16a+1$을 가지므로

$A(-2,\ 16a+1)$, $B(2,\ -16a+1)$

점 $A(-2,\ 16a+1)$을 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 x좌표는 방정식 $ax^3-12ax+1=16a+1$의 실근과 같다.

$a(x^3-12x-16)=0$, $a(x-4)(x+2)^2=0$

$a>0$이고 $x\neq-2$이므로 $x=4$

그러므로 점 C의 좌표는 $(4,\ 16a+1)$이다.

이때 삼각형 ABC의 넓이가 12이고 $\overline{AC}=4-(-2)=6$이므로

$\frac{1}{2}\times6\times\{(16a+1)-(-16a+1)\}=96a=12$

따라서 $a=\frac{1}{8}$이므로

$\frac{1}{a}=8$

답 8

19

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2+5$에서

$f'(x)=x^3-6x^2+8x$

$=x(x^2-6x+8)$

$=x(x-2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

$0\le x\le3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	5	$\nearrow$	극대	$\searrow$	$\frac{29}{4}$

닫힌 구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(2)=4-16+16+5=9$

답 9

20

$f(x)=x^4+4x^3-8x^2+a$에서

$f'(x)=4x^3+12x^2-16x$

$=4x(x^2+3x-4)$

$=4x(x+4)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$-1\le x\le1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$a-11$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$a-3$

닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값 $f(0)=a$를 갖고, $f(-1)=a-11$, $f(1)=a-3$이므로 최솟값 $f(-1)=a-11$을 갖는다.

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 -5이고 최댓값은 b이므로

$a-11=-5$, $b=a$에서 $a=6$, $b=6$

따라서 $a+b=6+6=12$

답 ⑤

21

$f(x)=12-x^2=0$에서 $x=-2\sqrt{3}$ 또는 $x=2\sqrt{3}$이므로 $A(2\sqrt{3},\ 0)$

$f(0)=12$이므로 $B(0,\ 12)$

점 $P(t,\ f(t))$는 제1사분면에 있으므로 $0<t<2\sqrt{3}$

삼각형 OAP의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times f(t)=\sqrt{3}(12-t^2)$

삼각형 OPB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times12\times t=6t$

그러므로 두 삼각형 OAP, OPB의 넓이의 곱 $S(t)$는

$S(t)=\sqrt{3}(12-t^2)\times6t=6\sqrt{3}(12t-t^3)$

$S'(t)=6\sqrt{3}(12-3t^2)=-18\sqrt{3}(t+2)(t-2)$

$S'(t)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=2$

$0<t<2\sqrt{3}$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	$(2\sqrt{3})$
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

$0<t<2\sqrt{3}$에서 함수 $S(t)$는 $t=2$에서 극대이면서 최대이므로 함수 $S(t)$의 최댓값은

$S(2)=6\sqrt{3}(24-8)=96\sqrt{3}$

따라서 $a=96$

답 96

22

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+a$에서

$f'(x)=x^3-x^2-x+1$

$=x^2(x-1)-(x-1)$

$=(x^2-1)(x-1)$

$=(x+1)(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

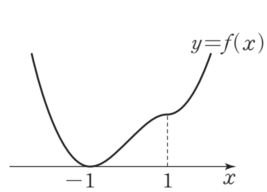
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

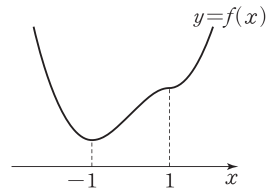
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(-1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-1+a=a-\frac{11}{12}$

이때 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge0$을 만족시키려면 $f(-1)\ge0$이어야 하므로





$a-\frac{11}{12}\geq 0$에서 $a\geq\frac{11}{12}$

따라서 구하는 실수 a의 최솟값은 $\frac{11}{12}$이다.

답 ③

23

두 점 A, B는 각각 직선 $x=t$와 두 함수 $f(x)=x+2$, $g(x)=x^3-2x$의 그래프가 만나는 점이므로

$A(t, t+2)$, $B(t, t^3-2t)$이다.

두 점 A, B 사이의 거리 $h(t)$는

$h(t)=|(t^3-2t)-(t+2)|=|t^3-3t-2|$

이때 $i(t)=t^3-3t-2$라 하면

$i'(t)=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$

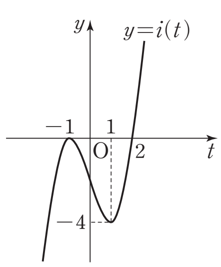
$i'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=1$

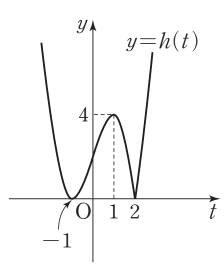
함수 $i(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$i'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$i(t)$	↗	극대	↘	극소	↗

$i(-1)=-1+3-2=0$, $i(1)=1-3-2=-4$

따라서 함수 $h(t)=|i(t)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





ㄱ. $h(t)=|f(t)-g(t)|$이므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근은 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근과 같다.
$h(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=2$
따라서 방정식 $f(x)=g(x)$는 서로 다른 두 실근 $x=-1$, $x=2$를 갖는다. (참)

ㄴ. 함수 $h(t)$는 $t=1$에서 극대이고 극댓값은 4이다. (참)

ㄷ. $t\leq 2$일 때 $h(t)=-t^3+3t+2$, $t>2$일 때 $h(t)=t^3-3t-2$

$$\lim_{s\to 0-}\frac{h(2+s)-h(2)}{s}=\lim_{s\to 0-}\frac{-(2+s)^3+3(2+s)+2}{s}$$
$$=\lim_{s\to 0-}(-s^2-6s-9)=-9$$
$$\lim_{s\to 0+}\frac{h(2+s)-h(2)}{s}=\lim_{s\to 0+}\frac{(2+s)^3-3(2+s)-2}{s}$$
$$=\lim_{s\to 0+}(s^2+6s+9)=9$$

따라서 $\lim_{s\to 0-}\frac{h(2+s)-h(2)}{s}\neq\lim_{s\to 0+}\frac{h(2+s)-h(2)}{s}$이므로

함수 $h(t)$는 $t=2$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

24

방정식 $3x^4+4x^3-12x^2+k-6=0$에서

$3x^4+4x^3-12x^2=6-k$

이때 $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=6-k$는 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x+2)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

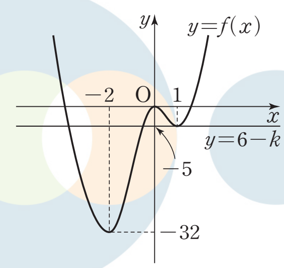
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

$f(-2)=48-32-48=-32$,

$f(0)=0$,

$f(1)=3+4-12=-5$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



그림에서 조건을 만족시키는 실수 k의 값은

$6-k=0$ 또는 $6-k=-5$에서

$k=6$ 또는 $k=11$

따라서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은

$6+11=17$

답 ④

25

방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^3-2x^2+x+k=0$에서

$x^3-2x^2+x=-k$

이때 $g(x)=x^3-2x^2+x$라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$는 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$g'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$이므로

$g'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

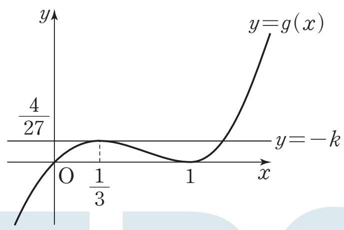
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$,

$g(1)=1-2+1=0$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



그림에서 조건을 만족시키는 실수 k의 값은

$-k=\frac{4}{27}$ 또는 $-k=0$에서

$k=-\frac{4}{27}$ 또는 $k=0$

따라서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 $-\frac{4}{27}$이다.

답 ④

26

방정식 $|f(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되려면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$는 서로 다른 네 점에서 만나야 한다.

함수 $f(x)=x^3-12x+9$에서

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

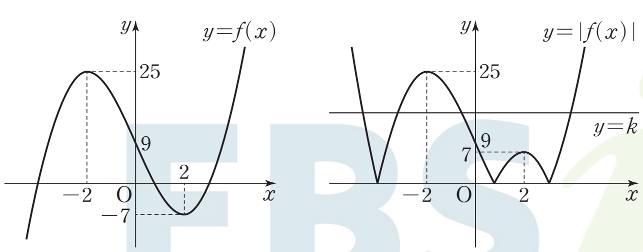
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(-2)=-8+24+9=25$,

$f(2)=8-24+9=-7$

이므로 함수 $y=f(x)$와 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



그림에서 조건을 만족시키는 실수 k의 값의 범위는

$7<k<25$

따라서 자연수 k는 $8, 9, 10, \cdots, 24$이므로 그 개수는 17이다.

답 17

27

점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=2t-3$

$t=a$에서 점 P의 속도가 7이므로

$2a-3=7$에서 $a=5$

답 ⑤

28

점 P의 시각 t에서의 속도를 v_1, 가속도를 a_1이라 하면

$v_1=\frac{dx_1}{dt}=3t^2-4t+3$

$a_1=\frac{dv_1}{dt}=6t-4$

점 Q의 시각 t에서의 속도를 v_2, 가속도를 a_2라 하면

$v_2=\frac{dx_2}{dt}=2t+3$

$a_2=\frac{dv_2}{dt}=2$

두 점 P, Q의 속도가 서로 같아지는 순간의 시각 t는 방정식 $v_1=v_2$의 실근이므로

$3t^2-4t+3=2t+3$에서

$3t(t-2)=0$

$t=0$ 또는 $t=2$

이때 $t>0$이므로 $t=2$

따라서 $t=2$일 때 두 점 P, Q의 가속도는 각각 8, 2이므로 그 합은

$8+2=10$

답 ⑤

29

점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3pt^2+2qt+r$

$a=\frac{dv}{dt}=6pt+2q$

점 P의 운동 방향이 바뀔 때의 점 P의 속도는 0이므로 점 P의 운동 방향이 바뀌는 $t=1$과 $t=3$에서 점 P의 속도는 0이다. 따라서

$3pt^2+2qt+r=3p(t-1)(t-3)$

$=3pt^2-12pt+9p$

에서 $q=-6p$, $r=9p$

$t=3$에서 점 P의 가속도가 2이므로

$18p+2q=2$에서 $18p+2\times(-6p)=2$, $6p=2$

따라서 $p=\frac{1}{3}$이므로 $q=-2$, $r=3$이고 $x=\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t$

그러므로 $t=6$일 때 점 P의 위치는 $72-72+18=18$

답 18

08 다항함수의 적분법

정답 본문 90~99쪽

01 ③	02 ③	03 2	04 ④	05 ④
06 120	07 ③	08 14	09 ⑤	10 ③
11 ④	12 4	13 ⑤	14 ①	15 18
16 ④	17 2	18 ③	19 ③	20 ①
21 27	22 32	23 4	24 ②	25 6
26 48	27 ③	28 ①	29 12	

01

$f(x)=\int (x^2+1)dx=\frac{1}{3}x^3+x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=-4$이므로 $C=-4$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x-4$이므로

$f(3)=9+3-4=8$

답 ③

02

$g(x)=(x^2-1)f(x)$라 하면 곱의 미분법에 의하여

$g'(x)=2xf(x)+(x^2-1)f'(x)$

$\int \{2xf(x)+(x^2-1)f'(x)\}dx$

$=\int g'(x)dx$

$=g(x)+C$

$=(x^2-1)f(x)+C$ (단, C는 적분상수)

이므로 $(x^2-1)f(x)+C=x^4-x^3+x+1$

$x=1$을 대입하면

$C=2$

따라서 $(x^2-1)f(x)=x^4-x^3+x-1=(x^2-1)(x^2-x+1)$이므로

$f(x)=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

그러므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\frac{3}{4}$이다.

답 ③

03

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=\int (x^3+2x+1)dx-\int (2x^3-x+1)dx$

$=\int \{(x^3+2x+1)-(2x^3-x+1)\}dx$

$=\int (-x^3+3x)dx$

$=-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)

$h(0)=f(0)-g(0)=0$에서 $C=0$이므로

$h(x)=-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2$

따라서 $f(2)-g(2)=h(2)=-4+6=2$

답 2

04

$\int_0^a (6x^2-2ax-3)dx$

$=\Big[2x^3-ax^2-3x\Big]_0^a$

$=2a^3-a^3-3a$

$=a^3-3a$

$a^3-3a=2$에서 $a^3-3a-2=0$

$(a+1)(a^2-a-2)=0$

$(a+1)^2(a-2)=0$

$a=-1$ 또는 $a=2$

따라서 서로 다른 모든 실수 a의 값의 합은

$-1+2=1$

답 ④

05

$\int_{-2}^2 f(x)dx$

$=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^2 \{f(x)-g(x)\}dx+\int_{-2}^2 \{f(x)+g(x)\}dx\right]$

$=\frac{1}{2}(28+12)=20$

$\int_{-2}^2 g(x)dx$

$=-\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^2 \{f(x)-g(x)\}dx-\int_{-2}^2 \{f(x)+g(x)\}dx\right]$

$=-\frac{1}{2}(28-12)=-8$

따라서

$\int_{-2}^2 \{3f(x)-2g(x)\}dx=3\int_{-2}^2 f(x)dx-2\int_{-2}^2 g(x)dx$

$=3\times 20-2\times(-8)=76$

답 ④

06

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(-1,\ 0)$, $(3,\ 0)$을 지나고 아래로 볼록하므로

$f(x)=a(x+1)(x-3)=a(x^2-2x-3)$ $(a>0)$

으로 놓을 수 있다.

$\int_{-2}^0 |f(x)|dx=\int_{-2}^{-1} f(x)dx-\int_{-1}^0 f(x)dx$

$=a\int_{-2}^{-1} (x^2-2x-3)dx-a\int_{-1}^0 (x^2-2x-3)dx$

$=a\Big[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\Big]_{-2}^{-1}-a\Big[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\Big]_{-1}^0$

$=a\left\{\frac{5}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}-a\left(0-\frac{5}{3}\right)$

$=4a$

$4a=8$에서 $a=2$

따라서 $f(x)=2(x+1)(x-3)$이므로

$f(9)=2\times10\times6=120$

답 120

07

$\int_{-a}^{a}(x^3+3x^2+x+1)dx$

$=\int_{-a}^{a}(x^3+x)dx+\int_{-a}^{a}(3x^2+1)dx$

$=0+2\int_{0}^{a}(3x^2+1)dx$

$=2\Big[x^3+x\Big]_0^a$

$=2(a^3+a)$

$2(a^3+a)=60$에서

$a^3+a-30=0$

$(a-3)(a^2+3a+10)=0$

이때 이차방정식 $a^2+3a+10=0$은 실근을 갖지 않으므로 $a=3$

답 ③

08

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-f(x)$를 만족시키므로

$f(x)=x^3+ax$ (a는 상수)

로 놓을 수 있다.

$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}(x^4+ax^2)dx$

$=2\int_{0}^{1}(x^4+ax^2)dx$

$=2\Big[\frac{1}{5}x^5+\frac{a}{3}x^3\Big]_0^1$

$=2\left(\frac{1}{5}+\frac{a}{3}\right)$

$2\left(\frac{1}{5}+\frac{a}{3}\right)=\frac{12}{5}$에서 $a=3$

따라서 $f(x)=x^3+3x$이므로

$f(2)=8+6=14$

답 14

09

삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키므로

$f(x)=ax^3+bx$ ($a\neq0$, a, b는 상수)

로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+b$이고 $xf'(x)=3ax^3+bx$이므로

$\int_{-2}^{2}(x+2)f'(x)dx$

$=\int_{-2}^{2}xf'(x)dx+\int_{-2}^{2}2f'(x)dx$

$=\int_{-2}^{2}(3ax^3+bx)dx+\int_{-2}^{2}2f'(x)dx$

$=0+4\int_{0}^{2}f'(x)dx$

$=4\Big[f(x)\Big]_0^2$

$=4\{f(2)-f(0)\}$

$=4f(2)$

$4f(2)=-8$에서 $f(2)=-2$

따라서 $f(-2)=-f(2)=2$

답 ⑤

10

$\int_{0}^{x}f(t)dt=x^3+3x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+3$

따라서 $f(2)=12+3=15$

답 ③

11

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-2x)dx$

$=x^3-x^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=C=0$이므로

$f(x)=x^3-x^2$

함수 $g(t)=(t-1)f(t)$의 부정적분 중 하나를 $G(t)$라고 하면

$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_{2}^{x}(t-1)f(t)dt$

$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_{2}^{x}g(t)dt$

$=\lim_{x\to2}\frac{G(x)-G(2)}{x-2}$

$=G'(2)$

$=g(2)$

$=f(2)$

$=8-4$

$=4$

답 ④

12

$x^2f(x)=x^3+\int_{0}^{x}(x^2+t)f'(t)dt$

$=x^3+x^2\int_{0}^{x}f'(t)dt+\int_{0}^{x}tf'(t)dt$

이때 $\int_{0}^{x}f'(t)dt=\Big[f(t)\Big]_0^x=f(x)-f(0)=f(x)-2$이므로

$x^2f(x)=x^3+x^2\{f(x)-2\}+\int_{0}^{x}tf'(t)dt$

$\int_{0}^{x}tf'(t)dt=-x^3+2x^2$

양변을 x에 대하여 미분하면 $xf'(x)=-3x^2+4x=x(-3x+4)$

이때 $f(x)$는 다항함수이므로 $f'(x)=-3x+4$

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(-3x+4)dx$

$=-\frac{3}{2}x^2+4x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=C=2$

따라서 $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+4x+2$이므로

$f(2)=-6+8+2=4$

답 4

13

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$

$=\int_0^1 (4x^3+8x)dx$

$=\left[x^4+4x^2\right]_0^1$

$=5$

답 ⑤

14

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f'\left(\frac{3k}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{n}f'\left(\frac{3k}{n}\right)\times\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{3}\int_0^3 f'(x)dx$

$=\frac{1}{3}\left[f(x)\right]_0^3$

$=\frac{1}{3}\{f(3)-f(0)\}$

$=\frac{1}{3}\{(3a+28)-1\}$

$=a+9$

이때 $f(-1)=-a$이므로

$a+9=-a$에서 $a=-\frac{9}{2}$

답 ①

15

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(-2+\frac{4k}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{n}f\left(-2+\frac{4k}{n}\right)\times\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)dx$

$=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\{2x^3-3ax^2+(a^2+2)x-4\}dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^2(-3ax^2-4)dx$

$=\frac{1}{2}\left[-ax^3-4x\right]_0^2$

$=\frac{1}{2}(-8a-8)$

$=-4a-4$

이므로 $-4a-4=-20$에서 $a=4$

$f(x)=2x^3-12x^2+18x-4$에서

$f'(x)=6x^2-24x+18$

따라서 $f'(a)=f'(4)=96-96+18=18$

답 18

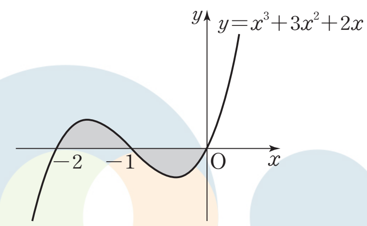
16

$y=x^3+3x^2+2x=x(x^2+3x+2)=x(x+1)(x+2)$

$x(x+1)(x+2)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=0$

이므로 곡선 $y=x^3+3x^2+2x$와 x축이 만나는 점의 좌표는

$(-2, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 0)$이다.



따라서 구하는 넓이는

$\int_{-2}^{0}|x^3+3x^2+2x|dx$

$=\int_{-2}^{-1}(x^3+3x^2+2x)dx-\int_{-1}^{0}(x^3+3x^2+2x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+x^2\right]_{-2}^{-1}-\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+x^2\right]_{-1}^{0}$

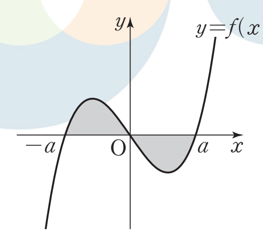
$=\left(\frac{1}{4}-0\right)-\left(0-\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{1}{2}$

답 ④

17

$a>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{-a}^{a}|f(x)|dx=-2\int_0^a f(x)dx$

$=-2a\int_0^a(x^3-a^2x)dx$

$=-2a\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a^2}{2}x^2\right]_0^a$

$=-2a\times\left(-\frac{a^4}{4}\right)=\frac{a^5}{2}$

$\frac{a^5}{2}=16$에서 $a^5=32=2^5$

따라서 $a=2$

답 2

18

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $3x^2-4$이므로

$f'(x)=3x^2-4=3\left(x+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ 또는 $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$, $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$에서 극값을 갖는다.

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-4)dx=x^3-4x+C$

(단, C는 적분상수)

$\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}$라 하면 함수 $f(x)$의 극값은

$f(\alpha)=\alpha^3-4\alpha+C$, $f(-\alpha)=-\alpha^3+4\alpha+C$

이고, 모든 극값의 합이 0이므로

$f(\alpha)+f(-\alpha)=(\alpha^3-4\alpha+C)+(-\alpha^3+4\alpha+C)=2C=0$

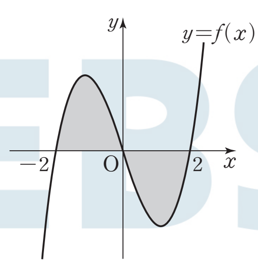
에서 $C=0$

따라서 $f(x)=x^3-4x$이고

$f(x)=x(x+2)(x-2)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

이므로 곡선 $y=x^3-4x$와 x축이 만나는 점의 좌표는

$(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$이다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{2}|x^3-4x|dx=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx-\int_{0}^{2}(x^3-4x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^{0}-\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=\{0-(-4)\}-(-4-0)=8$$

답 ③

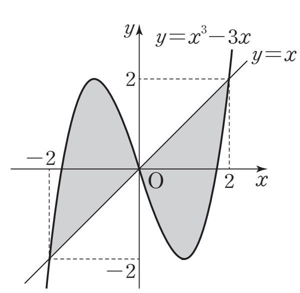
19

곡선 $y=x^3-3x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3-3x=x$에서 $x(x+2)(x-2)=0$

$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 교점의 좌표는 $(-2, -2)$, $(0, 0)$, $(2, 2)$이고 곡선 $y=x^3-3x$와 직선 $y=x$는 다음과 같다.



곡선 $y=x^3-3x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-2}^{0}\{(x^3-3x)-x\}dx+\int_{0}^{2}\{x-(x^3-3x)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx+\int_{0}^{2}(4x-x^3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[2x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{2}$$

$$=\{0-(-4)\}+(4-0)$$

$$=8$$

답 ③

20

$f(x)=x^2-4$이므로

$y=-f(x-2)+2=-\{(x-2)^2-4\}+2=-x^2+4x+2$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x-2)+2$가 만나는 점의 x좌표는

$x^2-4=-x^2+4x+2$에서

$2x^2-4x-6=0$, $2(x+1)(x-3)=0$

$x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x-2)+2$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^{3}\{(-x^2+4x+2)-(x^2-4)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(-2x^2+4x+6)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\right]_{-1}^{3}$$

$$=(-18+18+18)-\left(\frac{2}{3}+2-6\right)$$

$$=\frac{64}{3}$$

답 ①

21

$f(x)=x^3-4x+1$에서

$f'(x)=3x^2-4$이고, $f'(1)=-1$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, -2)$에서의 접선의 방정식은

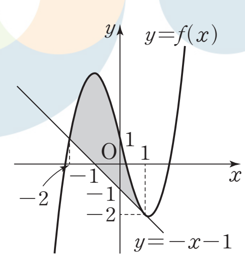
$y+2=-(x-1)$, $y=-x-1$

곡선 $y=x^3-4x+1$과 직선 $y=-x-1$이 만나는 점의 x좌표는

$x^3-4x+1=-x-1$에서

$x^3-3x+2=0$, $(x-1)^2(x+2)=0$

$x=1$ 또는 $x=-2$



따라서 접선과 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_{-2}^{1}\{(x^3-4x+1)-(-x-1)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx$$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$

$=\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\right)-(4-6-4)$

$=\frac{27}{4}$

$4S=4\times\frac{27}{4}=27$

답 27

22

$S_1=-\int_{-1}^{0}x^3\,dx=-\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{4}$

$S_2=\int_0^a x^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^a=\frac{1}{4}a^4$

$S_2=4S_1$이므로 $\frac{1}{4}a^4=4\times\frac{1}{4}=1$, $a^4=4$

$(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})(a^2+2)=0$

이때 $a>0$이므로 $a=\sqrt{2}$

따라서 $a^{10}=(\sqrt{2})^{10}=(2^{\frac{1}{2}})^{10}=2^5=32$

답 32

23

$f(x)=-(x-1)(x-a)^2$이라 하면

$S_1=\int_0^1 f(x)dx$, $S_2=-\int_1^a f(x)dx$이고 $S_1=S_2$이므로

$S_1-S_2=0$

$S_1-S_2=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^a f(x)dx$

$=\int_0^a f(x)dx$

$=-\int_0^a (x-1)(x-a)^2\,dx$

$=-\int_0^a \{x^3-(2a+1)x^2+(a^2+2a)x-a^2\}dx$

$=-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2a+1}{3}x^3+\frac{a^2+2a}{2}x^2-a^2x\right]_0^a$

$=-\left(\frac{1}{4}a^4-\frac{2a^4+a^3}{3}+\frac{a^4+2a^3}{2}-a^3\right)$

$=-\left(\frac{1}{12}a-\frac{1}{3}\right)a^3=0$

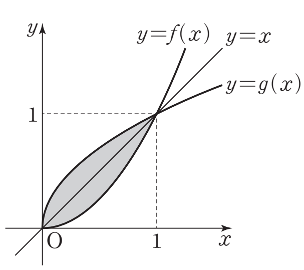
이때 $a>1$이므로 $\frac{1}{12}a-\frac{1}{3}=0$

따라서 $a=4$

답 4

24

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.



$x^2=x$에서 $x(x-1)=0$

$x=0$ 또는 $x=1$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같으므로

$2\int_0^1 (x-x^2)dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

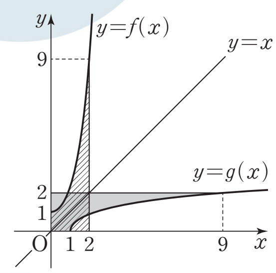
$=2\times\frac{1}{6}$

$=\frac{1}{3}$

답 ②

25

함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 그림과 같다.



이때 곡선 $y=g(x)$와 두 직선 $y=0$, $y=2$ 및 y축으로 둘러싸인 부분(색칠한 부분)의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=0$, $x=2$ 및 x축으로 둘러싸인 부분(빗금친 부분)의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (x^3+1)dx$

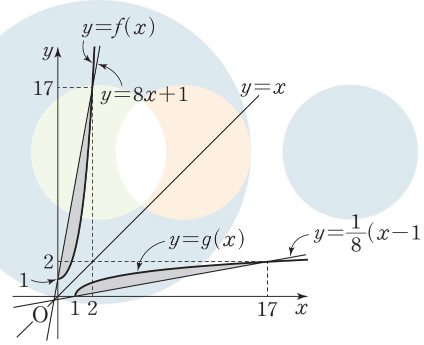
$=\left[\frac{1}{4}x^4+x\right]_0^2$

$=4+2=6$

답 6

26

함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



함수 $y=\frac{1}{8}(x-1)$의 역함수는 $y=8x+1$이므로 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=\frac{1}{8}(x-1)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=8x+1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=8x+1$이 만나는 점의 x좌표는

$x^4+1=8x+1$에서 $x^4-8x=0$, $x(x^3-8)=0$

$x(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

그러므로 구하는 부분의 넓이 S는

$$S=\int_0^2 \{(8x+1)-(x^4+1)\}dx$$
$$=\int_0^2 (-x^4+8x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{5}x^5+4x^2\right]_0^2$$
$$=-\frac{32}{5}+16=\frac{48}{5}$$

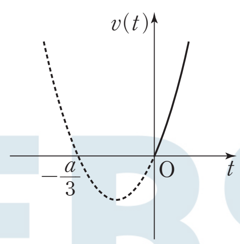
따라서 $5S=5\times\frac{48}{5}=48$

답 48

27

$v(t)=3t^2+at=3t\left(t+\frac{a}{3}\right)=0$에서 $t=-\frac{a}{3}$ 또는 $t=0$

$a>0$이므로 $v(t)$의 그래프가 그림과 같고 $t\ge 0$에서 $v(t)\ge 0$



따라서 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^4 |v(t)|dt=\int_0^4 (3t^2+at)dt$$
$$=\left[t^3+\frac{1}{2}at^2\right]_0^4$$
$$=64+8a$$

이므로 $64+8a=88$에서 $a=3$

답 ③

28

$v(t)=2t^3-6t^2=2t^2(t-3)=0$에서

$t=0$ 또는 $t=3$

점 P가 운동 방향을 바꾸려면 속도의 부호가 음에서 양으로 또는 양에서 음으로 바뀌어야 하므로 $t=3$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다.

따라서 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^3 v(t)dt=\int_0^3 (2t^3-6t^2)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^4-2t^3\right]_0^3$$
$$=\frac{81}{2}-54$$
$$=-\frac{27}{2}$$

답 ①

29

두 점 P, Q의 시각 x $(0\le x\le 6)$에서의 위치를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하면

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{2}t\,dt=\left[\frac{1}{4}t^2\right]_0^x=\frac{1}{4}x^2$$
$$g(x)=\int_0^x \left(\frac{1}{4}t^3-\frac{3}{8}t^2-2t\right)dt=\left[\frac{1}{16}t^4-\frac{1}{8}t^3-t^2\right]_0^x$$
$$=\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{8}x^3-x^2$$

두 점 P, Q 사이의 거리는

$$|g(x)-f(x)|=\left|\left(\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{8}x^3-x^2\right)-\frac{1}{4}x^2\right|$$
$$=\left|\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{8}x^3-\frac{5}{4}x^2\right|$$

$h(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{8}x^3-\frac{5}{4}x^2$이라 하면

$h'(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{2}x=\frac{1}{8}x(2x+5)(x-4)$

$h'(x)=0$에서 $x=-\frac{5}{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=4$

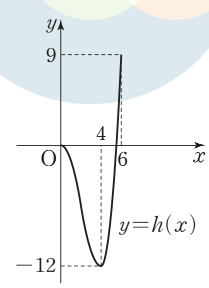
$0\le x\le 6$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

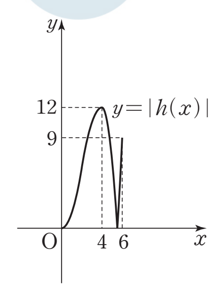
x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	↘	극소	↗	9

$h(4)=16-8-20=-12$

$h(6)=81-27-45=9$

이므로 $0\le x\le 6$에서 함수 $y=h(x)$와 함수 $y=|h(x)|$의 그래프는 다음과 같다.





따라서 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은 12이다.

답 12

확률과 통계

09 순열과 조합

정답 본문 103~115쪽

01 ④	02 ①	03 72	04 45	05 ④
06 ④	07 ①	08 ⑤	09 ③	10 ④
11 288	12 ③	13 ④	14 217	15 ④
16 44	17 ②	18 ⑤	19 ④	20 ④
21 ④	22 ⑤	23 ⑤	24 ④	25 335
26 ③	27 60	28 ④	29 ④	30 ③
31 489	32 ④	33 ①	34 634	35 900
36 ③	37 ④	38 ②	39 ③	40 ④
41 32				

01

A지점에서 D지점까지 가는 경로는

(i) A → B → D가 있고 그 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times2=6$

(ii) A → C → D가 있고 그 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times4=8$

(i), (ii)에서 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$6+8=14$

답 ④

02

각 집합에서 선택한 세 수의 합이 홀수가 되는 경우는

(i) 모두 홀수인 경우가 있고 그 경우의 수는

$2\times2\times2=8$

(ii) 두 개는 짝수이고 한 개만 홀수인 경우가 있고

집합 A에서만 홀수를 선택하는 경우의 수는

$2\times1\times3=6$

집합 B에서만 홀수를 선택하는 경우의 수는

$2\times2\times3=12$

집합 C에서만 홀수를 선택하는 경우의 수는

$2\times1\times2=4$

따라서 이 경우의 수는

$6+12+4=22$

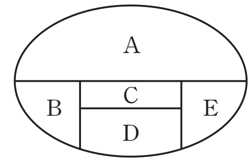
(i), (ii)에서 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$8+22=30$

답 ①

03

A부터 E의 순서로 각 영역에 색을 칠한다고 할 때



(i) A와 D에 같은 색을 칠하는 경우

영역 A에 칠할 색을 정하는 경우의 수는 4

영역 B에 칠할 색을 정하는 경우의 수는 3

영역 C에 칠할 색을 정하는 경우의 수는 2

영역 D에 칠할 색을 정하는 경우의 수는 1

영역 E에 칠할 색을 정하는 경우의 수는 2

따라서 곱의 법칙에 의하여 색을 칠하는 경우의 수는

$4\times3\times2\times1\times2=48$

(ii) A와 D에 다른 색을 칠하는 경우

영역 A에 칠할 색을 정하는 경우의 수는 4

영역 B에 칠할 색을 정하는 경우의 수는 3

영역 C에 칠할 색을 정하는 경우의 수는 2

영역 D에 칠할 색을 정하는 경우의 수는 1

영역 E에 칠할 색을 정하는 경우의 수는 1

따라서 곱의 법칙에 의하여 색을 칠하는 경우의 수는

$4\times3\times2\times1\times1=24$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$48+24=72$

답 72

04

1부터 100까지의 자연수 중에서 3의 배수는 33개이고

3이 자릿수에 들어가는 자연수는 3, 13, 23, 33, …, 93의 10개와 30, 31, 32, 33, …, 39의 10개인데 이 중에서 33이 중복되므로

$10+10-1=19$(개)

또 3의 배수이면서 3이 자릿수에 들어가는 자연수는 3, 30, 33, 36, 39, 63, 93의 7개가 있으므로 구하는 자연수의 개수는

$33+19-7=45$

답 45

05

남학생 3명 중에서 서로 이웃할 2명을 선택해 줄을 세우는 경우의 수는

${}_3P_2=3\times2=6$

여학생 3명을 줄을 세우는 경우의 수는

$3!=6$

여학생 사이의 두 공간과 양 끝 두 공간을 합쳐서 네 공간에 이웃한 남학생 2명과 나머지 남학생 1명을 배열하는 경우의 수는

${}_4P_2=4\times3=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times6\times12=432$

답 ④

06

2, 3, 5, 6 중에서 한 개의 홀수와 한 개의 짝수를 선택하는 경우의 수는

$2\times2=4$

1과 4와 그 사이에 들어간 짝수와 홀수를 하나의 그룹으로 묶고 이 그룹과 나머지 2개의 자연수를 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

1과 4의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

1과 4 사이에 들어간 짝수와 홀수를 나열하는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$4\times6\times2\times2=96$

답 ④

07

(i) 각 자리의 수의 합이 16 이상이려면 선택된 세 개의 숫자는 7, 6, 5 또는 7, 6, 4 또는 7, 6, 3 또는 7, 5, 4이어야 한다.
이때 선택된 세 개의 숫자로 만들 수 있는 자연수의 개수는 $3!=6$이므로 구하는 자연수의 개수는
$4\times6=24$

(ii) 각 자리의 수의 합이 3의 배수가 되도록 숫자를 선택하려면
㉠ 3의 배수와 3으로 나눌 때 나머지가 1인 수, 3으로 나눌 때 나머지가 2인 수를 하나씩 선택하거나
㉡ 3으로 나눌 때 나머지가 같은 수에서만 세 수를 모두 선택해야 한다.
㉠의 경우는 3과 6에서 한 개, 1, 4, 7에서 한 개, 2, 5에서 한 개를 선택하면 되므로 그 경우의 수는
$2\times3\times2=12$
㉡의 경우는 1, 4, 7에서 세 수를 모두 선택하면 되므로 그 경우의 수는 1
이때 선택된 세 개의 숫자로 만들 수 있는 자연수의 개수는 $3!=6$이므로 구하는 자연수의 개수는
$(12+1)\times6=78$

(iii) 각 자리의 수의 합이 16 이상이면서 3의 배수가 되려면 선택된 세 개의 숫자는 7, 6, 5이어야 한다.
이때 선택된 세 개의 숫자로 만들 수 있는 자연수의 개수는
$3!=6$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$24+78-6=96$

답 ①

08

1부터 9까지의 합이 45이므로 각 가로줄에 있는 세 수의 합이 같으려면 가로줄에 있는 세 수의 합은 $45\div3=15$이어야 한다.

1부터 9까지의 아홉 개의 수 중에서 세 수의 합이 15가 되는 경우는

(9, 5, 1), (9, 4, 2), (8, 6, 1), (8, 5, 2), (8, 4, 3),

(7, 6, 2), (7, 5, 3), (6, 5, 4)의 8가지뿐이다.

이때 9개의 칸 중 9가 들어가는 칸이 반드시 있어야 하므로 9를 포함하는 (9, 5, 1), (9, 4, 2)를 기준으로 다음 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) 가로줄 중 하나에 9, 5, 1이 들어가면 중복되는 수가 없어야 하므로 나머지 두 줄엔 8, 4, 3과 7, 6, 2가 들어가야 한다.
이 경우 칸에 수를 나열하는 경우의 수는
$3\times3!\times2\times3!\times3!=1296$

(ii) 가로줄 중 하나에 9, 4, 2가 들어가면 중복되는 수가 없어야 하므로 나머지 두 줄엔 8, 6, 1과 7, 5, 3이 들어가야 한다.
이 경우 칸에 수를 나열하는 경우의 수는
$3\times3!\times2\times3!\times3!=1296$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$1296+1296=2592$

답 ⑤

09

6개의 색을 칠하는 경우의 수는

$6!=720$

이때 처음 도형을 180° 회전시키면 중복되는 경우가 있으므로 구하는 경우의 수는

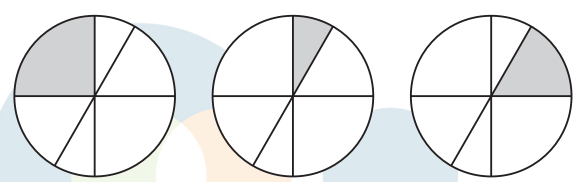
$\dfrac{720}{2}=360$

답 ③

다른 풀이

6개의 색 중 하나를 그림과 같이 3개의 부채꼴 중 하나에 칠하는 경우가 3가지이고 나머지 5개의 색을 칠하는 경우의 수는 $5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는 $3\times120=360$



10

먼저 빨간 의자를 한 자리에 고정시켜 놓는다.

(i) 남학생 중 한 명이 빨간 의자에 앉는 경우
남학생을 선택해 앉히는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$
이웃한 여학생 2명과 나머지 남학생 3명을 5개의 파란 의자에 앉히는 경우의 수는 $4!=24$
여학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 이 경우의 수는
$4\times24\times2=192$

(ii) 여학생 중 한 명이 빨간 의자에 앉는 경우
여학생을 선택해 앉히는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$
나머지 여학생을 빨간 의자에 앉아 있는 여학생의 양 옆 중 하나에 앉히는 경우의 수는 2
남학생을 파란 의자에 앉히는 경우의 수는 $4!=24$
따라서 이 경우의 수는
$2\times2\times24=96$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$192+96=288$

답 ④

다른 풀이

이웃한 여학생 2명과 남학생 4명이 원형으로 앉는 경우의 수는

$2!\times(5-1)!=2\times24=48$

학생들이 앉은 의자 중 하나를 빨간 의자로 정하는 경우의 수는 ${}_6C_1=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$48\times6=288$

11

철수의 부모님과 영희의 부모님을 제외한 자녀 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

자녀들 사이의 4개의 공간 중에서 2개의 공간을 택하여 철수의 부모님과 영희의 부모님이 부부끼리 이웃하도록 앉는 경우의 수는

${}_4P_2\times2!\times2!=12\times2\times2=48$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times48=288$

답 288

12

(i) 0을 2개 포함하는 경우

십의 자리와 일의 자리의 수가 모두 0이고, 백의 자리의 수는 1, 2, 3 중의 하나이므로 0을 2개 포함하는 자연수의 개수는 3

(ii) 0을 1개 포함하는 경우

십의 자리와 일의 자리 중 한 자리의 수가 0이고, 그 각각에 대하여 나머지 한 자리와 백의 자리의 수가 각각 1, 2, 3 중의 하나이므로 0을 1개 포함하는 자연수의 개수는

$2\times{}_3\Pi_2=2\times3^2=18$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$3+18=21$

답 ③

13

한 글자당 글꼴 5가지, 글자 크기 4가지, 글자색 3가지 중 하나씩을 선택할 수 있으므로 $5\times4\times3=60$(가지)의 경우가 존재한다.

총 5개의 글자를 입력해야 하므로 구하는 경우의 수는

${}_{60}\Pi_5$

답 ④

14

(i) 천의 자리의 수가 3인 경우

조건을 만족시키는 자연수는 3000 하나뿐이다.

(ii) 천의 자리의 수가 2인 경우

백의 자리와 십의 자리에 0, 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 2개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_6\Pi_2=6^2=36$

일의 자리에 0, 2, 4 중에서 1개를 택해 배열하는 경우의 수는 3

그러므로 조건을 만족시키는 자연수의 개수는 $36\times3=108$

(iii) 천의 자리의 수가 1인 경우

(ii)에서와 마찬가지로 조건을 만족시키는 자연수의 개수는 108

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$1+108+108=217$

답 217

15

학생 1명이 동아리에 가입할 때,

한 개의 동아리에 가입하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

두 개의 동아리에 가입하는 경우의 수는 ${}_3C_2={}_3C_1=3$

세 개의 동아리에 가입하는 경우의 수는 ${}_3C_3=1$

이므로 학생 1명이 동아리에 가입하는 경우의 수는 $3+3+1=7$

따라서 3명의 학생이 동아리에 가입하는 경우의 수는

${}_7\Pi_3=343$

답 ④

16

주어진 숫자 중에 1, 3은 홀수, 2, 4는 짝수이다.

(i) 홀수를 3개 택하는 경우

1, 3 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하면 되므로 자연수의 개수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

(ii) 홀수를 2개, 짝수를 1개 택하는 경우

세 자리 중 홀수 2개를 넣을 자리를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$

그 두 자리에 1, 3 중에서 중복을 허락하여 2개를 택해 나열하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2=2^2=4$

나머지 한 자리에 2, 4 중에서 1개를 택해 나열하는 경우의 수는 2

그러므로 자연수의 개수는

$3\times4\times2=24$

(iii) 홀수를 1개, 짝수를 2개 택하는 경우

2, 4를 1개씩 택하고, 1, 3 중에서 1개를 택하는 경우의 수는 2

2, 4와 홀수 1개를 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

그러므로 자연수의 개수는

$2\times6=12$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$8+24+12=44$

답 44

17

천의 자리에서 반올림하여 560000보다 크려면 다음의 2가지 경우가 있다.

(i) 십만의 자리에 5, 만의 자리에 6, 천의 자리에 5가 오는 경우

나머지 백, 십, 일의 자리에 3, 0, 0을 나열하면 되므로

그 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

(ii) 십만의 자리에 6이 오는 경우

나머지 자리에 5, 5, 3, 0, 0을 나열하면 되므로

그 경우의 수는 $\frac{5!}{2!2!}=30$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$3+30=33$

답 ②

18

(ⅰ) 현수막 A를 4개, 현수막 B를 2개 사용하는 경우

6곳에 현수막을 설치하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{4!2!}=15$

(ⅱ) 현수막 A를 3개, 현수막 B를 3개 사용하는 경우

6곳에 현수막을 설치하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{3!3!}=20$

(ⅲ) 현수막 A를 2개, 현수막 B를 4개 사용하는 경우

6곳에 현수막을 설치하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2!4!}=15$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$15+20+15=50$

답 ⑤

19

(ⅰ) 5를 한 개만 사용하는 경우

5가 만의 자리에 오는 경우의 수는

${}_5P_4=120$

1, 2, 3, 4 중의 하나가 만의 자리에 오는 경우의 수는

$4\times{}_4C_3\times4!=4\times4\times24=384$

따라서 이때의 자연수의 개수는

$120+384=504$

(ⅱ) 5를 두 개 사용하는 경우

5가 만의 자리에 오는 경우의 수는

${}_5C_3\times4!=10\times24=240$

1, 2, 3, 4 중의 하나가 만의 자리에 오는 경우의 수는

$4\times{}_4C_2\times\dfrac{4!}{2!}=4\times6\times12=288$

따라서 이때의 자연수의 개수는

$240+288=528$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수의 개수는

$504+528=1032$

답 ④

20

7개의 업무를 A, B, C, 1, 2, 3, 4라 하자.

(ⅰ) C를 가장 먼저 처리하는 경우

A, B를 모두 □, □라고 생각하고

□, □, 1, 2, 3, 4를 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2!}=360$

이때 나열된 □, □에 앞쪽에 A, 뒤쪽에 B를 배열하면 된다.

(ⅱ) C를 가장 나중에 처리하는 경우

A, B를 모두 □, □라고 생각하고

□, □, 1, 2, 3, 4를 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2!}=360$

이때 나열된 □, □에 앞쪽에 A, 뒤쪽에 B를 배열하면 된다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$360+360=720$

답 ④

21

(ⅰ) 어느 한 방향키가 3번 사용되고 나머지는 한 번씩 사용되는 경우

3번 사용할 방향키를 정하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

방향키의 입력순서를 정하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{3!}=120$

따라서 잠금코드를 정하는 경우의 수는 $4\times120=480$

(ⅱ) 어느 두 개의 방향키가 2번씩 사용되고 나머지는 한 번씩 사용되는 경우

2번 사용할 방향키를 정하는 경우의 수는 ${}_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

방향키의 입력순서를 정하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2!2!}=180$

따라서 잠금코드를 정하는 경우의 수는 $6\times180=1080$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$480+1080=1560$

답 ④

22

$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

$f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

$f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 5

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$10\times10\times5=500$

답 ⑤

23

4개의 숫자를 일렬로 나열하여 만든 데이터에서

(ⅰ) 1이 1개 사용되는 경우

${}_4C_1=4$

이때 맨 끝자리에 1이 사용되므로 사용된 1의 총 개수는

$4\times(1+1)=8$

(ⅱ) 1이 2개 사용되는 경우

${}_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

이때 맨 끝자리에 0이 사용되므로 사용된 1의 총 개수는

$6\times2=12$

(ⅲ) 1이 3개 사용되는 경우

${}_4C_3={}_4C_1=4$

이때 맨 끝자리에 1이 사용되므로 사용된 1의 총 개수는

$4\times(3+1)=16$

(ⅳ) 1이 4개 사용되는 경우

${}_4C_4=1$

이때 맨 끝자리에 0이 사용되므로 사용된 1의 총 개수는

$1\times4=4$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 총 개수는

$8+12+16+4=40$

답 ⑤

24

(ⅰ) 모든 원판을 한 기둥에 꽂는 경우의 수는 3

(ⅱ) 원판을 1개, 3개의 두 조로 나누는 경우의 수는

$_4C_1 \times {_3C_3}=4$

이때 이 두 조를 A, B, C에 대응시키는 경우의 수는

$_3P_2=3\times2=6$

따라서 이 경우의 수는 $4\times6=24$

(ⅲ) 원판을 2개, 2개의 두 조로 나누는 경우의 수는

$_4C_2\times{_2C_2}\times\frac{1}{2!}=3$

이때 이 두 조를 A, B, C에 대응시키는 경우의 수는

$_3P_2=3\times2=6$

따라서 이 경우의 수는 $3\times6=18$

(ⅳ) 원판을 2개, 1개, 1개의 세 조로 나누는 경우의 수는

$_4C_2\times{_2C_1}\times{_1C_1}\times\frac{1}{2!}=6$

이때 이 세 조를 A, B, C에 대응시키는 경우의 수는

$_3P_3=3!=6$

따라서 이 경우의 수는 $6\times6=36$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는

$3+24+18+36=81$

답 ④

25

3개 층에 내리는 경우는 2층, 4층, 6층에서 내리는 1가지 경우가 있고, 2개 층에 내리는 경우는 2층과 4층, 2층과 5층, 2층과 6층, 3층과 5층, 3층과 6층, 4층과 6층에서 내리는 모두 6가지 경우가 있다.

(ⅰ) 3개 층에 내리는 경우

5명을 세 조로 나누는 경우는 (3명, 1명, 1명) 또는 (2명, 2명, 1명)의 두 가지가 있다.

(3명, 1명, 1명)의 경우의 수는 $_5C_3\times{_2C_1}\times{_1C_1}\times\frac{1}{2!}=10$

(2명, 2명, 1명)의 경우의 수는 $_5C_2\times{_3C_2}\times{_1C_1}\times\frac{1}{2!}=15$

이때 세 조를 내리는 층에 배정하는 경우의 수는 $3!=6$이므로

$(10+15)\times6=150$

(ⅱ) 2개 층에 내리는 경우

5명을 두 조로 나누는 경우는 (4명, 1명) 또는 (3명, 2명)의 두 가지가 있다.

(4명, 1명)의 경우의 수는 $_5C_4\times{_1C_1}=5$

(3명, 2명)의 경우의 수는 $_5C_3\times{_2C_2}=10$

이때 두 조를 내리는 층에 배정하는 경우의 수는 $2!=2$이므로

$6\times(5+10)\times2=180$

(ⅲ) 1개 층에 내리는 경우

2층부터 6층 중 1개 층에서 내리는 경우의 수는 5

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$150+180+5=335$

답 335

다른 풀이

(ⅰ) 2층 또는 4층 또는 6층에서 5명이 내리는 경우의 수는

$_3\Pi_5=3^5=243$

(ⅱ) 2층 또는 5층에서 5명이 내리는 경우의 수는 $_2\Pi_5$인데 2층에서 5명이 모두 내리는 경우는 (ⅰ)과 중복되므로 (ⅰ)과 중복되지 않는 이 경우의 수는

$_2\Pi_5-1=2^5-1=31$

(ⅲ) 3층 또는 6층에서 5명이 내리는 경우의 수는 $_2\Pi_5$인데 6층에서 5명이 모두 내리는 경우는 (ⅰ)과 중복되므로 (ⅰ)과 중복되지 않는 이 경우의 수는

$_2\Pi_5-1=2^5-1=31$

(ⅳ) 3층 또는 5층에서 5명이 내리는 경우의 수는 $_2\Pi_5$인데 3층에서 5명이 모두 내리는 경우는 (ⅲ)과 중복되고, 5층에서 5명이 모두 내리는 경우는 (ⅱ)와 중복되므로 (ⅲ), (ⅱ)와 중복되지 않는 이 경우의 수는

$_2\Pi_5-2=2^5-2=30$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는

$243+31+31+30=335$

26

바로 앞에 있는 돌로 가는 것을 1, 바로 앞에 있는 돌을 뛰어넘어서 그 다음 돌로 가는 것을 2로 표현하면 구하는 방법의 수는 1과 2의 합으로 7을 표현하는 경우의 수와 같다.

(ⅰ) 1을 7개 사용하는 경우의 수는 7개의 숫자의 합 중에서 1을 놓을 7곳을 정하는 경우의 수와 같으므로 $_7C_7=1$

(ⅱ) 1을 5개, 2를 1개 사용하는 경우의 수는 6개의 숫자의 합 중에서 1을 놓을 5곳을 정하는 경우의 수와 같으므로 $_6C_5={_6C_1}=6$

(ⅲ) 1을 3개, 2를 2개 사용하는 경우의 수는 5개의 숫자의 합 중에서 1을 놓을 3곳을 정하는 경우의 수와 같으므로

$_5C_3={_5C_2}=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

(ⅳ) 1을 1개, 2를 3개 사용하는 경우의 수는 4개의 숫자의 합 중에서 1을 놓을 1곳을 정하는 경우의 수와 같으므로 $_4C_1=4$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는

$1+6+10+4=21$

답 ③

27

$(a+b)^3$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는

$_2H_3={_4C_3}={_4C_1}=4$

$(x+y+z)^4$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는

$_3H_4={_6C_4}={_6C_2}=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$4\times15=60$

답 60

28

$abcd=1024=2^{10}$

이므로 $a=2^p$, $b=2^q$, $c=2^r$, $d=2^s$ (p, q, r, s는 음이 아닌 정수)라 할 수 있다.

$abcd=2^p2^q2^r2^s=2^{p+q+r+s}=2^{10}$

따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 방정식 $p+q+r+s=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $p,\ q,\ r,\ s$의 순서쌍 $(p,\ q,\ r,\ s)$의 개수와 같으므로

${}_4H_{10}={}_{13}C_{10}={}_{13}C_3=\dfrac{13\times12\times11}{3\times2\times1}=286$

답 ④

29

(ⅰ) $c^2=1$인 경우

a는 ±1의 2가지, b는 1의 1가지, c는 ±1의 2가지이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$2\times1\times2=4$

(ⅱ) $c^2=4$인 경우

$|a|$와 b의 순서쌍 $(|a|,\ b)$의 개수는

${}_4H_2={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$이고

a의 값은 양수와 음수가 가능하고 c는 ±2의 2가지이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$10\times2\times2=40$

(ⅲ) $c^2=9$인 경우

$|a|$와 b의 순서쌍 $(|a|,\ b)$의 개수는

${}_9H_2={}_{10}C_2=\dfrac{10\times9}{2\times1}=45$이고

a의 값은 양수와 음수가 가능하고 c는 ±3의 2가지이므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$45\times2\times2=180$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$4+40+180=224$

답 ④

30

파란색 볼펜 3자루를 철수와 민수에게 나누어 주는 경우의 수는

${}_2H_3={}_4C_3={}_4C_1=4$

빨간색 볼펜 4자루를 철수와 민수에게 나누어 주는 경우의 수는

${}_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

초록색 볼펜 5자루를 철수와 민수에게 나누어 주는 경우의 수는

${}_2H_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

볼펜을 철수와 민수 중 한 사람에게만 나누어 주는 경우의 수는 2

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times5\times6-2=118$

답 ③

31

(ⅰ) $|z|=|w|=0$일 때,

$x+y=9$ (단, $x\geq0,\ y\geq1$) …… ㉠

$y=y'+1$로 놓으면 방정식 ㉠은

$x+y'=8$ (단, $x\geq0,\ y'\geq0$)

이므로 이를 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y')$의 개수는

${}_2H_8={}_9C_8={}_9C_1=9$

(ⅱ) $|z|=0,\ |w|\neq0$일 때,

$x+y+|w|=9$ (단, $x\geq0,\ y\geq1,\ |w|\geq1$) …… ㉡

$y=y'+1,\ |w|=w'+1$로 놓으면 방정식 ㉡은

$x+y'+w'=7$ (단, $x\geq0,\ y'\geq0,\ w'\geq0$)

이므로 이를 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y',\ w')$의 개수는

${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

이때 $|w|=w'+1$을 만족시키는 w는 양수와 음수 2개가 존재하므로 방정식 ㉡을 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y,\ w)$의 개수는

$36\times2=72$

(ⅲ) $|z|\neq0,\ |w|=0$일 때,

$x+y+|z|=9$ (단, $x\geq0,\ y\geq1,\ |z|\geq1$)

(ⅱ)와 마찬가지 방법으로 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

${}_3H_7\times2=36\times2=72$

(ⅳ) $|z|\neq0,\ |w|\neq0$일 때,

$x+y+|z|+|w|=9$ (단, $x\geq0,\ y\geq1,\ |z|\geq1,\ |w|\geq1$) …… ㉢

$y=y'+1,\ |z|=z'+1,\ |w|=w'+1$로 놓으면 방정식 ㉢은

$x+y'+z'+w'=6$ (단, $x\geq0,\ y'\geq0,\ z'\geq0,\ w'\geq0$)

이므로 이를 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y',\ z',\ w')$의 개수는

${}_4H_6={}_9C_6={}_9C_3=84$

이때 $|z|=z'+1,\ |w|=w'+1$을 만족시키는 $z,\ w$는 양수와 음수로 각각 2개씩 존재하므로 방정식 ㉢을 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수는

$84\times2\times2=336$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수는

$9+72+72+336=489$

답 489

32

$10=7+3$

$=6+4$

$=6+2+2$

$=5+5$

$=5+3+2$

$=4+4+2$

$=4+3+3$

$=4+2+2+2$

$=3+3+2+2$

$=2+2+2+2+2$

따라서 자연수 10을 2 이상 7 이하의 자연수로 분할하는 방법의 수는 10이다.

답 ④

33

집합 A의 부분집합의 원소의 합이 7이면

$\{2,\ 5\},\ \{3,\ 4\},\ \{1,\ 2,\ 4\}$

이므로 이 중 적어도 하나를 포함하도록 집합을 분할하면 된다.

(ⅰ) $\{2, 5\}$를 포함하면 $\{1, 3, 4\}$를 분할하는 모든 경우의 수는

$S(3, 1)+S(3, 2)+S(3, 3)=1+{}_3C_2+1=5$

(ⅱ) $\{3, 4\}$를 포함하면 $\{1, 2, 5\}$를 분할하는 모든 경우의 수는

$S(3, 1)+S(3, 2)+S(3, 3)=1+{}_3C_2+1=5$

(ⅲ) $\{1, 2, 4\}$를 포함하면 $\{3, 5\}$를 분할하는 모든 경우의 수는

$S(2, 1)+S(2, 2)=1+1=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$, $\{1\}$로 분할하는 경우는 중복된다.

따라서 구하는 방법의 수는 $5+5+2-1=11$

답 ①

34

$a_n={}_{3n}C_n\times{}_{2n}C_n\times{}_nC_n\times\dfrac{1}{3!}$

$$\frac{a_{10}}{a_9}=\frac{{}_{30}C_{10}\times{}_{20}C_{10}}{{}_{27}C_9\times{}_{18}C_9}$$

$$=\frac{\dfrac{30!}{20!10!}\times\dfrac{20!}{10!10!}}{\dfrac{27!}{18!9!}\times\dfrac{18!}{9!9!}}$$

$$=\frac{30\times29\times28}{20\times19\times10}\times\frac{20\times19}{10\times10}=\frac{609}{25}$$

따라서 $p=25$, $q=609$이므로

$p+q=25+609=634$

답 634

35

공이 한 개씩 들어가므로 남은 공 2개를 세 상자 A, B, C에 나누어 담는 경우의 수는

$${}_3H_2={}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

라켓 5개를 세 조로 나누는 경우는 3개, 1개, 1개 또는 2개, 2개, 1개로 나누는 2가지 경우가 있으므로

$${}_5C_3\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}+{}_5C_2\times{}_3C_2\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=25$$

이 세 조를 세 상자 A, B, C에 대응시키는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 라켓을 상자에 담는 경우의 수는 $25\times6=150$

곱의 법칙에 의하여 공과 라켓을 상자에 담는 경우의 수는

$6\times150=900$

답 900

36

$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 일반항은

$${}_6C_r x^r\left(\frac{2}{x}\right)^{6-r}={}_6C_r 2^{6-r}x^{2r-6}$$

이때 x^2의 계수는 $2r-6=2$에서 $r=4$일 때이므로

$${}_6C_4 2^2={}_6C_2\times4=\frac{6\times5}{2\times1}\times4=60$$

답 ③

37

$(3x-a)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6C_r(3x)^r(-a)^{6-r}={}_6C_r 3^r(-a)^{6-r}x^r$

x^2의 계수는 $r=2$일 때이므로 ${}_6C_2 3^2a^4$ …… ㉠

상수항은 $r=0$일 때이므로 a^6 …… ㉡

x^2의 계수와 상수항이 서로 같으므로 ㉠, ㉡에서

${}_6C_2 3^2a^4=a^6$

따라서 $a^2={}_6C_2 3^2=\dfrac{6\times5}{2\times1}\times9=135$

답 ④

38

$(3x+2)^{20}$의 전개식에서 일반항은

${}_{20}C_r(3x)^r2^{20-r}={}_{20}C_r3^r2^{20-r}x^r$

x^k의 계수를 a_k라 하면

$a_k>a_{k+1}$ $(k\le19)$에서

${}_{20}C_k3^k2^{20-k}>{}_{20}C_{k+1}3^{k+1}2^{19-k}$

$$\frac{20!\times2}{k!(20-k)!}>\frac{20!\times3}{(k+1)!(19-k)!}$$

$$\frac{2}{20-k}>\frac{3}{k+1}$$

$2(k+1)>3(20-k)$

$k>11.6$

즉, $a_{12}>a_{13}>a_{14}>\cdots>a_{20}$ …… ㉠

이와 반대로 $k<11.6$이면 $a_k<a_{k+1}$이므로

$a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{11}<a_{12}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 a_{12}가 가장 크므로 x^{12}의 계수가 가장 크다.

따라서 $k=12$

답 ②

39

$$\sum_{k=2}^{10}({}_kC_1+{}_kC_2+\cdots+{}_kC_k)=\sum_{k=2}^{10}(2^k-1)=\frac{4(2^9-1)}{2-1}-9$$

$$=2035$$

답 ③

40

$(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+\cdots+(x+1)^{10}$의 전개식에서 x^2의 계수는

${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2$

$={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2$

$={}_4C_3+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2$

$={}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_2$

$={}_{11}C_3=\dfrac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165$

답 ④

다른 풀이

$(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+\cdots+(x+1)^{10}$

$=\dfrac{(x+1)\{(x+1)^{10}-1\}}{(x+1)-1}$

$=\dfrac{(x+1)^{11}-x-1}{x}$ (단, $x\neq0$)

$(x+1)^{11}$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_{11}\mathrm{C}_3=\dfrac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165$이므로

구하는 x^2의 계수는 165

41

(i) 막대사탕을 0개 선택하는 경우
  알사탕 5개를 선택하는 경우의 수이므로 ${}_5\mathrm{C}_5$
(ii) 막대사탕을 1개 선택하는 경우
  알사탕 4개를 선택하는 경우의 수이므로 ${}_5\mathrm{C}_4$
(iii) 막대사탕을 2개 선택하는 경우
  알사탕 3개를 선택하는 경우의 수이므로 ${}_5\mathrm{C}_3$
(iv) 막대사탕을 3개 선택하는 경우
  알사탕 2개를 선택하는 경우의 수이므로 ${}_5\mathrm{C}_2$
(v) 막대사탕을 4개 선택하는 경우
  알사탕 1개를 선택하는 경우의 수이므로 ${}_5\mathrm{C}_1$
(vi) 막대사탕을 5개 선택하는 경우
  알사탕 0개를 택하는 경우의 수이므로 ${}_5\mathrm{C}_0$
(i)~(vi)에서 구하는 경우의 수는
${}_5\mathrm{C}_0+{}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2+\cdots+{}_5\mathrm{C}_5=2^5=32$

답 32

10 확률

정답 본문 118~129쪽

01 ⑤	02 ③	03 ⑤	04 ⑤	05 ②
06 ⑤	07 ③	08 139	09 ③	10 257
11 ③	12 ④	13 814	14 ⑤	15 ④
16 ④	17 ①	18 ②	19 ⑤	20 ③
21 ⑤	22 ③	23 7	24 ④	25 ④
26 ④	27 880	28 ③	29 202	30 ①
31 ⑤	32 ②	33 ①	34 ②	35 391

01

1부터 50까지의 자연수 중 임의로 한 개를 선택하는 경우의 수는 50이고, 이 중 3의 배수는 3, 6, 9, $\cdots$, 48의 16개이다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{16}{50}=\dfrac{8}{25}$

답 ⑤

02

주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$
$i^m\times(-1)^n=-1$에서
$n=1$이면 $i^m=1$에서 $m=4$
$n=2$이면 $i^m=-1$에서 $m=2$ 또는 $m=6$
$n=3$이면 $i^m=1$에서 $m=4$
$n=4$이면 $i^m=-1$에서 $m=2$ 또는 $m=6$
$n=5$이면 $i^m=1$에서 $m=4$
$n=6$이면 $i^m=-1$에서 $m=2$ 또는 $m=6$
그러므로 $i^m\times(-1)^n=-1$이 되는 경우의 수는
$1+2+1+2+1+2=9$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$

답 ③

03

그림과 같이 각 정사각형을 a, b, c, d, e라 하자.

a	b	c
d	e	

(i) a와 e에 같은 색을 칠하는 경우
  a와 e에 색을 칠하는 경우의 수는 4
  d에 색을 칠하는 경우의 수는 3
  b에 색을 칠하는 경우의 수는 3
  c에 색을 칠하는 경우의 수는 3
  그러므로 이 경우의 수는
  $4\times3\times3\times3=108$
(ii) a와 e에 서로 다른 색을 칠하는 경우
  a에 색을 칠하는 경우의 수는 4
  e에 색을 칠하는 경우의 수는 3

d에 색을 칠하는 경우의 수는 2

b에 색을 칠하는 경우의 수는 2

c에 색을 칠하는 경우의 수는 3

그러므로 이 경우의 수는

$4\times3\times2\times2\times3=144$

(i), (ii)에서 $108+144=252$

노란색을 3번 칠하는 경우는 그림과 같고, 나머지 2개의 정사각형에 색을 칠하는 경우의 수는

$3\times3=9$

따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{252}=\frac{1}{28}$

답 ⑤

04

신발의 사이즈가 큰 것부터 4켤레의 신발을 Aa, Bb, Cc, Dd라 하면 8개의 신발을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $8!$

A와 a를 이웃하도록 하여 Aa와 B, b, C, c를 나열하는 경우의 수는 $5!\times2!$

∨ □ ∨ □ ∨ □ ∨ □ ∨ □ ∨

이때 나열한 신발의 사이 4곳과 양 끝 2곳을 합쳐서 6곳 중에서 2곳에 D와 d를 나열하는 경우의 수는

${}_6P_2=6\times5=30$

따라서 구하는 확률은 $\frac{5!\times2\times30}{8!}=\frac{5}{28}$

답 ⑤

05

6명이 노래를 부르는 순서를 정하는 경우의 수는 $6!=720$

노래를 부르는 순서를 차례로 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$이라 하면 이 6개 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

이때 선택된 3개에 A와 B가 모두 C보다 앞에 오도록 A, B, C를 배치하는 경우는 A, B, C와 B, A, C의 2가지

나머지 3명이 노래를 부르는 순서를 정하는 경우의 수는 $3!=6$

그러므로 임의로 6명이 노래를 부르는 순서를 정할 때, A와 B가 모두 C보다 먼저 노래를 부르는 경우의 수는

$20\times2\times6=240$

따라서 구하는 확률은 $\frac{240}{720}=\frac{1}{3}$

답 ②

06

X에서 Y로의 함수의 총 개수는 $4^4=256$

(i) $f(4)=1$인 경우

$(f(1), f(2), f(3))=(1, 1, 1)$뿐이므로 경우의 수는 1

(ii) $f(4)=2$인 경우

$(f(1), f(2), f(3))$의 경우의 수는 1, 1, 2를 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{3!}{2!}=3$

(iii) $f(4)=4$인 경우

$(f(1), f(2), f(3))$의 경우의 수는 1, 2, 2와 1, 1, 4를 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{3!}{2!}\times2=6$

(iv) $f(4)=8$인 경우

$(f(1), f(2), f(3))$의 경우의 수는 1, 1, 8과 1, 2, 4와 2, 2, 2를 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{3!}{2!}+3!+1=10$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$1+3+6+10=20$

따라서 구하는 확률은 $\frac{20}{256}=\frac{5}{64}$

답 ⑤

07

흰 구슬 4개와 검은 구슬 5개 중에서 4개의 구슬을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_9C_4=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

흰 구슬 2개와 검은 구슬 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_5C_2=\frac{4\times3}{2\times1}\times\frac{5\times4}{2\times1}=60$

따라서 구하는 확률은

$\frac{60}{126}=\frac{10}{21}$

답 ③

08

a_1, a_2, a_3, a_4의 값을 정하는 경우의 수는 $5\times5\times5\times5=625$

이때 $a_1\le a_2\le a_3\le a_4$가 되는 경우의 수는

${}_5H_4={}_8C_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$

그러므로 구하는 확률은 $\frac{70}{625}=\frac{14}{125}$

따라서 $p=125$, $q=14$이므로

$p+q=125+14=139$

답 139

09

6명을 2명씩 3개의 조로 만드는 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}=15$

3개의 조가 모두 남자 1명, 여자 1명으로 이루어진 조가 되는 경우의 수는 남자 3명과 여자 3명을 일대일로 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$3!=6$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

답 ③

10

집합 A의 부분집합의 개수는 $2^5=32$이므로

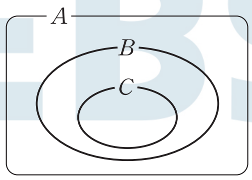
부분집합 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 경우의 수는

$_{32}H_2={}_{33}C_2=\frac{33\times32}{2\times1}=528$

이때 한 집합이 다른 집합의 부분집합이 되는 경우의 수는

그림과 같은 벤 다이어그램의 세 영역 C, $B-C$, $A-B$에서 원소 1, 2, 3, 4, 5의 위치를 정하는 경우의 수와 같다.

원소 1의 위치를 정하는 경우의 수는 3이고, 원소 2, 3, 4, 5도 마찬가지이므로 구하는 경우의 수는 $3^5=243$



그러므로 구하는 확률은 $\frac{243}{528}=\frac{81}{176}$

따라서 $p=176$, $q=81$이므로

$p+q=176+81=257$

답 257

11

8개의 제비에서 4개를 뽑는 경우의 수는

$_8C_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$

당첨제비가 3개 또는 4개 나오는 경우의 수는

$_4C_3\times{}_4C_1+{}_4C_4=16+1=17$

당첨제비가 아닌 것이 2개 나오는 경우의 수는

$_4C_2\times{}_4C_2=36$

당첨제비가 3개 이상 나오는 사건과 당첨제비가 아닌 것이 2개 나오는 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{17}{70}+\frac{36}{70}=\frac{53}{70}$

답 ③

12

전체 9개의 공 중에서 4개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$_9C_4=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

(i) 흰 공 2개, 빨간 공 1개, 검은 공 1개를 꺼낼 확률은

$\frac{_3C_2\times{}_4C_1\times{}_2C_1}{126}=\frac{4}{21}$

(ii) 흰 공 1개, 빨간 공 2개, 검은 공 1개를 꺼낼 확률은

$\frac{_3C_1\times{}_4C_2\times{}_2C_1}{126}=\frac{2}{7}$

(iii) 흰 공 1개, 빨간 공 1개, 검은 공 2개를 꺼낼 확률은

$\frac{_3C_1\times{}_4C_1\times{}_2C_2}{126}=\frac{2}{21}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\frac{4}{21}+\frac{2}{7}+\frac{2}{21}=\frac{4}{7}$

답 ④

13

a, b, c의 값을 정하는 경우의 수는 $9^3=729$

(i) 규칙 1을 만족시켜 $k=4$가 되는 경우의 수는

4가 적힌 카드를 뽑고 5부터 9까지의 5장의 카드 중에서 2장을 선택해서 a, b, c에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$_5C_2\times3!=60$

따라서 이때의 확률은 $\frac{60}{729}$

(ii) 규칙 2를 만족시켜 $k=4$가 되는 경우의 수는

4가 적힌 카드를 두 번 뽑고, 4를 제외한 나머지 8장의 카드 중에서 한 장을 뽑아 그것을 a, b, c에 대응시키는 경우의 수와 모두 4를 뽑는 경우의 수의 합과 같으므로

$_8C_1\times\frac{3!}{2!}+1=25$

따라서 이때의 확률은 $\frac{25}{729}$

규칙 1을 만족시키는 경우와 규칙 2를 만족시키는 경우가 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 확률은

$\frac{60}{729}+\frac{25}{729}=\frac{85}{729}$

따라서 $p=729$, $q=85$이므로

$p+q=729+85=814$

답 814

14

7개의 공 중에서 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

3개의 공을 꺼낼 때 흰 공이 하나도 없는 경우는 검은 공만 선택하는 것이므로 그 경우의 수는

$_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 여사건의 확률은 $\frac{4}{35}$이므로 구하는 확률은

$1-\frac{4}{35}=\frac{31}{35}$

답 ⑤

15

8개의 공 중에서 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

공에 적힌 수의 곱이 홀수가 되는 경우는 1, 3, 5, 7 중에서 3개를 뽑아 곱하는 경우이므로 그 경우의 수는

$_4C_3={}_4C_1=4$

이때 곱이 홀수일 확률은 $\frac{4}{56}=\frac{1}{14}$

따라서 곱이 짝수일 확률은

$1-\frac{1}{14}=\frac{13}{14}$

답 ④

16

15개의 꼭짓점 중에서 서로 다른 2개의 점을 선택하는 경우의 수는

${}_{15}C_2=\frac{15\times14}{2\times1}=105$

두 점 사이의 거리가 1이 되는 경우의 수는 $4\times3+2\times5=22$

두 점 사이의 거리가 2가 되는 경우의 수는 $3\times3+1\times5=14$

두 점 사이의 거리가 3이 되는 경우의 수는 $2\times3=6$

두 점 사이의 거리가 4가 되는 경우의 수는 3

즉, 두 점 사이의 거리가 유리수일 확률은

$\frac{22+14+6+3}{105}=\frac{45}{105}=\frac{3}{7}$

따라서 두 점 사이의 거리가 무리수일 확률은

$1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$

답 ④

다른 풀이

15개의 꼭짓점 중에서 서로 다른 2개의 점을 선택하는 경우의 수는

${}_{15}C_2=\frac{15\times14}{2\times1}=105$

이 중에서 두 점 사이의 거리가 유리수인 경우는 다음과 같다.

(i) 가로로 놓여 있는 5개의 점 중에서 서로 다른 2개의 점을 선택하는 경우

${}_3C_1\times{}_5C_2=3\times10=30$

(ii) 세로로 놓여 있는 3개의 점 중에서 서로 다른 2개의 점을 선택하는 경우

${}_5C_1\times{}_3C_2=5\times3=15$

(i), (ii)에서 두 점 사이의 거리가 유리수일 확률은

$\frac{30+15}{105}=\frac{45}{105}=\frac{3}{7}$

따라서 두 점 사이의 거리가 무리수일 확률은

$1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$

17

X에서 Y로의 함수의 개수는 $5^4=625$

두 조건 (가)와 (나)를 모두 만족시키는 함수가 아닌 것은 조건 (가)를 만족시키지 않거나 조건 (나)를 만족시키지 않는 함수이다.

(i) 조건 (가)를 만족시키지 않는 함수는 $f(3)f(4)=-1$인 경우이다.

즉, $(f(3), f(4))$가 $(-1, 1)$ 또는 $(1, -1)$ 또는 $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ 또는 $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$이다.

이때 $f(1)$, $f(2)$의 값은 각각 $-\frac{1}{2}$, -1, 0, 1, 2의 5가지이다.

그러므로 이 경우의 함수가 선택될 확률은

$\frac{5^2\times4}{625}=\frac{4}{25}$

(ii) 조건 (나)를 만족시키지 않는 함수는 $f(1)=f(4)$ 또는 $f(1)=-f(4)$인 경우이다.

즉, $(f(1), f(4))$가 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 또는 $(-1, -1)$ 또는 $(0, 0)$ 또는 $(1, 1)$ 또는 $(2, 2)$ 또는 $(1, -1)$ 또는 $(-1, 1)$이다.

이때 $f(2)$, $f(3)$의 값은 각각 $-\frac{1}{2}$, -1, 0, 1, 2의 5가지이다.

그러므로 이 경우의 함수가 선택될 확률은

$\frac{5^2\times7}{625}=\frac{7}{25}$

(iii) 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키지 않는 함수는 $f(3)f(4)=-1$이고, $f(1)=f(4)$ 또는 $f(1)=-f(4)$인 경우이다.

이때 $f(2)$의 값은 $-\frac{1}{2}$, -1, 0, 1, 2의 5가지이다.

㉠ $f(4)=1$이면 $f(3)=-1$이고, $f(1)=1$ 또는 $f(1)=-1$이므로 함수의 개수는 $2\times5=10$

㉡ $f(4)=2$이면 $f(3)=-\frac{1}{2}$, $f(1)=2$이므로 함수의 개수는 5

㉢ $f(4)=-1$이면 $f(3)=1$이고, $f(1)=1$ 또는 $f(1)=-1$이므로 함수의 개수는 $2\times5=10$

㉣ $f(4)=-\frac{1}{2}$이면 $f(3)=2$, $f(1)=-\frac{1}{2}$이므로 함수의 개수는 5

그러므로 이 경우의 함수가 선택될 확률은

$\frac{10+5+10+5}{625}=\frac{6}{125}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 사건의 여사건의 확률은

$\frac{4}{25}+\frac{7}{25}-\frac{6}{125}=\frac{49}{125}$

따라서 구하는 확률은

$1-\frac{49}{125}=\frac{76}{125}$

답 ①

18

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$에서

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$

답 ②

19

$A\subset B$이므로 $A\cap B=A$

따라서

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{9}$$

답 ⑤

20

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$에서

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$

$P(B^C)=\frac{3}{4}$이므로

$P(B)=1-P(B^C)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

따라서

$$P(A^C|B)=\frac{P(A^C\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$=1-\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=1-\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{4}}=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

답 ③

21

행사에 참가한 고등학교 1, 2학년 전체 학생 중에서 임의로 1명을 선택했을 때, 남학생이 뽑히는 사건을 A, 2학년 학생이 뽑히는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이다.

주어진 표에서

$P(A)=\frac{220}{400}$, $P(A\cap B)=\frac{50}{400}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$=\frac{\frac{50}{400}}{\frac{220}{400}}=\frac{5}{22}$$

답 ⑤

22

6명의 학생 중에서 임의로 1명을 뽑았을 때, 마을 탐구를 선택한 학생이 뽑히는 사건을 M, 문화체험을 선택한 학생이 뽑히는 사건을 N이라 하면 구하는 확률은 $P(N|M)$이다.

주어진 표에서

$P(M)=\frac{4}{6}$, $P(M\cap N)=\frac{2}{6}$

따라서 구하는 확률은

$$P(N|M)=\frac{P(M\cap N)}{P(M)}$$

$$=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}}=\frac{1}{2}$$

답 ③

23

남학생 전체가 150명, 영화 A를 관람한 남학생이 120명, 영화 B를 관람한 남학생이 90명이므로 두 영화 A, B를 모두 관람한 남학생의 수는

$120+90-150=60$

여학생 전체가 120명, 영화 A를 관람한 여학생이 100명, 영화 B를 관람한 여학생이 60명이므로 두 영화 A, B를 모두 관람한 여학생의 수는

$100+60-120=40$ …… ㉠

따라서 두 영화 A, B를 모두 관람한 학생의 수는

$60+40=100$ …… ㉡

전체 학생 중에서 임의로 1명을 뽑았을 때, 두 영화 A, B를 모두 관람한 학생이 뽑히는 사건을 C라 하고, 여학생이 뽑히는 사건을 D라 하면 구하는 확률은 $P(D|C)$이다.

㉠, ㉡에 의하여

$P(C)=\frac{100}{270}$, $P(C\cap D)=\frac{40}{270}$

이므로 구하는 확률은

$$P(D|C)=\frac{P(C\cap D)}{P(C)}$$

$$=\frac{\frac{40}{270}}{\frac{100}{270}}=\frac{2}{5}$$

따라서 $p=5$, $q=2$이므로

$p+q=5+2=7$

답 7

24

주머니에서 임의로 2개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 구슬에 적힌 두 수의 곱이 홀수인 사건을 A, 두 구슬의 색이 서로 다른 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이다.

두 수의 곱이 홀수가 되려면 1, 3, 5, 7에서 2개가 선택되어야 하므로

$$P(A)=\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{\frac{4\times3}{2\times1}}{\frac{7\times6}{2\times1}}=\frac{2}{7}$$

$P(A\cap B)$는 1 또는 3이 적혀 있는 흰 구슬에서 한 개, 5 또는 7이 적혀 있는 검은 구슬에서 한 개가 뽑힐 확률이므로

$$P(A\cap B)=\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_7C_2}=\frac{2\times2}{\frac{7\times6}{2\times1}}=\frac{4}{21}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$=\frac{\frac{4}{21}}{\frac{2}{7}}=\frac{2}{3}$$

답 ④

25

A가 탁구 시합에서 승리하는 경우는 A가

3승, 3승 1패, 3승 2패

로 승리하는 경우의 3가지가 있다.

(i) A가 3승으로 승리하는 경우

A가 2번째, 3번째 세트를 모두 이기면 되므로 이 경우의 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

(ii) A가 3승 1패로 승리하는 경우

A가 2번째, 3번째, 4번째 세트를

승리 ⟶ 패배 ⟶ 승리할 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{18}$

패배 ⟶ 승리 ⟶ 승리할 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{18}$

따라서 이 경우의 확률은 $\frac{1}{18}+\frac{1}{18}=\frac{1}{9}$

(iii) A가 3승 2패로 승리하는 경우

A가 2번째, 3번째, 4번째, 5번째 세트를

승리 → 패배 → 패배 → 승리할 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$

패배 → 승리 → 패배 → 승리할 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{144}$

패배 → 패배 → 승리 → 승리할 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{24}$

따라서 이 경우의 확률은 $\frac{1}{24}+\frac{1}{144}+\frac{1}{24}=\frac{13}{144}$

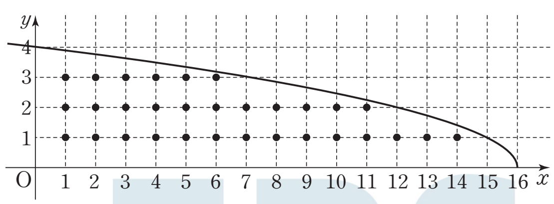
(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{13}{144}=\frac{31}{48}$

답 ④

26

무리함수 $y=\sqrt{16-x}$의 그래프의 아래쪽에 있으면서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점들은 그림과 같이 모두 31개이다.



이 31개의 점 중에서 임의로 서로 다른 두 점을 선택할 때, 두 점의 y좌표가 같은 사건을 A, 두 점 사이의 거리가 1인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

조건을 만족시키는 점들에 대하여

(i) y좌표가 1인 점 중에서

두 점을 선택하는 경우의 수는 ${}_{14}\mathrm{C}_2=\frac{14\times13}{2\times1}=91$

두 점 사이의 거리가 1인 두 점을 선택하는 경우의 수는 13

(ii) y좌표가 2인 점 중에서

두 점을 선택하는 경우의 수는 ${}_{11}\mathrm{C}_2=\frac{11\times10}{2\times1}=55$

두 점 사이의 거리가 1인 두 점을 선택하는 경우의 수는 10

(iii) y좌표가 3인 점 중에서

두 점을 선택하는 경우의 수는 ${}_{6}\mathrm{C}_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

두 점 사이의 거리가 1인 두 점을 선택하는 경우의 수는 5

(i), (ii), (iii)에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{91+55+15}{{}_{31}\mathrm{C}_2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{13+10+5}{{}_{31}\mathrm{C}_2}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{13+10+5}{{}_{31}\mathrm{C}_2}}{\frac{91+55+15}{{}_{31}\mathrm{C}_2}}=\frac{28}{161}=\frac{4}{23}$$

답 ④

27

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap X)=\frac{3}{16}$이므로

사건 A와 사건 X가 서로 독립이려면

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(X)=\mathrm{P}(A\cap X)$에서

$\frac{1}{4}\mathrm{P}(X)=\frac{3}{16}$, $\mathrm{P}(X)=\frac{3}{4}$

그러므로 $n(X)=12$이어야 한다.

따라서 집합 S의 부분집합 중에서 $n(A\cap X)=3$과 $n(X)=12$를 만족시키는 집합 X의 개수는

${}_4\mathrm{C}_3\times{}_{12}\mathrm{C}_9={}_4\mathrm{C}_1\times{}_{12}\mathrm{C}_3=4\times\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=880$

답 880

28

A, B 두 사람이 주사위를 한 번씩 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

첫 번째 시행에서 A와 B의 눈의 수가 같은 경우의 수는 6이다.

두 번째 시행에서 B의 눈의 수가 A의 눈의 수보다 큰 경우의 수는 1부터 6까지의 자연수 중에서 서로 다른 2개를 선택하는 경우의 수와 같으므로

${}_6\mathrm{C}_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{36}\times\frac{15}{36}=\frac{5}{72}$

답 ③

29

갑이 주머니 A에서 꺼낸 3개의 탁구공을 주머니 B에 넣고 을이 주머니 B에서 꺼낸 2개의 탁구공을 주머니 A에 넣었을 때, 갑과 을이 꺼낸 탁구공 중에 모두 노란색 탁구공이 포함되어 두 주머니 A, B에 들어 있는 흰색 탁구공과 노란색 탁구공이 각각 4개씩이 되는 경우와 그 확률은 다음과 같다.

(i) 갑과 을이 모두 노란색 탁구공을 1개 꺼낸 경우

주머니 A에서 흰색 탁구공 2개와 노란색 탁구공 1개를 꺼내고, 주머니 B에서 흰색 탁구공 1개와 노란색 탁구공 1개를 꺼냈으므로 확률은

$\frac{{}_5\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_3}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{10\times4}{84}\times\frac{3\times4}{21}=\frac{40}{147}$

(ii) 갑과 을이 모두 노란색 탁구공을 2개 꺼낸 경우

주머니 A에서 흰색 탁구공 1개와 노란색 탁구공 2개를 꺼내고, 주머니 B에서 노란색 탁구공 2개를 꺼냈으므로 확률은

$\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_3}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{5\times6}{84}\times\frac{6}{21}=\frac{5}{49}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{40}{147}+\frac{5}{49}=\frac{55}{147}$

따라서 $p=147$, $q=55$이므로

$p+q=147+55=202$

답 202

30

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

답 ①

다른 풀이

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로 두 사건 A와 B^C도 서로 독립이다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

31

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{3}$에서 $\mathrm{P}(A)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B|A^C)&=\frac{\mathrm{P}(B\cap A^C)}{\mathrm{P}(A^C)}\\&=\frac{\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A^C)}\\&=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

답 ⑤

다른 풀이

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{3}$에서 $\mathrm{P}(A)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C과 B도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

32

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.6 \quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 두 사건 A, B를 서로 배반사건으로 잘못 생각하였다면

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$로 생각한 것이므로

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=0.7$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.1$ ······ ㉢

㉡, ㉢에서

$$\begin{aligned}|\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)|&=\sqrt{\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\}^2-4\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}\\&=\sqrt{0.7^2-0.4}=0.3\end{aligned}$$

답 ②

33

앞면이 나오는 횟수와 뒷면이 나오는 횟수를 이 순서대로 순서쌍으로 나타낼 때

(i) $(1, 5)$인 경우

이때의 확률은 ${}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{3}{32}$

(ii) $(2, 4)$인 경우

이때의 확률은 ${}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{15}{64}$

(iii) $(3, 3)$인 경우

이때의 확률은 ${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\frac{3}{32}+\frac{15}{64}+\frac{5}{16}=\frac{41}{64}$

답 ①

34

처음에 A조의 선수 5명 중 4명만 성공할 확률은

${}_5\mathrm{C}_4\times0.8^4\times0.2=0.8^4$

마찬가지로 B조의 선수 5명 중 4명만 성공할 확률도

${}_5\mathrm{C}_4\times0.8^4\times0.2=0.8^4$

그 후에 A조는 승부차기에 성공하고 B조는 승부차기에 실패할 확률은

0.8×0.2

따라서 구하는 확률은

$0.8^4\times0.8^4\times0.8\times0.2=0.2\times0.8^9$

답 ②

35

한 번의 시행에서 3명, 3명으로 팀이 결정될 확률은

${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

(i) 첫 번째 시행에서 팀이 결정될 확률은 $\frac{5}{16}$

(ii) 두 번째 시행에서 팀이 결정될 확률은

$\left(1-\frac{5}{16}\right)\times\frac{5}{16}=\frac{55}{256}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{5}{16}+\frac{55}{256}=\frac{135}{256}$

따라서 $p=256$, $q=135$이므로

$p+q=256+135=391$

답 391

11 통계

정답

본문 132~143쪽

01 ④	02 ⑤	03 7	04 ④	05 ①
06 5	07 ②	08 ⑤	09 81	10 ④
11 ②	12 ④	13 ②	14 ⑤	15 ③
16 ⑤	17 ②	18 ③	19 ④	20 ③
21 ②	22 ①	23 ⑤	24 ①	25 ①
26 13	27 ②	28 ②	29 64	30 ④
31 ②	32 ④	33 ③		

01

$\mathrm{P}(1\le X\le 3)=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{10}+a+\frac{1}{5}=\frac{1}{2}$에서 $a=\frac{1}{5}$

또 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+b+\frac{3}{10}=1$에서 $b=\frac{1}{5}$

따라서

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{5}+5\times\frac{3}{10}$

$=\frac{17}{5}$

답 ④

02

확률의 총합은 1이므로

$a+b+c=1$ …… ㉠

$\mathrm{P}(X\ge 1)=\frac{5}{8}$이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=b+c=\frac{5}{8}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{3}{8}$

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{3}{8}+1\times b+2\times c=\frac{3}{4}$이므로

$b+2c=\frac{3}{4}$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{8}$

따라서

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=0^2\times\frac{3}{8}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{8}-\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$=\frac{7}{16}$

답 ⑤

03

확률의 총합은 1이므로

$c\sum_{x=1}^{n}x=1$에서 $c=\frac{2}{n(n+1)}$

$\mathrm{P}(X=1)=c$, $\mathrm{P}(X=2)=2c$이고

$\mathrm{P}(X\ge 3)=1-\mathrm{P}(X=1)-\mathrm{P}(X=2)=\frac{25}{28}$이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=3c=\frac{3}{28}$

$c=\frac{1}{28}$

즉, $\frac{2}{n(n+1)}=\frac{1}{28}$이므로

$n^2+n-56=0$

$(n+8)(n-7)=0$

이때 n은 자연수이므로 $n=7$

답 7

04

$\mathrm{E}(X)=6$, $\mathrm{E}(X^2)=52$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=52-6^2=16$

$Y=\frac{1}{2}X+5$에서

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}X+5\right)=\frac{1}{2}\mathrm{E}(X)+5=\frac{1}{2}\times 6+5=8$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X+5\right)=\frac{1}{4}\mathrm{V}(X)=\frac{1}{4}\times 16=4$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2$이므로

$\mathrm{E}(Y^2)=\mathrm{V}(Y)+\{\mathrm{E}(Y)\}^2=4+8^2=68$

따라서 $\mathrm{E}(Y)+\mathrm{E}(Y^2)=8+68=76$

답 ④

05

확률의 총합은 1이므로

$b+\frac{1}{3}+b+\frac{1}{6}=1$에서 $b=\frac{1}{4}$

$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{4}+a\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$이므로

$\frac{1}{2}+1+1+\frac{a}{6}=\frac{7}{2}$

$a=6$

$\mathrm{V}(X)=2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{4}+6^2\times\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2$

$=\frac{7}{4}$

따라서 $\mathrm{V}(-4X+1)=(-4)^2\,\mathrm{V}(X)=16\times\frac{7}{4}=28$

답 ①

06

이산확률변수 X의 확률질량함수가

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{x+2}{10}$ $(x=-1, 0, 1, 2)$

이므로

$\mathrm{E}(X)=-1\times\frac{1}{10}+0\times\frac{2}{10}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{4}{10}=1$

확률변수 $Y=aX-b$에 대하여
$E(Y)=E(aX-b)=aE(X)-b=a-b$
$V(Y)=V(aX-b)=a^2V(X)$
$E(Y)=3E(X)$에서 $a-b=3$
$V(Y)=16V(X)$에서 $a^2=16$
a, b는 양수이므로 $a=4$, $b=1$
따라서 $a+b=4+1=5$

답 5

07

확률변수 X가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=\frac{n}{5}$

$E\left(\frac{1}{4}X+10\right)=\frac{1}{4}E(X)+10=\frac{n}{20}+10=15$에서

$n=100$

이때

$E(X)=\frac{100}{5}=20$

$V(X)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16$

따라서 $E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=16+20^2=416$

답 ②

08

확률변수 X의 확률질량함수가

$P(X=x)={}_{36}C_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{36-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 36)$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(36, \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

이때

$E(X)=36\times\frac{1}{6}=6$

$V(X)=36\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=5$

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=5+6^2=41$

따라서

$\sum_{k=0}^{36}(k^2+3k)P(X=k)$

$=\sum_{k=0}^{36}k^2P(X=k)+\sum_{k=0}^{36}3kP(X=k)$

$=E(X^2)+3E(X)$

$=41+3\times6=59$

답 ⑤

09

$E(X)=np$, $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$, $V(X)=np(1-p)$

가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\{\sqrt{np(1-p)}\}^2=np\times np(1-p)$

$np(1-p)=n^2p^2(1-p)$

이때 n은 자연수이고 $p\neq0$, $p\neq1$이므로 양변을 $np(1-p)$로 나누면

$np=1$

$\sigma(6X+3)=6\sigma(X)=\frac{8\sqrt{5}}{3}$에서

$\sigma(X)=\frac{4\sqrt{5}}{9}$

즉, $V(X)=\frac{80}{81}=1-p$이므로

$p=\frac{1}{81}$

따라서 $n=81$

답 81

10

주어진 확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times(1+6)\times a=\frac{7}{2}a=1$

$a=\frac{2}{7}$

이때 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면

$0\leq x\leq1$에서 $f(x)=\frac{2}{7}x$

따라서 $P(0\leq X\leq a)=P\left(0\leq X\leq\frac{2}{7}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{7}\times\frac{4}{49}=\frac{4}{343}$

답 ④

11

주어진 확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times a\times b=1$

$ab=2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{4}{3}P(0\leq X\leq1)=P(2\leq X\leq a)$에서

$\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{b}{2}=\frac{1}{2}\times(a-2)\times b$

이때 $b>0$이므로

$\frac{1}{3}=\frac{1}{2}(a-2)$

$a=\frac{8}{3}$

$a=\frac{8}{3}$을 ㉠에 대입하면

$b=\frac{3}{4}$

따라서 $a+b=\frac{8}{3}+\frac{3}{4}=\frac{41}{12}$

답 ②

12

확률밀도함수의 그래프가 직선 $x=5$에 대하여 대칭이므로

$P(X\geq5)=\frac{1}{2}$

$P\left(5\leq X\leq\frac{15}{2}\right)=a$로 놓으면 $P\left(\frac{5}{2}\leq X\leq5\right)=a$이고

$\mathrm{P}\left(X \ge \frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}+a$, $\mathrm{P}\left(X \ge \frac{15}{2}\right)=\frac{1}{2}-a$

$\mathrm{P}\left(X \ge \frac{5}{2}\right)=9\mathrm{P}\left(X \ge \frac{15}{2}\right)$에서

$\frac{1}{2}+a=9\left(\frac{1}{2}-a\right)$

$10a=4$

$a=\frac{2}{5}$

따라서 $\mathrm{P}\left(5 \le X \le \frac{15}{2}\right)=\frac{2}{5}$

답 ④

13

확률변수 X는 평균이 50, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르므로 $Z=\frac{X-50}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X \le 60)=\mathrm{P}\left(Z \le \frac{60-50}{\sigma}\right)$이고

$\mathrm{P}(X \le 60)=\mathrm{P}(Z \ge -1)$에서 $\mathrm{P}(Z \ge -1)=\mathrm{P}(Z \le 1)$이므로

$\frac{60-50}{\sigma}=1$

$\sigma=10$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(45 \le X \le 65)&=\mathrm{P}\left(\frac{45-50}{10} \le Z \le \frac{65-50}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(-0.5 \le Z \le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)\\&=0.1915+0.4332=0.6247\end{aligned}$$

답 ②

14

조건 (가)에서 $\mathrm{V}\left(\frac{1}{5}X+3\right)=\frac{1}{25}\mathrm{V}(X)=1$이므로

$\mathrm{V}(X)=\sigma^2=25$, $\sigma=5$

조건 (나)에서 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$m=\frac{80+120}{2}=100$

이때 $Z=\frac{X-100}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X \le 110)&=\mathrm{P}\left(Z \le \frac{110-100}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z \le 2)\\&=0.5+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)\\&=0.5+0.4772=0.9772\end{aligned}$$

답 ⑤

15

조건 (가)에서 $\mathrm{P}(10 \le X \le 30)=\mathrm{P}(50 \le Y \le 60)$이므로

$\mathrm{P}\left(\frac{10-30}{\sigma_1} \le Z \le \frac{30-30}{\sigma_1}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{50-50}{\sigma_2} \le Z \le \frac{60-50}{\sigma_2}\right)$

$\mathrm{P}\left(-\frac{20}{\sigma_1} \le Z \le 0\right)=\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{10}{\sigma_2}\right)$

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{20}{\sigma_1}\right)=\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{10}{\sigma_2}\right)$

즉, $\frac{20}{\sigma_1}=\frac{10}{\sigma_2}$이므로

$\sigma_1=2\sigma_2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서 $\mathrm{P}(30 \le X \le 50)+\mathrm{P}(40 \le Y \le 50)=0.9544$이므로

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{20}{\sigma_1}\right)+\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{10}{\sigma_2}\right)=0.9544$

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{20}{\sigma_1}\right)+\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{20}{\sigma_1}\right)=0.9544$

$2\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{20}{\sigma_1}\right)=0.9544$

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{20}{\sigma_1}\right)=0.4772$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)=0.4772$이므로

$\frac{20}{\sigma_1}=2$

$\sigma_1=10$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\sigma_2=5$

따라서

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(30 \le X \le 40)+\mathrm{P}(50 \le Y \le 65)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{30-30}{10} \le Z \le \frac{40-30}{10}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{50-50}{5} \le Z \le \frac{65-50}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 3)\\&=0.3413+0.4987\\&=0.8400\end{aligned}$$

답 ③

16

이 농장에서 수확한 키위 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 10^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-150}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(160 \le X \le 180)&=\mathrm{P}\left(\frac{160-150}{10} \le Z \le \frac{180-150}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(1 \le Z \le 3)\\&=\mathrm{P}(0 \le Z \le 3)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)\\&=0.4987-0.3413=0.1574\end{aligned}$$

답 ⑤

17

이 고등학교의 각 학생의 키를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(170,\ 5^2)$을 따른다.

a의 최댓값을 M이라 하면

$\mathrm{P}(X \ge M)=\frac{100}{400}=0.25$

$Z=\frac{X-170}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\ge M)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{M-170}{5}\right)$

$\quad =\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{M-170}{5}\right)$

$\quad =0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{M-170}{5}\right)=0.25$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{M-170}{5}\right)=0.25$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.68)=0.25$이므로

$\frac{M-170}{5}=0.68$

$M-170=3.4$

$M=173.4$

따라서 a의 최댓값은 173.4이다.

답 ②

18

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(225, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=225\times\frac{1}{5}=45$, $\sigma(X)=\sqrt{225\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}=6$

이때 225는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(45, 6^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-45}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge k)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{k-45}{6}\right)=0.9332$이고

$\mathrm{P}(Z\ge -1.5)=\mathrm{P}(Z\ge 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$\quad =0.5+0.4332=0.9332$

이므로 $\frac{k-45}{6}=-1.5$

따라서 $k=36$

답 ③

19

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(720, p)$를 따르므로

$\mathrm{V}(X)=720p(1-p)$ …… ㉠

$\mathrm{V}(-2X+5)=(-2)^2\mathrm{V}(X)=400$에서 $\mathrm{V}(X)=100$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$720p(1-p)=100$

$36p^2-36p+5=0$

$(6p-1)(6p-5)=0$

이때 $0<p<\frac{1}{2}$이므로 $p=\frac{1}{6}$

즉, 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(720, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=720\times\frac{1}{6}=120$

이때 720은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(120, 10^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-120}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서

$\mathrm{P}(X\le 110)=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{110-120}{10}\right)$

$\quad =\mathrm{P}(Z\le -1)$

$\quad =0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$\quad =0.5-0.3413$

$\quad =0.1587$

답 ④

20

이 대리점에서 선택한 432대의 무선청소기 중 A 회사의 무선청소기의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(432, \frac{3}{4}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=432\times\frac{3}{4}=324$, $\mathrm{V}(X)=432\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=9^2$

이때 432는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(324, 9^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-324}{9}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\ge 315)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{315-324}{9}\right)$

$\quad =\mathrm{P}(Z\ge -1)$

$\quad =0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$\quad =0.5+0.3413$

$\quad =0.8413$

답 ③

21

$\mathrm{E}(X)=2$, $\mathrm{E}(X^2)=\frac{16}{3}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$\quad =\frac{16}{3}-4=\frac{4}{3}$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}=\frac{4}{3n}=\frac{1}{15}$

따라서 $n=20$

답 ②

22

확률의 총합은 1이므로

$\frac{a}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{a}{10}=1$에서 $a=3$

그러므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{5}+5\times\frac{1}{5}+7\times\frac{3}{10}=4$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{5}+5^2\times\frac{1}{5}+7^2\times\frac{3}{10}=\frac{109}{5}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{109}{5}-4^2=\frac{29}{5}$

따라서 $V(\overline{X})=\frac{V(X)}{145}=\frac{1}{145}\times\frac{29}{5}=\frac{1}{25}$

답 ①

23

$E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times a+3\times\left(\frac{4}{5}-a\right)=\frac{13}{5}-a$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times a+3^2\times\left(\frac{4}{5}-a\right)-\left(\frac{13}{5}-a\right)^2$

$=-a^2+\frac{1}{5}a+\frac{16}{25}$

이때 표본의 크기가 2이므로 표본평균 $\overline{X}$의 분산은

$V(\overline{X})=\frac{V(X)}{2}=\frac{7}{25}$

따라서 $V(X)=\frac{14}{25}$이므로

$-a^2+\frac{1}{5}a+\frac{16}{25}=\frac{14}{25}$

$25a^2-5a-2=0$

$(5a+1)(5a-2)=0$

$0\le a\le 1$이므로 $a=\frac{2}{5}$

이때 $E(X)=\frac{13}{5}-a=\frac{13}{5}-\frac{2}{5}=\frac{11}{5}$

따라서 $E(\overline{X})=E(X)=\frac{11}{5}$

답 ⑤

24

수산 시장에서 판매하는 대게 1마리의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(900, 80^2)$을 따른다.

이때 이 시장에서 판매하는 대게 중 임의추출한 16마리의 무게의 표본평균을 확률변수 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(900, \frac{80^2}{16}\right)$, 즉

$N(900, 20^2)$을 따르고, $Z=\frac{\overline{X}-900}{20}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$P(\overline{X}\ge 950)=P\left(Z\ge\frac{950-900}{20}\right)$

$=P(Z\ge 2.5)$

$=0.5-P(0\le Z\le 2.5)$

$=0.5-0.4938=0.0062$

답 ①

25

이 고등학교의 학생 1명이 등교할 때 가져가는 책가방의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(6.5, 2^2)$을 따르므로

$p_1=P(X\ge 5.5)$

$=P\left(Z\ge\frac{5.5-6.5}{2}\right)$

$=P(Z\ge -0.5)$

$=0.5+P(0\le Z\le 0.5)$

$=0.5+0.1915=0.6915$

크기가 16인 표본의 평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(6.5, \frac{2^2}{16}\right)$, 즉

$N(6.5, 0.5^2)$을 따르므로

$p_2=P(\overline{X}\le a)=P\left(Z\le\frac{a-6.5}{0.5}\right)$

이때 $p_1+p_2=1.5328$이므로

$p_2=1.5328-p_1=1.5328-0.6915=0.8413$

즉, $P\left(Z\le\frac{a-6.5}{0.5}\right)=0.5+P\left(0\le Z\le\frac{a-6.5}{0.5}\right)=0.8413$

$P\left(0\le Z\le\frac{a-6.5}{0.5}\right)=0.8413-0.5=0.3413$

주어진 표준정규분포표에서 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{a-6.5}{0.5}=1$

따라서 $a=7$

답 ①

26

확률변수 X는 정규분포 $N(40, 5^2)$을 따르므로

$P(X\le 35)=P\left(Z\le\frac{35-40}{5}\right)$

$=P(Z\le -1)$

$=0.5-P(0\le Z\le 1)$

$=0.5-0.3413=0.1587$

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(40, \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)$을 따르므로

$P(\overline{X}\le 35)=P\left(Z\le\frac{35-40}{\frac{5}{2}}\right)$

$=P(Z\le -2)$

$=0.5-P(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

$P(X\le 35)>P(\overline{X}\le 35)+\frac{c}{100}$이므로

$0.1587>0.0228+\frac{c}{100}$

$\frac{c}{100}<0.1359$

$c<13.59$

따라서 자연수 c는 1, 2, 3, …, 13이므로 그 개수는 13이다.

답 13

27

표준편차가 $\sigma=8$이고 표본평균이 $\overline{x}=155$, 표본의 크기가 $n=100$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$155-2.58\times\frac{8}{\sqrt{100}}\le m\le 155+2.58\times\frac{8}{\sqrt{100}}$

$152.936\le m\le 157.064$

따라서 신뢰구간에 속하는 자연수는 153, 154, 155, 156, 157이므로 그 개수는 5이다.

답 ②

28

표준편차가 $\sigma=4$이고 표본의 크기가 $n=100$, 표본평균이 $\bar{x}=50.8$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$50.8-1.96\times\frac{4}{\sqrt{100}}\le m\le 50.8+1.96\times\frac{4}{\sqrt{100}}$$

$50.8-0.784\le m\le 50.8+0.784$

따라서 $a=50.8-0.784$, $b=50.8+0.784$이므로

$b-a=2\times0.784=1.568$

답 ②

29

모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로

$c=1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ …… ㉠

이 모집단에서 임의추출한 크기가 400인 표본의 표본평균이 $\bar{X}$이므로

$\mathrm{E}(\bar{X})=m$, $\mathrm{V}(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{400}$

즉, 확률변수 $\bar{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{20}\right)^2\right)$을 따르고,

확률변수 $Z=\dfrac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{20}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}\left(\bar{X}\le m-\frac{1}{2}c\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{m-\frac{1}{2}c-m}{\frac{\sigma}{20}}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{10c}{\sigma}\right)$$
$$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{10c}{\sigma}\right)$$
$$=0.0071$$

즉, $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{10c}{\sigma}\right)=0.4929$이고 주어진 표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2.45)=0.4929$이므로

$\frac{10c}{\sigma}=2.45$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$c=1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.245\sigma$

$\sqrt{n}=\frac{1.96}{0.245}=8$

따라서 $n=64$

답 64

30

표본의 크기는 300으로 충분히 크고 모비율은 0.25이므로 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.25, \frac{0.25\times0.75}{300}\right)$를 따르고,

$Z=\dfrac{\hat{p}-0.25}{\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{300}}}$는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서

$$\mathrm{P}(\hat{p}\ge0.2)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{0.2-0.25}{\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{300}}}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge-2)$$
$$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le2)$$
$$=0.5+0.4772=0.9772$$

답 ④

31

모비율이 $p=0.2$이고 표본의 크기 $n=1600$은 충분히 큰 수이므로

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}=\frac{\hat{p}-0.2}{\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{1600}}}=\frac{\hat{p}-0.2}{\sqrt{0.0001}}=\frac{\hat{p}-0.2}{0.01}$$

는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\frac{k}{100}=a$라 하면

$$\mathrm{P}\left(\hat{p}\ge\frac{k}{100}\right)=\mathrm{P}(\hat{p}\ge a)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-0.2}{0.01}\right)$$
$$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-0.2}{0.01}\right)$$
$$=0.0668$$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-0.2}{0.01}\right)=0.5-0.0668=0.4332$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)=0.4332$이므로

$\frac{a-0.2}{0.01}=1.5$

$a=0.2+1.5\times0.01=0.215$

따라서 $k=100a=21.5$

답 ②

32

표본비율이 $\hat{p}=\frac{180}{900}=0.2$이고 표본의 크기 $n=900$은 충분히 큰 수이므로 $Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 양 끝값은

$$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=0.2-1.96\sqrt{\frac{0.2\times(1-0.2)}{900}}$$
$$=0.2-1.96\times\frac{1}{75}$$

$$\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=0.2+1.96\sqrt{\frac{0.2\times(1-0.2)}{900}}$$
$$=0.2+1.96\times\frac{1}{75}$$

따라서 $a=0.2=\frac{1}{5}$, $b=\frac{1}{75}$이므로

$a+b=\frac{1}{5}+\frac{1}{75}=\frac{16}{75}$

답 ④

33

임의추출한 600명 중 작년에 관광을 목적으로 국내 여행을 한 사람의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{600}}\le p\le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{600}}$

$b-a=2\times 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{600}}=0.0784$이므로

$\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{600}}=\frac{1}{50}$

양변을 제곱하여 정리하면

$\hat{p}(1-\hat{p})=\frac{6}{25}$

$25\hat{p}^2-25\hat{p}+6=0$

$(5\hat{p}-2)(5\hat{p}-3)=0$

$\hat{p}=\frac{2}{5}$ 또는 $\hat{p}=\frac{3}{5}$

그런데 $\hat{p}<b<0.5$이므로 $\hat{p}=\frac{2}{5}$

따라서 $k=600\times\frac{2}{5}=240$

답 ③

실전 모의고사

실전 모의고사 1회

본문 146~153쪽

01 ⑤	02 ③	03 ②	04 ③	05 ④
06 ④	07 ②	08 ②	09 ⑤	10 ④
11 ②	12 ⑤	13 ③	14 ①	15 ③
16 ⑤	17 ②	18 ⑤	19 ②	20 ⑤
21 ②	22 180	23 51	24 15	25 6
26 70	27 64	28 240	29 2	30 285

01

$(\sqrt[3]{81})^2 \div 9^{\frac{1}{3}} = (3^{\frac{4}{3}})^2 \div 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{8}{3}} \div 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{8}{3}-\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$

답 ⑤

02

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$,

$A \cap B = \{2, 6\}$이므로

$(A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 3, 4, 8\}$

따라서 집합 $(A \cup B) - (A \cap B)$의 모든 원소의 합은

$1+3+4+8=16$

답 ③

03

$f^{-1}(3)=2$이므로 $a=2$

$f(2)=3$이므로 $b=3$

따라서 $a+b=2+3=5$

답 ②

다른 풀이

$f^{-1}(3)=a$에서 $f(a)=3$이므로 $b=3$

$f(2)=3$이므로 $a=2$

따라서 $a+b=2+3=5$

04

$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(n+2)(n+3)}-(n+1)\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+3)-(n+1)^2}{\sqrt{(n+2)(n+3)}+(n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{\sqrt{(n+2)(n+3)}+(n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}}{\sqrt{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}+\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

$=\frac{3}{2}$

답 ③

05

$\lim_{x\to-1-}f(x)=-2$이고,

$-x=t$로 놓으면 $x\to-1-$일 때 $t\to1+$이므로

$\lim_{x\to-1-}f(-x)=\lim_{t\to1+}f(t)=-1$

따라서

$\lim_{x\to-1-}\{f(x)f(-x)\}=\lim_{x\to-1-}f(x)\times\lim_{x\to-1-}f(-x)$

$=\lim_{x\to-1-}f(x)\times\lim_{t\to1+}f(t)$

$=-2\times(-1)=2$

또한 $\lim_{x\to1-}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to-1-}\{f(x)f(-x)\}-\lim_{x\to1-}f(x)=2-1=1$

답 ④

06

6명이 원형의 탁자에 둘러앉는 원순열의 수는

$(6-1)!=120$

남학생끼리 이웃하도록 앉는 원순열의 수는

$(5-1)!\times2=48$

따라서 남학생끼리는 이웃하지 않도록 앉는 방법의 수는

$120-48=72$

답 ④

다른 풀이

여학생 4명이 원형의 탁자에 둘러앉는 원순열의 수는

$(4-1)!=3!=6$

남학생 2명이 여학생 사이에 1명씩 앉는 방법의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 남학생끼리는 이웃하지 않도록 앉는 방법의 수는

$6\times12=72$

07

함수 $y=\sqrt{-\frac{x}{k}}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{k}{4}$만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-a=\sqrt{-\frac{1}{k}\left(x-\frac{k}{4}\right)}$, $y=\sqrt{-\frac{x}{k}+\frac{1}{4}}+a$

즉, $f(x)=\sqrt{-\frac{x}{k}+\frac{1}{4}}+a$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(0, -1)$, $(-1, 0)$을 지나므로

$f(0)=-1$에서 $\sqrt{\frac{1}{4}}+a=-1$, $a=-\frac{3}{2}$

$f(-1)=0$에서 $\sqrt{\frac{1}{k}+\frac{1}{4}}+a=0$, $\sqrt{\frac{1}{k}+\frac{1}{4}}-\frac{3}{2}=0$

$\sqrt{\frac{1}{k}+\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}$, $\frac{1}{k}+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$

$\frac{1}{k}=2$, $k=\frac{1}{2}$

따라서 $ak=-\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$

답 ②

08

$\int_0^a (3x^2+a)dx=\left[x^3+ax\right]_0^a=a^3+a^2$

$a^3+a^2=12$에서

$a^3+a^2-12=0$, $(a-2)(a^2+3a+6)=0$

이때 a는 실수이므로 $a=2$

답 ②

09

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid -k-1<x<k-1\}$

$Q=\{x \mid -3\le x\le 7\}$

$\sim p$가 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이다.

$\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow p$도 참이다.

$q \longrightarrow p$가 참이므로 $Q\subset P$이다.

이때 $Q\subset P$이기 위해서는

$-k-1<-3$이고 $k-1>7$이어야 하므로

$k>2$이고 $k>8$이다.

즉, $k>8$이다.

따라서 자연수 k의 최솟값은 9이다.

답 ⑤

10

$\mathrm{P}(A)=a$, $\mathrm{P}(B)=b$ $(a>b)$라 하면

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{12}$에서 $ab=\frac{1}{12}$ …… ㉠

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{7}{12}$에서

$a+b-\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$, $a+b=\frac{2}{3}$ …… ㉡

이때 두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$

그러므로 $\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)=a-b$

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\times\frac{1}{12}$ (㉠, ㉡에 의해)

$=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

이때 $a>b$이므로 $a-b=\frac{1}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{3}$

답 ④

참고

$a+b=\frac{2}{3}$, $ab=\frac{1}{12}$

이므로 a, b는 이차방정식 $t^2-\frac{2}{3}t+\frac{1}{12}=0$, 즉 $12t^2-8t+1=0$의 두 근이다.

그러므로 다음과 같이 풀 수도 있다.

$(2t-1)(6t-1)=0$에서 $t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=\frac{1}{6}$

$a>b$이므로 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{6}$

즉, $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$

이때 두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$

따라서 $\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

11

(i) $n\ge 2$일 때,

조건 (나)에서 $\sum_{k=1}^{n+1} a_k-\sum_{k=1}^{n-1} a_k=a_{n+1}+a_n$이므로

$(a_{n+1}+a_n)^2=4a_na_{n+1}+9$

${a_{n+1}}^2+2a_{n+1}a_n+{a_n}^2=4a_na_{n+1}+9$

${a_{n+1}}^2-2a_{n+1}a_n+{a_n}^2=9$

$(a_{n+1}-a_n)^2=9$

조건 (가)에서 $a_{n+1}>a_n$이므로

$a_{n+1}-a_n=3$

(ii) $a_2-a_1=5-2=3$

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=3$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=3n-1$

따라서 $a_{20}=3\times 20-1=59$

답 ②

12

$\lim_{x\to 1}(x^2+ax+b)=a+b+1$, $\lim_{x\to 1}(x^2+bx+a)=a+b+1$이므로

$a+b+1\ne 0$이면 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+bx+a}{x^2+ax+b}=1$이 되어 모순이다.

그러므로 $a+b+1=0$

즉, $b=-a-1$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+bx+a}{x^2+ax+b}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+(-a-1)x+a}{x^2+ax-a-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-a)}{(x-1)(x+a+1)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{x-a}{x+a+1}$

$=\frac{1-a}{a+2}$

$\frac{1-a}{a+2}=-4$에서 $1-a=-4a-8$

$3a=-9$, $a=-3$

$b=-(-3)-1=2$

따라서 $b-a=2-(-3)=5$

답 ⑤

13

$\log\frac{1}{ab}=\log\left(\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}\right)$

$=\log\frac{1}{a}+\log\frac{1}{b}$

$=\log a^{-1}+\log b^{-1}$

$=-\log a-\log b=5$

에서 $\log a+\log b=-5$

$\dfrac{1}{\log_a 10}\times\dfrac{1}{\log_b 10}=\log a\times\log b=6$

즉, $\log a+\log b=-5$, $\log a\times\log b=6$이므로

$\log a$, $\log b$는 x에 대한 이차방정식 $x^2+5x+6=0$의 서로 다른 두 실근이다.

$(x+2)(x+3)=0$에서

$\begin{cases}\log a=-2\\ \log b=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\log a=-3\\ \log b=-2\end{cases}$

$\begin{cases}\log a=-2\\ \log b=-3\end{cases}$에서 $a=10^{-2}=\dfrac{1}{100}$, $b=10^{-3}=\dfrac{1}{1000}$

$\begin{cases}\log a=-3\\ \log b=-2\end{cases}$에서 $a=10^{-3}=\dfrac{1}{1000}$, $b=10^{-2}=\dfrac{1}{100}$

따라서 $a+b=\dfrac{11}{1000}$

답 ③

14

1, 2, 4, 5, 7, 8, 10에 대하여 3으로 나눈 나머지가 1, 2인 수의 집합을 각각 A, B라 하면

$A=\{1, 4, 7, 10\}$, $B=\{2, 5, 8\}$

(i) $X=0$인 경우

두 집합 A, B에서 각각 1개의 원소를 선택하는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{4\times3}{21}=\boxed{\dfrac{4}{7}}$

(ii) $X=1$인 경우

집합 B에서 2개의 원소를 선택하는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{3}{21}=\dfrac{1}{7}$

(iii) $X=2$인 경우

집합 A에서 2개의 원소를 선택하는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{6}{21}=\boxed{\dfrac{2}{7}}$

(i), (ii), (iii)에서

$\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{7}+2\times\boxed{\dfrac{2}{7}}=\boxed{\dfrac{5}{7}}$

따라서 $a=\dfrac{4}{7}$, $b=\dfrac{2}{7}$, $c=\dfrac{5}{7}$이므로

$7(a+b+c)=7\left(\dfrac{4}{7}+\dfrac{2}{7}+\dfrac{5}{7}\right)=11$

답 ①

15

10명의 학생이 10개의 좌석에 앉는 모든 경우의 수는 10!

좌석번호의 차가 4 또는 5 또는 6인 경우는 없으므로

(i) 좌석번호의 차가 3인 경우는

(11, 14), (21, 24), (31, 34)의 3가지

(ii) 좌석번호의 차가 7인 경우는

(14, 21), (24, 31)의 2가지

(iii) 좌석번호의 차가 8인 경우는

(13, 21), (24, 32)의 2가지

(iv) 좌석번호의 차가 9인 경우는

(12, 21), (24, 33)의 2가지

(v) 좌석번호의 차가 10인 경우는

(11, 21), (14, 24), (21, 31), (24, 34)의 4가지

(i)~(v)의 각각의 경우에 대하여 A와 B가 좌석을 바꾸어 앉을 수 있고, A와 B를 제외한 8명의 학생이 앉는 경우의 수가 8!이다.

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{13\times2!\times8!}{10!}=\dfrac{13}{45}$

답 ③

16

$f(x)=-x^2+2x$에서 $f'(x)=-2x+2$

점 $\mathrm{P}(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 $-2t+2$이므로

접선의 방정식은

$y=-2(t-1)(x-t)-t^2+2t$ ...... ㉠

접선 ㉠이 직선 $y=1$과 만나는 점 Q의 x좌표를 구하기 위해 ㉠에 $y=1$을 대입하면

$-2(t-1)(x-t)=(t-1)^2$

$0<t<1$이므로 양변을 $t-1$로 나누면

$-2(x-t)=t-1$

$x=t-\dfrac{t-1}{2}=\dfrac{t+1}{2}$

$\mathrm{A}(0, 1)$이므로 $\overline{\mathrm{AQ}}=\dfrac{t+1}{2}$

삼각형 APQ의 넓이 $S(t)$는

$S(t)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{t+1}{2}\times(1+t^2-2t)=\dfrac{(t+1)(t-1)^2}{4}$

따라서

$$\lim_{t\to1-}\frac{S(t)}{(t-1)^2}=\lim_{t\to1-}\frac{(t+1)(t-1)^2}{4(t-1)^2}=\lim_{t\to1-}\frac{t+1}{4}=\frac{1}{2}$$

답 ⑤

17

(i) 집합 A에 속하는 홀수를 선택하는 경우

집합 X의 원소 중 홀수는 1, 3, 5, 7, 9이다.

조건 (가)에 의하여 집합 A에 속하는 홀수의 개수는 홀수이다.

따라서 집합 A에 속하는 홀수 개의 홀수를 선택하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_5=5+10+1=16$

(ii) 집합 A에 속하는 짝수를 선택하는 경우

집합 X의 원소 중 짝수는 2, 4, 6, 8, 10이다.

조건 (나)를 만족시키려면 집합 A에 속하는 8이 아닌 짝수의 개수가 0, 1, 2인 경우만 가능하다.

㉠ 집합 A에 속하는 짝수의 개수가 0인 경우는 1가지

㉡ 집합 A에 속하는 짝수의 개수가 1인 경우는

2, 4, 6, 10의 4가지

㉢ 집합 A에 속하는 짝수의 개수가 2인 경우는

(2, 6), (2, 10), (6, 10)의 3가지

따라서 집합 A에 속하는 짝수를 선택하는 경우의 수는

$1+4+3=8$

(i), (ii)에서 구하는 집합 A의 개수는

$16\times8=128$

답 ②

18

$\overline{B_1M_1}=\overline{C_1M_1}=\overline{M_1M_2}=5$

$\overline{AM_1}=\sqrt{13^2-5^2}=12$, $\overline{AM_2}=12-5=7$

삼각형 $B_1C_1M_2$의 넓이 S_1은

$S_1=\frac{1}{2}\times10\times5=25$

삼각형 AB_1C_1과 삼각형 AB_2C_2는 닮음이고 닮음비는

$\overline{AM_1}:\overline{AM_2}=12:7$이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 25이고 공비가 $\left(\frac{7}{12}\right)^2$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{25}{1-\left(\frac{7}{12}\right)^2}=\frac{12^2\times25}{12^2-7^2}=\frac{720}{19}$

답 ⑤

19

점 $A_n(a_n,\ 0)$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점이 B_n이므로 $B_n(a_n+1,\ 0)$이다.

점 $A_n(a_n,\ 0)$을 지나고 기울기가 n인 직선 l_n의 방정식은

$y=n(x-a_n)$

점 A_n을 지나고 기울기가 n인 직선 l_n 위의 x좌표가 a_n+1인 점이 C_n이므로 $y=n(a_n+1-a_n)=n$에서 $C_n(a_n+1,\ n)$이다.

점 $C_n(a_n+1,\ n)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{n}$인 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{n}(x-a_n-1)+n$

이 식에서 $y=0$일 때, 점 A_{n+1}의 x좌표를 구하면

$0=-\frac{1}{n}x+\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n}+n$에서

$x=a_n+n^2+1$

따라서 $a_{n+1}=a_n+n^2+1$이고, $a_1=1$이므로

$a_2=a_1+1^2+1=3$

$a_3=a_2+2^2+1=8$

$a_4=a_3+3^2+1=18$

$a_5=a_4+4^2+1=35$

답 ②

20

ㄱ. 조건 (나)에서 함수 $F(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$f(0)+g(0)=-f(0)+g(0)$에서 $f(0)=0$

$f'(0)+g'(0)=-f'(0)+g'(0)$에서 $f'(0)=0$

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $f'(x)=2ax+b$

$f(0)=0$이므로 $c=0$

$f'(0)=0$이므로 $b=0$

따라서 $f(x)=ax^2$이므로 $f(-x)=f(x)$ (참)

ㄴ. 조건 (나)에서 함수 $G(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$f(1)+g(1)=f(1)-g(1)$에서 $g(1)=0$

$f'(1)+g'(1)=f'(1)-g'(1)$에서 $g'(1)=0$

$g(1)=0$이므로 $g(x)=(x-1)(x^2+px+q)$라 하면

$g'(x)=x^2+px+q+(x-1)(2x+p)$

$g'(1)=0$이므로 $1+p+q=0$에서 $q=-p-1$

그러므로

$g(x)=(x-1)(x^2+px+q)$

$=(x-1)(x^2+px-p-1)$

$=(x-1)^2(x+p+1)$

조건 (가)에서

$f(2)=4$이므로 $4a=4$에서 $a=1$

$g(2)=5$이므로 $p+3=5$에서 $p=2$

따라서 $f(x)=x^2$, $g(x)=(x-1)^2(x+3)$이므로

$F(1)=-f(1)+g(1)=-1+0=-1$

$G(0)=f(0)+g(0)=0+3=3$

그러므로 $F(1)+G(0)=2$ (참)

ㄷ. $\int_{-2}^{1}|F(x)-G(x)|dx$

$=\int_{-2}^{0}|F(x)-G(x)|dx+\int_{0}^{1}|F(x)-G(x)|dx$

$=0+\int_{0}^{1}|-f(x)+g(x)-f(x)-g(x)|dx$

$=\int_{0}^{1}|-2f(x)|dx$

$=\int_{0}^{1}|-2x^2|dx$

$=\int_{0}^{1}2x^2\,dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1$

$=\frac{2}{3}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

21

$g(x)=f(x)-tx$이므로

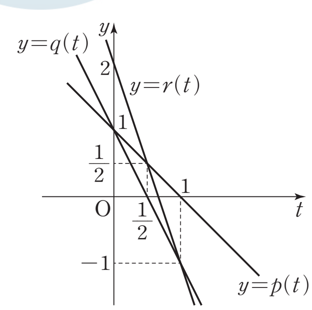
$1\le x<2$에서 $g(x)=-tx+1$

$2\le x\le3$에서 $g(x)=x-1-tx=(1-t)x-1$

$x=1$, $x=2$, $x=3$에서의 함수 $g(x)$의 함숫값을 각각 $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$라 하면

$p(t)=-t+1$, $q(t)=-2t+1$, $r(t)=-3t+2$

이때 $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$의 대소를 비교하기 위해서 세 함수 $y=p(t)$, $y=q(t)$, $y=r(t)$의 그래프를 그리면 그림과 같다.



(ⅰ) $t\le 0$일 때, 최댓값은 $r(t)$, 최솟값은 $p(t)$이므로

$h(t)=r(t)-p(t)$
$=-3t+2-(-t+1)$
$=-2t+1$

(ⅱ) $0<t\le\frac{1}{2}$일 때, 최댓값은 $r(t)$, 최솟값은 $q(t)$이므로

$h(t)=r(t)-q(t)$
$=-3t+2-(-2t+1)$
$=-t+1$

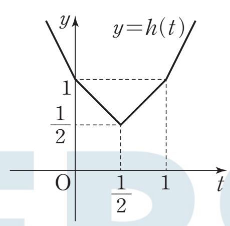
(ⅲ) $\frac{1}{2}<t\le 1$일 때, 최댓값은 $p(t)$, 최솟값은 $q(t)$이므로

$h(t)=p(t)-q(t)$
$=-t+1-(-2t+1)$
$=t$

(ⅳ) $t>1$일 때, 최댓값은 $p(t)$, 최솟값은 $r(t)$이므로

$h(t)=p(t)-r(t)$
$=-t+1-(-3t+2)$
$=2t-1$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 함수 $y=h(t)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=h(t)$는 $t=\frac{1}{2}$에서 최솟값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{2}$이므로

$\alpha+m=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

답 ②

22

L이 2개, O가 2개 있으므로
구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times 2!}=180$

답 180

23

$f(x)=x^3+x^2f'(2)+2$에서
$f'(x)=3x^2+2xf'(2)$
위의 식에 $x=2$를 대입하면
$f'(2)=12+4f'(2)$
$3f'(2)=-12$
$f'(2)=-4$
따라서 $f'(x)=3x^2-8x$이므로
$f'(-3)=27+24=51$

답 51

24

함수 $y=\sqrt{2x+a}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$y=\sqrt{-2x+a}$
이 그래프가 점 $(3, 3)$을 지나므로
$3=\sqrt{-6+a}$
$9=-6+a$
따라서 $a=15$

답 15

25

$S_n=-n^2+7n$에서
$a_1=S_1=6$이고
$n\ge 2$일 때,
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=-n^2+7n-\{-(n-1)^2+7(n-1)\}$
$=-2n+8$
따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=-2n+8$이다.
이때 $a_l=2-a_m$에서
$-2l+8=2-(-2m+8)$
$2(l+m)=14$
$l+m=7$ …… ㉠
㉠을 만족시키는 두 수 l, m $(l<m)$은
$l=1$, $m=6$ 또는 $l=2$, $m=5$ 또는 $l=3$, $m=4$
따라서 lm의 최솟값은 6이다.

답 6

26

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나온 눈의 수를 순서쌍 (a, b)로 나타내면 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는
$6\times 6=36$

(ⅰ) $X=0$일 때, $a=b$이다.
이때 순서쌍 (a, b)는
$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$
그러므로 $\mathrm{P}(X=0)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(ⅱ) $X=1$일 때, $a-b=1$ 또는 $a-b=-1$이다.
이때 순서쌍 (a, b)는
$a-b=1$인 경우 $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$, $(5, 4)$, $(6, 5)$
$a-b=-1$인 경우 $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$
그러므로 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

(ⅲ) $X=2$일 때, $a-b=2$ 또는 $a-b=-2$이다.
이때 순서쌍 (a, b)는
$a-b=2$인 경우 $(3, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 3)$, $(6, 4)$
$a-b=-2$인 경우 $(1, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 6)$
그러므로 $\mathrm{P}(X=2)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

(ⅳ) $X=3$일 때, $a-b=3$ 또는 $a-b=-3$이다.

이때 순서쌍 (a, b)는

$a-b=3$인 경우 $(4, 1)$, $(5, 2)$, $(6, 3)$

$a-b=-3$인 경우 $(1, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 6)$

그러므로 $\mathrm{P}(X=3)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(ⅴ) $X=4$일 때, $a-b=4$ 또는 $a-b=-4$이다.

이때 순서쌍 (a, b)는

$a-b=4$인 경우 $(5, 1)$, $(6, 2)$

$a-b=-4$인 경우 $(1, 5)$, $(2, 6)$

그러므로 $\mathrm{P}(X=4)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

(ⅵ) $X=5$일 때, $a-b=5$ 또는 $a-b=-5$이다.

이때 순서쌍 (a, b)는

$a-b=5$인 경우 $(6, 1)$

$a-b=-5$인 경우 $(1, 6)$

그러므로 $\mathrm{P}(X=5)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

(ⅰ)~(ⅵ)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{5}{18}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{9}+5\times\frac{1}{18}=\frac{35}{18}$

따라서 $\mathrm{E}(36X)=36\mathrm{E}(X)=36\times\frac{35}{18}=70$

답 70

27

이 식품 회사가 생산하는 통조림 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, 4^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{4}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르고 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{4}{\sqrt{n}}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

표본평균과 모평균의 차가 1 이하일 확률이 0.9544이므로

$\mathrm{P}(|\overline{X}-m|\le 1)=0.9544$

이때

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|\overline{X}-m|\le 1)&=\mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right|\le\frac{1}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(|Z|\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)\\&=2\times\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)\\&=0.9544\end{aligned}$$

이므로 $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)=0.4772$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{4}=2$

$\sqrt{n}=8$

따라서 $n=64$

답 64

28

조건 (가)에서

$\int_{-2}^{2} f(x)dx=2\int_{0}^{2} f(x)dx$이고 $\int_{-2}^{2} xf(x)dx=0$

조건 (나)에서

$\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{1}^{2} f(x)dx$이므로

$\int_{0}^{2} f(x)dx=2\int_{0}^{1} f(x)dx$

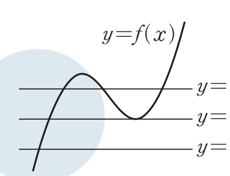
따라서

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4(4k+3n)}{n^2}f\left(-2+\frac{4k}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4k}{n}+3\right)f\left(-2+\frac{4k}{n}\right)\frac{4}{n}\\&=\int_{-2}^{2}(x+5)f(x)dx\\&=\int_{-2}^{2}\{xf(x)+5f(x)\}dx\\&=5\int_{-2}^{2} f(x)dx\\&=10\int_{0}^{2} f(x)dx\\&=20\int_{0}^{1} f(x)dx\\&=20\times 12\\&=240\end{aligned}$$

답 240

29

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축에 평행한 직선이 만나는 점의 개수는 1 또는 2 또는 3이므로 $g(1)<g(2)<g(3)$이 성립하려면 $g(1)=1$, $g(2)=2$, $g(3)=3$이어야 한다.



따라서 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같아야 하므로 함수 $f(x)$의 극댓값은 3보다 큰 값이어야 하고 극솟값은 2이어야 한다.

$f(x)=2x^3-3ax^2+2a^2+a$에서

$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=a$

이때 $a>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 $x=a$에서 극소이다.

그러므로 $f(0)>3$, $f(a)=2$이어야 한다.

$f(0)>3$에서

$2a^2+a>3$

$2a^2+a-3>0$

$(a-1)(2a+3)>0$

그런데 $a>0$이므로 $a>1$ …… ㉠

또 $f(a)=2$에서

$2a^3-3a^3+2a^2+a=2$

$a^3-2a^2-a+2=0$

$(a+1)(a-1)(a-2)=0$

그런데 $a>0$이므로 $a=1$ 또는 $a=2$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 양수 a의 값은 2이다.

답 2

30

다항식 $2g(x)+9$가 $(x-3)^2$으로 나누어떨어지므로

$2g(3)+9=0$, $2g'(3)=0$

즉, $g(3)=-\frac{9}{2}$, $g'(3)=0$

$$g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$$

$$=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$$

이므로 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)$$

$$=\int_0^x f(t)dt$$

$g'(3)=\int_0^3 f(t)dt$이므로

$g'(3)=0$에서 $\int_0^3 f(t)dt=0$ ······ ㉠

$f(x)=x^2+ax+b$라 하면

$$\int_0^3 f(t)dt=\int_0^3 (t^2+at+b)dt$$

$$=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_0^3$$

$$=9+\frac{9a}{2}+3b$$

이므로 ㉠에서

$9+\frac{9a}{2}+3b=0$

$3a+2b=-6$ ······ ㉡

$$g(3)=3\int_0^3 f(t)dt-\int_0^3 tf(t)dt$$

$$=-\int_0^3 tf(t)dt \text{ (㉠에 의해)}$$

$$=-\int_0^3 t(t^2+at+b)dt$$

$$=-\int_0^3 (t^3+at^2+bt)dt$$

$$=-\left[\frac{t^4}{4}+\frac{a}{3}t^3+\frac{b}{2}t^2\right]_0^3$$

$$=-\frac{81}{4}-9a-\frac{9b}{2}$$

이므로 $g(3)=-\frac{9}{2}$에서

$-\frac{81}{4}-9a-\frac{9b}{2}=-\frac{9}{2}$

$81+36a+18b=18$

$4a+2b=-7$ ······ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=x^2-x-\frac{3}{2}$이므로

$10\times f(6)=10\times\left(36-6-\frac{3}{2}\right)=10\times\frac{57}{2}=285$

답 285

실전 모의고사 2회

본문 154~161쪽

01 ②	02 ①	03 ④	04 ④	05 ⑤
06 ⑤	07 ③	08 ④	09 ⑤	10 ③
11 ③	12 ①	13 ②	14 ⑤	15 ③
16 ②	17 ③	18 ①	19 ②	20 ③
21 ⑤	22 10	23 18	24 21	25 15
26 30	27 20	28 30	29 78	30 17

01

$\frac{3}{4}\times(\sqrt[3]{8})^2=\frac{3}{4}\times(\sqrt[3]{2^3})^2=\frac{3}{4}\times 2^2=3$

답 ②

02

$A-B=\{3, 5, 6\}$

따라서 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은

$3+5+6=14$

답 ①

03

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-3}{2^n(2^n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-3}{4^n+2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-3\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\frac{4-0}{1+0}=4$$

답 ④

04

$f(f(3))=f(1)=2$

$f^{-1}(3)=a$라 하면 $f(a)=3$이므로 $a=4$

따라서 $f^{-1}(3)=4$이므로

$f(f(3))+f^{-1}(3)=2+4=6$

답 ④

05

$\lim_{x\to-1-}f(x)=2$, $\lim_{x\to1+}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=2+2=4$

답 ⑤

06

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{1}{5}=\frac{1}{3}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$

따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{5}$

답 ⑤

07

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p가 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset P$이어야 한다.

이때 $a\neq0$이면 $P=\{a, 2a\}$, $Q=\{4\}$이므로

$\{4\}\subset\{a, 2a\}$에서

$a=4$ 또는 $2a=4$

즉, $a=2$ 또는 $a=4$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$2+4=6$

답 ③

08

$10=7+1+1+1$

$=6+2+1+1$

$=5+3+1+1=5+2+2+1$

$=4+4+1+1=4+3+2+1=4+2+2+2$

$=3+3+3+1=3+3+2+2$

따라서 구하는 분할의 수는 9이다.

답 ④

09

$\int_0^a(3x-2)^2dx+\int_a^0(6x^2-12x+13)dx$

$=\int_0^a(3x-2)^2dx-\int_0^a(6x^2-12x+13)dx$

$=\int_0^a\{(3x-2)^2-(6x^2-12x+13)\}dx$

$=\int_0^a(3x^2-9)dx$

$=\left[x^3-9x\right]_0^a$

$=a^3-9a$

삼차방정식 $a^3-9a=0$에서

$a(a+3)(a-3)=0$

$a=0$ 또는 $a=-3$ 또는 $a=3$

이때 $a>0$이므로 $a=3$

답 ⑤

10

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

조건 (가)에서 $a_3=a+2d=-5$ …… ㉠

조건 (나)에서

$|(a+d)+(a+4d)-1|=a+9d$

$|2a+5d-1|=a+9d$

(i) $2a+5d-1\geq0$일 때

$2a+5d-1=a+9d$에서

$a-4d=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3,\ d=-1$

이때 $2a+5d-1=2\times(-3)+5\times(-1)-1=-12<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $2a+5d-1<0$일 때

$-(2a+5d-1)=a+9d$에서

$3a+14d=1$ ...... ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-9,\ d=2$

이때 $2a+5d-1=2\times(-9)+5\times2-1=-9<0$이므로 조건을 만족시킨다.

따라서 $a=-9,\ d=2$이므로

$a_{12}=-9+11\times2=13$

답 ③

11

$y=\dfrac{2x+3}{x-a}$이라 하면

$yx-ya=2x+3,\ (y-2)x=ya+3$

$x=\dfrac{ay+3}{y-2}$

$x,\ y$를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{ax+3}{x-2}$이므로 $f(x)$의 역함수는

$f^{-1}(x)=\dfrac{ax+3}{x-2}$

$f(x)=f^{-1}(x)$에서 $a=2$

따라서 $a+f(3)=2+\dfrac{2\times3+3}{3-2}=11$

답 ③

참고

함수 $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-a}=\dfrac{2a+3}{x-a}+2$에서 점근선의 방정식은

$x=a,\ y=2$이므로 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=2,\ y=a$이다.

이때 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로 $a=2$이다.

12

쿠키 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 6^2)$을 따른다.

쿠키를 9개씩 포장하는 것은 크기가 9인 표본을 임의추출하는 것과 같으므로 그 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(80,\ \dfrac{6^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(80,\ 2^2)$을 따른다.

이 쿠키를 9개씩 포장한 한 세트의 무게가 684 g 이하이거나 756 g 이상일 확률은

$\mathrm{P}(9\overline{X}\le684)+\mathrm{P}(9\overline{X}\ge756)$

$=\mathrm{P}(\overline{X}\le76)+\mathrm{P}(\overline{X}\ge84)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{\overline{X}-80}{2}\le\dfrac{76-80}{2}\right)+\mathrm{P}\left(\dfrac{\overline{X}-80}{2}\ge\dfrac{84-80}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le-2)+\mathrm{P}(Z\ge2)$

$=2\mathrm{P}(Z\ge2)$

$=2\{0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2)\}$

$=2\times(0.5-0.4772)=0.0456$

답 ①

13

$a_1=5$이므로

$a_2=2a_1-1=2\times5-1=9$

$a_3=a_2-2\times(2-1)=9-2=7$

$a_4=2a_3-1=2\times7-1=13$

$a_5=a_4-2\times(4-1)=13-6=7$

$a_6=2a_5-1=2\times7-1=13$

답 ②

14

(단위 : 명)

	남학생	여학생	합계
찬성	a	$10-a$	10
반대			20
합계	15	15	30

사형제도에 찬성한 남학생의 수를 a라 하면 사형제도에 찬성한 여학생의 수는 $10-a$이다.

찬반투표에 참여한 30명의 학생 중 임의로 선택한 1명이 남학생일 때 이 학생이 사형제도에 찬성한 학생일 확률은

$p_1=\dfrac{a}{15}$

찬반투표에 참여한 30명의 학생 중 임의로 선택한 1명이 사형제도에 찬성한 학생일 때 이 학생이 여학생일 확률은

$p_2=\dfrac{10-a}{10}$

이때 $p_1+p_2=\dfrac{9}{10}$이므로

$\dfrac{a}{15}+\dfrac{10-a}{10}=\dfrac{9}{10}$에서

$2a+3(10-a)=27,\ a=3$

따라서 찬반투표에 참여한 30명의 학생 중 사형제도에 반대한 남학생의 수는

$15-a=15-3=12$

답 ⑤

15

A, B, C 중 같은 팀에 배정될 두 명을 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$

A, B가 같은 팀에 배정되었다고 하면 C를 포함한 5명을 다음과 같이 팀에 배정할 수 있다.

(i) (C가 아닌 1명과 A, B), (2명), (2명)으로 배정하는 경우

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2\times\dfrac{1}{2!}=4\times6\times1\times\dfrac{1}{2}=12$

(ii) (A, B), (3명), (2명)으로 배정하는 경우

$1\times{}_5\mathrm{C}_3\times{}_2\mathrm{C}_2=1\times10\times1=10$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$3\times(12+10)=66$

답 ③

16

$\log_2 a-\log_4 b=\log_2 a-\frac{1}{2}\log_2 b=\log_2\frac{a}{\sqrt{b}}$의 값이 자연수가 되려면

$\frac{a}{\sqrt{b}}=2^m$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이어야 한다.

이때 $b=\left(\frac{a}{2^m}\right)^2$과 a가 모두 자연수이므로 $a=2^m k$ (k는 자연수)이고 $b=k^2$이 되어 b는 제곱수이다.

즉, b가 50 이하의 짝수인 제곱수이므로 가능한 b는 4, 16, 36이고, 이때 조건을 만족시키는 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 다음과 같다.

(i) $b=4$일 때,

$a=2^{m+1}$이므로

$a=2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5$

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 4

(ii) $b=16$일 때,

$a=2^{m+2}$이므로

$a=2^3,\ 2^4,\ 2^5$

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 3

(iii) $b=36$일 때,

$a=6\times2^m$이므로

$a=6\times2,\ 6\times2^2,\ 6\times2^3$

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 3

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$4+3+3=10$

답 ②

17

$\mathrm{Q}(t,\ \sqrt{2t})$, $\mathrm{R}(t,\ \sqrt{t+1})$이고, $t>1$이므로 $\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{2t}-\sqrt{t+1}$

삼각형 PRQ의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2t}-\sqrt{t+1})\times(t-1)$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{t\to1+}\frac{S(t)}{(t-1)^2}&=\frac{1}{2}\lim_{t\to1+}\frac{\sqrt{2t}-\sqrt{t+1}}{t-1}\\&=\frac{1}{2}\lim_{t\to1+}\frac{(\sqrt{2t}-\sqrt{t+1})(\sqrt{2t}+\sqrt{t+1})}{(t-1)(\sqrt{2t}+\sqrt{t+1})}\\&=\frac{1}{2}\lim_{t\to1+}\frac{t-1}{(t-1)(\sqrt{2t}+\sqrt{t+1})}\\&=\frac{1}{2}\lim_{t\to1+}\frac{1}{\sqrt{2t}+\sqrt{t+1}}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{2}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{8}\end{aligned}$$

답 ③

18

주머니 A에서 임의로 두 개의 구슬을 동시에 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_2=\boxed{45}$

이고, 꺼낸 구슬에 적힌 두 수를 곱한 값들의 합을 S라 하면

$S=1\times2+1\times3+1\times4+\cdots+9\times10$

이므로

$$\left(\sum_{k=1}^{10}k\right)^2=\sum_{k=1}^{10}k^2+2S$$

$$S=\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{k=1}^{10}k\right)^2-\sum_{k=1}^{10}k^2\right\}=\frac{1}{2}(55^2-385)=1320$$

따라서 $\mathrm{E}(X)=\frac{S}{\boxed{45}}=\frac{1320}{45}=\boxed{\frac{88}{3}}$이다.

주머니 B에 들어 있는 구슬에 적혀 있는 수들은

$11=1+10,\ 12=2+10,\ 13=3+10,\ \cdots,\ 20=10+10$

과 같이 나타낼 수 있고, 주머니 B에서 임의로 동시에 꺼낸 두 개의 구슬에 적힌 수를 곱한 값들은 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$11\times12=(1+10)(2+10)=1\times2+1\times10+2\times10+10^2$

$11\times13=(1+10)(3+10)=1\times3+1\times10+3\times10+10^2$

$11\times14=(1+10)(4+10)=1\times4+1\times10+4\times10+10^2$

$\vdots$

$18\times19=(8+10)(9+10)=8\times9+8\times10+9\times10+10^2$

$18\times20=(8+10)(10+10)=8\times10+8\times10+10\times10+10^2$

$19\times20=(9+10)(10+10)=9\times10+9\times10+10\times10+10^2$

그러므로 주머니 B에서 꺼낸 두 개의 구슬에 적힌 수를 곱한 값들의 합을 T라 하면

$$T=S+\boxed{90}\times\sum_{k=1}^{10}k+\boxed{45}\times10^2$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\frac{T}{\boxed{45}}\\&=\frac{1}{45}(S+90\times55+45\times10^2)\\&=\frac{S}{45}+110+100\\&=\frac{88}{3}+210\\&=\frac{718}{3}\end{aligned}$$

따라서 $p=45$, $q=\frac{88}{3}$, $r=90$이므로

$p+3q+r=45+88+90=223$

답 ①

19

그림 R_n에서 새로 색칠된 도형의 넓이를 a_n이라 하자.

직각삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{3}$이므로 $\angle\mathrm{ABC}=60°$이다.

선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점이 $\mathrm{D_1}$이므로

$\overline{\mathrm{BD_1}}=\overline{\mathrm{BB_1}}=1$

이때 삼각형 $\mathrm{BD_1B_1}$은 이등변삼각형이고, 점 B에서 변 $\mathrm{B_1D_1}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle\mathrm{B_1BD_1}=180°-60°=120°$

즉, 삼각형 $\mathrm{BD_1H}$는 직각삼각형이고 $\angle\mathrm{BD_1H}=30°$이므로

$\overline{\mathrm{D_1H}}=\overline{\mathrm{BD_1}}\cos30°=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{BD_1}}\sin30°=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

이등변삼각형 BD_1B_1의 넓이는

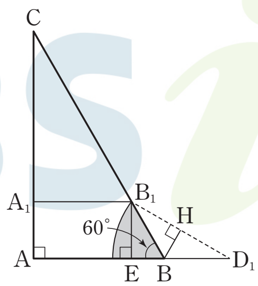
$\frac{1}{2}\times\overline{B_1D_1}\times\overline{BH}=\frac{1}{2}\times2\overline{D_1H}\times\overline{BH}=\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

또 중심각의 크기가 $\angle BD_1B_1=30^\circ$이고 반지름의 길이가 $\overline{B_1D_1}=\sqrt{3}$인 부채꼴의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{3})^2\times\frac{1}{12}=\frac{\pi}{4}$

그러므로 $a_1=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\pi-\sqrt{3}}{4}$

점 B_1에서 변 AB에 내린 수선의 발을 E라 하면 직각삼각형 BB_1E에서



$\overline{B_1E}=\overline{BB_1}\sin60^\circ=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이므로

$\overline{A_1C}=\overline{AC}-\overline{AA_1}$

$=\overline{AC}-\overline{B_1E}$

$=2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

즉, 두 직각삼각형 ABC, A_1B_1C의 닮음비는

$\overline{AC}:\overline{A_1C}=2\sqrt{3}:\frac{3\sqrt{3}}{2}=1:\frac{3}{4}$

그러므로 그림 R_n에서 새로 색칠된 도형과 그림 R_{n+1}에서 새로 색칠된 도형의 닮음비는 $1:\frac{3}{4}$이고, 넓이의 비는 $1:\frac{9}{16}$이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{\pi-\sqrt{3}}{4}$이고 공비가 $\frac{9}{16}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{\frac{\pi-\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{4(\pi-\sqrt{3})}{7}$$

답 ②

20

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)이라 하자.

$$\lim_{h\to0-}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{f(-h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{-ah^3+bh^2-ch}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}(-ah^2+bh-c)=-c$$

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{ah^3+bh^2+ch}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}(ah^2+bh+c)=c$$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

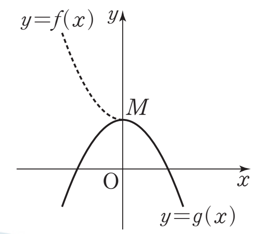
$\lim_{h\to0-}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{g(h)-g(0)}{h}$이 성립한다.

즉, $-c=c$에서 $c=0$이므로 $f(x)=ax^3+bx^2+d$이다.

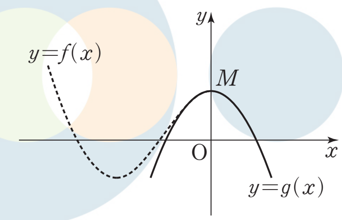
함수 $g(x)$가 최댓값을 가지려면 $a<0$이어야 한다.

이때 $g'(0)=0$이고 최댓값을 M이라 하면 이차방정식 $f'(x)=0$의 근의 종류에 따라 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

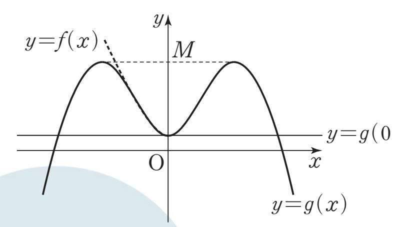
(ⅰ) $f'(x)=0$이 중근을 갖는 경우



(ⅱ) $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖고 그 합이 음수인 경우



(ⅲ) $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖고 그 합이 양수인 경우



ㄱ. $f(1)-f(-1)=(a+b+d)-(-a+b+d)=2a$

이때 $a<0$이므로 $f(1)-f(-1)<0$, 즉 $f(1)<f(-1)$ (참)

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le g(0)$이면 $g(0)$이 최댓값 M이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 (ⅰ) 또는 (ⅱ)와 같다.

따라서 함수 $g(x)$는 극솟값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. 방정식 $f'(x)=0$의 모든 실근의 합이 양수이면 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 (ⅲ)과 같다.

따라서 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=g(0)$은 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $g(x)=g(0)$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

참고

$f(x)=ax^3+bx^2+d$에서 $a>0$이면

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(a+\frac{b}{x}+\frac{d}{x^3}\right)=\infty$ (발산)이므로

함수 $g(x)=\begin{cases}f(x) & (x\ge0)\\ f(-x) & (x<0)\end{cases}$은 최댓값을 가질 수 없다.

한편, 위의 풀이에서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서 $d>0$인 경우이다.

$d=0$, $d<0$인 경우도 마찬가지 방법으로 풀면 답은 같다.

21

조건 (가)에서 $4-p+2q>8$이므로

$p-2q+4<0$ ⋯⋯ ㉠

조건 (나)에서 $f'(x)=12x^2-2px+2q$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$p^2-24q>0$ …… ㉡

조건 (다)에서

$$g(n)=\int_0^{2^{n-1}} f(x)dx-2^{n+2}$$

$$=\left[x^4-\frac{p}{3}x^3+qx^2\right]_0^{2^{n-1}}-2^{n+2}$$

$$=2^{4n-4}-\frac{2^{3n-3}}{3}\times p+2^{2n-2}\times q-2^{n+2}$$

이때 $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$은 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\{g(2)\}^2=g(1)g(3)$에서

$$\left\{4\left(-\frac{2}{3}p+q\right)\right\}^2=\left(-\frac{p}{3}+q-7\right)\left\{16\left(-\frac{4}{3}p+q+14\right)\right\}$$

$pq-14p-21q+294=0$

$(p-21)(q-14)=0$

$p=21$ 또는 $q=14$

(i) $p=21$일 때,

㉠, ㉡에서 $12.5<q<18.375$

두 자연수 p, q의 합 $p+q$는 $q=18$일 때 최대이고

$p+q$의 최댓값은 39이다.

(ii) $q=14$일 때,

㉠, ㉡에서 $18.\times\times\times<p<24$

두 자연수 p, q의 합 $p+q$는 $p=23$일 때 최대이고

$p+q$의 최댓값은 37이다.

(i), (ii)에서 $p+q$의 값이 최대일 때의 함수 $f(x)$는

$f(x)=4x^3-21x^2+36x$이므로

$f(2)=32-84+72=20$

답 ⑤

22

$$\frac{{}_5\mathrm{P}_3}{3!}={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

답 10

23

$f(x)=2x^3+ax^2-6$에서

$f'(x)=6x^2+2ax$

$f'(1)=10$이므로

$6+2a=10$, $a=2$

따라서 $f(x)=2x^3+2x^2-6$이므로

$f(2)=16+8-6=18$

답 18

24

조건 $\sim p$는

모든 실수 x에 대하여 $x^2+2(a-3)x+a+9\neq0$

이므로 조건 $\sim p$가 참이 되려면 이차방정식

$x^2+2(a-3)x+a+9=0$이 실근을 갖지 않아야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(a-3)^2-(a+9)=a^2-7a=a(a-7)<0$$

$0<a<7$

따라서 정수 a는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 그 합은

$1+2+3+4+5+6=21$

답 21

25

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점과 점 $(5, 0)$을 지나므로

$f(x)=ax(x-5)$ $(a>0)$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax(x-5)}{x+1}=-6$에서 $\dfrac{-4a}{2}=-6$이므로 $a=3$

따라서 $f(x)=3x(x-5)$이므로

$$\lim_{x\to5}\frac{f(x)}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{3x(x-5)}{x-5}=\lim_{x\to5}3x=15$$

답 15

26

$f(x)=kx^2(x-3)=k(x^3-3x^2)$ $(k<0)$이라 하면

$f'(x)=k(3x^2-6x)=3kx(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖는다.

즉, $a=2$이고 $f(a)=f(2)=-4k=4$에서 $k=-1$이므로

$f(x)=-x^3+3x^2$

또한 두 점 A$(2, 4)$, B$(3, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=-4x+12$

따라서 닫힌 구간 $[2, 3]$에서 두 점 A$(2, 4)$, B$(3, 0)$을 지나는 직선과 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_2^3\{(-x^3+3x^2)-(-4x+12)\}dx$$

$$=\int_2^3(-x^3+3x^2+4x-12)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3+2x^2-12x\right]_2^3$$

$$=\left(-\frac{81}{4}+27+18-36\right)-(-4+8+8-24)$$

$$=\frac{3}{4}$$

따라서 $40S=40\times\dfrac{3}{4}=30$

답 30

27

$$\sum_{k=1}^{20}(2a_k+5b_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{20}\{2(a_k+2b_k)+b_k\}$$

$$=2\sum_{k=1}^{20}(a_k+2b_k)+\sum_{k=1}^{20}b_k=370 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\sum_{k=1}^{20}\left(a_k+2b_k+\frac{1}{4}b_k^2\right)$

$=\sum_{k=1}^{20}(a_k+2b_k)+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{20}b_k^2=185$ ⋯⋯ ㉡

$4\times$㉡$-2\times$㉠을 하면

$\sum_{k=1}^{20}b_k^2-2\sum_{k=1}^{20}b_k=0$, $\sum_{k=1}^{20}b_k^2-2\sum_{k=1}^{20}b_k+20=20$

$\sum_{k=1}^{20}(b_k^2-2b_k+1)=20$

따라서 $\sum_{k=1}^{20}(1-b_k)^2=20$

답 20

참고

다음은 주어진 조건을 만족시키는 하나의 예이다.

$a_n=\frac{1}{2}n-1$, $b_n=2$

28

(i) 주사위에서 나온 눈의 수의 합 T가 홀수인 경우

주사위를 4번 던져서 나온 모든 눈의 수의 합이 홀수가 되려면 나온 눈의 수 중 홀수의 개수 x는 1 또는 3이어야 한다.

$x=1$일 확률은 ${}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{2^4}$이므로 $P(X=1)=\frac{4}{2^4}=\frac{1}{4}$

$x=3$일 확률은 ${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{4}{2^4}$이므로 $P(X=3)=\frac{4}{2^4}=\frac{1}{4}$

(ii) 주사위에서 나온 눈의 수의 합 T가 짝수인 경우

주사위를 4번 던져서 나온 모든 눈의 수의 합이 짝수가 되려면 나온 눈의 수 중 홀수의 개수 x는 0 또는 2 또는 4이어야 한다.

$x=0$일 확률은 ${}_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{2^4}$이므로 $P(X=2)=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$

$x=2$일 확률은 ${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{2^4}$이므로 $P(X=4)=\frac{6}{2^4}=\frac{3}{8}$

$x=4$일 확률은 ${}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{2^4}$이므로 $P(X=6)=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$

(i), (ii)에 의하여 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

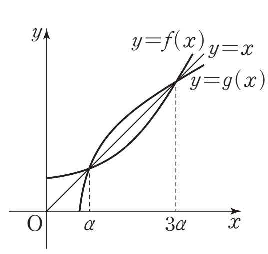
$E(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{16}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{3}{8}+6\times\frac{1}{16}=3$

따라서 $E(10X)=10E(X)=10\times3=30$

답 30

29

$x\geq0$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.



이차방정식 $ax^2+b=x$, 즉 $ax^2-x+b=0$의 두 실근이 α, 3α이므로

$ax^2-x+b=a(x-\alpha)(x-3\alpha)=ax^2-4a\alpha x+3a\alpha^2$

$1=4a\alpha$, $b=3a\alpha^2$에서 $a=\frac{1}{4\alpha}$, $b=\frac{3}{4}\alpha$이므로

$f(x)=\frac{1}{4\alpha}x^2+\frac{3}{4}\alpha$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\alpha}{n}\left\{g\left(\alpha+\frac{2\alpha k}{n}\right)-\left(\alpha+\frac{2\alpha k}{n}\right)\right\}$

$=\int_{\alpha}^{3\alpha}\{g(x)-x\}dx$

$=\int_{\alpha}^{3\alpha}\{x-f(x)\}dx$

$=\int_{\alpha}^{3\alpha}\left\{x-\left(\frac{1}{4\alpha}x^2+\frac{3}{4}\alpha\right)\right\}dx$

$=\int_{\alpha}^{3\alpha}\left(-\frac{1}{4\alpha}x^2+x-\frac{3}{4}\alpha\right)dx$

$=\left[-\frac{1}{12\alpha}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}\alpha x\right]_{\alpha}^{3\alpha}$

$=0-\left(-\frac{1}{3}\alpha^2\right)$

$=\frac{1}{3}\alpha^2$

$\frac{1}{3}\alpha^2=\frac{1}{12}$에서 $\alpha^2=\frac{1}{4}$

이때 $\alpha>0$이므로 $\alpha=\frac{1}{2}$이고, $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}$

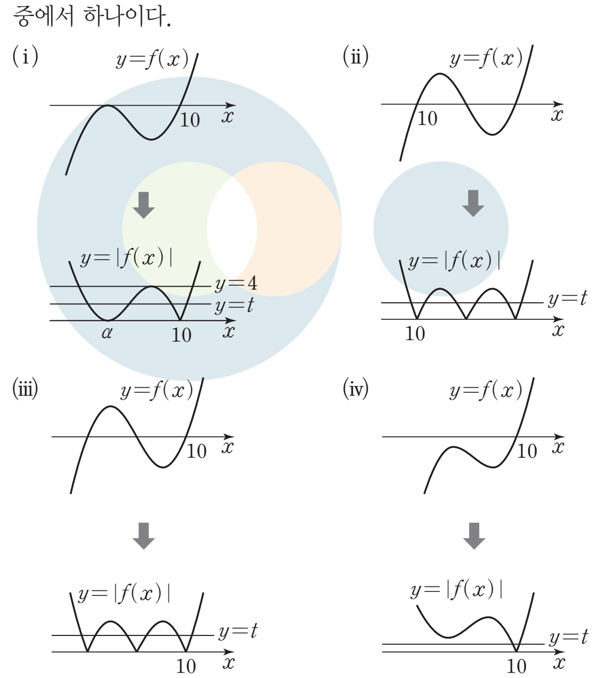
따라서 $f(3)=\frac{9}{2}+\frac{3}{8}=\frac{39}{8}$이므로

$16\times f(3)=16\times\frac{39}{8}=78$

답 78

30

조건 (가), (나)로부터 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림 중에서 하나이다.



조건 (다)로부터 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림에서 (i)과 같고, 함수 $f(x)$의 극솟값은 -4이어야 한다.

$f(x)=(x-10)(x-a)^2$이라 하면

$$f'(x)=(x-a)^2+2(x-10)(x-a)$$
$$=(x-a)\{3x-(a+20)\}$$

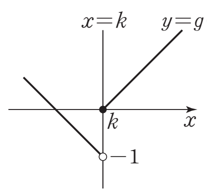
이때 함수 $f(x)$는 $x=\frac{a+20}{3}$에서 극솟값 -4를 가지므로

$$\left(\frac{a+20}{3}-10\right)\left(\frac{a+20}{3}-a\right)^2=-4,\ \left(\frac{a-10}{3}\right)^3=-1$$

$a=7$

따라서 $f(x)=(x-10)(x-7)^2$이고 함수

$g(x)=\begin{cases} x-k & (x\ge k) \\ -x+k-1 & (x<k) \end{cases}$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=k$에서 연속이어야 한다.



$h(x)=f(x)g(x)$라 하면 $h(k)=\lim\limits_{x\to k}h(x)$이어야 하므로

$$h(k)=(k-10)(k-7)^2(k-k)=0$$

$$\lim_{x\to k+}h(x)=\lim_{x\to k+}(x-10)(x-7)^2(x-k)$$
$$=(k-10)(k-7)^2(k-k)=0$$

$$\lim_{x\to k-}h(x)=\lim_{x\to k-}(x-10)(x-7)^2(-x+k-1)$$
$$=(k-10)(k-7)^2(-k+k-1)$$
$$=-(k-10)(k-7)^2$$

에서

$(k-10)(k-7)^2=0$

따라서 $k=7$ 또는 $k=10$이므로 모든 실수 k의 값의 합은

$7+10=17$

답 17

실전 모의고사 3회

본문 162~169쪽

01 ⑤	02 ⑤	03 ⑤	04 ④	05 ③
06 ④	07 ④	08 ②	09 ①	10 ③
11 ④	12 ①	13 ⑤	14 ④	15 ④
16 ②	17 ②	18 ①	19 ⑤	20 ③
21 ③	22 45	23 76	24 2	25 90
26 58	27 39	28 43	29 4	30 288

01

$$2\times 4^{\frac{3}{2}}=2\times(2^2)^{\frac{3}{2}}=2\times 2^3=2^4=16$$

답 ⑤

02

$\{1, 2, 3, 4\}\subset A\cup B$이므로 $n(A\cup B)=4$가 성립하려면

$a\in A$이어야 한다.

즉, $a=1$ 또는 $a=3$ 또는 $a=4$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$1+3+4=8$

답 ⑤

03

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n^3}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}$$
$$=\frac{2}{1\times1\times1}=2$$

답 ⑤

04

$$\log_2 4+\log_4 8+\log_8 16=\frac{\log_2 4}{\log_2 2}+\frac{\log_2 8}{\log_2 4}+\frac{\log_2 16}{\log_2 8}$$
$$=2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}=\frac{29}{6}$$

답 ④

05

$$(g\circ f^{-1})(2)=g(f^{-1}(2))=g(3)=5$$

답 ③

06

등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$\frac{a_{10}}{a_8}+\frac{a_5}{a_4}=6$에서

$\frac{ar^9}{ar^7}+\frac{ar^4}{ar^3}=6$

$r^2+r-6=0$, $(r+3)(r-2)=0$

이때 $r>0$이므로 $r=2$

따라서 $\frac{a_{20}}{a_{17}}=\frac{ar^{19}}{ar^{16}}=r^3=2^3=8$

답 ④

07

$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{5}$에서

$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{1}{5}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)$이고 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{4}{5}=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A)-\frac{1}{5}\mathrm{P}(A)$

$\frac{4}{5}=\frac{9}{5}\mathrm{P}(A)$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{9}$

답 ④

08

$\lim_{x\to -1-}f(x)+\lim_{x\to 0+}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)$

$=2+(-1)+(-2)=-1$

답 ②

09

$\sum_{k=1}^{50}a_{2k}=30$에서

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{100}=30$ ...... ㉠

$\sum_{k=1}^{50}a_{2k-1}=70$에서

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=70$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=100$

즉, $\sum_{k=1}^{100}a_k=100$

따라서

$\sum_{k=1}^{100}(2a_k-1)=2\sum_{k=1}^{100}a_k-100$

$=2\times100-100=100$

답 ①

10

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$x(x-10)\le0$에서 $0\le x\le10$이므로

$P=\{0, 1, 2, \cdots, 10\}$

$x^2+2x-3\le0$, 즉 $(x+3)(x-1)\le0$에서

$-3\le x\le1$이므로

$Q=\{-3, -2, -1, 0, 1\}$

이때 조건 'p이고 $\sim q$'의 진리집합은

$P\cap Q^C=P-Q=\{2, 3, 4, \cdots, 10\}$

따라서 구하는 진리집합의 원소의 개수는 9이다.

답 ③

11

주어진 확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2}\times\left(2+\frac{1}{2}\right)\times a=1$

$a=\frac{4}{5}$

따라서 $\mathrm{P}(-1\le X\le0)=\frac{1}{2}\times1\times\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$

답 ④

12

$x(x-1)f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $c=0$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a+b+c$, $b=-a-1$ ...... ㉡

그러므로

$x^3+ax^2+bx+c=x^3+ax^2-(a+1)x$

$=x(x^2+ax-a-1)$

$=x(x-1)(x+a+1)$

㉠에서 $x\ne0$, $x\ne1$이면

$f(x)=\frac{x(x-1)(x+a+1)}{x(x-1)}=x+a+1$

이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x+a+1)=a+2=4$에서

$a=2$

이 값을 ㉡에 대입하면

$b=-2-1=-3$

따라서 $2ab+c=2\times2\times(-3)+0=-12$

답 ①

13

임의로 1명을 선택했을 때, 동해안 지역을 선호한 학생이 선택되는 사건을 A, 남학생이 선택되는 사건을 B라 하자.

$\mathrm{P}(A)=\frac{265}{500}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{125}{500}$

따라서 임의로 선택한 학생이 동해안 지역을 선호한 학생이었을 때, 이 학생이 남학생일 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{125}{500}}{\frac{265}{500}}=\frac{125}{265}=\frac{25}{53}$

답 ⑤

다른 풀이

동해안 지역을 선호한 학생은 265명이고 이 중에서 남학생은 125명이다. 따라서 임의로 선택한 학생이 동해안 지역을 선호한 학생이었을 때, 이 학생이 남학생일 확률은

$\frac{125}{265}=\frac{25}{53}$

14

택배회사에서 처리하는 물품의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(36,\ 4^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-36}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(32\le X\le 44)&=\mathrm{P}\left(\frac{32-36}{4}\le\frac{X-36}{4}\le\frac{44-36}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.3413+0.4772\\&=0.8185\end{aligned}$$

답 ④

15

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$\sum_{k=1}^{100} a_k=\frac{100(2a+99d)}{2}=2000$에서

$2a+99d=40$ ⋯⋯ ㉠

$\sum_{k=1}^{50} a_{2k-1}=\frac{50(2a+49\times 2d)}{2}=800$에서

$a+49d=16$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-376,\ d=8$

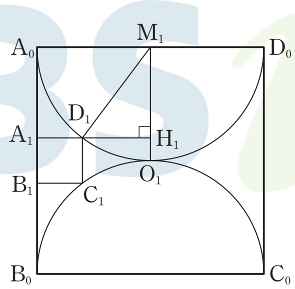
따라서 $a_{51}=a+50d=-376+50\times 8=24$

답 ④

16

정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 한 변의 길이를 l_n이라 하고 두 선분 $\mathrm{A}_0\mathrm{D}_0$, $\mathrm{B}_0\mathrm{C}_0$을 각각 지름으로 하는 두 반원이 만나는 점을 O_1이라 하자.

선분 $\mathrm{A}_0\mathrm{D}_0$의 중점을 M_1, 점 D_1에서 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{M}_1$에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면 직각삼각형 $\mathrm{M}_1\mathrm{D}_1\mathrm{H}_1$에서



$\overline{\mathrm{D}_1\mathrm{H}_1}^2+\overline{\mathrm{M}_1\mathrm{H}_1}^2=\overline{\mathrm{M}_1\mathrm{D}_1}^2$

$\left(\frac{1}{2}-l_1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}l_1\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$5{l_1}^2-6l_1+1=0$

$(5l_1-1)(l_1-1)=0$

이때 $0<l_1<1$이므로 $l_1=\frac{1}{5}$

마찬가지 방법으로

$l_2=\left(\frac{1}{5}\right)^2,\ l_3=\left(\frac{1}{5}\right)^3,\ \cdots,\ l_n=\left(\frac{1}{5}\right)^n$

따라서 $S_n=\left(\frac{1}{25}\right)^n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{\frac{1}{25}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{1}{24}$$

답 ②

17

네 점 $\left(n,\ \frac{2}{n}\right)$, $\left(n+1,\ \frac{2}{n+1}\right)$, $(n+1,\ 0)$, $(n,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 사각형은 사다리꼴이므로

$a_n=\frac{1}{2}\times 1\times\left(\frac{2}{n}+\frac{2}{n+1}\right)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10}(-1)^{n-1}a_n&=a_1-a_2+a_3-\cdots-a_{10}\\&=\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}\right)\\&=1-\frac{1}{11}\\&=\frac{10}{11}\end{aligned}$$

답 ②

18

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$를 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는 $4!=24$

$X=4$인 경우는 1가지뿐이므로

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{24}$

$X=3$인 경우는 일어나지 않으므로

$\mathrm{P}(X=3)=0$

$X=2$일 때는 조건 중에서 2개만 만족시키므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times 1}{24}=\boxed{\frac{1}{4}}$

$X=1$일 때는 조건 중에서 1개만 만족시키므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times 2}{24}=\boxed{\frac{1}{3}}$

$\mathrm{P}(X=0)=1-\sum_{k=1}^{4}\mathrm{P}(X=k)$이므로

$\mathrm{P}(X=0)=1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+0+\frac{1}{24}\right)=1-\frac{5}{8}=\boxed{\frac{3}{8}}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\sum_{k=0}^{4}k\mathrm{P}(X=k)\\&=0\times\frac{3}{8}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{4}+3\times 0+4\times\frac{1}{24}\\&=\boxed{1}\end{aligned}$$

따라서 $a=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{3},\ c=\frac{3}{8},\ d=1$이므로

$32abcd=32\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}\times 1=1$

답 ①

19

천, 백, 십, 일의 자리의 수를 각각 a, b, c, d라 하면

$a=k$ ($k=1, 2, 3, \cdots, 9$)일 때,

$b+c+d=10-k$ (단, b, c, d는 음이 아닌 정수)

이때 이 방정식의 해의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_{10-k}$이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{9}{}_3\mathrm{H}_{10-k}&=\sum_{k=1}^{9}{}_{12-k}\mathrm{C}_{10-k}\\&=\sum_{k=1}^{9}{}_{12-k}\mathrm{C}_2\\&={}_{11}\mathrm{C}_2+{}_{10}\mathrm{C}_2+{}_9\mathrm{C}_2+\cdots+{}_3\mathrm{C}_2\\&={}_{11}\mathrm{C}_2+{}_{10}\mathrm{C}_2+{}_9\mathrm{C}_2+\cdots+{}_3\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_3-1\\&={}_{12}\mathrm{C}_3-1\\&=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}-1\\&=219\end{aligned}$$

답 ⑤

참고

${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r$

다른 풀이

천, 백, 십, 일의 자리의 수를 각각 a, b, c, d라 하면

$a+b+c+d=10$ (단, $a\ge1$, b, c, d는 음이 아닌 정수) …… ㉠

$a=a'+1$로 놓으면 방정식 ㉠은

$a'+b+c+d=9$ (단, a', b, c, d는 음이 아닌 정수)

이므로 이 방정식의 해의 개수는

$${}_4\mathrm{H}_9={}_{12}\mathrm{C}_9={}_{12}\mathrm{C}_3=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$$

이때 $a=10$, $b=c=d=0$인 경우는 제외해야 하므로 구하는 자연수의 개수는

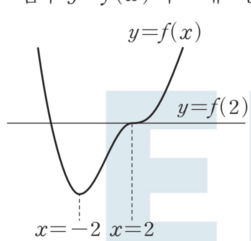
$220-1=219$

20

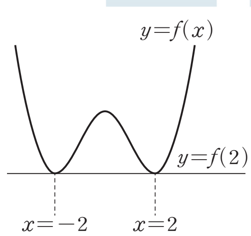
조건 (가), (나)에서 $f'(-2)=f'(2)=0$이고

조건 (다)에서 방정식 $f(x)=f(2)$의 서로 다른 실근의 개수가 짝수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 2가지 경우 중 하나이다.

(i)



(ii)



이 경우에 사차함수 $f(x)$는

$$\begin{aligned}f(x)&=p(x+2)^2(x-2)^2+f(2)\\&=p(x^4-8x^2+16)+f(2)\ (\text{단, } p>0,\ p\text{는 상수})\end{aligned}$$

ㄱ. (i), (ii) 모두 구간 $(-\infty, -2)$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이다. (참)

ㄴ. (i)의 경우에는 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$가 성립하지 않는다. (거짓)

ㄷ. (i)의 경우에는 $a\ge-2$일 때, 열린 구간 $(a, a+3)$에 속하는 실수 x에 대하여 $x\ne2$이면 $f'(x)>0$이 성립한다.

(ii)의 경우에는

$f'(x)=p(4x^3-16x)=4px(x+2)(x-2)$

이므로 열린 구간 $(-2, 0)$ 또는 구간 $(2, \infty)$에서 함수 $f(x)$가 증가한다.

따라서 $a\ge-2$일 때, 열린 구간 $(a, a+3)$에 속하는 어떤 실수 x가 존재하여 $f'(x)>0$이 성립한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

21

$a_1=0$

$a_2=2-1=1$

$a_3=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$a_4=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

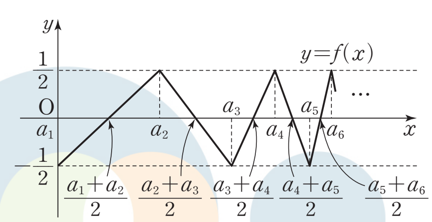
$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}$

이므로 닫힌 구간 $[a_n, a_{n+1}]$의 길이는 $\frac{1}{2^{n-1}}$이다.

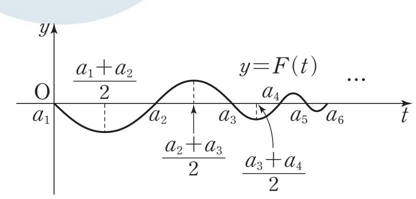
또한 $f(a_n)=\begin{cases}-\frac{1}{2} & (n\text{은 홀수})\\ \frac{1}{2} & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

이고 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 $\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 $F(t)=\int_0^t f(x)dx$로 놓으면 함수 $y=F(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 실수 t에 대한 방정식 $\int_0^t f(x)dx=p$를 만족시키는 t의 개수가 11이 되려면 직선 $y=p$가 곡선 $y=F(t)$와 11개의 점에서만 만나면 된다.

즉, p는 닫힌 구간 $[a_{11}, a_{12}]$에서 함수 $F(t)$의 극솟값이 되거나 닫힌 구간 $[a_{12}, a_{13}]$에서 함수 $F(t)$의 극댓값이 되어야 한다.
닫힌 구간 $[a_{11}, a_{12}]$에서 함수 $F(t)$의 극솟값은 밑변의 길이가 $\frac{1}{2}(a_{12}-a_{11})=\frac{1}{2^{11}}$이고 높이가 $\frac{1}{2}$인 삼각형의 넓이에 -1을 곱한 값과 같으므로

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{11}}\times\frac{1}{2}\times(-1)=-\frac{1}{2^{13}}$

닫힌 구간 $[a_{12}, a_{13}]$에서 함수 $F(t)$의 극댓값은 밑변의 길이가 $\frac{1}{2}(a_{13}-a_{12})=\frac{1}{2^{12}}$이고 높이가 $\frac{1}{2}$인 삼각형의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{12}}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{14}}$

따라서 구하는 모든 상수 p의 값의 합은

$-\frac{1}{2^{13}}+\frac{1}{2^{14}}=-\frac{1}{2^{14}}$

답 ③

22

$$\begin{aligned}{}_5H_3+{}_5C_3&={}_7C_3+{}_5C_2\\&=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}+\frac{5\times4}{2\times1}\\&=45\end{aligned}$$

답 45

23

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3}(4x^3-2x+1)dx&=\Big[x^4-x^2+x\Big]_{-1}^{3}\\&=(81-9+3)-(1-1-1)\\&=76\end{aligned}$$

답 76

24

$f^{-1}(10)=a$로 놓으면
$f(a)=10$에서
$a^3+a=10$, $a^3+a-10=0$
$(a-2)(a^2+2a+5)=0$
이때 $a^2+2a+5=0$을 만족시키는 실수 a는 없으므로
$a=2$
따라서 $f^{-1}(10)=2$

답 2

25

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$에서
$a+b=1+1+1=3$, $b=3-a$ …… ㉠
또한 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분계수가 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1-}\frac{ax+b-3}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}\frac{ax-a}{x-1}\ (\text{㉠에 의해})\\&=a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1+}\frac{x^2+x+1-3}{x-1}\\&=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}\\&=3\end{aligned}$$

에서 $a=3$
㉠에서 $b=3-3=0$
따라서 $10(a^2+b^2)=10\times(3^2+0)=90$

답 90

26

주머니에서 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

3개의 공의 색깔이 모두 다른 경우의 수는
$3\times2\times2=12$
3개의 공의 색깔이 모두 다를 확률은 $\frac{12}{35}$이므로 구하는 확률은

$1-\frac{12}{35}=\frac{23}{35}$

따라서 $p=35$, $q=23$이므로
$p+q=35+23=58$

답 58

다른 풀이

주머니에서 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

(i) 흰 공을 3개 꺼내는 경우의 수는 1
(ii) 흰 공을 2개만 꺼내는 경우의 수는
${}_3C_2\times{}_4C_1=3\times4=12$
(iii) 빨간 공을 2개 꺼내는 경우의 수는
${}_2C_2\times{}_5C_1=1\times5=5$
(iv) 파란 공을 2개 꺼내는 경우의 수는
${}_2C_2\times{}_5C_1=1\times5=5$
(i)~(iv)에서 같은 색깔의 공이 있도록 꺼내는 경우의 수는
$1+12+5+5=23$
이므로 구하는 확률은 $\frac{23}{35}$이다.
따라서 $p=35$, $q=23$이므로
$p+q=35+23=58$

27

$S(A)=2+3+7+8+9+10=39$이므로
$S(A\cup B_k)\geq40$이 성립하려면 $k\geq4$ …… ㉠
$n(A\cap B_k)\leq4$가 성립하려면 $k\leq9$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $4\leq k\leq9$
따라서 모든 자연수 k의 값의 합은
$4+5+6+7+8+9=39$

답 39

28

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{2}{n}+\frac{4k}{n^2}\right)f\left(-1+\frac{2k}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-1+\frac{2k}{n}\right)f\left(-1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$$

$$=\int_{-1}^{1}xf(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(4x^5+3x^4+2x^3+x^2+x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(4x^5+2x^3+x)dx+\int_{-1}^{1}(3x^4+x^2)dx$$

$$=0+2\int_{0}^{1}(3x^4+x^2)dx$$

$$=2\left[\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=2\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{28}{15}$$

따라서 $p=15$, $q=28$이므로

$p+q=15+28=43$

답 43

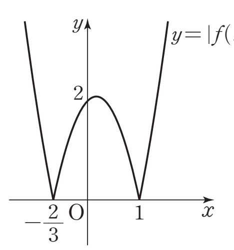
29

방정식 $f(x)=0$, 즉 $3x^2-x-2=0$에서

$(3x+2)(x-1)=0$

$x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=1$

이때 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



따라서 양수 a에 대하여 $\int_a^{a+1}|f(x)|dx$가 최소가 되려면 열린 구간 $(a, a+1)$에 1이 있어야 한다.

즉, $a<1<a+1$에서 $0<a<1$

$$\int_a^{a+1}|f(x)|dx$$

$$=\int_a^1|3x^2-x-2|dx+\int_1^{a+1}|3x^2-x-2|dx$$

$$=\int_a^1(-3x^2+x+2)dx+\int_1^{a+1}(3x^2-x-2)dx$$

$$=\left[-x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_a^1+\left[x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_1^{a+1}$$

$$=2a^3+2a^2-2a+\frac{3}{2}$$

$h(a)=2a^3+2a^2-2a+\frac{3}{2}$이라 하면

$h'(a)=6a^2+4a-2=2(a+1)(3a-1)$

$0<a<1$이므로 $h'(a)=0$에서 $a=\frac{1}{3}$

$0<a<1$에서 함수 $h(a)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	(1)
$h'(a)$		$-$	0	$+$	
$h(a)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $h(a)$는 $a=\frac{1}{3}$일 때 극소이면서 최소이다.

따라서 $p=3$, $q=1$이므로

$p+q=3+1=4$

답 4

30

(i) 사차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서만 극소가 되는 경우

$a<\alpha$이면 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서만 극솟값을 갖고 극댓값을 갖지 않는다.

$a\ge\alpha$이면 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서만 극솟값을 갖고 극댓값을 갖지 않는다.

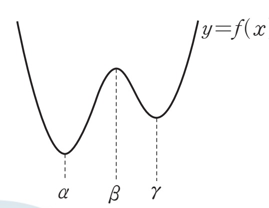
그러므로 모든 실수 a에 대하여

$n(A)=0$, $n(B)=1$

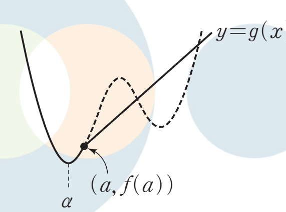
따라서 $h(a)=-1$이므로 함수 $h(a)$는 실수 전체에서 연속이다.

(ii) 사차함수 $f(x)$가 x의 값이 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$일 때 각각 극소, 극대, 극소가 되는 경우

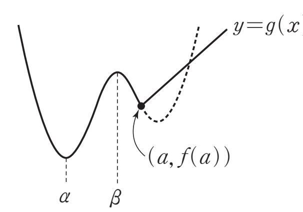
① $f(\alpha)<f(\gamma)$이면



$a\le\beta$일 때, $n(A)=0$, $n(B)=1$

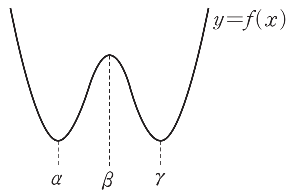


$a>\beta$일 때, $n(A)=1$, $n(B)=2$

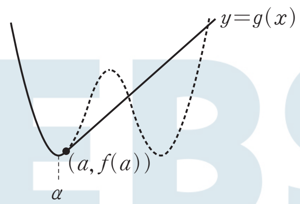


따라서 $h(a)=-1$이므로 함수 $h(a)$는 실수 전체에서 연속이다.

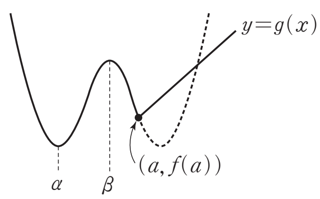
② $f(\alpha)=f(\gamma)$이면



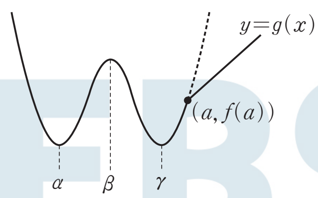
$a\le\beta$일 때, $n(A)=0$, $n(B)=1$



$\beta<a<\gamma$일 때, $n(A)=1$, $n(B)=2$



$a\ge\gamma$일 때, $n(A)=1$, $n(B)=1$



따라서 $h(a)=\begin{cases} -1 & (a<\gamma) \\ 0 & (a\ge\gamma) \end{cases}$

함수 $h(a)$는 $a=\gamma$에서 불연속이므로 $\gamma=0$

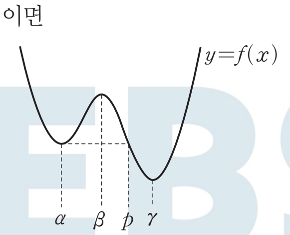
조건 (가)에서 $\alpha=-2$, $f(-2)=0$이고 $f(\alpha)=f(\gamma)$이므로

$f(-2)=f(0)=0$

그러므로 $f(x)=x^2(x+2)^2$

그런데 이 경우는 $f(-3)=9\ne15$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

③ $f(\alpha)>f(\gamma)$이면

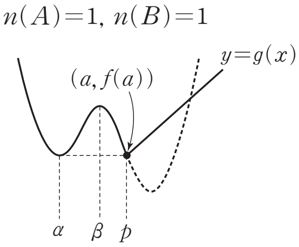


$f(\alpha)=f(p)$인 p가 β와 γ 사이에 존재한다.

$a\le\beta$일 때, $n(A)=0$, $n(B)=1$

$\beta<a<p$일 때, $n(A)=1$, $n(B)=2$

$a=p$일 때, $n(A)=1$, $n(B)=1$



$a>p$일 때, $n(A)=1$, $n(B)=2$

따라서 $h(a)=\begin{cases} -1 & (a\ne p) \\ 0 & (a=p) \end{cases}$이므로 함수 $h(a)$는 $a=p$에서만 불연속이다.

이때 조건에서 $p=0$이고 조건 (가)에서 $f(0)=f(-2)=0$

따라서 상수 c에 대하여 $f(x)=x(x+2)^2(x+c)$

조건 (나)에서 $f(-3)=-3\times1\times(-3+c)=15$이므로

$c=-2$

즉, $f(x)=x(x+2)^2(x-2)$이므로

$f(4)=4\times36\times2=288$

답 288

실전 모의고사 4회

본문 170~177쪽

01 ②	02 ④	03 ⑤	04 ①	05 ③
06 ①	07 ③	08 ④	09 ③	10 ⑤
11 ①	12 ④	13 ②	14 ②	15 ③
16 ①	17 ④	18 ②	19 ③	20 ②
21 ②	22 120	23 9	24 42	25 7
26 15	27 72	28 30	29 32	30 18

01

$8^{\frac{1}{4}}\times4^{-\frac{1}{8}}=2^{\frac{3}{4}}\times2^{-\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

답 ②

02

$A\cap B^C=A-B=\{3, 5, 6, 7\}$

따라서 $n(A\cap B^C)=4$

답 ④

03

$\log_5 10+\log_5\frac{5}{2}=\log_5\left(10\times\frac{5}{2}\right)=\log_5 25=\log_5 5^2=2$

답 ⑤

04

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$이므로

$\frac{1}{6}=\mathrm{P}(B)\times\frac{2}{3}$에서

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{7}{12}\end{aligned}$$

답 ①

05

세 수 $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{2a}$, $\sqrt[3]{32}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(\sqrt{2a})^2=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{32}$

$2a^2=\sqrt[3]{2\times2^5}$

$a^2=\frac{1}{2}\times\sqrt[3]{2^6}=\frac{1}{2}\times(\sqrt[3]{2^3})^2=\frac{1}{2}\times2^2=2$

이때 $a>0$이므로 $a=\sqrt{2}$

답 ③

06

$(f^{-1}\circ g)(2)=f^{-1}(g(2))=f^{-1}(0)=a$ (a는 실수)로 놓으면

$f(a)=a^3+8=0$에서 $a=-2$

따라서 $(f^{-1}\circ g)(2)=-2$

답 ①

07

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$|x-a|\le4$에서 $a-4\le x\le a+4$이므로

$P=\{x|a-4\le x\le a+4\}$

$|x^2-5x|\le6$에서 $-6\le x^2-5x\le6$이므로

$x^2-5x+6\ge0$이고 $x^2-5x-6\le0$

(i) $x^2-5x+6\ge0$에서

$(x-2)(x-3)\ge0$

$x\le2$ 또는 $x\ge3$

(ii) $x^2-5x-6\le0$에서

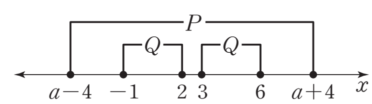
$(x+1)(x-6)\le0$

$-1\le x\le6$

(i), (ii)에서

$Q=\{x|-1\le x\le2$ 또는 $3\le x\le6\}$

이때 p가 q이기 위한 필요조건, 즉 $p\Longleftarrow q$이므로 $P\supset Q$이어야 한다.



그림에서 $a-4\le-1$이고 $a+4\ge6$이어야 하므로

$2\le a\le3$

따라서 실수 a의 최댓값은 3이다.

답 ③

08

주어진 그래프에서

$\lim_{x\to0+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to1-}f(x)=2$

따라서 $\lim_{x\to0+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)=-1+2=1$

답 ④

09

$f(x)=\int_1^x(t-1)(t-2)(t-3)dt$에서

$f'(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$이므로

방정식 $f'(x)=0$, 즉 $(x-1)(x-2)(x-3)=0$의 실근은

$x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 모든 실근의 합은

$1+2+3=6$

답 ③

10

$f(x)=\frac{-3x+5}{x-2}=\frac{-1}{x-2}-3$

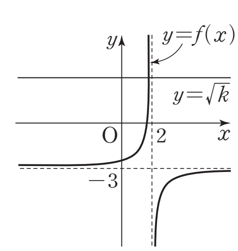
이므로 곡선 $y=f(x)$의 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=-3$이다.

$\{f(x)\}^2=k$에서

$f(x)=\sqrt{k}$ 또는 $f(x)=-\sqrt{k}$

$f(x)=\sqrt{k}$는 양수 k의 값에 상관없이 항상



오직 하나의 실근을 가지므로 $f(x)=-\sqrt{k}$는 실근을 갖지 않아야 한다.
따라서 $-\sqrt{k}=-3$에서 $k=9$

답 ⑤

11

한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는
$6\times6\times6=216$
이때 나온 눈의 수를 각각 a, b, c라 하고 이를 순서쌍 (a, b, c)로 나타내어 보자.
(i) 공차가 1인 등차수열이 되는 경우
$(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(3, 4, 5)$, $(4, 5, 6)$의 4가지
(ii) 공차가 2인 등차수열이 되는 경우
$(1, 3, 5)$, $(2, 4, 6)$의 2가지
(iii) 공차가 -1인 등차수열이 되는 경우
$(3, 2, 1)$, $(4, 3, 2)$, $(5, 4, 3)$, $(6, 5, 4)$의 4가지
(iv) 공차가 -2인 등차수열이 되는 경우
$(5, 3, 1)$, $(6, 4, 2)$의 2가지
따라서 구하는 확률은
$$\frac{4+2+4+2}{216}=\frac{1}{18}$$

답 ①

12

$t=0$에서 $t=4$까지의 위치의 변화량이 0이므로
$$\int_0^4 (3t^2-12t+a)dt=\left[t^3-6t^2+at\right]_0^4$$
$$=64-96+4a=0$$
따라서 $a=8$

답 ④

13

동아리의 학생 중 한 명을 임의로 선택했을 때, 그 학생이 안경을 쓴 학생인 사건을 A, 남학생인 사건을 B라 하자.
$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1}{2}$에서
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(A)$ ...... ㉠
$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{1}{3}$에서
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$ ...... ㉡
㉠, ㉡에서 $\frac{1}{2}\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)$
$\mathrm{P}(B)=x$라 하면 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}x$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}x$이므로
$\mathrm{P}(A|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)}{1-\mathrm{P}(B)}=\frac{1}{4}$에서
$\frac{\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}x}{1-x}=\frac{1}{4}$, $\frac{x}{3(1-x)}=\frac{1}{4}$
$4x=3-3x$, $7x=3$
$x=\frac{3}{7}$, 즉 $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{7}$
따라서 남학생의 수는
$35\times\frac{3}{7}=15$

답 ②

14

함수 $f(x)$는 $x\neq-1$인 모든 실수에서 연속이고, $g(x)=2x+a$라 할 때 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 $x=-1$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.
이때 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 $x=-1$에서 연속이려면
$\lim_{x\to-1-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to-1+}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g(-1)}{f(-1)}$이어야 한다.
$$\lim_{x\to-1-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to-1-}\frac{2x+a}{1}=a-2$$
$$\lim_{x\to-1+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to-1+}\frac{2x+a}{x^2+2x+3}=\frac{a-2}{2}$$
$$\frac{g(-1)}{f(-1)}=\frac{a-2}{2}$$
이므로 $a-2=\frac{a-2}{2}$
따라서 $a=2$

답 ②

15

철수가 k번째 날에 푼 수학 문제의 수를 a_k라 하면 주어진 규칙에서
$a_1=10$
$a_2=10+2$
$a_3=10+2\times2$
⋮
$a_{10}=10+2\times9$
$a_{11}=0$
$a_{12}=30$
$a_{13}=30+2$
$a_{14}=30+2\times2$
⋮
$a_{20}=30+2\times8$
$a_{21}=0$
$a_{22}=30$
$a_{23}=30+2$
$a_{24}=30+2\times2$
⋮
$a_{30}=30+2\times8$
따라서 30일 동안 철수가 푼 모든 수학 문제의 개수는
$$\frac{10(10+10+2\times9)}{2}+\frac{9(30+30+2\times8)}{2}\times2=874$$

답 ③

16

100원짜리 동전의 표본비율은 $\frac{80}{100}=0.8$이므로 동전 1000개의 모집단에서 100원짜리 동전의 비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.8-1.96\times\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{100}}\le p\le0.8+1.96\times\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{100}}$

$0.7216\le p\le0.8784$

따라서 $a=0.7216$, $b=0.8784$이므로

$b-a=0.8784-0.7216=0.1568$

답 ①

17

$\overline{A_1A_2}=\overline{B_1B_2}=x$라 하면 $\angle A_1M_1A_2=\angle B_1M_1B_2=30°$이므로

$\overline{A_2M_1}=\overline{B_2M_1}=\sqrt{3}x$, $\overline{A_1M_1}=\overline{B_1M_1}=2x$

$\overline{A_1B_2}=\overline{B_1A_2}=4\sin 30°=4\times\frac{1}{2}=2$

$2x+\sqrt{3}x=2$에서 $x=2(2-\sqrt{3})$

이때

$S_1=2\times\frac{1}{2}\times x\times\sqrt{3}x=\sqrt{3}x^2=4\sqrt{3}(7-4\sqrt{3})$

$=28\sqrt{3}-48=4(7\sqrt{3}-12)$

또한 $\overline{OA_1}=4$, $\overline{OA_2}=4\cos 30°=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$이므로

수열 $\{S_n\}$은 공비가 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$인 등비수열이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{4(7\sqrt{3}-12)}{1-\frac{3}{4}}=16(7\sqrt{3}-12)$

따라서 $a=16$, $b=12$이므로

$a+b=16+12=28$

답 ④

18

조건 (가)에서 극한값이 -2이므로

$f(x)=x^2-4x+k$ (k는 상수)

로 놓을 수 있다.

방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^2-4x+k=0$의 두 실근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$

조건 (나)에서 $|\alpha|+|\beta|=8$

그러므로 α와 β는 서로 다른 부호이다.

이때 $\alpha<\beta$라 하면 $\beta-\alpha=8$에서 $\alpha=-2$, $\beta=6$이므로

$k=\alpha\beta=-2\times6=-12$

따라서 $f(x)=x^2-4x-12$이므로

$f(1)=1-4-12=-15$

답 ②

19

(i) $k=2, 3, 4, \cdots, 10$일 때,

$X=k$가 될 확률은

$P(X=k)=\frac{{}_{k-1}C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{\boxed{k-1}}{45}$이므로

$E(X)=\sum_{k=2}^{10}kP(X=k)$

$=\sum_{k=2}^{10}\left(k\times\frac{k-1}{45}\right)$

$=\sum_{k=1}^{10}\left(k\times\frac{k-1}{45}\right)$

$=\frac{1}{45}\left(\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}k\right)$

$=\frac{1}{45}\left(\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}\right)$

$=\frac{22}{3}$

(ii) $k=1, 2, 3, \cdots, 9$일 때,

$Y=10k$가 될 확률은

$P(Y=10k)=\frac{{}_{10-k}C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{\boxed{10-k}}{45}$이므로

$E(Y)=\sum_{k=1}^{9}10kP(Y=10k)$

$=\sum_{k=1}^{9}\left(10k\times\frac{10-k}{45}\right)$

$=\sum_{k=1}^{10}\left(10k\times\frac{10-k}{45}\right)$

$=\frac{20}{9}\sum_{k=1}^{10}k-\frac{2}{9}\sum_{k=1}^{10}k^2$

$=\frac{20}{9}\times\frac{10\times11}{2}-\frac{2}{9}\times\frac{10\times11\times21}{6}$

$=\frac{110}{3}$

$E(aY)=aE(Y)$이므로 $E(X)=E(aY)$에서

$\frac{22}{3}=a\times\frac{110}{3}$

$a=\frac{22}{110}=\boxed{\frac{1}{5}}$

따라서 $f(k)=k-1$, $g(k)=10-k$, $p=\frac{1}{5}$이므로

$p\times f(5)\times g(5)=\frac{1}{5}\times4\times5=4$

답 ③

20

ㄱ. $F(x)=\int_a^x t^3dt=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_a^x=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{4}a^4$

$a=0$이면 함수 $y=|F(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $a\ne0$이면 함수 $y=|F(x)|$는 $x=\pm a$에서 미분가능하지 않다.

따라서 $A=\{a|a$는 0이 아닌 실수$\}$ (참)

ㄴ. $F'(x)=(x-1)(x-3)(x-5)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=5$이고

$F(5)-F(1)$

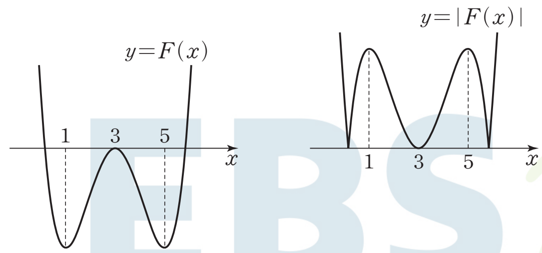
$=\int_a^5(t-1)(t-3)(t-5)dt-\int_a^1(t-1)(t-3)(t-5)dt$

$=\int_1^5(t-1)(t-3)(t-5)dt$

$=\int_1^5 (t^3-9t^2+23t-15)dt$

$=\left[\frac{1}{4}t^4-3t^3+\frac{23}{2}t^2-15t\right]_1^5=0$

이므로 $a=3$일 때 함수 $F(x)=\int_3^x f(t)dt$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이때 함수 $y=|F(x)|$는 서로 다른 2개의 점에서 미분가능하지 않다.

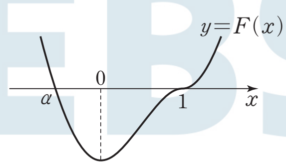
$a=1$인 경우 함수 $y=|F(x)|$는 모든 실수에서 미분가능하고 $a=2$인 경우 함수 $y=|F(x)|$는 서로 다른 4개의 점에서 미분가능하지 않다.

따라서 집합 A에 속하는 가장 작은 자연수는 3이다. (참)

ㄷ. 방정식 $\int_1^x t(t-1)^2\,dt=0$의 1이 아닌 실근을 α라 하자.

(i) $a=1$ 또는 $a=\alpha$일 때,

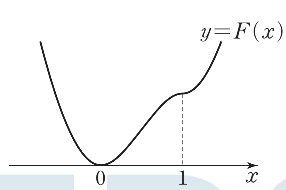
함수 $F(x)=\int_a^x t(t-1)^2\,dt$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이때 함수 $y=|F(x)|$는 $x=\alpha$에서만 미분가능하지 않다.

(ii) $a=0$일 때,

함수 $F(x)=\int_0^x t(t-1)^2\,dt$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

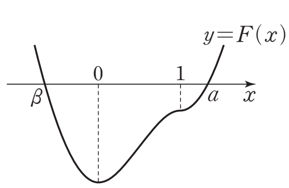


따라서 함수 $y=|F(x)|$는 실수 전체에서 미분가능하다.

(iii) $a\neq1$, $a\neq\alpha$, $a\neq0$일 때,

방정식 $\int_a^x t(t-1)^2\,dt=0$의 a가 아닌 실근을 β라 하자.

$a>1$일 때, 함수 $F(x)=\int_a^x t(t-1)^2\,dt$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이때 함수 $y=|F(x)|$는 $x=a$와 $x=\beta$에서 미분가능하지 않다.

$a\neq1$, $a\neq\alpha$, $a\neq0$인 a에 대하여 마찬가지로 함수 $y=|F(x)|$는 $x=a$와 $x=\beta$에서 미분가능하지 않다.

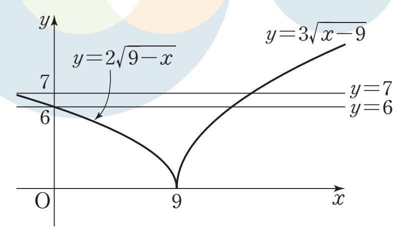
(i), (ii), (iii)에서 $A=\{a\,|\,a$는 $a\neq0$, $a\neq1$, $a\neq\alpha$인 실수$\}$

따라서 집합 A에 속하지 않는 실수의 개수는 3이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

21



두 함수 $y=2\sqrt{9-x}$와 $y=3\sqrt{x-9}$의 그래프는 모두 점 $(9, 0)$을 지난다.

또 함수 $y=2\sqrt{9-x}$의 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 6)$이다.

세 함수 $y=n$, $y=2\sqrt{9-x}$, $y=3\sqrt{x-9}$의 그래프로 둘러싸인 영역(경계 포함)에 속하는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 좌표를 (a, b)라 하자.

$2\sqrt{9-x}=b$에서 $x=9-\frac{b^2}{4}$

$3\sqrt{x-9}=b$에서 $x=9+\frac{b^2}{9}$

즉, $9-\frac{b^2}{4}\le a\le 9+\frac{b^2}{9}$

$b=1$일 때, $9-\frac{1}{4}\le a\le 9+\frac{1}{9}$에서

$a=9$이므로 a의 값은 1개

$b=2$일 때, $9-1\le a\le 9+\frac{4}{9}$에서

$a=8, 9$이므로 a의 값은 2개

$b=3$일 때, $9-\frac{9}{4}\le a\le 9+1$에서

$a=7, 8, 9, 10$이므로 a의 값은 4개

$b=4$일 때, $9-4\le a\le 9+\frac{16}{9}$에서

$a=5, 6, 7, 8, 9, 10$이므로 a의 값은 6개

$b=5$일 때, $9-\frac{25}{4}\le a\le 9+\frac{25}{9}$에서

$a=3, 4, 5, \cdots, 11$이므로 a의 값은 9개

$b=6$일 때, $9-9\le a\le 9+4$에서

$a=1, 2, 3, \cdots, 13$이므로 a의 값은 13개

그러므로 $a_6=1+2+4+6+9+13=35$

$b=7$일 때, $9-\frac{49}{4}\le a\le 9+\frac{49}{9}$에서

$a=1, 2, 3, \cdots, 14$이므로 a의 값은 14개

그러므로 $a_7=35+14=49$

따라서 $a_6+a_7=35+49=84$

답 ②

22

$(6-1)!=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

답 120

23

$g(x)=x^3+3x^2-2f(x)$에서

$g'(x)=3x^2+6x-2f'(x)$

$2f'(x)+g'(x)=3x^2+6x$

따라서 $2f'(1)+g'(1)=3+6=9$

답 9

24

$\{a, b\}\subset\{1, 15, 17, 19\}$이면 $A\cap B=\{9\}$이므로

집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합의 최솟값은 $m=9$이다.

$\{a, b\}=\{11, 13\}$이면 $A\cap B=\{9, 11, 13\}$이므로

집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합의 최댓값은 $M=33$이다.

따라서 $m+M=9+33=42$

답 42

25

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a\neq0)$, 공비를 r $(r\neq1)$이라 하자.

$S_{20}=\dfrac{a(r^{20}-1)}{r-1}$, $P_{10}=\dfrac{ar\{(r^2)^{10}-1\}}{r^2-1}=\dfrac{ar(r^{20}-1)}{(r+1)(r-1)}$이므로

$S_{20}=3P_{10}$에서

$\dfrac{a(r^{20}-1)}{r-1}=3\times\dfrac{ar(r^{20}-1)}{(r+1)(r-1)}$

$1=\dfrac{3r}{r+1}$, $r+1=3r$, $r=\dfrac{1}{2}$

$S_{30}=\dfrac{a(r^{30}-1)}{r-1}$, $Q_{10}=\dfrac{ar^2\{(r^3)^{10}-1\}}{r^3-1}=\dfrac{ar^2(r^{30}-1)}{(r-1)(r^2+r+1)}$이므로

$S_{30}=mQ_{10}$에서

$\dfrac{a(r^{30}-1)}{r-1}=m\times\dfrac{ar^2(r^{30}-1)}{(r-1)(r^2+r+1)}$

$1=\dfrac{mr^2}{r^2+r+1}$, $m=\dfrac{r^2+r+1}{r^2}$

$r=\dfrac{1}{2}$을 대입하면

$m=\dfrac{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}+1}{\dfrac{1}{4}}=7$

답 7

26

함수 $f(x)=x^3-ax^2+bx$에서 x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율 m은

$m=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{8-4a+2b}{2}=4-2a+b$

곡선 $y=f(x)$는 점 $(2, 2)$를 지나므로

$f(2)=8-4a+2b=2$

$2a-b=3$ ······ ㉠

$f'(x)=3x^2-2ax+b$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 2)$에서의 접선의 기울기 n은

$n=f'(2)=12-4a+b$

$m+n=-2$이므로

$(4-2a+b)+(12-4a+b)=-2$

$3a-b=9$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=6$, $b=9$

따라서 $a+b=6+9=15$

답 15

27

조건 (가)를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_{12}={}_{14}\mathrm{C}_{12}={}_{14}\mathrm{C}_2=\dfrac{14\times13}{2\times1}=91$

조건 (나)에서 $(a-b)(b-c)(c-a)\neq0$이려면 a, b, c가 모두 서로 다른 수이어야 한다.

이때 a, b, c 중 같은 수가 있는 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

(i) a, b, c가 모두 같은 경우

$a=b=c$인 순서쌍 (a, b, c)는 $(4, 4, 4)$뿐으로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 1이다.

(ii) a, b, c 중에서 2개만 서로 같은 경우

$a=b\neq c$인 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 방정식 $2a+c=12$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, c의 순서쌍 (a, c)의 개수에서 $a=4$, $c=4$인 경우만 제외하면 되므로

$7-1=6$

$b=c\neq a$, $a=c\neq b$인 경우도 마찬가지이므로 a, b, c 중 2개만 서로 같은 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$6\times3=18$

(i), (ii)에서 a, b, c 중 같은 수가 있는 경우의 수는

$1+18=19$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$91-19=72$

답 72

28

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_n=a+(n-1)d$ $(a>0,\ d>0)$

$n\geq1$일 때, $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$이므로 조건 (가)에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{dn+a}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{d+\frac{a}{n}}{1}=d$$

즉, $d=2$이므로

$a_n=a+(n-1)\times2=2n+a-2$

조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{2a_1}\ (\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\infty\text{이므로})$$

$\frac{1}{2a_1}=\frac{1}{6}$에서 $a_1=3$

즉, $a=3$이므로

$a_n=2n+3-2=2n+1$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$$
$$=2\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$
$$=n^2+2n$$

자연수 n의 값이 증가할 때 S_n의 값은 증가하고,

$S_{30}=30^2+2\times30=960$, $S_{31}=31^2+2\times31=1023$

이므로 $S_n<1000$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값은 30이다.

답 30

29

조건 (가)는

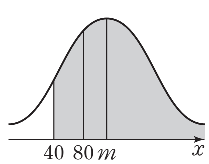
$P(X\geq80)+P(40\leq X\leq m)=\frac{1}{2}$

이고 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

(i) $m\geq80$이면 [그림 1]과 같이

$P(X\geq80)+P(40\leq X\leq m)>\frac{1}{2}$

이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.



[그림 1]

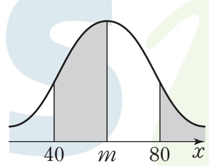
(ii) $m<80$이면 [그림 2]와 같이

$P(40\leq X\leq m)=P(m\leq X\leq80)$

이어야 조건 (가)를 만족시킨다.

즉, $f(40)=f(80)$이므로

$m=\frac{40+80}{2}=60$ …… ㉠



[그림 2]

조건 (나)에서 $V\left(\frac{1}{4}X+5\right)=\frac{1}{16}V(X)=4$이므로

$V(X)=64$

즉, $\sigma=\sqrt{V(X)}=8$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 확률변수 X는 정규분포 $N(60,\ 8^2)$을 따르고,

$Z=\frac{X-60}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$P(72.8\leq X\leq76)=P\left(\frac{72.8-60}{8}\leq Z\leq\frac{76-60}{8}\right)$$
$$=P(1.6\leq Z\leq2)$$
$$=P(0\leq Z\leq2)-P(0\leq Z\leq1.6)$$
$$=0.4772-0.4452$$
$$=0.032$$

따라서 $p=0.032$이므로

$1000p=32$

답 32

30

조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극값을 갖거나 $f(-1)=0$이어야 한다.

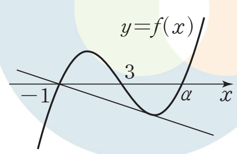
이때 조건 (다)에 의하여 $f'(-1)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극값을 갖지 않고 $f(-1)=0$이다.

또한 충분히 작은 양수 h에 대하여

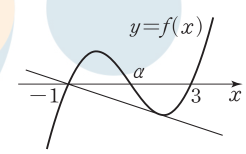
$f(-1-h)<0,\ f(-1+h)>0$ …… ㉠

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극값을 갖거나 $f(3)=0$이어야 한다.

만약 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극값을 갖지 않으면 삼차방정식 $f(x)=0$은 중근이 아닌 실근 $x=-1$ 또는 $x=3$을 가지므로 ㉠에 의하여 $x=\alpha\ (\alpha>-1,\ \alpha\neq3)$을 근으로 갖는다.

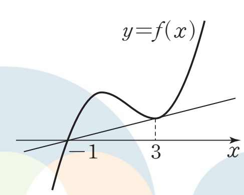


[그림 1]



[그림 2]

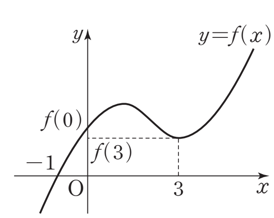
이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같으므로 점 $(-1,\ f(-1))$을 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 접선 중에서 기울기가 음수인 것이 존재하게 된다. 이는 조건 (다)에 모순이다.



[그림 3]

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극값을 가져야 하고 조건 (다)를 만족시키려면 [그림 3]과 같이 구간 $(-1,\ \infty)$에서 곡선 $y=f(x)$는 x축과 만나지 않아야 한다.

또한 조건 (나)를 만족시키려면 구간 $[0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(3)$이어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$f(3)=k$로 놓으면

$f(x)-k=(x-3)^2(x+a)$에서

$f(x)=(x-3)^2(x+a)+k$

$f(-1)=16(a-1)+k=0$에서

$k=-16a+16$

그러므로 $f(x)=(x-3)^2(x+a)-16a+16$

$0<f(3)\le f(0)$에서

$0<-16a+16\le -7a+16$

$0\le a<1$

따라서 $f(2)=a+2-16a+16=-15a+18$

이므로 $f(2)$의 최댓값은 $a=0$일 때 18이다.

답 18

실전 모의고사 5회

본문 178~184쪽

01 ④	02 ④	03 ④	04 ③	05 ④
06 ④	07 ⑤	08 ③	09 ②	10 ①
11 ②	12 ④	13 ③	14 ⑤	15 ①
16 ④	17 ②	18 ②	19 ②	20 ④
21 ①	22 64	23 25	24 87	25 6
26 20	27 180	28 188	29 111	30 4

01

$$16^{\frac{5}{4}}\times\log_{\sqrt{3}}3=(2^4)^{\frac{5}{4}}\times 2\log_3 3$$
$$=2^5\times 2$$
$$=64$$

답 ④

02

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{3n+3}-7^{n+1}}{2^{3n+1}-7^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8\times 8^n-7\times 7^n}{2\times 8^n-7^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8-7\times\left(\frac{7}{8}\right)^n}{2-\left(\frac{7}{8}\right)^n}$$
$$=\frac{8}{2}=4$$

답 ④

03

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 $P\subset Q$이어야 한다.

이때 $P=\{3\}$이므로 $3\in Q$에서

$3^2-1=k$

따라서 $k=8$

답 ④

04

$f(x)=(x^3+x^2+x-1)(x^2+2)$에서

$f'(x)=(3x^2+2x+1)(x^2+2)+(x^3+x^2+x-1)\times 2x$

따라서

$$f'(-1)=(3-2+1)(1+2)+(-1+1-1-1)\times(-2)$$
$$=6+4=10$$

답 ③

05

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1+a_2=a_1+a_1r=\frac{5}{2}$ …… ㉠

$a_1a_2a_3=a_1\times a_1r\times a_1r^2=a_1^3r^3=(a_1r)^3=\frac{1}{8}$

에서 $a_1r=\frac{1}{2}$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a_1+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

따라서 $a_1=2$

답 ④

06

두 사건 A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}\{\mathrm{P}(A)\}^2$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{5}{6}=\frac{7}{4}\mathrm{P}(A)-\frac{3}{4}\{\mathrm{P}(A)\}^2$

양변에 12를 곱하면

$10=21\mathrm{P}(A)-9\{\mathrm{P}(A)\}^2$

$9\{\mathrm{P}(A)\}^2-21\mathrm{P}(A)+10=0$

$\{3\mathrm{P}(A)-2\}\{3\mathrm{P}(A)-5\}=0$

이때 $0<\mathrm{P}(A)<1$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$

답 ④

07

$\mathrm{P}(X\geq 1)=1-\mathrm{P}(X=0)=\frac{65}{81}$이므로

$\mathrm{P}(X=0)=1-\frac{65}{81}=\frac{16}{81}$

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(4,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{P}(X=0)={}_4\mathrm{C}_0p^0(1-p)^4=(1-p)^4=\frac{16}{81}$

이때 $0<p<1$이므로

$1-p=\frac{2}{3}$, $p=\frac{1}{3}$

따라서 $\mathrm{V}(X)=4\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$이므로

$\mathrm{V}(3X-5)=3^2\mathrm{V}(X)=9\times\frac{8}{9}=8$

답 ⑤

08

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^n+a}{x^{n+1}+2}$에서

(i) $-1<x<1$일 때, $f(x)=\frac{a}{2}$

(ii) $x=1$일 때, $f(x)=\frac{2+a}{1+2}=\frac{2+a}{3}$

(iii) $x>1$일 때, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{a}{x^{n+1}}}{1+\frac{2}{x^{n+1}}}=\frac{2}{x}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$이어야 한다.

즉, $\frac{a}{2}=2=\frac{2+a}{3}$에서

$a=4$

$f(1)=\frac{2+4}{3}=2$

따라서 $a+f(1)=4+2=6$

답 ③

09

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수)라 하면

$\int_0^x f(t)dt=x^2+2kx$ ······ ㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면

$\int_0^1 f(t)dt=1+2k$

$k=1+2k$에서 $k=-1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x+2k=2x-2$

따라서 $f(2)=4-2=2$

답 ②

10

$\lim_{h\to 0}\frac{3f(1+h)-2g(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{3\{f(1+h)-f(1)\}-2\{g(1-h)-g(1)\}+3f(1)-2g(1)}{h}$

$=3\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+2\lim_{h\to 0}\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}$

$+\lim_{h\to 0}\frac{3f(1)-2g(1)}{h}$

$f(x)=\int_1^x p(t)dt-2$, $g(x)=\int_1^x q(t)dt-3$ ······ ㉠

㉠에서

$f(1)=\int_1^1 p(t)dt-2=-2$, $g(1)=\int_1^1 q(t)dt-3=-3$

이므로 $3f(1)-2g(1)=3\times(-2)-2\times(-3)=0$

그러므로 $\lim_{h\to 0}\frac{3f(1+h)-2g(1-h)}{h}=3f'(1)+2g'(1)$

또한 ㉠에서 $f'(x)=p(x)$, $g'(x)=q(x)$이므로

$f'(1)=p(1)=4$, $g'(1)=q(1)=6$

따라서

$\lim_{h\to 0}\frac{3f(1+h)-2g(1-h)}{h}=3f'(1)+2g'(1)=3\times 4+2\times 6=24$

답 ①

11

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(3a+2b)\left(\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\right)=13+\frac{6b}{a}+\frac{6a}{b}$$
$$\geq 13+2\sqrt{\frac{6b}{a}\times\frac{6a}{b}}$$
$$=13+2\times 6=25$$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

이때 $3a+2b=5$이므로

$$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\geq 5$$

따라서 $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}$의 최솟값은 5이다.

답 ②

12

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n-\frac{n^2-1}{2n+3}\right)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(na_n-\frac{n^2-1}{2n+3}\right)=0$이다.

따라서

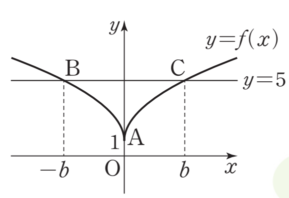
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(na_n-\frac{n^2-1}{2n+3}\right)\times\frac{1}{n}+\frac{n^2-1}{n(2n+3)}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(na_n-\frac{n^2-1}{2n+3}\right)\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n(2n+3)}$$
$$=0\times 0+\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}}=\frac{1}{2}$$

답 ④

13

함수 $f(x)=\sqrt{|ax|+1}$은 $x=0$에서 최소이므로 점 A의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.

또 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=5$가 만나는 두 점을 $\mathrm{B}(-b,\ 5)$, $\mathrm{C}(b,\ 5)$ $(b>0)$이라 하면 삼각형 ABC의 넓이는 48이므로



$$\frac{1}{2}\times 2b\times 4=48,\ b=12$$

즉, $f(12)=5$이므로

$\sqrt{|12a|+1}=5$, $|12a|+1=25$

$|12a|=24$, $|a|=2$

따라서 $f(x)=\sqrt{|2x|+1}$이므로

$f(-2)=\sqrt{|-4|+1}=\sqrt{5}$

답 ③

14

ㄱ. $\lim_{x\to 0-}f(x)=1$, $\lim_{x\to 0-}g(x)=1$이므로

$\lim_{x\to 0-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)\times\lim_{x\to 0-}g(x)=1\times 1=1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 1+}f(x)=0$, $\lim_{x\to 1+}g(x)=0$이고

$x>1$에서 $f(x)>g(x)$이므로

$$\lim_{x\to 1+}|f(x)-g(x)|=\lim_{x\to 1+}\{f(x)-g(x)\}$$
$$=\lim_{x\to 1+}f(x)-\lim_{x\to 1+}g(x)$$
$$=0-0=0\text{ (참)}$$

ㄷ. ㄴ에서 $\lim_{x\to 1+}|f(x)-g(x)|=0$

$\lim_{x\to 1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to 1-}g(x)=1$이고

$0<x<1$에서 $f(x)<g(x)$이므로

$$\lim_{x\to 1-}|f(x)-g(x)|=\lim_{x\to 1-}\{g(x)-f(x)\}$$
$$=\lim_{x\to 1-}g(x)-\lim_{x\to 1-}f(x)$$
$$=1-1=0$$

그러므로 $\lim_{x\to 1}|f(x)-g(x)|=0$

한편, $f(1)=1$, $g(1)=1$이므로

$|f(1)-g(1)|=|1-1|=0$

따라서 $\lim_{x\to 1}|f(x)-g(x)|=|f(1)-g(1)|$이므로

함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

15

임의추출한 고등학생 900명 중 90 %가 A 회사의 스마트폰을 사용하는 학생이므로 표본비율 $\hat{p}$은

$$\hat{p}=\frac{90}{100}=0.9$$

이 지역의 전체 고등학생 중 A 회사의 스마트폰을 사용하는 학생의 비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.9-1.96\sqrt{\frac{0.9\times 0.1}{900}}\leq p\leq 0.9+1.96\sqrt{\frac{0.9\times 0.1}{900}}$$

$$0.9-1.96\times\frac{1}{100}\leq p\leq 0.9+1.96\times\frac{1}{100}$$

따라서 $a=0.9-1.96\times\frac{1}{100}$, $b=0.9+1.96\times\frac{1}{100}$이므로

$$b-a=2\times 1.96\times\frac{1}{100}=0.0392$$

답 ①

16

$x^2-(8n+1)x+8n<0$에서 $(x-8n)(x-1)<0$이므로

$1<x<8n$

즉, $A=\{x\,|\,1<x<8n\}$

$x^2-13mx+36m^2<0$에서 $(x-4m)(x-9m)<0$이므로

$4m<x<9m$

즉, $B=\{x\,|\,4m<x<9m\}$

이때 $A-B=A$이므로 $A\cap B=\varnothing$이다.

그러므로 자연수 m, n에 대하여

$8n\leq 4m$, 즉 $\frac{m}{n}\geq 2$

따라서 $\frac{m}{n}$의 최솟값은 2이다.

답 ④

17

학생들 중에서 임의로 한 명을 택할 때, 그 학생이 오전 8시 이전에 등교하는 학생인 사건을 A, 오후 5시 이전에 하교하는 학생인 사건을 B라 하자. 전체 학생의 24 %가 오전 8시 이전에 등교하며, 전체 학생의 34 %가 오후 5시 이전에 하교하고, 이 두 사건 A, B의 등하교 시간에 모두 해당되지 않는 학생은 전체의 48 %이므로 다음과 같은 표를 만들 수 있다.

등교 시간 / 하교 시간	오전 8시 이전(A)	오전 8시 후(A^C)	합계
오후 5시 이전(B)	6 %	28 %	34 %
오후 5시 후(B^C)	18 %	48 %	66 %
합계	24 %	76 %	100 %

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{6}{100}}{\frac{24}{100}}=\frac{1}{4}$$

답 ②

18

21장의 카드를 일렬로 나열하는 모든 경우의 수를 N이라 하면

$$N=\frac{21!}{10!11!}$$

홀수 번째 자리에 있는 카드 중 숫자 1이 적혀 있는 카드의 개수를 k라 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=k)&=\frac{{}_{11}\mathrm{C}_k\times{}_{10}\mathrm{C}_{11-k}}{N}\\&=\frac{11!}{k!(11-k)!}\times\frac{10!}{(11-k)!(k-1)!}\times\frac{10!11!}{21!}\\&=\frac{11!}{k\times(k-1)!(11-k)!}\times\frac{10!}{(11-k)!(k-1)!}\\&\qquad\times\frac{10!11!}{21!}\\&=\frac{(11!)^2}{21!}\times\left\{\frac{10!}{(k-1)!(\boxed{11-k})!}\right\}^2\times\frac{1}{k}\\&=\frac{(11!)^2}{21!}\times({}_{10}\mathrm{C}_{\boxed{11-k}})^2\times\frac{1}{k}\ (\text{단, } k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 11)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\sum_{k=1}^{11}k\mathrm{P}(X=k)\\&=\frac{(11!)^2}{21!}\sum_{k=1}^{11}({}_{10}\mathrm{C}_{\boxed{11-k}})^2\end{aligned}$$

이때 $(1+x)^{10}(1+x)^{10}$의 전개식과 $(1+x)^{20}$의 전개식에서 x^{10}의 계수를 비교하면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{11}({}_{10}\mathrm{C}_{\boxed{11-k}})^2&=({}_{10}\mathrm{C}_0)^2+({}_{10}\mathrm{C}_1)^2+({}_{10}\mathrm{C}_2)^2+\cdots+({}_{10}\mathrm{C}_{10})^2\\&={}_{20}\mathrm{C}_{\boxed{10}}\end{aligned}$$

이므로

$$\mathrm{E}(X)=\frac{(11!)^2}{21!}\times{}_{20}\mathrm{C}_{\boxed{10}}=\frac{(11!)^2}{21!}\times\frac{20!}{(10!)^2}=\frac{11^2}{21}=\boxed{\frac{121}{21}}$$

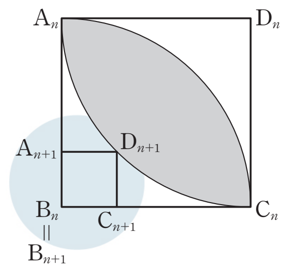
따라서 $f(k)=11-k$, $a=10$, $b=\frac{121}{21}$이므로

$$\frac{b}{a+1}\times f(4)=\frac{121}{21}\times\frac{1}{11}\times 7=\frac{11}{3}$$

답 ②

19

그림 R_n에서 새로 색칠된 도형의 넓이를 a_n이라 하자.

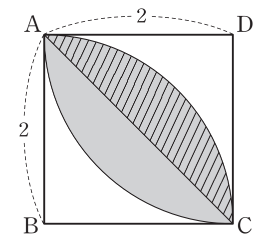


[그림 1]

n번째 추가되는 정사각형 중 점 B를 한 꼭짓점으로 하는 정사각형 1개를 정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$이라 하고, 정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 한 변의 길이를 l_n이라 하면 [그림 1]에서

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n}=\sqrt{2}l_n$, $\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{D}_{n+1}}=l_n$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_{n+1}}&=\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n}-\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{D}_{n+1}}\\&=(\sqrt{2}-1)l_n\end{aligned}$$



R_1

[그림 2]

[그림 2]에서 빗금친 부분의 넓이는

$$\frac{1}{4}\times\pi\times 2^2-\frac{1}{2}\times 2\times 2=\pi-2$$

이므로 $a_1=2(\pi-2)$

그림 R_1에서 정사각형 ABCD의 대각선의 길이는 $2\sqrt{2}$이고 그림 R_2에서 얻은 작은 정사각형의 대각선의 길이는 $2(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}-2$이다.

그러므로 그림 R_n에서 가장 작은 정사각형 안에 색칠된 도형과 그림 R_{n+1}에서 가장 작은 정사각형 안에 색칠된 도형의 닮음비는 $2\sqrt{2}:(2\sqrt{2}-2)$, 즉 $1:\frac{2-\sqrt{2}}{2}$이고, 넓이의 비는 $1:\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2$, 즉 $1:\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$이다.

또한 그림 R_{n+1}에서 가장 작은 정사각형의 개수는 그림 R_n에서 가장 작은 정사각형의 개수의 2배이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $2(\pi-2)$이고 공비가 $3-2\sqrt{2}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{2(\pi-2)}{1-(3-2\sqrt{2})}=(\pi-2)(\sqrt{2}+1)$$

답 ②

20

$a+b+c+d+e=7$ (a, b, c, d, e는 음이 아닌 정수)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$${}_5\mathrm{H}_7={}_{11}\mathrm{C}_7={}_{11}\mathrm{C}_4=\frac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1}=330$$

$(2^a)^b=2^{ab}$의 값이 3보다 작거나 같은 경우의 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 다음과 같다.

(i) $a=0$, $b=0$인 경우

$c+d+e=7$ (c, d, e는 음이 아닌 정수)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36$$

(ii) $a=0$, $b\neq0$인 경우

$b+c+d+e=7$ (b는 자연수, c, d, e는 음이 아닌 정수)에서

$b=b'+1$로 놓으면

$b'+c+d+e=6$ (b', c, d, e는 음이 아닌 정수)

를 만족시키는 순서쌍 (b', c, d, e)의 개수는

${}_4\mathrm{H}_6={}_9\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

이므로 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 84

(iii) $a\neq0$, $b=0$인 경우

(ii)와 같은 방법으로 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 84

(iv) $a=1$, $b=1$인 경우

$c+d+e=5$ (c, d, e는 음이 아닌 정수)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$

(i)~(iv)에서 $(2^a)^b$의 값이 3보다 작거나 같은 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 $36+84+84+21=225$

따라서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$330-225=105$

답 ④

다른 풀이

$2^{ab}>3$이므로 $ab\geq2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수를 구하면 된다.

(i) $a=1$, $b\geq2$인 경우

$1+b+c+d+e=7$에서 $b=b'+2$로 놓으면

$b'+c+d+e=4$ (b', c, d, e는 음이 아닌 정수)이므로 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

(ii) $b=1$, $a\geq2$인 경우

(i)과 같은 방법으로 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 35

(iii) $a\geq2$, $b\geq2$인 경우

$a=a'+2$, $b=b'+2$로 놓으면

$a'+b'+c+d+e=3$ (a', b', c, d, e는 음이 아닌 정수)이므로 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

${}_5\mathrm{H}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$35+35+35=105$

21

$f(x)-g(x)=\int_0^x g(t)dt$에서

$f(x)=g(x)+\int_0^x g(t)dt$이므로

$f'(x)=g'(x)+g(x)$

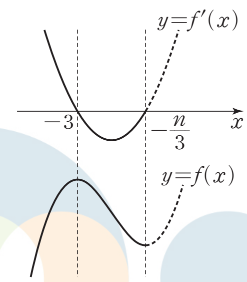
$g(x)=3x^2+(n+3)x+2n-3$에서

$g'(x)=6x+n+3$이므로

$$\begin{aligned}f'(x)&=g'(x)+g(x)\\&=6x+n+3+3x^2+(n+3)x+2n-3\\&=3x^2+(n+9)x+3n\\&=(3x+n)(x+3)\end{aligned}$$

(i) $n=1, 2, 3, \cdots, 8$일 때,

구간 $\left(-\infty, -\frac{n}{3}\right]$에서 두 함수 $y=f'(x)$와 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



즉, 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 최댓값을 갖는다.

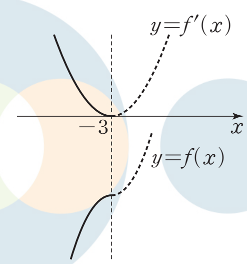
따라서 $n=1, 2, 3, \cdots, 8$일 때, $a_n=-3$이므로

$$\begin{aligned}g(a_n)&=g(-3)\\&=3\times(-3)^2+(n+3)\times(-3)+2n-3\\&=15-n\end{aligned}$$

(ii) $n=9$일 때,

$f'(x)=3(x+3)^2$이므로

구간 $(-\infty, -3]$에서 두 함수 $y=f'(x)$와 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



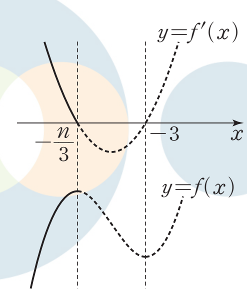
즉, 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 최댓값을 갖는다.

따라서 $a_9=-3$이므로

$g(a_9)=g(-3)=6$

(iii) $n\geq10$일 때,

구간 $\left(-\infty, -\frac{n}{3}\right]$에서 두 함수 $y=f'(x)$와 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



즉, 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{n}{3}$에서 최댓값을 갖는다.

따라서 $n\geq10$일 때, $a_n=-\frac{n}{3}$이므로

$$\begin{aligned}g(a_n)&=g\left(-\frac{n}{3}\right)\\&=3\times\left(-\frac{n}{3}\right)^2+(n+3)\times\left(-\frac{n}{3}\right)+2n-3\\&=n-3\end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$\sum_{k=1}^{15} g(a_k) = \sum_{k=1}^{8}(15-k)+6+\sum_{k=10}^{15}(k-3)$$
$$=(14+13+12+\cdots+7)+6+(7+8+9+\cdots+12)$$
$$=\frac{8\times(14+7)}{2}+6+\frac{6\times(7+12)}{2}$$
$$=84+6+57$$
$$=147$$

답 ①

22

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+2x^2-4x-8}{\sqrt{x+2}-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)^2(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)^2(\sqrt{x+2}+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\{(x+2)^2(\sqrt{x+2}+2)\}$$
$$=16\times 4=64$$

답 64

23

$$\int_{-a}^{a}(2x^5+3x^2+3x+a)dx$$
$$=\int_{-a}^{a}(2x^5+3x)dx+\int_{-a}^{a}(3x^2+a)dx$$
$$=0+2\int_{0}^{a}(3x^2+a)dx$$
$$=2\Big[x^3+ax\Big]_0^a$$
$$=2a^3+2a^2$$

즉, $2a^3+2a^2=(a+1)^2$에서

$2a^3+a^2-2a-1=0$

$(2a+1)(a+1)(a-1)=0$

$a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 $k=-\frac{1}{2}+(-1)+1=-\frac{1}{2}$이므로

$100\times k^2=100\times\frac{1}{4}=25$

답 25

24

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

조건 (가)에서

$a_5-a_3=(a+4d)-(a+2d)=2d=6$이므로

$d=3$

조건 (나)에서

$a_7=a+6d=a+18$이고

$\sum_{k=1}^{5} a_k=\frac{5(2a+4d)}{2}=\frac{5(2a+12)}{2}=5a+30$이므로

$a+18=5a+30$에서

$4a=-12$

$a=-3$

따라서 $a_{31}=-3+30\times 3=87$

답 87

25

$\log a+\log b+\log c=3+p+q+r$

$3+p+q+r$가 자연수이고 $0<p+q+r<\frac{3}{2}$이므로

$p+q+r=1$

즉, $\log abc=4$이므로

$abc=10^4=2^4\times 5^4$

$0<p<\frac{1}{2}$이므로 $1<\log a<\frac{3}{2}$

즉, $10<a<10\sqrt{10}$이므로 $11\le a\le 31$ (a는 자연수)

같은 방법으로

$11\le b\le 31$, $11\le c\le 31$ (b, c는 자연수)

따라서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c)는

$(16, 25, 25)$, $(25, 16, 25)$, $(25, 25, 16)$,

$(20, 20, 25)$, $(20, 25, 20)$, $(25, 20, 20)$

이므로 그 개수는 6이다.

답 6

26

$f(x)=\sqrt{-x+5}+6=\sqrt{-(x-5)}+6$

이고, $g(x)=-\sqrt{x}-2$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수

$y=g(x)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭

이동한 후 x축의 방향으로 5만큼, y축의

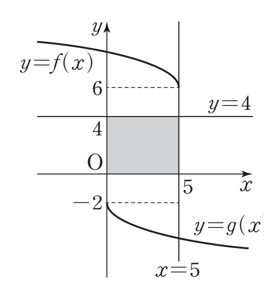
방향으로 4만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 $A-B$는 그림과 같이 x축, y축

및 두 직선 $x=5$, $y=4$로 둘러싸인 도형

의 넓이와 같으므로

$A-B=5\times 4=20$



답 20

27

조건 (가)에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$의 값이 모두 다르게 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$에 대응하는 원소를 선택하는 경우의 수는

집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 3개의 원소를 선택하여 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_5P_3=5\times 4\times 3=60$

조건 (나)에서

$f(3)\ge 3$일 때, $f(3)$에 대응하는 원소는 3, 4, 5의 3가지

$f(5)\ge 5$일 때, $f(5)$에 대응하는 원소는 5의 1가지

그러므로 $f(2k+1)\geq 2k+1$을 만족시키는 경우의 수는

$3\times 1=3$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$60\times 3=180$

답 180

28

함수 $y=f(x-4)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 확률변수 Y의 평균과 표준편차는

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(X)+4=180+4=184$

$\sigma(Y)=\sigma(X)=10$

확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(184,\ 10^2)$을 따르고, 확률변수

$Z=\frac{Y-184}{10}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(178\leq Y\leq a)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{178-184}{10}\leq\frac{Y-184}{10}\leq\frac{a-184}{10}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-0.6\leq Z\leq\frac{a-184}{10}\right)$

이때 $\mathrm{P}(-0.6\leq Z\leq 0)=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.6)=0.2257<0.3811$이므로

$\mathrm{P}\left(-0.6\leq Z\leq\frac{a-184}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.6)+\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-184}{10}\right)$

$=0.2257+\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-184}{10}\right)$

$=0.3811$

에서 $\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-184}{10}\right)=0.1554$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.4)=0.1554$이므로

$\frac{a-184}{10}=0.4$

따라서 $a=4+184=188$

답 188

29

주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_{20}\mathrm{C}_3=1140$

주머니에서 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 숫자 중에서 최댓값과 최솟값의 합이 20 이하가 되는 경우의 수를 구해 보자.

3개의 공의 숫자를 a, b, c $(a<b<c)$라 하면 a가 될 수 있는 값은 1, 2, $\cdots$, 9이다.

(i) $a=1$인 경우

$c\leq 19$이므로 b, c는 2부터 19까지의 자연수 중 서로 다른 2개를 선택하여 작은 것을 b, 큰 것을 c로 정하면 된다.

그러므로 이 경우의 수는 ${}_{18}\mathrm{C}_2$

(ii) $a=2$인 경우

$c\leq 18$이므로 b, c는 3부터 18까지의 자연수 중 서로 다른 2개를 선택하여 작은 것을 b, 큰 것을 c로 정하면 된다.

그러므로 이 경우의 수는 ${}_{16}\mathrm{C}_2$

(iii) $a=k$ $(k=3,\ 4,\ \cdots,\ 9)$인 경우

(i), (ii)와 마찬가지 방법으로

$c\leq 20-k$이므로 b, c는 $k+1$부터 $20-k$까지의 자연수 중 서로 다른 2개를 선택하여 작은 것을 b, 큰 것을 c로 정하면 된다.

그러므로 이 경우의 수는 ${}_{20-2k}\mathrm{C}_2$

(i), (ii), (iii)에서 최댓값과 최솟값의 합이 20 이하가 되는 경우의 수는

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{9}{}_{20-2k}\mathrm{C}_2&=\sum_{k=1}^{9}{}_{2k}\mathrm{C}_2\\&=\sum_{k=1}^{9}\frac{2k(2k-1)}{2}\\&=\sum_{k=1}^{9}(2k^2-k)\\&=2\times\frac{9\times 10\times 19}{6}-\frac{9\times 10}{2}\\&=570-45\\&=525\end{aligned}$$

이므로 구하는 확률은

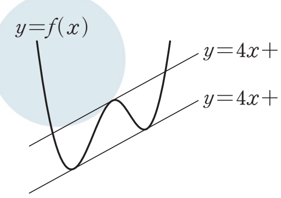
$\frac{525}{1140}=\frac{35}{76}$

따라서 $p=76$, $q=35$이므로

$p+q=76+35=111$

답 111

30



최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=4x+3$과 서로 다른 두 점에서 접하고, $f'(-3)=f'(a)=f'(b)=4$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4x+3$의 두 접점의 x좌표는 -3, b이다.

또 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=4x+4$와 한 점에서 접하고 접점 외의 서로 다른 두 점에서 만나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4x+4$의 접점의 x좌표는 a이다.

따라서

$f(x)-(4x+3)=(x+3)^2(x-b)^2$

으로 놓을 수 있다.

즉, $f(x)=(x+3)^2(x-b)^2+4x+3$이므로

$f'(x)=2(x+3)(x-b)^2+2(x+3)^2(x-b)+4$

$\quad=2(x+3)(x-b)(2x+3-b)+4$

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식이 $y=4x+4$이므로

$f(a)=4a+4$에서

$(a+3)^2(a-b)^2+4a+3=4a+4$

$(a+3)^2(a-b)^2=1$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 $f'(a)=4$에서

$2(a+3)(a-b)(2a+3-b)+4=4$

$(a+3)(a-b)(2a+3-b)=0$

$-3<a<b$이므로 $b=2a+3$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(a+3)^4=1$, $(a+3)^2=1$

즉, $a=-4$ 또는 $a=-2$

$a>-3$이므로 $a=-2$

㉡에서 $b=-1$

따라서 $f(x)=(x+3)^2(x+1)^2+4x+3$이므로

$f(a)f(b)=f(-2)f(-1)=-4\times(-1)=4$

답 4