미적분Ⅱ

01 지수함수와 로그함수

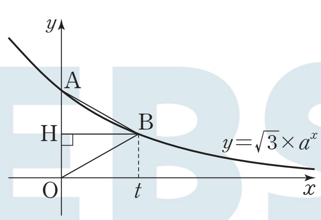
정답 본문 6~13쪽

01 25	02 ③	03 5	04 ②	05 ⑤
06 ④	07 ①	08 ②	09 ⑤	10 5
11 ③	12 ③	13 ④	14 ③	15 7
16 2	17 ③	18 ②	19 ②	20 ⑤
21 ④	22 ①	23 ⑤	24 ③	

01

곡선 $y=\sqrt{3}\times a^x$이 y축과 만나는 점 A의 좌표는 $y=\sqrt{3}\times a^x$에 $x=0$을 대입하면 $y=\sqrt{3}\times a^0=\sqrt{3}$이므로 $\mathrm{A}(0,\ \sqrt{3})$이다.

곡선 $y=\sqrt{3}\times a^x$ 위의 제1사분면에 있는 점 B의 좌표를 $\mathrm{B}(t,\ \sqrt{3}\times a^t)\ (t>0)$이라 하고, 점 B에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3}$이므로 삼각형 AOB는 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$인 정삼각형이다.

이때 점 $\mathrm{H}(0,\ \sqrt{3}\times a^t)$은 선분 OA의 중점이다. 즉,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\times a^t$$

$$a^t=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

한편, $\overline{\mathrm{BH}}=t$이고, $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{OA}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$이므로

$$t=\frac{3}{2} \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$a^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2},\ \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$a^3=\frac{1}{4}$$

따라서 $100a^3=100\times\frac{1}{4}=25$

답 25

02

곡선 $y=3^{x-1}$은 곡선 $y=3^x$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=3^x-1$은 곡선 $y=3^x$을 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AD}}=1$이다.

삼각형 ACE는 $\angle\mathrm{CAE}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{CE}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{AE}}^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right)^2=1^2+\overline{\mathrm{AE}}^2$$

$\overline{\mathrm{AE}}^2=\frac{4}{3}$이고 $\overline{\mathrm{AE}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{AE}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

이때 $\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{AE}}-\overline{\mathrm{AD}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$

따라서 삼각형 CDE의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{DE}}=\frac{1}{2}\times1\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$$

답 ③

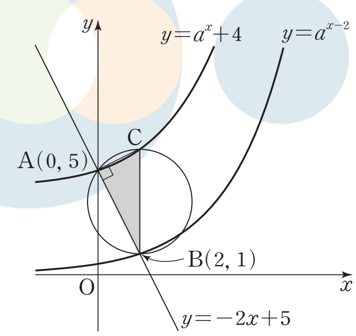
03

곡선 $y=a^x+4$와 직선 $y=-2x+5$는 모두 점 $(0,\ 5)$를 지나므로 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(0,\ 5)$이고, 곡선 $y=a^{x-2}$은 곡선 $y=a^x+4$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

점 $\mathrm{A}(0,\ 5)$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점을 D라 하면 점 D의 좌표는 $\mathrm{D}(2,\ 1)$이고 점 D는 곡선 $y=a^{x-2}$ 위에 있다. 이때 직선 AD의 기울기는

$\frac{1-5}{2-0}=-2$이고 점 A를 지나는 직선 $y=-2x+5$의 기울기와 같다.

즉, 점 D는 직선 $y=-2x+5$ 위에 있으므로 점 B와 점 D는 같은 점이고, 점 B의 좌표는 $(2,\ 1)$이다.



세 점 A, B, C는 선분 BC가 지름인 한 원 위에 있으므로

$$\angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{2}$$

즉, 직선 AB와 직선 AC는 수직이므로 직선 AC의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x+5$$

이때 점 C의 좌표는 $(2,\ 6)$이다.

따라서 직각삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{(2-0)^2+(1-5)^2}\times\sqrt{(2-0)^2+(6-5)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$$

답 5

04

$5^{-x+2}=\sqrt{\frac{1}{125}}$에서 $5^{-x+2}=5^{-\frac{3}{2}}$

$-x+2=-\frac{3}{2}$에서 $x=\frac{7}{2}$

답 ②

05

$\frac{a}{8^x} \ge 2^{1-x}$에서 $\frac{a}{(2^3)^x} \ge 2^{1-x}$

$\frac{a}{2^{3x}} \ge 2^{1-x}$ …… ㉠

$2^{3x} > 0$이므로 부등식 ㉠은 $a \ge 2^{1-x} \times 2^{3x}$

$a \ge 2^{1+2x}$ …… ㉡

함수 $f(x)=2^{1+2x}$이라 하면 함수 $f(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 부등식 ㉡을 만족시키는 자연수 x의 개수가 2가 되기 위해서는 $f(2) \le a < f(3)$이어야 한다.

즉, $2^{1+2\times2} \le a < 2^{1+2\times3}$

따라서 $32 \le a < 128$이므로 구하는 a는 32부터 127까지의 자연수이고, 그 개수는

$127-32+1=96$

답 ⑤

06

$2^{2x} - a \times 2^x + 32 = 0$에서

$2^x = t\ (t>0)$으로 놓으면

$t^2 - at + 32 = 0$ …… ㉠

방정식 $2^{2x} - a \times 2^x + 32 = 0$의 서로 다른 두 자연수인 근을 $m,\ n\ (m>n)$이라 하면 방정식 ㉠의 서로 다른 두 근은 $2^m,\ 2^n$이므로 방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$2^m + 2^n = a$ …… ㉡

$2^m \times 2^n = 32$ …… ㉢

㉢에서 $2^{m+n} = 2^5$, 즉 $m+n=5$ …… ㉣

㉣을 만족시키는 두 자연수 m, n의 순서쌍 $(m,\ n)\ (m>n)$은 $(4,\ 1),\ (3,\ 2)$이므로 ㉡에서

$a = 2^4 + 2^1 = 18$ 또는 $a = 2^3 + 2^2 = 12$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$18 + 12 = 30$

답 ④

07

$f(2b) - f(b) = 2$에서

$\log_a (2b) - \log_a b = 2$

$\log_a \frac{2b}{b} = 2$, $\log_a 2 = 2$

로그의 정의에 의하여 $a^2 = 2$

$a > 1$이므로 $a = \sqrt{2}$

따라서 $f(8) = \log_{\sqrt{2}} 8 = \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^6 = 6$

답 ①

08

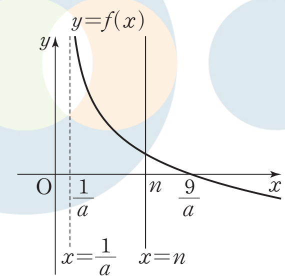
함수 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (ax-1) + 3$의 그래프는 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} (ax)$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{a}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다. 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} (ax)$의 그래프의 점근선은 직선 $x=0$(y축)이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 직선 $x = \frac{1}{a}$이다.

또한 $y = \log_{\frac{1}{2}} (ax-1) + 3$에 $y=0$을 대입하면

$0 = \log_{\frac{1}{2}} (ax-1) + 3$, $-3 = \log_{\frac{1}{2}} (ax-1)$

$ax - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$, $x = \frac{9}{a}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 좌표는 $\left(\frac{9}{a},\ 0\right)$이다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=n$이 제1사분면에서 만나기 위한 n의 값의 범위는

$\frac{1}{a} < n < \frac{9}{a}$ …… ㉠

㉠에서 $a=1$이면 $1 < n < 9$이므로 자연수 n의 값은 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이고, 그 개수는 7이다.

$a=2$이면 $\frac{1}{2} < n < \frac{9}{2}$이므로 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4이고, 그 개수는 4이다.

$a \ge 3$이면 $\frac{1}{3} < n < \frac{9}{a} \le 3$이므로 자연수 n의 개수는 2 이하이다.

따라서 구하는 자연수 a의 값은 2이다.

답 ②

09

두 점 A, C의 x좌표를 각각 $s,\ t\ (1<t<s)$로 놓으면

사각형 ABDC가 직사각형이므로 네 점 A, B, C, D의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(s,\ \log_4 s)$, $\mathrm{B}(s,\ \log_2 s)$, $\mathrm{C}(t,\ \log_2 t)$, $\mathrm{D}(t,\ \log_a t)$이다.

이때 두 점 A, C의 y좌표가 같으므로

$\log_4 s = \log_2 t$에서

$\log_4 s = \log_4 t^2$, $\log_4 \frac{s}{t^2} = 0$

로그의 정의에 의하여

$\frac{s}{t^2} = 4^0 = 1$, 즉 $s = t^2$ …… ㉠

또한 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}}$이므로

$\log_2 s - \log_4 s = \log_a t - \log_2 t$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\log_2 t^2 - \log_4 t^2 = \log_a t - \log_2 t$

$2\log_2 t - \frac{2}{2}\log_2 t = \frac{\log_2 t}{\log_2 a} - \log_2 t$

$2\log_2 t = \frac{\log_2 t}{\log_2 a}$

$\log_2 t > 0$이므로

$2=\dfrac{1}{\log_2 a}$, $\log_2 a=\dfrac{1}{2}$

로그의 정의에 의하여

$a=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

이때 $f(x)=\log_{\sqrt{2}} x$이므로

$\dfrac{f(16)}{a^2}=\dfrac{\log_{\sqrt{2}} 16}{(\sqrt{2})^2}=\dfrac{\log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^8}{2}=\dfrac{8}{2}=4$

답 ⑤

다른 풀이

점 A의 y좌표를 t라 하면 $\log_4 x=t$에서 $x=4^t$이고, $\log_2 x=t$에서 $x=2^t$이므로 두 점 A, C의 좌표는 각각 A$(4^t, t)$, C$(2^t, t)$이다.

또 점 B의 x좌표가 4^t이므로

$\log_2 4^t=\log_2 2^{2t}=2t$

즉, 두 점 B, D의 좌표는 각각 B$(4^t, 2t)$, D$(2^t, 2t)$이다.

점 D가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$2t=\log_a 2^t$, $2t=t\log_a 2$

$2=\log_a 2$, $a^2=2$

$1<a<2$이므로 $a=\sqrt{2}$

따라서 $\dfrac{f(16)}{a^2}=\dfrac{\log_{\sqrt{2}} 16}{(\sqrt{2})^2}=\dfrac{8}{2}=4$

10

진수의 조건에 의하여

$x>0$이고 $|2-x|>0$

즉, $x>0$이고 $x\neq 2$ …… ㉠

$2\log_2 x-\log_4 x=9\log_8 |2-x|$에서

$2\log_2 x-\dfrac{1}{2}\log_2 x=9\times\dfrac{1}{3}\log_2 |2-x|$

$\dfrac{3}{2}\log_2 x=3\log_2 |2-x|$

$\log_2 x=\log_2 (2-x)^2$

$x=(2-x)^2$

$x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$

$x=1$ 또는 $x=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 만족시키는 실수 x의 값은 1, 4이고, 그 합은

$1+4=5$

답 5

11

$y<\log_2 (x-1)-\log_2 (x-2)$ …… ㉠

㉠에서 진수의 조건에 의하여

$x-1>0$이고 $x-2>0$

즉, $x>2$ …… ㉡

㉡의 범위에서 $x^2-x>0$이므로

부등식 $2^{y+3}>x^2-x$에서

$\log_2 2^{y+3}>\log_2 (x^2-x)$

$y+3>\log_2 (x^2-x)$

$y>-3+\log_2 (x^2-x)$ …… ㉢

두 부등식 ㉠, ㉢에서

$-3+\log_2 (x^2-x)<y<\log_2 (x-1)-\log_2 (x-2)$ …… ㉣

즉, $-3+\log_2 (x^2-x)<\log_2 (x-1)-\log_2 (x-2)$

㉡의 범위에서 $x>0$, $x-1>0$이므로

$-3+\log_2 x+\log_2 (x-1)<\log_2 (x-1)-\log_2 (x-2)$

$\log_2 x+\log_2 (x-2)<3$

$\log_2 \{x(x-2)\}<3$

$\log_2 (x^2-2x)<\log_2 2^3$

밑 2는 1보다 크므로

$x^2-2x<2^3$, $x^2-2x-8<0$

$(x+2)(x-4)<0$

$-2<x<4$ …… ㉤

㉡, ㉤을 모두 만족시키는 정수 x의 값은 3이고,

$x=3$을 ㉣에 대입하면

$-3+\log_2 6<y<\log_2 2-\log_2 1$, $\log_2 \dfrac{3}{4}<y<1$

$-1<\log_2 \dfrac{3}{4}<0$이므로 $\log_2 \dfrac{3}{4}<y<1$을 만족시키는 정수 y의 값은 0이다.

따라서 $x+y=3+0=3$

답 ③

12

$\log_3 x=t$라 하면 모든 양의 실수 x에 대하여 주어진 부등식은

$t^2-2nt+4\geq 0$ …… ㉠

이고 t는 모든 실수의 값을 갖는다.

t에 대한 부등식 ㉠이 모든 실수 t에 대하여 성립하려면 t에 대한 이차방정식 $t^2-2nt+4=0$의 판별식을 D라 할 때, $\dfrac{D}{4}=n^2-4\leq 0$이어야 한다.

즉, $(n-2)(n+2)\leq 0$

$-2\leq n\leq 2$

따라서 구하는 정수 n의 값은 -2, -1, 0, 1, 2이고, 그 개수는 5이다.

답 ③

13

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 지나는 점 (3, 2)와 점근선인 직선 $y=-2$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 (2, 3)과 직선 $x=-2$는 각각 함수 $y=f(x)$의 그래프가 지나는 점과 점근선이다.

즉, $f(2)=3$에서 $\log_2 (2a+b)=3$

$2a+b=2^3$, 즉 $2a+b=8$ …… ㉠

한편, $f(x)=\log_2 (ax+b)=\log_2 \left\{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)\right\}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 (ax)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{b}{a}$만큼 평행이동한 것이다. 함수 $y=\log_2 (ax)$의 그래프의 점근선은 직선 $x=0$(y축)이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 직선 $x=-\dfrac{b}{a}$이다.

따라서 $-\dfrac{b}{a}=-2$, 즉 $b=2a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=4$

따라서 $a+b=2+4=6$

답 ④

14

점 A의 좌표를 $A(t,\ 2^t)$ $(t>0)$이라 하면

$2^t=4^x$에서 $2^t=2^{2x}$

$t=2x$, $x=\dfrac{t}{2}$

이므로 점 C의 좌표는 $C\left(\dfrac{t}{2},\ 2^t\right)$이다.

이때 $\overline{AC}=t-\dfrac{t}{2}=\dfrac{t}{2}$이므로

$\overline{AB}=2\sqrt{2}\times\overline{AC}=\sqrt{2}t$

직선 AB의 기울기가 -1이고, $\overline{AB}=\sqrt{2}t$이므로 점 B는 점 A를 x축의 방향으로 t만큼, y축의 방향으로 $-t$만큼 평행이동한 것이다.

즉, $B(2t,\ 2^t-t)$

또 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

점 B의 좌표는 $B(2^t,\ t)$이다.

따라서 $2t=2^t$ …… ㉠

㉠에 의하여 직선 OA의 기울기는

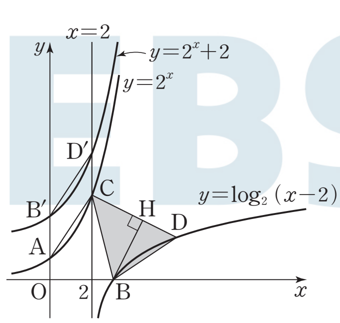
$\dfrac{2^t}{t}=\dfrac{2t}{t}=2$

답 ③

15

함수 $y=\log_2(x-2)$의 역함수는 $y=2^x+2$이므로 두 곡선 $y=\log_2(x-2)$, $y=2^x+2$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=2^x+2$가 y축과 만나는 점을 B′이라 하면 두 점 $B'(0,\ 3)$, $B(3,\ 0)$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 또한 곡선 $y=2^x+2$가 직선 $x=2$와 만나는 점을 D′이라 하면 곡선 $y=2^x+2$는 곡선 $y=2^x$을 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 곡선이므로 $D'(2,\ 6)$이고, $\overline{AC}=\overline{B'D'}$이다.



점 $D'(2,\ 6)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 D라 하면

점 $D(6,\ 2)$는 곡선 $y=\log_2(x-2)$ 위에 있고

$\overline{B'D'}=\overline{BD}$

따라서 $\overline{AC}=\overline{BD}$

이때 $\overline{CD}=\sqrt{(6-2)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{5}$

두 점 $C(2,\ 4)$, $D(6,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\dfrac{2-4}{6-2}(x-2)+4$

즉, $y=-\dfrac{1}{2}x+5$ …… ㉠

점 $B(3,\ 0)$에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 BH의 길이는 점 $B(3,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리이므로

$$\overline{BH}=\frac{\left|\frac{3}{2}+0-5\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$$

따라서 삼각형 CBD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{BH}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\dfrac{7\sqrt{5}}{5}=7$

답 7

16

$f(x)=3-\log_3(4-x)=3+\log_{\frac{1}{3}}\{-(x-4)\}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 곡선 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $f(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

이때 닫힌 구간 $[-5,\ 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값을 가지므로 구하는 최댓값은

$f(1)=3-\log_3 3=2$

답 2

17

닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $f(x)=\log_2(2x+a)$는 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하므로 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최솟값 m, $x=1$일 때 최댓값 M을 갖는다.

$m=f(0)=\log_2 a$

$M=f(1)=\log_2(a+2)$

$m+M=3$이므로

$\log_2 a+\log_2(a+2)=3$

$\log_2\{a(a+2)\}=\log_2 2^3$

$a(a+2)=8$

$a^2+2a-8=0$

$(a+4)(a-2)=0$

$a=-4$ 또는 $a=2$

$a>0$이므로 $a=2$

이때 $f(x)=\log_2(2x+2)$이므로

$m=\log_2 2=1$

$M=\log_2(2+2)=\log_2 4=2$

따라서 $a\times M-m=2\times2-1=3$

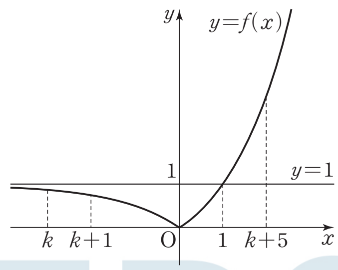
답 ③

18

함수 $f(x)=|2^x-1|=\begin{cases}-2^x+1 & (x<0)\\ 2^x-1 & (x\geq0)\end{cases}$의 그래프는 그림과 같이

구간 $(-\infty,\ 0)$에서 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소하고, 구간

$[0, \infty)$에서 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다. 또 함수 $f(x)=-2^x+1\ (x<0)$의 그래프의 점근선은 직선 $y=1$이다.



닫힌 구간 $[k, k+1]$에서 함수 $f(x)$가 $x=k+1$일 때 최솟값을 가지기 위해서는

$k+1\le 0$, 즉 $k\le -1$ ...... ㉠

함수 $f(x)=2^x-1\ (x\ge 0)$의 그래프는 점 $(1, 1)$을 지나므로 닫힌 구간 $[k+1, k+5]$에서 함수 $f(x)$가 $x=k+5$일 때 1보다 큰 최댓값을 가지기 위해서는

$k+5>1$, 즉 $k>-4$ ...... ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 k는 $-1, -2, -3$이므로 모든 정수 k의 값의 합은

$-1+(-2)+(-3)=-6$

답 ②

19

$2x=t$로 놓으면 $x=\frac{t}{2}$이고 $x\longrightarrow 0$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{6x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$$

답 ②

20

$\frac{1}{3x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow 0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\ln(1+3x)-\ln(3x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\ln\left(\frac{1}{3x}+1\right)}=\lim_{t\to 0+}\frac{e^{3t}-1}{\ln(t+1)}=\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{e^{3t}-1}{3t}\times 3}{\frac{\ln(t+1)}{t}}=\frac{1\times 3}{1}=3$$

답 ⑤

21

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{\ln(1+2x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\frac{\ln(1+2x)}{2x}}$$

함수 $f(x)=2e^x+a$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=2+a$

한편, $2x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 0$일 때 $t\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

따라서

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{\ln(1+2x)}=\frac{1}{2}\times\frac{\lim_{x\to 0}f(x)}{\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}}=\frac{1}{2}\times\frac{2+a}{1}=\frac{2+a}{2}=2$$

이므로 $2+a=4$에서 $a=2$

답 ④

22

$f(x)=(e^x+x^2)\ln x$에서

$$f'(x)=(e^x+x^2)'\times\ln x+(e^x+x^2)\times(\ln x)'=(e^x+2x)\times\ln x+(e^x+x^2)\times\frac{1}{x}$$

따라서 $f'(1)=(e+2)\times 0+(e+1)\times 1=e+1$

답 ①

23

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{h}=3\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}=3f'(2)=15$$

에서 $f'(2)=5$

한편, $x>0$일 때 $\ln\frac{x^2}{4}=2\ln x-\ln 4=2\ln x-2\ln 2$이므로

$f(x)=(ax+1)\ln\frac{x^2}{4}$에서

$f'(x)$

$=(ax+1)'\times(2\ln x-2\ln 2)+(ax+1)\times(2\ln x-2\ln 2)'$

$=a\times(2\ln x-2\ln 2)+(ax+1)\times\frac{2}{x}$

$f'(2)=0+(2a+1)\times 1=2a+1$

따라서 $2a+1=5$이므로

$a=2$

답 ⑤

24

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{\ln(x+2)-\ln 3}=3$에서 $x\longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-2x\}=0$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}\{f(x)-2x\}=f(1)-2=0$

즉, $f(1)=2$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2x}{\ln(x+2)-\ln 3}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{f(x)-2-2x+2}{x-1}}{\frac{\ln(x+2)-\ln 3}{x-1}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}-2\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-1}}{\lim_{x\to1}\frac{\ln(x+2)-\ln 3}{x-1}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-2\lim_{x\to1}1}{\lim_{x\to1}\frac{\ln(x+2)-\ln 3}{x-1}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $x-1=t$로 놓으면 $x=1+t$이고 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln(x+2)-\ln 3}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(3+t)-\ln 3}{t}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{t\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{3}\right)}{\frac{t}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\times1$$

$$=\frac{1}{3}$$

㉠에서

$$\frac{\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-2\lim_{x\to1}1}{\lim_{x\to1}\frac{\ln(x+2)-\ln 3}{x-1}}=\frac{f'(1)-2}{\frac{1}{3}}=3f'(1)-6$$

$3f'(1)-6=3$이므로 $f'(1)=3$

한편, $g(x)=f(x)(1+\log_2 x)$에서

$g(1)=f(1)\times(1+\log_2 1)=2\times1=2$

또 $g'(x)=f'(x)(1+\log_2 x)+f(x)\times\frac{1}{x\ln 2}$이므로

$$g'(1)=f'(1)\times(1+\log_2 1)+f(1)\times\frac{1}{\ln 2}$$

$$=3\times1+2\times\frac{1}{\ln 2}$$

$$=3+\frac{2}{\ln 2}$$

따라서 $g(1)+g'(1)=2+\left(3+\frac{2}{\ln 2}\right)=5+\frac{2}{\ln 2}$

답 ③

02 삼각함수

정답				본문 16~25쪽
01 54	02 ①	03 ④	04 ③	05 ②
06 ③	07 ④	08 ②	09 ④	10 ③
11 ③	12 ②	13 ④	14 ④	15 ④
16 ①	17 ④	18 ④	19 ③	20 ①
21 ⑤	22 ⑤	23 ③	24 36	25 4
26 ②	27 ③	28 ④	29 ③	30 ⑤
31 ④				

01

부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면 $l=\frac{\pi}{6}$, $S=\frac{\pi}{4}$이므로

$S=\frac{1}{2}rl$에서 $\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\times r\times\frac{\pi}{6}$

$r=3$

$l=r\theta$에서 $\frac{\pi}{6}=3\theta$이므로 $\theta=\frac{\pi}{18}$

따라서 $r\times\frac{\pi}{\theta}=3\times18=54$

답 54

02

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 $2k$이므로

$2r+l=2k$에서 $l=2k-2r$

$r>0$, $l>0$이므로 $0<r<k$

부채꼴의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(2k-2r)=-r^2+kr=-\left(r-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{k^2}{4}$$

$r=\frac{k}{2}$일 때, 부채꼴의 넓이의 최댓값은 $\frac{k^2}{4}$

따라서 $f(k)=\frac{k^2}{4}$이므로

$$\sum_{k=1}^{5}f(k)=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{5}k^2=\frac{1}{4}\times\frac{5\times6\times11}{6}=\frac{55}{4}$$

답 ①

03

부채꼴의 중심각의 크기를 θ_n이라 하면 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times n^2\times\theta_n=\frac{1}{n+1}$$

즉, $\theta_n=\frac{2}{n^2(n+1)}$이므로 부채꼴의 호의 길이 l_n은

$$l_n=n\times\frac{2}{n^2(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}$$

따라서

$\lim_{n\to\infty}(n^2+1)l_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n^2+1)}{n(n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{1}{n}}$

$=2$

답 ④

04

$\tan\theta+a\cot\theta=4$의 양변을 제곱하면

$\tan^2\theta+2a+a^2\cot^2\theta=16$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\sec^2\theta+a^2\csc^2\theta=20$ $\cdots\cdots$ ㉡

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$에서 $\tan^2\theta-\sec^2\theta=-1$

$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$에서 $\cot^2\theta-\csc^2\theta=-1$

이므로 ㉠$-$㉡을 하면

$-1+2a-a^2=-4$, $a^2-2a-3=0$

$(a-3)(a+1)=0$에서 $a=3$ 또는 $a=-1$

$a>0$이므로 $a=3$

답 ③

05

점 $\mathrm{A}(a, b)$를 y축에 대하여 대칭이동시킨 점 B의 좌표는 $(-a, b)$이다.

원 $x^2+y^2=1$의 반지름의 길이가 1이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=1$

$\cos\theta=-\frac{a}{1}=-\frac{3}{4}$이므로 $a=\frac{3}{4}$

$a^2+b^2=1$에서 $b^2=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$

$b>0$이므로 $b=\frac{\sqrt{7}}{4}$

따라서 $ab=\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{16}$

답 ②

06

$\tan\alpha=3$에서

$\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$ 또는 $\sin\alpha=-\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

이므로 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}\times\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{3}{10}$

또는 $\sin\alpha\cos\alpha=\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\times\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\frac{3}{10}$

따라서

$f(50\sin\alpha\cos\alpha)=f\left(50\times\frac{3}{10}\right)$

$=f(15)=f(4\times3+3)$

$=f(3)$

$=-f(-3)$ ($f(-x)=-f(x)$에 의해)

$=-2$

답 ③

07

$a>0$, $b>0$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-a+b$이고 함수 $g(x)$의 최솟값은 $-b+5a$이다. 두 함수의 최솟값이 같으므로

$-a+b=-b+5a$에서 $b=3a$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f\left(\frac{1}{6}\right)=a\sin\pi\left(\frac{1}{6}+2\right)+b=a\sin\frac{\pi}{6}+b=\frac{1}{2}a+b$

$g(1)=b\cos\pi+5a=5a-b$

이고 $f\left(\frac{1}{6}\right)+g(1)=11$이므로

$\frac{1}{2}a+b+5a-b=11$에서 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=6$

따라서 함수 $h(x)=\tan(ab\pi x)$의 주기는

$\frac{\pi}{|ab\pi|}=\frac{1}{ab}=\frac{1}{12}$

답 ④

08

함수 $f(x)=4\sin\left(\frac{x+a}{2}\pi\right)+2$의 주기는

$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이므로 $c=4$

$f(0)=0$이므로

$f(0)=4\sin\frac{a}{2}\pi+2=0$에서

$\sin\frac{a}{2}\pi=-\frac{1}{2}$

$0<a<4$이므로

$a=\frac{7}{3}$ 또는 $a=\frac{11}{3}$

$f\left(-\frac{2}{3}\right)=4$이므로

(ⅰ) $a=\frac{7}{3}$인 경우

$f\left(-\frac{2}{3}\right)=4\sin\frac{\pi}{2}\left(-\frac{2}{3}+\frac{7}{3}\right)+2=4\sin\frac{5}{6}\pi+2=4$

이므로 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $a=\frac{11}{3}$인 경우

$f\left(-\frac{2}{3}\right)=4\sin\frac{\pi}{2}\left(-\frac{2}{3}+\frac{11}{3}\right)+2=4\sin\frac{3}{2}\pi+2=-2$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=\frac{7}{3}$

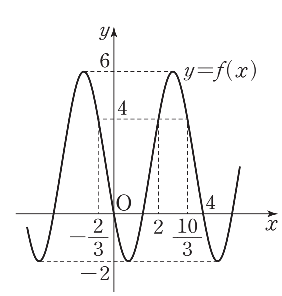
$f(b)=4\sin\frac{\pi}{2}\left(b+\frac{7}{3}\right)+2=4$

$\alpha=\frac{\pi}{2}\left(b+\frac{7}{3}\right)$이라 하면

$0<b<3$이므로 $\frac{7}{6}\pi<\alpha<\frac{8}{3}\pi$이다.

방정식 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$에서 $\alpha=\frac{13}{6}\pi$이므로

$b=2$



따라서 $a(b+c)=\frac{7}{3}(2+4)=14$

답 ②

09

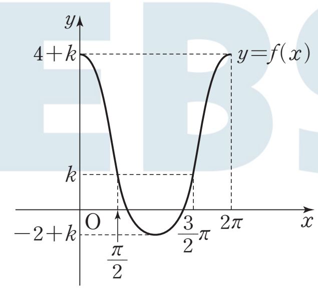
$\sin^2 x+\cos^2 x=1$에서 $\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로

$f(x)=3\cos x+\sqrt{1-\sin^2 x}+k$

$\quad=3\cos x+\sqrt{\cos^2 x}+k$

$\quad=3\cos x+|\cos x|+k$

$$f(x)=\begin{cases}4\cos x+k\left(0\le x\le\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi\le x\le 2\pi\right)\\ 2\cos x+k\left(\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi\right)\end{cases}$$



(ⅰ) $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi\le x\le 2\pi$일 때,

$f(x)=4\cos x+k$이고 $x=0$ 또는 $x=2\pi$에서 함수 $f(x)$는 최댓값 $4+k$를 갖는다.

(ⅱ) $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$일 때,

$f(x)=2\cos x+k$이고 $x=\pi$에서 함수 $f(x)$는 최솟값 $-2+k$를 갖는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $4+k$이고 최솟값은 $-2+k$이므로 그 합은 $2+2k$이다.

따라서 $2+2k=6$에서 $k=2$이다.

답 ④

10

$0<x<2\pi$에서 $0<2x<4\pi$

$\cos 2x=0$인 경우는 $\sin^2 2x=1-\cos^2 2x$에서

$\sin 2x=\pm1$이므로 $\cos 2x+\sin 2x\ne0$

즉, $\cos 2x\ne0$이므로 $\cos 2x+\sin 2x=0$에서

$\sin 2x=-\cos 2x$, $\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=-1$

$\tan 2x=-1$에서

$2x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $2x=\frac{7}{4}\pi$ 또는 $2x=\frac{11}{4}\pi$ 또는 $2x=\frac{15}{4}\pi$이므로

$x=\frac{3}{8}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{8}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{8}\pi$ 또는 $x=\frac{15}{8}\pi$

따라서 그 합은

$\frac{3}{8}\pi+\frac{7}{8}\pi+\frac{11}{8}\pi+\frac{15}{8}\pi=\frac{36}{8}\pi=\frac{9}{2}\pi$

답 ③

11

$f(x)=\sin^2 x-4\cos x$라 하면

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$에서 $\sin^2 x=1-\cos^2 x$이므로

$f(x)=\sin^2 x-4\cos x=(1-\cos^2 x)-4\cos x$

$\quad=-\cos^2 x-4\cos x+1$

$\cos x=t$라 하면 $-1\le t\le1$

$g(t)=-t^2-4t+1$이라 하면

$g(t)=-t^2-4t+1=-(t+2)^2+5$

$-1\le t\le1$에서 함수 $g(t)$는 $t=-1$일 때 최댓값 4, $t=1$일 때 최솟값 -4를 갖는다.

즉, 모든 실수 x에 대하여

$-4\le f(x)\le4$

즉, $a\le-4$이고 $b\ge4$이므로 $b-a\ge8$

따라서 $b-a$의 최솟값은 8이다.

답 ③

12

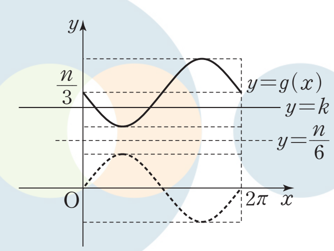
x에 대한 방정식 $\left|\sin x-\frac{n}{6}\right|+\frac{n}{6}=k$의 실근의 개수는 곡선

$y=\left|\sin x-\frac{n}{6}\right|+\frac{n}{6}$ $(0\le x\le2\pi)$와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수와 같다.

$g(x)=\left|\sin x-\frac{n}{6}\right|+\frac{n}{6}$이라 하면 n의 범위를 나누어

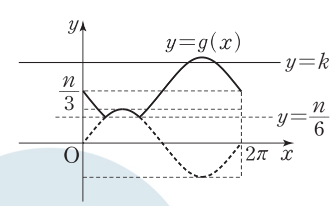
$y=g(x)$ $(0\le x\le2\pi)$의 그래프의 개형을 그려 보자.

(ⅰ) $\frac{n}{6}\ge1$인 경우 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



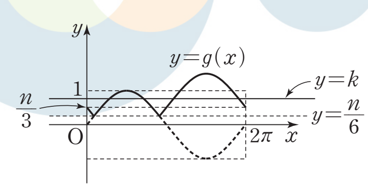
이 경우 함수 $f(k)$의 치역은 $\{0, 1, 2, 3\}$이다.

(ⅱ) $\frac{1}{2}\le\frac{n}{6}<1$인 경우 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이 경우 함수 $f(k)$의 치역은 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$이다.

(ⅲ) $0<\frac{n}{6}<\frac{1}{2}$인 경우 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이 경우 함수 $f(k)$의 치역은 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 함수 $f(k)$의 치역이 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$인 경우는

$0<\frac{n}{6}<\frac{1}{2}$인 경우이므로 $0<n<3$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n은 1, 2의 2개이다.

답 ②

13

$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{2}\right)$

$=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$

이므로

$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin\alpha+\frac{1}{2}\times\cos\alpha\right)$

$=\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha$

$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=3\cos\alpha$이므로

$\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha=3\cos\alpha$, 즉 $\sqrt{3}\sin\alpha=2\cos\alpha$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha\neq0$이므로

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

즉, $\tan\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

답 ④

14

$\overline{AB}^2=(\cos\alpha-k\sin\beta)^2+(k\cos\beta-\sin\alpha)^2$

$=\cos^2\alpha-2k\cos\alpha\sin\beta+k^2\sin^2\beta$

$+k^2\cos^2\beta-2k\sin\alpha\cos\beta+\sin^2\alpha$

$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+k^2(\sin^2\beta+\cos^2\beta)$

$-2k(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$

$=k^2+1-2k\sin(\alpha+\beta)$

$2\sin(\alpha+\beta)=1$에서 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$이므로

$\overline{AB}^2=k^2+1-k=(\sqrt{3})^2$

즉, $k^2-k-2=0$에서 $(k-2)(k+1)=0$

$k=2$ 또는 $k=-1$

$k>0$이므로 $k=2$

답 ④

15

동경 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α, 동경 OQ가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 β라 하자.

이때 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$이므로 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$

이고 점 Q의 좌표는 $(5\cos\beta, 5\sin\beta)$이다.

한편, $\tan\alpha=\frac{3}{4}<1=\tan\frac{\pi}{4}$이므로 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$

$\angle POQ=\frac{\pi}{4}$이므로

$\beta=\alpha+\frac{\pi}{4}$ 또는 $\beta=\alpha-\frac{\pi}{4}$

(i) $\beta=\alpha+\frac{\pi}{4}$인 경우

$\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{\pi}{2}$이므로 $5\sin\beta>0$, 즉 $b>0$

$\cos\beta=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{10}$

$\sin\beta=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$

(ii) $\beta=\alpha-\frac{\pi}{4}$인 경우

$-\frac{\pi}{4}<\beta<0$이므로 $5\sin\beta<0$, 즉 $b<0$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $a=5\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=5\sin\beta=\frac{7\sqrt{2}}{2}$이므로

$a+b=4\sqrt{2}$

답 ④

16

$\frac{4+\tan\alpha}{4\tan\alpha-1}=\tan\beta$에서

$4+\tan\alpha=\tan\beta(4\tan\alpha-1)$

$=4\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta$

$\tan\alpha+\tan\beta=4\tan\alpha\tan\beta-4=-4(1-\tan\alpha\tan\beta)$

$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-4$

즉, $\tan(\alpha+\beta)=-4$

답 ①

다른 풀이

$\tan\beta=\frac{4+\tan\alpha}{4\tan\alpha-1}$에서

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{\tan\alpha+\frac{4+\tan\alpha}{4\tan\alpha-1}}{1-\tan\alpha\times\frac{4+\tan\alpha}{4\tan\alpha-1}}$

$=\frac{\tan\alpha(4\tan\alpha-1)+4+\tan\alpha}{(4\tan\alpha-1)-\tan\alpha(4+\tan\alpha)}$

$=\frac{4\tan^2\alpha+4}{-1-\tan^2\alpha}$

$=\frac{4(\tan^2\alpha+1)}{-(\tan^2\alpha+1)}=-4$

17

두 직선 $x-y+1=0$, $nx-y+4=0$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β_n이라 하면

$\tan\alpha=1$, $\tan\beta_n=n$

따라서

$\tan\theta_n=|\tan(\alpha-\beta_n)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta_n}{1+\tan\alpha\tan\beta_n}\right|=\left|\frac{1-n}{1+n}\right|$

$n\geq2$이므로 $1-n<0$

즉, $\tan\theta_n=-\frac{1-n}{n+1}=\frac{n-1}{n+1}=1-\frac{2}{n+1}$

따라서 $f(n)=1-\dfrac{2}{n+1}$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} n\{1-f(n)\}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+1}=2$

답 ④

18

$\angle AQB=\alpha$, $\angle APB=\beta$라 하면 $\angle PAQ=\beta-\alpha$이다.

$\overline{BP}=a$, $\overline{BQ}=6-a$, $\overline{AB}=8$이므로

직각삼각형 ABP에서 $\tan\beta=\dfrac{8}{a}$

직각삼각형 ABQ에서 $\tan\alpha=\dfrac{8}{6-a}$

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\frac{8}{a}-\frac{8}{6-a}}{1+\frac{8}{a}\times\frac{8}{6-a}}=\frac{\frac{8(6-a)-8a}{a(6-a)}}{\frac{a(6-a)+64}{a(6-a)}}=\frac{8(6-a)-8a}{a(6-a)+64}=\frac{48-16a}{-a^2+6a+64}$$

$\tan(\beta-\alpha)=\tan(\angle PAQ)=\dfrac{2}{9}$이므로

$\dfrac{48-16a}{-a^2+6a+64}=\dfrac{2}{9}$

$\dfrac{24-8a}{-a^2+6a+64}=\dfrac{1}{9}$

$216-72a=-a^2+6a+64$

$a^2-78a+152=0$, $(a-2)(a-76)=0$

$0<a<3$이므로 $a=2$

답 ④

다른 풀이 1

$\angle BAP=\alpha$, $\angle PAQ=\beta$라 하면 $\angle BAQ=\alpha+\beta$이다.

$\overline{BP}=a$, $\overline{BQ}=6-a$, $\overline{AB}=8$이므로

직각삼각형 ABP에서 $\tan\alpha=\dfrac{a}{8}$

직각삼각형 ABQ에서 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{6-a}{8}$

$$\tan\beta=\tan\{(\alpha+\beta)-\alpha\}=\frac{\frac{6-a}{8}-\frac{a}{8}}{1+\frac{6-a}{8}\times\frac{a}{8}}=\frac{\frac{8(6-a)-8a}{64}}{\frac{64+a(6-a)}{64}}=\frac{8(6-a)-8a}{64+a(6-a)}=\frac{48-16a}{-a^2+6a+64}$$

$\tan\beta=\tan(\angle PAQ)=\dfrac{2}{9}$이므로 $\dfrac{48-16a}{-a^2+6a+64}=\dfrac{2}{9}$

$\dfrac{24-8a}{-a^2+6a+64}=\dfrac{1}{9}$

$216-72a=-a^2+6a+64$

$a^2-78a+152=0$, $(a-2)(a-76)=0$

$0<a<3$이므로 $a=2$

다른 풀이 2

$\angle BAQ=\alpha$, $\angle BAP=\beta$라 하면 $\angle PAQ=\alpha-\beta$이다.

$\tan\alpha=\dfrac{6-a}{8}$, $\tan\beta=\dfrac{a}{8}$이므로

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\frac{6-a}{8}-\frac{a}{8}}{1+\frac{6-a}{8}\times\frac{a}{8}}=\frac{8(6-2a)}{64+(6-a)a}=\frac{-16a+48}{-a^2+6a+64}$$

$\tan(\alpha-\beta)=\tan(\angle PAQ)=\dfrac{2}{9}$이므로

$\dfrac{-16a+48}{-a^2+6a+64}=\dfrac{2}{9}$

$-72a+216=-a^2+6a+64$

$a^2-78a+152=0$, $(a-2)(a-76)=0$

$0<a<3$이므로 $a=2$

19

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{x\tan 2x}&=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos 3x}{x\tan 2x}\times\frac{1+\cos 3x}{1+\cos 3x}\right)\\&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 3x}{x(1+\cos 3x)\tan 2x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{x(1+\cos 3x)\tan 2x}\\&=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\times\frac{2x}{\tan 2x}\times\frac{9}{2}\times\frac{1}{1+\cos 3x}\right\}\\&=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\times\lim_{x\to0}\frac{2x}{\tan 2x}\\&\quad\times\lim_{x\to0}\frac{9}{2}\times\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos 3x}\\&=1^2\times1\times\frac{9}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{4}\end{aligned}$$

답 ③

20

$x-\dfrac{\pi}{4}=t$라 하면 $x\longrightarrow\dfrac{\pi}{4}$일 때 $t\longrightarrow0$이고

$x=t+\dfrac{\pi}{4}$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan(4x-\pi)}{\cos 2x}&=\lim_{t\to0}\frac{\tan 4t}{\cos\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{\tan 4t}{-\sin 2t}\\&=\lim_{t\to0}\left\{\frac{\tan 4t}{4t}\times\frac{2t}{\sin 2t}\times\frac{4}{2}\times(-1)\right\}\\&=\lim_{t\to0}\frac{\tan 4t}{4t}\times\lim_{t\to0}\frac{2t}{\sin 2t}\times\lim_{t\to0}\frac{4}{2}\times\lim_{t\to0}(-1)\\&=1\times1\times2\times(-1)=-2\end{aligned}$$

답 ①

21

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{\sin 2x}-a)}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x(e^{\sin 2x}-a)}{1-\cos x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{\sin 2x}-a)(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{\sin 2x}-a)(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\times\frac{e^{\sin 2x}-a}{x}\times(1+\cos x)\right\}$$

$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{\sin 2x}-a)}{1-\cos x}$의 값이 존재하고, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2=1$,

$\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=2$이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-a}{x}$의 값도 존재한다.

$$\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\times\frac{e^{\sin 2x}-a}{x}\times(1+\cos x)\right\}$$

$$=1^2\times 2\times\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-a}{x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-a}{x}=b$$

즉, $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-a}{x}=\frac{b}{2}$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-a}{x}$의 값이 존재하고 $x\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로

(분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}(e^{\sin 2x}-a)=0$

함수 $y=e^{\sin 2x}-a$는 연속함수이므로

$e^{\sin 0}-a=1-a=0$

즉, $a=1$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}\times\frac{\sin 2x}{2x}\times 2\right)=1\times 1\times 2=\frac{b}{2}$

이므로 $b=4$

따라서 $a+b=1+4=5$

답 ⑤

22

$\lim_{x\to 0}f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$이고 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{x^2+x}$의 값이 존재하므로 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2+x}$의 값이 존재한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin f(x)}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x^2+x}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}\times\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2+x}$$

$$=1\times\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2+x}=4$$

에서 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2+x}=4$이다.

이차함수 $f(x)$는 연속이므로 $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0$

$f(x)=x^2+ax$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax}{x^2+x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+a)}{x(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+a}{x+1}$$

$$=a$$

따라서 $a=4$이고 $f(1)=1+a=5$이다.

답 ⑤

다른 풀이

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0$에서 $b=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+ax)}{x^2+x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin(x^2+ax)}{x^2+ax}\times\frac{x^2+ax}{x^2+x}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin(x^2+ax)}{x^2+ax}\times\frac{x+a}{x+1}\right\}$$

$$=1\times a=a$$

즉, $a=4$

따라서 $f(x)=x^2+4x$이므로 $f(1)=5$이다.

23

$$f(n)=\lim_{x\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sin kx}{x}=\lim_{x\to 0}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(k\times\frac{\sin kx}{kx}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(k\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k\times 1)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(3n)}{2n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n(3n+1)}{2}}{2n^2+3n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2+3n}{4n^2+6n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9+\frac{3}{n}}{4+\frac{6}{n}}$$

$$=\frac{9+0}{4+0}$$

$$=\frac{9}{4}$$

답 ③

24

조건 (가)에서 $\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)\}^2}{\cos 2x-\cos x}$의 값이 존재하고 $x\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to0}\{f(x)\}^2=0$

함수 $\{f(x)\}^2$은 연속함수이므로 $f(0)=0$

$f(1)>0$이므로 $f(x)=kx\ (k>0)$로 놓자.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\{f(x)\}^2}{\cos 2x-\cos x}&=\lim_{x\to0}\frac{k^2x^2}{2\cos^2 x-1-\cos x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{k^2x^2}{(2\cos x+1)(\cos x-1)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-k^2x^2(1+\cos x)}{(2\cos x+1)(1-\cos x)(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-k^2x^2(1+\cos x)}{(2\cos x+1)\sin^2 x}\\&=\lim_{x\to0}\left\{-k^2\times\frac{1+\cos x}{2\cos x+1}\times\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\right\}\\&=-k^2\times\frac{2}{3}\times1^2\\&=-\frac{2}{3}k^2=-6\end{aligned}$$

에서 $k^2=9$이고 $k>0$이므로 $k=3$

즉, $f(x)=3x$

조건 (나)에서 함수

$$g(x)=\begin{cases}a & (x\ge0)\\ \dfrac{12x}{\ln(x+1)} & (-1<x<0)\end{cases}$$

이 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to0+}g(x)=\lim\limits_{x\to0-}g(x)=g(0)$

$\lim\limits_{x\to0+}g(x)=\lim\limits_{x\to0+}a=a$이고 $g(0)=a$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0-}g(x)&=\lim_{x\to0-}\frac{12x}{\ln(x+1)}=12\lim_{x\to0-}\frac{x}{\ln(x+1)}\\&=12\times1=12\end{aligned}$$

이므로 $a=12$

따라서 $f(a)=f(12)=3\times12=36$

답 36

25

$\overline{OP}=1$, $\overline{OQ}=2$이고 $\angle POQ=2\theta$이므로

$f(\theta)=1\times2\times\sin2\theta=2\sin2\theta$

$\overline{OP}=1$, $\overline{OB}=2$이고 $\angle AOP=\theta$이므로

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times1\times2\times\sin\theta=\sin\theta$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}&=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin2\theta}{\sin\theta}\\&=2\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times\frac{\theta}{\sin\theta}\times2\right)\\&=2\times1\times1\times2=4\end{aligned}$$

답 4

26

삼각형 BOC에서 $\overline{BC}=\sin\theta$, $\overline{OC}=\cos\theta$이고

삼각형 DOA에서 $\overline{DA}=\tan\theta$

따라서

$$\begin{aligned}S(\theta)&=\frac{1}{2}\times(\overline{BC}+\overline{DA})\times\overline{AC}\\&=\frac{1}{2}\times(\sin\theta+\tan\theta)(1-\cos\theta)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{\sin\theta(\cos\theta+1)}{\cos\theta}\times(1-\cos\theta)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{\sin\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos\theta}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta}\end{aligned}$$

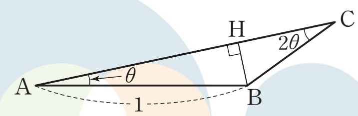
따라서

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^3\theta}{2\cos\theta\times\theta^3}\\&=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{\cos\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\\&=\frac{1}{2}\times1\times1^3\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ②

27

점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.



삼각형 ABH에서 $\overline{AH}=\cos\theta$, $\overline{BH}=\sin\theta$

삼각형 BCH에서 $\tan2\theta=\dfrac{\overline{BH}}{\overline{CH}}=\dfrac{\sin\theta}{\overline{CH}}$

즉, $\overline{CH}=\dfrac{\sin\theta}{\tan2\theta}$

$\overline{AC}=\overline{AH}+\overline{CH}=\cos\theta+\dfrac{\sin\theta}{\tan2\theta}$

즉, $f(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\left(\cos\theta+\dfrac{\sin\theta}{\tan2\theta}\right)\times\sin\theta$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}&=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\left(\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\tan2\theta}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\times1\times\lim_{\theta\to0+}\left(\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\tan2\theta}\right)\\&=\frac{1}{2}\times1\times\lim_{\theta\to0+}\left(\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{2\theta}{\tan2\theta}\times\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\times1\times\left(1+1\times1\times\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이

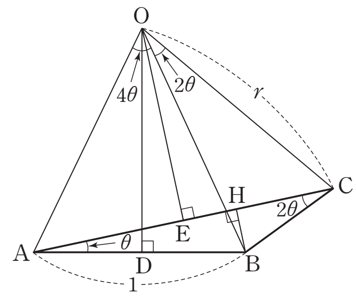
삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 반지름의 길이를 r라 하자.

원주각과 중심각의 관계에 의하여

$2\angle ACB=\angle AOB$, $2\angle BAC=\angle BOC$이므로

$\angle AOB=4\theta$이고 $\angle BOC=2\theta$

즉, $\angle AOC=6\theta$



점 O에서 선분 AB와 선분 AC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자.

삼각형 OAD에서 $\angle\text{AOD}=\frac{1}{2}\angle\text{AOB}=2\theta$이므로

$\overline{\text{AD}}=\frac{1}{2}\overline{\text{AB}}=r\sin 2\theta$, 즉 $r=\frac{1}{2\sin 2\theta}$

삼각형 OAE에서 $\angle\text{AOE}=\frac{1}{2}\angle\text{AOC}=3\theta$이므로

$\overline{\text{AE}}=\frac{1}{2}\overline{\text{AC}}=r\sin 3\theta=\frac{\sin 3\theta}{2\sin 2\theta}$, 즉 $\overline{\text{AC}}=\frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta}$

점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면

삼각형 ABH에서 $\overline{\text{BH}}=\sin\theta$

즉, $f(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta}\times\sin\theta=\frac{\sin 3\theta\sin\theta}{2\sin 2\theta}$

따라서

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin 3\theta\sin\theta}{2\theta\sin 2\theta}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sin 3\theta}{3\theta}\times\frac{2\theta}{\sin 2\theta}\times\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times 1\times\frac{3}{2}$$
$$=\frac{3}{4}$$

28

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 부채꼴 OAB의 호의 길이는 $r\theta$이므로 부채꼴 OAB의 둘레의 길이는 $2r+r\theta$이다.

$2r+r\theta=10$에서 $r=\frac{10}{2+\theta}$

직각삼각형 OHB에서 $\sin\theta=\frac{\overline{\text{BH}}}{r}$, $\cos\theta=\frac{\overline{\text{OH}}}{r}$이므로

$\overline{\text{BH}}=r\sin\theta=\frac{10\sin\theta}{2+\theta}$

$\overline{\text{OH}}=r\cos\theta$이므로

$\overline{\text{AH}}=r-r\cos\theta=r(1-\cos\theta)$
$$=\frac{10(1-\cos\theta)}{2+\theta}$$

즉,

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{10\sin\theta}{2+\theta}\times\frac{10(1-\cos\theta)}{2+\theta}$$
$$=\frac{50\sin\theta(1-\cos\theta)}{(2+\theta)^2}\times\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$$
$$=\frac{50\sin\theta(1-\cos^2\theta)}{(2+\theta)^2(1+\cos\theta)}$$
$$=\frac{50\sin^3\theta}{(2+\theta)^2(1+\cos\theta)}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{50\sin^3\theta}{(2+\theta)^2(1+\cos\theta)\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{50}{(2+\theta)^2(1+\cos\theta)}\times\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\right\}$$
$$=\frac{50}{2^2\times 2}\times 1^3=\frac{25}{4}$$

답 ④

29

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}-2h\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)-f\left(\frac{\pi}{4}-2h\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)-f\left(\frac{\pi}{4}-2h\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}+2\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}-2h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{-2h}$$
$$=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)+2f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$f(x)=(\sin x+2\cos x)\sin x$에서

$f'(x)=(\cos x-2\sin x)\sin x+(\sin x+2\cos x)\cos x$

이므로

$$3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}=3$$

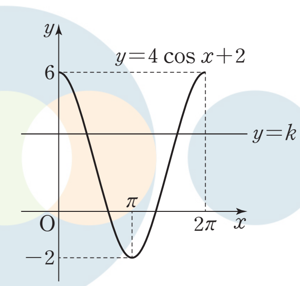
답 ③

30

$f(x)=4\sin x+2x$에서 $f'(x)=4\cos x+2$이고

$g(x)=kx$ (k는 정수)에서 $g'(x)=k$이므로 $0\le x\le 2\pi$일 때, 방정식 $f'(x)=g'(x)$의 실근은 방정식 $4\cos x+2=k$ $(0\le x\le 2\pi)$의 실근과 같다.

즉, 함수 $y=4\cos x+2$ $(0\le x\le 2\pi)$의 그래프는 다음과 같으므로



$$h(k)=\begin{cases}0 & (k>6\text{ 또는 }k<-2)\\ 1 & (k=-2)\\ 2 & (-2<k\le 6)\end{cases}$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10}h(7-k)=h(6)+h(5)+\cdots+h(-1)+h(-2)+h(-3)$$
$$=2\times 8+1+0=17$$

답 ⑤

31

$f(1)=1+a+b=4$에서 $a+b=3$ ...... ㉠

$f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(x^2+ax+b)=b$,

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(c\sin x+2\cos x)=2$,

$f(0)=b$이므로 $b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면 $a=1$이므로

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x+2 & (x\ge0)\\ c\sin x+2\cos x & (x<0)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $f'(0)$의 값이 존재한다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h^2+h+2-2}{h}=\lim_{h\to0+}(h+1)=1$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{c\sin h+2\cos h-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{c\sin h}{h}+2\lim_{h\to0-}\frac{\cos h-1}{h}$$

$$=c\lim_{h\to0-}\frac{\sin h}{h}+2\lim_{h\to0-}\left(\frac{\cos h-1}{h}\times\frac{\cos h+1}{\cos h+1}\right)$$

$$=c\times1+2\lim_{h\to0-}\frac{\cos^2 h-1}{h(\cos h+1)}$$

$$=c-2\lim_{h\to0-}\frac{\sin^2 h}{h(\cos h+1)}$$

$=c-2\times0=c$

즉, $c=1$

따라서 $a+b+c=1+2+1=4$

답 ④

03 미분법

정답				본문 28~39쪽
01 ②	02 ③	03 ①	04 ①	05 ②
06 ④	07 ④	08 ③	09 ④	10 ①
11 ⑤	12 42	13 ③	14 ②	15 ②
16 ②	17 ④	18 ③	19 ③	20 ②
21 ①	22 ①	23 ⑤	24 ③	25 ③
26 ④	27 ⑤	28 ⑤	29 ①	30 ③
31 ①	32 ④	33 20	34 ③	

01

$1-f(x)=e^{x-1}f(x)+x^2$에서

$1-x^2=e^{x-1}f(x)+f(x)$

$(1+e^{x-1})f(x)=1-x^2$

$$f(x)=\frac{1-x^2}{1+e^{x-1}}$$

$$f'(x)=\frac{-2x(1+e^{x-1})-(1-x^2)e^{x-1}}{(1+e^{x-1})^2}$$

따라서 $f'(1)=\dfrac{-2\times2-0}{2^2}=-1$

답 ②

다른 풀이

$1-f(x)=e^{x-1}f(x)+x^2$에 $x=1$을 대입하면

$1-f(1)=f(1)+1^2$

즉, $f(1)=0$

$1-f(x)=e^{x-1}f(x)+x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$-f'(x)=e^{x-1}f(x)+e^{x-1}f'(x)+2x$

$x=1$을 대입하면

$-f'(1)=f(1)+f'(1)+2=f'(1)+2$

$2f'(1)=-2$

따라서 $f'(1)=-1$

02

$f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+1}+1}$에서

$$f'(x)=\frac{(\sqrt{x+1}+1)\cos x-\left\{\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}\right\}\sin x}{(\sqrt{x+1}+1)^2}$$

$f(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+\lim_{x\to0}\frac{f(-x)-f(0)}{-x-0}$$

$=f'(0)+f'(0)=2f'(0)$

$=2\times\dfrac{(\sqrt{0+1}+1)\cos 0-\left\{\dfrac{1}{2}(0+1)^{-\frac{1}{2}}\right\}\sin 0}{(\sqrt{0+1}+1)^2}$

$=\dfrac{4}{4}=1$

답 ③

03

조건 (가)에서

$g(x)=g(-x)$이므로

$g'(x)=-g'(-x)$

즉, $g'(-\pi)=-g'(\pi)$

$g(x)=\dfrac{f(x)}{\sin x+2}$에서

$g'(x)=\dfrac{f'(x)(\sin x+2)-f(x)\cos x}{(\sin x+2)^2}$이므로

$g'(\pi)=\dfrac{f'(\pi)(\sin\pi+2)-f(\pi)\cos\pi}{(\sin\pi+2)^2}$

$=\dfrac{3\times2-4\times(-1)}{2^2}$

$=\dfrac{10}{4}$

$=\dfrac{5}{2}$

따라서 $g'(-\pi)=-g'(\pi)=-\dfrac{5}{2}$

답 ①

04

$f(x)=\sin 3x-e^{5x}$에서

$f'(x)=(3x)'\times\cos 3x-(5x)'\times e^{5x}=3\cos 3x-5e^{5x}$

이므로

$f'(0)=3\cos 0-5e^0=3-5=-2$

답 ①

05

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-4}{x-3}$의 값이 존재하고 $x\to3$일 때 (분모) $\to$ 0이므로

(분자) $\to$ 0이다.

즉, $\lim\limits_{x\to3}\{f(x)-4\}=0$

함수 $f(x)-4$가 미분가능하므로 연속이다.

즉, $f(3)-4=0$에서 $f(3)=4$

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-4}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=2$

$(g\circ f)(x)=12x+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=12$

$x=3$을 대입하면

$g'(f(3))f'(3)=12$에서

$g'(4)\times2=12$이므로

$g'(4)=6$

답 ②

06

조건 (가)에서

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(g(1+h))-f(g(1-h))}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(g(1+h))-f(g(1))-\{f(g(1-h))-f(g(1))\}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(g(1+h))-f(g(1))}{h}+\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(g(1-h))-f(g(1))}{-h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\left\{\dfrac{f(g(1+h))-f(g(1))}{g(1+h)-g(1)}\times\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h}\right\}$

$\quad+\lim\limits_{h\to0}\left\{\dfrac{f(g(1-h))-f(g(1))}{g(1-h)-g(1)}\times\dfrac{g(1-h)-g(1)}{-h}\right\}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(g(1+h))-f(g(1))}{g(1+h)-g(1)}\times\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h}$

$\quad+\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(g(1-h))-f(g(1))}{g(1-h)-g(1)}\times\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(1-h)-g(1)}{-h}$

$=f'(g(1))g'(1)+f'(g(1))g'(1)$

$=2f'(g(1))g'(1)$

$=8$

즉, $f'(g(1))g'(1)=4$

조건 (나)에서

$f'(g(1))g'(1)=f'(3)\times2=4$에서

$f'(3)=2$

답 ④

07

$f(g(x))=x$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$

$x=3$을 대입하면

$f'(g(3))g'(3)=f'(5)\times\dfrac{1}{4}=1$

따라서 $f'(5)=4$

답 ④

08

$g(3x-10)=h(x)$ …… ㉠

라 하자. $f(0)=4$에서 $h(4)=0$이므로

역함수의 미분법에 의하면

$h'(4)=\dfrac{1}{f'(0)}$

㉠의 양변에 $x=4$를 대입하면

$g(2)=h(4)$이므로 $g(2)=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3g'(3x-10)=h'(x)$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=4$를 대입하면

$3g'(2)=h'(4)$이므로 $3g'(2)=\dfrac{1}{f'(0)}$

즉, $g'(2)=\dfrac{1}{3f'(0)}$

$f(x)=(x^2-2x+4)e^x$에서

$f'(x)=(2x-2)e^x+(x^2-2x+4)e^x$

이므로

$f'(0)=-2+4=2$

따라서 $g'(2)=\dfrac{1}{3f'(0)}=\dfrac{1}{6}$

답 ③

09

함수 $f(x)$가 일대일 대응이고 곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

$f'(x)\neq0$이고 함수 $f(x)$가 미분가능하므로 함수 $g(x)$도 미분가능하다.

조건 (가)에서 $g(x)=-g(-x)$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=g'(-x)$ …… ㉠

조건 (나)에서

$\lim_{x\to1}\dfrac{2g(x)+4}{x-1}$의 값이 존재하고 $x\longrightarrow1$일 때, (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{2g(x)+4\}=0$

함수 $g(x)$가 연속이므로 $2g(1)+4=0$에서

$g(1)=-2$

즉, $\lim_{x\to1}\dfrac{2g(x)+4}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{2g(x)-2g(1)}{x-1}=2g'(1)=1$

에서 $g'(1)=\dfrac{1}{2}$

조건 (가)에서 $g(1)=-g(-1)$이므로

$g(-1)=2$이고 ㉠에 의하여 $g'(-1)=\dfrac{1}{2}$

$g(-1)=2$에서 $f(2)=-1$

따라서

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)+1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$
$$=\frac{1}{g'(-1)}=2$$

답 ④

10

$f(x)=x^2\sin x$에서

$f'(x)=2x\sin x+x^2\cos x$

$$f''(x)=2\sin x+2x\cos x+2x\cos x-x^2\sin x$$
$$=(2-x^2)\sin x+4x\cos x$$

따라서 $f''(\pi)=(2-\pi^2)\times\sin\pi+4\pi\cos\pi=-4\pi$

답 ①

11

$f(x)=kx^2+\dfrac{1}{2}x^2-e^x$에서

$f'(x)=2kx+x-e^x$이고 $f''(x)=2k+1-e^x$

$f''(x)=0$에서 $2k+1-e^x=0$

$e^x=2k+1$에서

(i) $2k+1>0$, 즉 $k>-\dfrac{1}{2}$일 때, $x=\ln(2k+1)$이므로 $g(k)=1$

(ii) $2k+1\le0$, 즉 $k\le-\dfrac{1}{2}$일 때, $g(k)=0$

$5-k\le-\dfrac{1}{2}$에서 $k\ge\dfrac{11}{2}$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}g(5-k)=\sum_{k=1}^{5}g(5-k)+\sum_{k=6}^{10}g(5-k)$$
$$=1\times5+0\times5$$
$$=5$$

답 ⑤

12

$(f\circ g)(x)=x+\ln(x^2+1)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1+\dfrac{2x}{x^2+1}$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f'(g(0))g'(0)=1$

조건 (나)에 의하여

$f'(g(0))g'(0)=f'(4)\times\dfrac{1}{3}=1$

즉, $f'(4)=3$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)=\frac{2(x^2+1)-(2x)^2}{(x^2+1)^2}$$

이 등식에 $x=0$을 대입하면

$f''(g(0))\{g'(0)\}^2+f'(g(0))g''(0)=2$

조건 (나)와 ㉡에 의하여

$f''(4)\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+3\times(-4)=2$

즉, $f''(4)=14\times9=126$

따라서 $f'(g(0))=f'(4)=3$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(g(x))-3}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f'(g(x))-f'(g(0))}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f'(g(x))-f'(g(0))}{g(x)-g(0)}\times\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right\}$$
$$=f''(g(0))g'(0)$$
$$=f''(4)\times\frac{1}{3}$$
$$=126\times\frac{1}{3}$$
$$=42$$

답 42

13

$f(x)=(x^2+a)e^{-x}$이라 하면 점 $(0,\ 4)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $4=(0+a)e^{-0}=a$에서 $a=4$

즉, $f(x)=(x^2+4)e^{-x}$이므로

$f'(x)=2xe^{-x}-(x^2+4)e^{-x}=-(x^2-2x+4)e^{-x}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=-4e^{-0}=-4$이므로 $b=-4$

따라서 $ab=4\times(-4)=-16$

답 ③

14

$y=(x^2+x+1)\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$에 $x=0$을 대입하면

$y=1\times\tan\frac{\pi}{4}=1$이므로

곡선 $y=(x^2+x+1)\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ 위의 점 중 $x=0$인 점의 좌표는 $(0, 1)$이다.

$y'=(2x+1)\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-(x^2+x+1)\sec^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

이고 이 식에 $x=0$을 대입하면

$1\times1-1\times\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2=-1$

즉, 곡선 $y=(x^2+x+1)\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ 위의 점 $(0, 1)$에서의 접선의 방정식은

$y=-x+1$, 즉 $x+y-1=0$

따라서 접선 $x+y-1=0$과 원점 사이의 거리는

$\frac{|0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ②

15

$f(x)=e^{3x-3}+a$에서 $f(1)=1+a$이고 $f'(x)=3e^{3x-3}$

함수 $f(x)=e^{3x-3}+a$의 그래프 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3\times e^0=3$이므로 접선의 방정식은

$y=3(x-1)+1+a=3x-2+a$

$x=0$을 대입하면 $y=a-2$이므로 y절편은 $a-2$이고, $y=0$을 대입하면 $x=\frac{2-a}{3}$이므로 x절편은 $\frac{2-a}{3}$이다.

따라서 삼각형 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times|a-2|\times\left|\frac{2-a}{3}\right|=\frac{(a-2)^2}{6}$

즉, $\frac{(a-2)^2}{6}=6$에서 $(a-2)^2=6^2$이므로

$a-2=6$ 또는 $a-2=-6$

따라서 $a=8$ 또는 $a=-4$이므로 그 합은 4이다.

답 ②

16

$y=\ln(x^2+1)+x$에서

$y'=\frac{2x}{x^2+1}+1=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$

곡선 $y=\ln(x^2+1)+x$ 위의 접점의 좌표를 $(t, \ln(t^2+1)+t)$라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$\frac{(t+1)^2}{t^2+1}=2$

$t^2+2t+1=2t^2+2$에서 $t^2-2t+1=(t-1)^2=0$

이므로 $t=1$

즉, 곡선 $y=\ln(x^2+1)+x$ 위의 점 $(1, \ln 2+1)$에서의 접선의 방정식은

$y=2(x-1)+\ln 2+1=2x+\ln 2-1$

따라서 $x=0$일 때, $y=\ln 2-1$이므로

곡선 $y=\ln(x^2+1)+x$에 접하고 기울기가 2인 직선의 y절편은 $\ln 2-1$이다.

답 ②

17

$y=-e^{x^2}+1$에서 $y'=-2xe^{x^2}$

곡선 $y=-e^{x^2}+1$ 위의 접점의 좌표를 $(t, -e^{t^2}+1)$이라 하면 접선의 기울기는 $-2te^{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-(-e^{t^2}+1)=-2te^{t^2}(x-t)$

이 접선이 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1-(-e^{t^2}+1)=-2te^{t^2}\times(0-t)$

$e^{t^2}=2t^2e^{t^2}$

$e^{t^2}>0$이므로 $2t^2=1$에서

$t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $t=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

접선의 방정식 $y-(-e^{t^2}+1)=-2te^{t^2}(x-t)$에 $y=0$을 대입하면

$0-(-e^{t^2}+1)=-2te^{t^2}(x-t)$

$2te^{t^2}x=(2t^2-1)e^{t^2}+1$

즉, $x=\frac{2t^2-1}{2t}+\frac{1}{2te^{t^2}}$이므로

x절편은 $\frac{2t^2-1}{2t}+\frac{1}{2te^{t^2}}$

$t=\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때, x절편 x_1은 $x_1=\frac{1}{\sqrt{2e}}$

$t=-\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때, x절편 x_2는 $x_2=-\frac{1}{\sqrt{2e}}$

따라서 $x_1x_2=\frac{1}{\sqrt{2e}}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)=-\frac{1}{2e}$

답 ④

18

$f(x)=3e^{x-3}$, $g(x)=a\ln(x-2)+b$라 하면

$f'(x)=3e^{x-3}$, $g'(x)=\frac{a}{x-2}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $y=3x+c$의 접점의 x좌표를 t라 하면 접선의 기울기가 3으로 같으므로 $f'(t)=g'(t)=3$에서

$3e^{t-3}=\frac{a}{t-2}=3$

즉, $e^{t-3}=1$에서 $t=3$

$\frac{a}{3-2}=3$에서 $a=3$

$f(3)=g(3)$이므로 $3e^0=a\ln 1+b$에서 $b=3$

직선 $y=3x+c$가 점 $(3, 3)$을 지나므로

$3=9+c$에서 $c=-6$

따라서 $a+b+c=3+3+(-6)=0$

답 ③

19

$f(x)=4\sin 2x+kx$에서

$f'(x)=8\cos 2x+k$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에 속하는 어떤 구간에서도 상수함수가

아니므로 $f(x)$가 감소하려면 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

즉, $-8\le 8\cos 2x\le 8$이고 $8\cos 2x+k\le 0$이므로

$8\cos 2x+k\le 8+k\le 0$

따라서 $k\le -8$이므로 정수 k의 최댓값은 -8이다.

답 ③

20

$f(x)=e^{\cos x}$에서

$f'(x)=-e^{\cos x}\sin x$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에 속하는 어떤 구간에서도 상수함수가 아니므로 $f(x)$가 증가하려면 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

즉, $f'(x)=-e^{\cos x}\sin x\ge 0$이고 $e^{\cos x}>0$이므로

$-\sin x\ge 0$

즉, $0\le x\le 4\pi$에서 $\sin x\le 0$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

$\pi\le x\le 2\pi$ 또는 $3\pi\le x\le 4\pi$

열린 구간 $\left(\frac{4}{3}\pi,\ a\right)$가 이 구간에 포함되려면 $\frac{4}{3}\pi<a\le 2\pi$이어야 하므로 실수 a의 최댓값은 2π이다.

답 ②

21

$f(x)=\ln(x^2+2)+ax$에서

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+2}+a$$

함수 $f(x)$는 양의 실수 전체의 집합에 속하는 어떤 구간에서도 상수함수가 아니므로 $f(x)$가 감소하려면 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+2}+a\le 0$$

즉, $\frac{2x}{x^2+2}\le -a$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x^2+2}{2x}=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\ge 2\sqrt{\frac{x}{2}\times\frac{1}{x}}=\sqrt{2}$$

(단, 등호는 $x^2=2$, 즉 $x=\sqrt{2}$일 때 성립)

이므로 $\frac{2x}{x^2+2}\le\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

즉, $\frac{\sqrt{2}}{2}\le -a$에서 $a\le -\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 최댓값은 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

답 ①

22

$f(x)=1+\ln(x^2+4x+5)$에서

$$f'(x)=\frac{2x+4}{x^2+4x+5}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$

$x^2+4x+5=(x+2)^2+1>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값을 갖는다.

$f(-2)=1+\ln 1=1$

이므로 극솟값은 1이다.

답 ①

23

$f(x)=(x+k)e^{-4x}$에서

$f'(x)=e^{-4x}-4(x+k)e^{-4x}=(-4x-4k+1)e^{-4x}$

$f'(x)=0$에서 $x=-k+\frac{1}{4}$

$e^{-4x}>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-k+\frac{1}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=-k+\frac{1}{4}$에서 극댓값을 갖는다.

즉, $-k+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$이므로 $k=-1$

따라서 $f'(-1)=(4+4+1)e^4=9e^4$

답 ⑤

24

$y=\frac{3}{4}x+\sin 2t+1$에서 $3x-4y+4\sin 2t+4=0$이므로

원점과 직선 $3x-4y+4\sin 2t+4=0$ 사이의 거리 $f(t)$는

$$f(t)=\frac{|3\times 0-4\times 0+4\sin 2t+4|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{4|\sin 2t+1|}{5}$$

$\sin 2t+1\ge 0$이므로

$$f(t)=\frac{4(\sin 2t+1)}{5}$$

$f'(t)=\frac{8}{5}\cos 2t$

$f'(t)=0\ (0<t<2\pi)$에서

$t=\frac{\pi}{4}$ 또는 $t=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $t=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $t=\frac{7}{4}\pi$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	(2π)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	

함수 $f(t)$는 $t=\frac{\pi}{4}$ 또는 $t=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $t=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $t=\frac{7}{4}\pi$에서 극값을 갖는다.

극값은

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{8}{5}$, $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=0$, $f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=\frac{8}{5}$, $f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=0$

이므로 서로 다른 모든 극값의 합은

$\frac{8}{5}+0=\frac{8}{5}$

답 ③

25

$f(x)=x^3+6x^2+4x$에서

$f'(x)=3x^2+12x+4$

$f''(x)=6x+12$

$f''(x)=0$에서 $x=-2$

$x=-2$의 좌우에서 이계도함수의 부호가 바뀌므로 변곡점의 x좌표는 -2이다.

$f(-2)=-8+24-8=8$이므로 변곡점의 좌표는 $(-2, 8)$이다.

따라서 $a=-2$, $b=8$이므로

$a+b=(-2)+8=6$

답 ③

26

$y=4\sin x+x^2$에서

$y'=4\cos x+2x$

$y''=-4\sin x+2$

$y''=0$, 즉 $\sin x=\frac{1}{2}$ $(0<x<2\pi)$에서

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$이고 $x=\frac{\pi}{6}$의 좌우와 $x=\frac{5}{6}\pi$의 좌우에서 이계도함수의 부호가 바뀌므로 변곡점의 x좌표는 $\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi$이다.

즉, 변곡점에서의 접선의 기울기는

$x=\frac{\pi}{6}$일 때, $4\cos\frac{\pi}{6}+2\times\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$

$x=\frac{5}{6}\pi$일 때, $4\cos\frac{5}{6}\pi+2\times\frac{5}{6}\pi=-2\sqrt{3}+\frac{5}{3}\pi$

따라서 $m_1+m_2=\left(2\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)+\left(-2\sqrt{3}+\frac{5}{3}\pi\right)=2\pi$

답 ④

27

$f(x)=(x^2+ax)e^{-x}$에서

$f'(x)=(2x+a)e^{-x}-(x^2+ax)e^{-x}$

$\quad=-\{x^2+(a-2)x-a\}e^{-x}$

$f''(x)=-(2x+a-2)e^{-x}+\{x^2+(a-2)x-a\}e^{-x}$

$\quad=\{x^2+(a-4)x-2(a-1)\}e^{-x}$

ㄱ. $2f'(0)+f''(0)=2a+(2-2a)=2$ (참)

ㄴ. $f''(x)=\{x^2+(a-4)x-2(a-1)\}e^{-x}$에서

$e^{-x}>0$이므로 $g(x)=x^2+(a-4)x-2(a-1)$이라 하면

$a>1$일 때 $g(0)=2-2a<0$이고 $g(2)=-2<0$이므로 $0<x<2$에서 $g(x)<0$

즉, $f''(x)<0$이므로 $0<x<2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다. (참)

ㄷ. $f''(x)=0$에서 $e^{-x}>0$이므로

$x^2+(a-4)x-2(a-1)=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a-4)^2+8(a-1)=a^2+8>0$

이므로 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$x^2+(a-4)x-2(a-1)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면 $x=\alpha$와 $x=\beta$의 좌우에서 이계도함수의 부호가 바뀌므로 항상 2개의 변곡점을 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

28

$x^2\neq0$에서 $x\neq0$이므로 함수 $f(x)$의 정의역은 $\{x|x\neq0\}$

$f(x)=\frac{x+1}{x^2}$에서

$f'(x)=\frac{1\times x^2-(x+1)\times2x}{x^4}=-\frac{x+2}{x^3}$

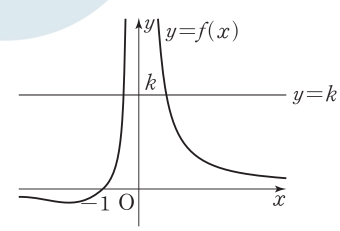
$f''(x)=\frac{-1\times x^3+(x+2)\times3x^2}{x^6}=\frac{2x+6}{x^4}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	(0)	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$-$
$f(x)$	↘	극소	↗		↘

ㄱ. $f'(x)=0$에서 $x=-2$이고 $x=-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=-2$에서 극소이다. (참)

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to0}f(x)=\infty$이므로 곡선 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$ $(k>0)$이 만나는 점의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. $f''(x)=0$에서 $x=-3$이고 $x=-3$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 x좌표는 -3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

29

$f(x)=(\ln x)^n$에서 $f'(x)=n(\ln x)^{n-1}\times\frac{1}{x}$

(i) $n=1$일 때, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$

(ii) $n\neq1$일 때,

$f''(x)=n(n-1)(\ln x)^{n-2}\times\frac{1}{x^2}-n(\ln x)^{n-1}\times\frac{1}{x^2}$

$\quad=\frac{n(\ln x)^{n-2}}{x^2}\times(n-1-\ln x)$

ㄱ. $n=1$일 때, $x>0$이므로 $f'(x)=\frac{1}{x}>0$

$n\neq1$일 때, $f'(x)=n(\ln x)^{n-1}\times\frac{1}{x}=0$에서 $x=1$

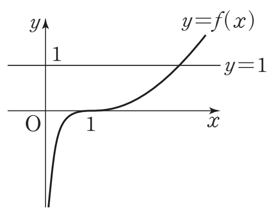
$n=2m$ (m은 자연수)일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

즉, $n=2m$ (m은 자연수)이면 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄴ. [반례] $n=2m+1$ (m은 자연수)일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같으므로 그래프의 개형은 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$+$
$f(x)$		↗	0	↗



위의 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나는 점의 개수는 1이다. (거짓)

ㄷ. [반례] $n=2m$ (m은 2 이상의 자연수)일 때,

$f''(x)=\frac{n(\ln x)^{n-2}}{x^2}\times(n-1-\ln x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=e^{n-1}$

$x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 같고 $x=e^{n-1}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 다르므로 변곡점의 개수는 1이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

30

$f(x)=\log_3(x^2+3)+2$에서

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+3}\times\frac{1}{\ln 3}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

닫힌 구간 $[-2, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $f(0)=\log_3 3+2=3$을 갖는다.

한편, 구간의 양 끝값의 함숫값은

$f(-2)=\log_3 7+2$, $f(3)=\log_3 12+2$

$3<\log_3 7+2<\log_3 12+2$이므로

함수 $f(x)$의 최댓값은 $M=\log_3 12+2$, 최솟값은 $m=3$이다.

따라서 $M-m=\log_3 12+2-3=\log_3 4$

답 ③

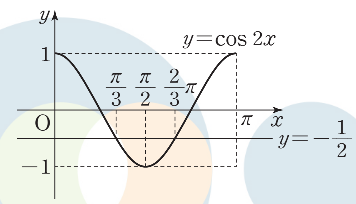
31

$f(x)=\sin 2x+x+a$에서

$f'(x)=2\cos 2x+1$

$f'(x)=0$에서 $\cos 2x=-\frac{1}{2}$

함수 $y=\cos 2x$ $(0\le x\le\pi)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$은 다음과 같다.



즉, $\cos 2x=-\frac{1}{2}$의 해는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

닫힌 구간 $[0, \pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 극댓값

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{3}+a=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}+a$를 가지고,

$x=\frac{2}{3}\pi$에서 극솟값

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\sin\frac{4}{3}\pi+\frac{2}{3}\pi+a=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{3}\pi+a$를 갖는다.

한편, 구간의 양 끝값의 함숫값은

$f(0)=\sin 0+0+a=a$,

$f(\pi)=\sin 2\pi+\pi+a=\pi+a$

이므로

$a<-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{3}\pi+a<\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}+a<\pi+a$이므로

함수 $f(x)$의 최댓값은 $M=\pi+a$, 최솟값은 $m=a$이다.

따라서 $M+m=\pi+a+a=\pi+2a=3\pi$이므로

$a=\pi$

답 ①

32

$f(x)=3e^{-x}$, $g(x)=-e^{-x}$이라 하자.

$f(x)=3e^{-x}>0$이고 $g(x)=-e^{-x}<0$이므로 $f(x)>g(x)$

$h(t)=\frac{1}{2}\times t\times\{3e^{-t}-(-e^{-t})\}=2te^{-t}$에서

$h'(t)=2e^{-t}-2te^{-t}=2e^{-t}(1-t)$

$h'(t)=0$에서 $t=1$

$\frac{1}{2}\le t\le 2$에서 함수 $h(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$		↗	극대	↘	

함수 $h(t)$는 $t=1$에서 극댓값 $h(1)=\frac{2}{e}$를 갖는다.

한편, 구간의 양 끝값의 함숫값은

$h\left(\frac{1}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$, $h(2)=4e^{-2}=\frac{4}{e^2}$

$16<e^3<27$이므로

$\frac{1}{\sqrt{e}}-\frac{4}{e^2}=\frac{e\sqrt{e}-4}{e^2}=\frac{\sqrt{e^3}-\sqrt{16}}{e^2}>0$ ...... ㉠

㉠에 의하여

$\frac{4}{e^2}<\frac{1}{\sqrt{e}}<\frac{2}{e}$

따라서 함수 $h(t)$의 최댓값 $M=\frac{2}{e}$, 최솟값 $m=\frac{4}{e^2}$이므로

$Mm=\frac{2}{e}\times\frac{4}{e^2}=\frac{8}{e^3}$

답 ④

33

(i) $x=-1$일 때, $e^{-1}-n\times 0\neq 0$이므로 $x=-1$은 해가 될 수 없다.

(ii) $x>-1$일 때, $e^x-n\sqrt{x+1}=0$에서

$$\frac{e^x}{\sqrt{x+1}}=n$$

$g(x)=\frac{e^x}{\sqrt{x+1}}$이라 하면

$$g'(x)=\frac{e^x\times\sqrt{x+1}-e^x\times\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{(\sqrt{x+1})^2}$$
$$=\frac{(2x+1)e^x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$g'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$

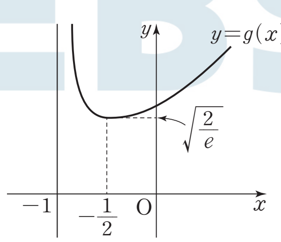
$x>-1$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	극소	↗

$g(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값

$g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{2}{e}}$를 갖는다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$0<\sqrt{\frac{2}{e}}<1$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=n$이 만나는 점의 개수는 2이다. 즉, $f(n)=2$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}f(k)=2\times 10=20$

답 20

34

$x^2+x-1\geq ke^x$에서 $e^x>0$이므로

$(x^2+x-1)e^{-x}\geq k$

$f(x)=(x^2+x-1)e^{-x}$이라 하면

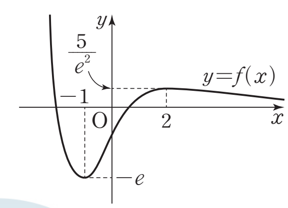
$$f'(x)=(2x+1)e^{-x}-(x^2+x-1)e^{-x}$$
$$=-(x^2-x-2)e^{-x}$$
$$=-(x-2)(x+1)e^{-x}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-e$	↗	$\frac{5}{e^2}$	↘

$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



즉, $f(x)\geq -e$이므로 $k\leq -e$를 만족시켜야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값은 $-e$이다.

답 ③

04 적분법

정답

본문 42~53쪽

01 ④	02 ②	03 ③	04 ④	05 ⑤
06 ①	07 32	08 ②	09 ①	10 ④
11 ②	12 ②	13 ①	14 253	15 ③
16 ⑤	17 26	18 ③	19 ④	20 ①
21 ③	22 ①	23 ②	24 2	25 ①
26 ②	27 25	28 ②	29 ④	30 40
31 ②	32 75	33 ③	34 ①	

01

$f'(x)=\left(x-\frac{2}{x}\right)^3=x^3-6x+\frac{12}{x}-\frac{8}{x^3}$이므로

$f(x)=\int\left(x-\frac{2}{x}\right)^3dx$

$=\int\left(x^3-6x+\frac{12}{x}-\frac{8}{x^3}\right)dx$

$=\frac{x^4}{4}-3x^2+12\ln|x|+\frac{4}{x^2}+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=\frac{33}{4}$이므로

$\frac{1}{4}-3+0+4+C=\frac{33}{4}$에서 $C=7$

따라서 $f(x)=\frac{x^4}{4}-3x^2+12\ln|x|+\frac{4}{x^2}+7$이므로

$f(2)=\frac{2^4}{4}-3\times2^2+12\ln 2+\frac{4}{2^2}+7=12\ln 2$

답 ④

02

$x^2f'(x)=\sin x-2xf(x)$에서 $2xf(x)+x^2f'(x)=\sin x$

$\{x^2f(x)\}'=\sin x$이므로

$x^2f(x)=\int\sin x\,dx=-\cos x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(x)=\frac{-\cos x+C}{x^2}$

$f(\pi)=0$이므로

$f(\pi)=\frac{-\cos\pi+C}{\pi^2}=0$에서 $C=-1$

따라서 $f(x)=\frac{-\cos x-1}{x^2}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-\cos\frac{\pi}{2}-1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}=-\frac{4}{\pi^2}$

답 ②

03

$f'(x)=(a^2-1)2^x$이므로

$f(x)=\int(a^2-1)2^x\,dx=\frac{(a^2-1)2^x}{\ln 2}+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=0$이므로

$\frac{2(a^2-1)}{\ln 2}+C=0$에서 $C=-\frac{2(a^2-1)}{\ln 2}$

즉, $f(x)=\frac{(a^2-1)(2^x-2)}{\ln 2}$

(i) $a^2-1=0$일 때

$f(x)=0$이므로 함수 $f(x)$의 최댓값이 $\frac{1}{2\ln 2}$이 될 수 없다.

(ii) $a^2-1>0$일 때

함수 $f(x)=\frac{(a^2-1)(2^x-2)}{\ln 2}$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 닫힌 구간 $[0, 2]$에서 최댓값 $f(2)$, 최솟값 $f(0)$을 갖는다.

즉, $f(2)=\frac{2(a^2-1)}{\ln 2}=\frac{1}{2\ln 2}$ …… ㉠

$f(0)=-\frac{a^2-1}{\ln 2}=-\frac{1}{\ln 2}$ …… ㉡

이때 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $a^2-1<0$일 때

함수 $f(x)=\frac{(a^2-1)(2^x-2)}{\ln 2}$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 닫힌 구간 $[0, 2]$에서 최댓값 $f(0)$, 최솟값 $f(2)$를 갖는다.

즉, $f(0)=-\frac{a^2-1}{\ln 2}=\frac{1}{2\ln 2}$ …… ㉢

$f(2)=\frac{2(a^2-1)}{\ln 2}=-\frac{1}{\ln 2}$ …… ㉣

이때 ㉢, ㉣을 모두 만족시키는 a^2의 값은 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 $a^2\times f(3)=\frac{1}{2}\times\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)(2^3-2)}{\ln 2}=-\frac{3}{2\ln 2}$

답 ③

04

$f'(x)=\sin^3x+\sin x\cos x$에서

$f'(x)=(\sin^2x+\cos x)\sin x=(1-\cos^2x+\cos x)\sin x$

$\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int\{(1-\cos^2x+\cos x)\sin x\}\,dx$

$=-\int(1-t^2+t)\,dt$

$=-\left(t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right)+C$ (단, C는 적분상수)

$=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3x-\frac{1}{2}\cos^2x+C$

$f(0)=0$이므로 $f(0)=-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+C=0$에서 $C=\frac{7}{6}$

따라서 $f(x)=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3x-\frac{1}{2}\cos^2x+\frac{7}{6}$이므로

$f(\pi)=-(-1)+\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}+\frac{7}{6}=\frac{4}{3}$

답 ④

05

$x^2+1=t$로 놓으면 $2x=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$g(x)=\int g'(x)\,dx$

$=\int \{xf'(x^2+1)\}\,dx$

$=\dfrac{1}{2}\int f'(t)\,dt$

$=\dfrac{1}{2}f(t)+C$ (단, C는 적분상수)

$=\dfrac{1}{2}f(x^2+1)+C$

$g(0)=2$이므로

$g(0)=\dfrac{1}{2}f(1)+C=\dfrac{1}{2}\times 2\times(1-1)\times e^1+C=0+C=2$에서

$C=2$

따라서 $g(x)=\dfrac{1}{2}f(x^2+1)+2$이므로

$g(1)=\dfrac{1}{2}\times f(2)+2=\dfrac{1}{2}\times 2\times(2-1)e^2+2=e^2+2$

답 ⑤

06

조건 (나)의 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{x}=1$에서 $x\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)+1\}=0$

함수 $f(x)$는 $x>-\dfrac{1}{2}$인 모든 실수 x에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)+1\}=f(0)+1=0$

즉, $f(0)=-1$

이때 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$

조건 (가)의 $f'(x)=\dfrac{a-\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)=\dfrac{a-0}{1}=1$, 즉 $a=1$

따라서 $f'(x)=\dfrac{1-\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$

$2x+1=t$로 놓으면 $t>0$이고, $2=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int \dfrac{1-\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\,dx$

$=\dfrac{1}{2}\int \dfrac{1-\ln t}{t^2}\,dt$

$=\dfrac{1}{2}\int\left(\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{\ln t}{t^2}\right)dt$

$=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{t^2}\,dt-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{\ln t}{t^2}\,dt$

$=-\dfrac{1}{2t}-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{\ln t}{t^2}\,dt$

여기서 $u(t)=\ln t$, $v'(t)=\dfrac{1}{t^2}$로 놓으면

$u'(t)=\dfrac{1}{t}$, $v(t)=-\dfrac{1}{t}$이므로

$f(x)=-\dfrac{1}{2t}-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{\ln t}{t^2}\,dt$

$=-\dfrac{1}{2t}-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{t}\times\ln t\right)+\dfrac{1}{2}\int\left(-\dfrac{1}{t}\times\dfrac{1}{t}\right)dt$

$=-\dfrac{1}{2t}+\dfrac{\ln t}{2t}-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{t^2}\,dt$

$=-\dfrac{1}{2t}+\dfrac{\ln t}{2t}+\dfrac{1}{2t}+C$ (단, C는 적분상수)

$=\dfrac{\ln t}{2t}+C$

$=\dfrac{\ln(2x+1)}{2(2x+1)}+C$

$f(0)=-1$이므로

$f(0)=\dfrac{0}{2}+C=-1$에서 $C=-1$

따라서 $f(x)=\dfrac{\ln(2x+1)}{2(2x+1)}-1$이므로

$a+f(1)=1+\dfrac{\ln 3}{6}-1=\dfrac{\ln 3}{6}$

답 ①

07

$\int f(x)\,dx=\sin x+a\cos x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\cos x-a\sin x$

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}-a\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-a)=2\sqrt{2}$에서

$a=-3$

따라서 $f(x)=\cos x+3\sin x$, $f'(x)=-\sin x+3\cos x$이므로

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{4}+3\cos\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}=\sqrt{2}$

따라서 $16\left\{f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}^2=16\times(\sqrt{2})^2=32$

답 32

08

$\int\{x^2f'(x)-xf(x)\}\,dx=(x^2-3x+3)e^x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$x^2f'(x)-xf(x)=(2x-3)e^x+(x^2-3x+3)e^x=(x^2-x)e^x$

$x^2\{f'(x)-e^x\}=x\{f(x)-e^x\}$

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>e^x$이므로

$\dfrac{f'(x)-e^x}{f(x)-e^x}=\dfrac{1}{x}$

$f(x)-e^x=t$ ($t>0$)으로 놓으면 $f'(x)-e^x=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$\int\dfrac{1}{x}\,dx=\int\dfrac{f'(x)-e^x}{f(x)-e^x}\,dx=\int\dfrac{1}{t}\,dt$

함수 $f(x)$의 정의역이 양의 실수 전체의 집합이므로

$\ln x=\ln\{f(x)-e^x\}+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=e+1$이므로 $\ln 1=\ln\{f(1)-e^1\}+C$

$0=\ln(e+1-e)+C$에서 $C=0$

즉, $\ln x=\ln\{f(x)-e^x\}$이므로

$f(x)=e^x+x$

따라서 $f(2)=e^2+2$

답 ②

09

조건 (다)의 $\int\{f(x)\}^2dx=e^{2x}-e^x-\int f'(x)F(x)\,dx$에서

$\int\{f(x)\}^2dx+\int f'(x)F(x)\,dx=e^{2x}-e^x$

$F'(x)=f(x)$이므로

$\int f(x)F'(x)\,dx+\int f'(x)F(x)\,dx=e^{2x}-e^x$

$\int\{f(x)F'(x)+f'(x)F(x)\}\,dx=e^{2x}-e^x$

$f(x)F'(x)+f'(x)F(x)=\{f(x)F(x)\}'$이므로

$\int\{f(x)F(x)\}'\,dx=e^{2x}-e^x$

$f(x)F(x)=e^{2x}-e^x+C_1$ (단, C_1은 적분상수) ...... ㉠

조건 (가)에서 $F(0)=0$이므로 ㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)F(0)=e^0-e^0+C_1$

$C_1=0$

따라서 $f(x)F(x)=e^{2x}-e^x$

$\frac{d}{dx}\{F(x)\}^2=2F(x)F'(x)=2F(x)f(x)$이므로

$\{F(x)\}^2=\int(2e^{2x}-2e^x)\,dx$

$=e^{2x}-2e^x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

$F(0)=0$이므로 $\{F(0)\}^2=e^0-2\times e^0+C_2$

$0=1-2+C_2$에서 $C_2=1$

따라서 $\{F(x)\}^2=e^{2x}-2e^x+1=(e^x-1)^2$이고 $F(x)$는 미분가능하므로

$F(x)=e^x-1$ 또는 $F(x)=1-e^x$

$F(x)=1-e^x$이면 $f(x)=F'(x)=-e^x$이므로 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$인 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

$F(x)=e^x-1$이면 $f(x)=F'(x)=e^x$이고 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로

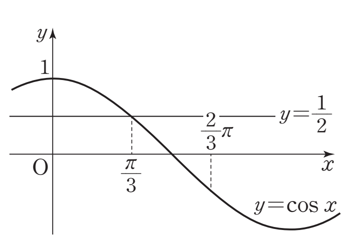
$F(x)=e^x-1$, $f(x)=e^x$

따라서 $F(2)=e^2-1$, $f(2)=e^2$이므로

$F(2)+f(2)=(e^2-1)+e^2=2e^2-1$

답 ①

10



함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$이 그림과 같으므로

$$\left|\frac{1}{2}-\cos x\right|=\begin{cases}-\frac{1}{2}+\cos x & \left(0\le x<\frac{\pi}{3}\right)\\ \frac{1}{2}-\cos x & \left(\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2}{3}\pi\right)\end{cases}$$

따라서

$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\left|\frac{1}{2}-\cos x\right|dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(-\frac{1}{2}+\cos x\right)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)dx$

$=\left[-\frac{x}{2}+\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[\frac{x}{2}-\sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}$

$=\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-0+\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 ④

11

$f(x)=x\sqrt{x^2+a}$에서

$f(-x)=-x\sqrt{(-x)^2+a}=-x\sqrt{x^2+a}=-f(x)$

이므로 $f(-x)=-f(x)$ ...... ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(-x)=f'(x)$

$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(x+1)f'(x)\,dx=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}xf'(x)\,dx+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}f'(x)\,dx$

에서 $g(x)=xf'(x)$로 놓으면

$g(-x)=(-x)f'(-x)=-xf'(x)=-g(x)$

즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}xf'(x)\,dx=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}g(x)\,dx=0$

따라서

$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(x+1)f'(x)\,dx=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}xf'(x)\,dx+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}f'(x)\,dx$

$=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}g(x)\,dx+\Big[f(x)\Big]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$

$=0+f(\sqrt{2})-f(-\sqrt{2})$

$=\sqrt{2}\sqrt{2+a}-(-\sqrt{2}\sqrt{2+a})$

$=2\sqrt{2}\sqrt{2+a}=4\sqrt{2}$

즉, $\sqrt{2+a}=2$에서 $2+a=4$이므로 $a=2$

답 ②

12

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

조건 (가)의 $\int_0^4 f(x)\,dx-\int_1^2 f(x)\,dx=3$에서

$\{F(4)-F(0)\}-\{F(2)-F(1)\}=3$

$\{F(4)-F(2)\}+\{F(1)-F(0)\}=3$ ...... ㉠

조건 (나)의 $\int_0^3 f(x)\,dx-\int_1^4 f(x)\,dx-\int_2^3 f(x)\,dx=1$에서

$\{F(3)-F(0)\}-\{F(4)-F(1)\}-\{F(3)-F(2)\}=1$

$-\{F(4)-F(2)\}+\{F(1)-F(0)\}=1$ ...... ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$2\{F(4)-F(2)\}=2$이므로 $F(4)-F(2)=1$ …… ㉢

즉, $\int_2^4 f(x)\,dx=1$

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$F(1)-F(0)=2$, 즉 $\int_0^1 f(x)\,dx=2$

따라서 $\int_0^1 f(x)\,dx\times\int_2^4 f(x)\,dx=2\times1=2$

답 ②

13

$x^2+1=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2x^3}{x^2+1}dx&=\int_1^2 \frac{t-1}{t}dt\\&=\int_1^2\left(1-\frac{1}{t}\right)dt\\&=\Big[t-\ln|t|\Big]_1^2\\&=(2-\ln 2)-(1-0)\\&=1-\ln 2\end{aligned}$$

답 ①

14

$h(n)=\int_0^n\{f(x-1)+f(-x+1)\}\,dx$라 하자.

$x-1=t$로 놓으면 $1=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=-1$, $x=n$일 때 $t=n-1$이므로

$\int_0^n f(x-1)\,dx=\int_{-1}^{n-1} f(t)\,dt$

또한 $-x+1=s$로 놓으면 $-1=\frac{ds}{dx}$이고

$x=0$일 때 $s=1$, $x=n$일 때 $s=-n+1$이므로

$\int_0^n f(-x+1)\,dx=-\int_1^{-n+1} f(s)\,ds=\int_{-n+1}^1 f(s)\,ds$

따라서

$$\begin{aligned}h(n)&=\int_0^n f(x-1)\,dx+\int_0^n f(-x+1)\,dx\\&=\int_{-1}^{n-1} f(t)\,dt+\int_{-n+1}^1 f(s)\,ds\\&=\int_{-1}^{n-1} f(t)\,dt+\int_{-n+1}^1 f(t)\,dt\\&=\int_{-1}^0 f(t)\,dt+\int_0^{n-1} f(t)\,dt+\int_{-n+1}^0 f(t)\,dt+\int_0^1 f(t)\,dt\\&=\int_{-1}^1 f(t)\,dt+\int_{-n+1}^{n-1} f(t)\,dt\end{aligned}$$

한편, $n=1$일 때,

$h(1)=\int_{-1}^1 f(t)\,dt+\int_0^0 f(t)\,dt=a+12$

이므로 $\int_{-1}^1 f(t)\,dt=a+12$ …… ㉠

$n=2$일 때,

$h(2)=\int_{-1}^1 f(t)\,dt+\int_{-1}^1 f(t)\,dt=4a+12$

이므로 $\int_{-1}^1 f(t)\,dt=2a+6$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a+12=2a+6$

즉, $a=6$

이때 $\int_{-1}^1 f(t)\,dt=a+12=6+12=18$

이므로 $h(n)=18+\int_{-n+1}^{n-1} f(t)\,dt=6n^2+12$

즉, $\int_{-n+1}^{n-1} f(t)\,dt=6n^2-6$

따라서 $g(n)=\int_{-n}^n f(x)\,dx=6(n+1)^2-6=6n^2+12n$이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{12}\left\{11a+\sum_{n=1}^{10}g(n)\right\}&=\frac{11}{12}\times6+\frac{1}{12}\sum_{n=1}^{10}(6n^2+12n)\\&=\frac{11}{2}+\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2}n^2+n\right)\\&=\frac{11}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}\\&=\frac{11}{2}+\frac{5\times11\times7}{2}+55\\&=253\end{aligned}$$

답 253

15

$\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{a+1}} xf'(x^2)\,dx$에서

$x^2=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=\sqrt{a}$일 때 $t=a$, $x=\sqrt{a+1}$일 때 $t=a+1$이므로

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{a+1}} xf'(x^2)\,dx&=\frac{1}{2}\int_a^{a+1} f'(t)\,dt\\&=\frac{1}{2}\Big[f(t)\Big]_a^{a+1}\\&=\frac{1}{2}f(a+1)-\frac{1}{2}f(a)\end{aligned}$$

한편, $\int_{\frac{a-1}{2}}^{\frac{a}{2}} g'(2x+1)\,dx$에서

$2x+1=s$로 놓으면 $2=\frac{ds}{dx}$이고

$x=\frac{a-1}{2}$일 때 $s=a$, $x=\frac{a}{2}$일 때 $s=a+1$이므로

$$\begin{aligned}\int_{\frac{a-1}{2}}^{\frac{a}{2}} g'(2x+1)\,dx&=\frac{1}{2}\int_a^{a+1} g'(s)\,ds\\&=\frac{1}{2}\Big[g(s)\Big]_a^{a+1}\\&=\frac{1}{2}g(a+1)-\frac{1}{2}g(a)\end{aligned}$$

$\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{a+1}} xf'(x^2)\,dx=\int_{\frac{a-1}{2}}^{\frac{a}{2}} g'(2x+1)\,dx$이므로

$\frac{1}{2}f(a+1)-\frac{1}{2}f(a)=\frac{1}{2}g(a+1)-\frac{1}{2}g(a)$

조건 (가)에서 $f(a)=g(a)$이므로

$f(a+1)=g(a+1)$

따라서 두 양의 실수 a, $a+1$은 방정식 $g(x)-f(x)=0$의 두 실근이다.
즉, $g(x)-f(x)=(4^{x-2}+k)-(2^x+1)=0$에서 $2^x=u\ (u>0)$으로 놓으면 두 양의 실수 2^a, 2^{a+1}은 u에 대한 이차방정식
$\frac{u^2}{16}-u+k-1=0$의 두 실근이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$2^a+2^{a+1}=16$ …… ㉠
$2^a\times 2^{a+1}=16(k-1)$
즉, $2^{2a+1}=16(k-1)$ …… ㉡
㉠에서 $3\times 2^a=16$이므로 $2^a=\frac{16}{3}$ …… ㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$\left(\frac{16}{3}\right)^2\times 2=16(k-1)$
$k-1=\frac{32}{9}$
따라서 $k=1+\frac{32}{9}=\frac{41}{9}$

답 ③

16

$\ln(2x^3)=\ln 2+3\ln x$이고,
$u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면
$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

$$\begin{aligned}\int_2^4 \ln(2x^3)\,dx&=\int_2^4(\ln 2+3\ln x)\,dx\\&=\Big[x\ln 2\Big]_2^4+3\int_2^4\ln x\,dx\\&=(4\ln 2-2\ln 2)+3\Big[x\ln x\Big]_2^4-3\int_2^4\left(x\times\frac{1}{x}\right)dx\\&=2\ln 2+3(4\ln 4-2\ln 2)-3\Big[x\Big]_2^4\\&=-6+20\ln 2\end{aligned}$$

답 ⑤

17

$\int_0^1\{g(x)\}^2f'(x)\,dx$에서
$u(x)=\{g(x)\}^2$, $v'(x)=f'(x)$로 놓으면
$u'(x)=2g'(x)g(x)$, $v(x)=f(x)$이므로

$$\begin{aligned}&\int_0^1\{g(x)\}^2f'(x)\,dx\\&=\Big[\{g(x)\}^2f(x)\Big]_0^1-\int_0^1\{2g'(x)g(x)\times f(x)\}\,dx\end{aligned}$$

$f(x)g(x)=x^2-x$이고, $f(1)g(1)=f(0)g(0)=0$이므로

$$\begin{aligned}&\int_0^1\{g(x)\}^2f'(x)\,dx\\&=\Big[\{g(1)\}^2f(1)-\{g(0)\}^2f(0)\Big]-2\int_0^1(x^2-x)g'(x)\,dx\\&=(0-0)-2\int_0^1(x^2-x)g'(x)\,dx\\&=-2\int_0^1(x^2-x)g'(x)\,dx\end{aligned}$$

이때 $m(x)=x^2-x$, $n'(x)=g'(x)$로 놓으면
$m'(x)=2x-1$, $n(x)=g(x)$이므로

$$\begin{aligned}&-2\int_0^1(x^2-x)g'(x)\,dx\\&=-2\Big[(x^2-x)g(x)\Big]_0^1+2\int_0^1(2x-1)g(x)\,dx\\&=-2(0-0)+2\int_0^1(2x-1)g(x)\,dx\\&=2\int_0^1(2x-1)g(x)\,dx\end{aligned}$$

즉, $2\int_0^1(2x-1)g(x)\,dx=14-\frac{38}{e}$
따라서 $\int_0^1(2x-1)g(x)\,dx=7-\frac{19}{e}$이므로 $p=7$, $q=19$에서
$p+q=7+19=26$

답 26

18

$(x+1)f(x)=x^2+3\int_0^1(t^2+2t)f'(t)\,dt$에서
$a=\int_0^1(t^2+2t)f'(t)\,dt$로 놓으면
$(x+1)f(x)=x^2+3a$ …… ㉠
$u(t)=t^2+2t$, $v'(t)=f'(t)$로 놓으면
$u'(t)=2(t+1)$, $v(t)=f(t)$이므로

$$\begin{aligned}a&=\int_0^1(t^2+2t)f'(t)\,dt\\&=\Big[(t^2+2t)f(t)\Big]_0^1-\int_0^1 2(t+1)f(t)\,dt\\&=3f(1)-2\int_0^1(t^2+3a)\,dt\ \ (\text{㉠에 의해})\\&=3f(1)-2\left[\frac{t^3}{3}+3at\right]_0^1\\&=3f(1)-\left(\frac{2}{3}+6a\right)\end{aligned}$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$2f(1)=1+3a$에서 $f(1)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}a$
$3f(1)=\frac{3}{2}+\frac{9}{2}a$이므로

$$\begin{aligned}a&=3f(1)-\left(\frac{2}{3}+6a\right)\\&=\left(\frac{3}{2}+\frac{9}{2}a\right)-\left(\frac{2}{3}+6a\right)\\&=\frac{5}{6}-\frac{3}{2}a\end{aligned}$$

즉, $a=\frac{5}{6}-\frac{3}{2}a$에서 $\frac{5}{2}a=\frac{5}{6}$이므로 $a=\frac{1}{3}$
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면
$3f(2)=4+3a=4+3\times\frac{1}{3}=5$
따라서 $f(2)=\frac{5}{3}$

답 ③

19

$\int_2^x xf(t)\,dt=\ln x+ax$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2\int_2^2 f(t)\,dt=\ln 2+2a$

$\ln 2+2a=0$에서 $a=-\frac{\ln 2}{2}$

즉, $\int_2^x xf(t)\,dt=\ln x-\frac{\ln 2}{2}x$ ...... ㉠

$\int_2^x xf(t)\,dt=x\int_2^x f(t)\,dt$이므로 ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_2^x f(t)\,dt+xf(x)=\frac{1}{x}-\frac{\ln 2}{2}$ ...... ㉡

㉡의 양변에 $x=2$를 대입하면

$\int_2^2 f(t)\,dt+2f(2)=\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}$

$2f(2)=\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}$

따라서 $2f(2)+a=\left(\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}\right)+\left(-\frac{\ln 2}{2}\right)=\frac{1}{2}-\ln 2$

답 ④

20

$F(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$F'(x)=f(x)$

$\int_0^x f(t)\,dt=\frac{ax^2+bx+c}{e^x}+3$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=c+3$에서 $c=-3$

즉, $\int_0^x f(t)\,dt=\frac{ax^2+bx-3}{e^x}+3$ ...... ㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\frac{(2ax+b)e^x-(ax^2+bx-3)e^x}{e^{2x}}$

$=\frac{-ax^2+(2a-b)x+b+3}{e^x}$

함수 $F(x)$는 $x=-1$과 $x=0$에서 극값을 가지므로

$F'(x)=f(x)=0$의 두 근이 $x=-1$과 $x=0$이다.

즉, x에 대한 방정식 $-ax^2+(2a-b)x+b+3=0$ $(a\neq 0)$의 두 실근이 -1과 0이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+0=-\frac{2a-b}{-a}$, $-a=2a-b$

$b=3a$ ...... ㉢

$-1\times 0=\frac{b+3}{-a}$, $0=b+3$

$b=-3$ ...... ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면 $a=-1$

㉡에서 $\int_0^x f(t)\,dt=\frac{-x^2-3x-3}{e^x}+3$이고,

$F'(x)=f(x)=\frac{x^2+x}{e^x}$이다.

$x<-1$에서 $F'(x)>0$, $-1<x<0$에서 $F'(x)<0$, $x>0$에서 $F'(x)>0$이므로 함수 $F(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $M=F(-1)$, $x=0$에서 극솟값 $m=F(0)$을 갖는다.

따라서

$M-m=F(-1)-F(0)$

$=\int_0^{-1} f(t)\,dt$

$=\frac{-(-1)^2-3\times(-1)-3}{e^{-1}}+3$

$=3-e$

답 ①

21

$\int_0^x f(2-t)\,dt+\int_{-2}^{x-2} f(2+t)\,dt=ae^{-x}+be^x+c$ ...... ㉠

$\int_0^x f(2-t)\,dt$에서 $2-t=w$로 놓으면 $-1=\frac{dw}{dt}$이고

$t=0$일 때 $w=2$, $t=x$일 때 $w=2-x$이므로

$\int_0^x f(2-t)\,dt=-\int_2^{2-x} f(w)\,dw$

$\int_{-2}^{x-2} f(2+t)\,dt$에서 $2+t=z$로 놓으면 $1=\frac{dz}{dt}$이고

$t=-2$일 때 $z=0$, $t=x-2$일 때 $z=x$이므로

$\int_{-2}^{x-2} f(2+t)\,dt=\int_0^x f(z)\,dz$

㉠에서

$\int_0^x f(2-t)\,dt+\int_{-2}^{x-2} f(2+t)\,dt$

$=-\int_2^{2-x} f(w)\,dw+\int_0^x f(z)\,dz$

이므로

$-\int_2^{2-x} f(w)\,dw+\int_0^x f(z)\,dz=ae^{-x}+be^x+c$ ...... ㉡

㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-\int_2^2 f(w)\,dw+\int_0^0 f(z)\,dz=a+b+c$

즉, $a+b+c=0$ ...... ㉢

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(2-x)+f(x)=-ae^{-x}+be^x$ ...... ㉣

㉣의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(2)+f(0)=-a+b$

㉣의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(0)+f(2)=-ae^{-2}+be^2$

이므로 $-a+b=-ae^{-2}+be^2$

$b(e^2-1)=a\left(-1+\frac{1}{e^2}\right)=a\times\frac{-e^2+1}{e^2}$

즉, $a=-be^2$

이것을 ㉢에 대입하면

$a+b+c=-be^2+b+c=0$

즉, $c=b(e^2-1)$

㉣의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)+f(1)=-\frac{a}{e}+be$

즉, $2f(1)=-\frac{-be^2}{e}+be=2be$에서

$f(1)=be$

따라서 $\dfrac{f(1)}{c}=\dfrac{be}{b(e^2-1)}=\dfrac{e}{e^2-1}$

답 ③

22

함수 $f(t)=\sqrt{t+1}\ln t$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)\,dt=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\Big[F(t)\Big]_2^x$$
$$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4}f(2)$$
$$=\frac{1}{4}\times\sqrt{3}\times\ln 2=\frac{\sqrt{3}}{4}\ln 2$$

답 ①

23

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\int_1^x f(t)\,dt-3e^2+e}{x-2}=5e^2$에서 $x\longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

함수 $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$는 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 2}\left\{\int_1^x f(t)\,dt-3e^2+e\right\}=\int_1^2 f(t)\,dt-3e^2+e=0$$

즉, $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,dt=3e^2-e$

함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{\int_1^x f(t)\,dt-3e^2+e}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^2 f(t)\,dt}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\{F(x)-F(1)\}-\{F(2)-F(1)\}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}=F'(2)$$
$$=f(2)=5e^2$$

$\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 f(t)\,dt=3e^2-e$이므로

$$f(2)+\int_1^2 f(x)\,dx=5e^2+3e^2-e=8e^2-e$$

답 ②

참고

연속함수 $f(x)$에 대하여 함수 $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$는 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

24

함수 $tf'(t)$의 한 부정적분을 $G(t)$라 하면

$$\int_1^{x+1}(t-x)f'(t)\,dt=\int_1^{x+1}tf'(t)\,dt-x\int_1^{x+1}f'(t)\,dt$$
$$=G(x+1)-G(1)-x\{f(x+1)-f(1)\}$$

이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_1^{x+1}(t-x)f'(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{G(x+1)-G(1)-x\{f(x+1)-f(1)\}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{G(x+1)-G(1)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{x\{f(x+1)-f(1)\}}{x}$$
$$=G'(1)-f(1)+f(1)$$
$$=1\times f'(1)$$
$$=f'(1)=3$$

$$f(x)=2x+a+\int_1^x(b\cos\pi t+\sin\pi t)\,dt \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2+b\cos\pi x+\sin\pi x$

$f'(1)=2+b\cos\pi+\sin\pi=3$에서

$2-b=3,\ b=-1$

한편, $f(1)=1$이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$f(1)=2+a+\int_1^1(b\cos\pi t+\sin\pi t)\,dt$$

$1=2+a+0$에서 $a=-1$

따라서 $a^2+b^2=(-1)^2+(-1)^2=2$

답 2

25

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}+\frac{1}{n+\sqrt{2n}}+\frac{1}{n+\sqrt{3n}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n^2}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1\times\frac{1}{n}}{(n+\sqrt{kn})\times\frac{1}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{k}{n}}}$$
$$=\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

$1+\sqrt{x}=t$로 놓으면 $\sqrt{x}=t-1$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx=\int_1^2\frac{2(t-1)}{t}\,dt$$
$$=2\int_1^2\left(1-\frac{1}{t}\right)dt$$
$$=2\Big[t-\ln|t|\Big]_1^2$$
$$=2(2-\ln 2)-2$$
$$=2-2\ln 2$$

답 ①

26

$$a=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{3}{n} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

으로 놓으면 $f(x)=e^x+a$이므로

$a=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{3}{n}$

$=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$

$=\frac{3}{2}\int_1^3 f(x)\,dx$

$=\frac{3}{2}\int_1^3 (e^x+a)\,dx$

$=\frac{3}{2}\Big[e^x+ax\Big]_1^3$

$=\frac{3}{2}(e^3-e+2a)$

즉, $a=\frac{3}{2}(e^3-e+2a)$, $a=\frac{3}{2}(e^3-e)+3a$에서

$a=-\frac{3(e^3-e)}{4}$

한편, ㉠에서

$a=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{3}{n}$

$=3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+2\times\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$=3\int_0^1 f(1+2x)\,dx$

즉, $\int_0^1 f(1+2x)\,dx=\frac{a}{3}$

또한

$a=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{3}{n}$

$=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$

$=\frac{3}{2}\int_0^2 f(1+x)\,dx$

즉, $\int_0^2 f(1+x)\,dx=\frac{2}{3}a$

따라서

$\int_0^1 f(1+2x)\,dx-\int_0^2 f(1+x)\,dx=\frac{a}{3}-\frac{2}{3}a$

$=-\frac{a}{3}$

$=-\frac{1}{3}\times\left\{-\frac{3(e^3-e)}{4}\right\}$

$=\frac{e^3-e}{4}$

답 ②

다른 풀이

$a=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{3}{n}$이라 하면

$a=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{3}{n}$

$=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$

$=\frac{3}{2}\int_1^3 f(x)\,dx$

이므로 $\int_1^3 f(x)\,dx=\frac{2}{3}a$

$\int_1^3 (e^x+a)\,dx=\frac{2}{3}a$

$\Big[e^x+ax\Big]_1^3=\frac{2}{3}a$

$e^3-e+2a=\frac{2}{3}a$

$a=-\frac{3(e^3-e)}{4}$

$\int_0^1 f(1+2x)\,dx$에서 $1+2x=s$로 놓으면 $2=\frac{ds}{dx}$이고

$x=0$일 때 $s=1$, $x=1$일 때 $s=3$이므로

$\int_0^1 f(1+2x)\,dx=\frac{1}{2}\int_1^3 f(s)\,ds$

$\int_1^3 f(s)\,ds=\int_1^3 f(x)\,dx=\frac{2}{3}a$이므로

$\int_0^1 f(1+2x)\,dx=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}a=\frac{a}{3}$

한편, $\int_0^2 f(1+x)\,dx$에서 $1+x=t$로 놓으면 $1=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=3$이므로

$\int_0^2 f(1+x)\,dx=\int_1^3 f(t)\,dt=\frac{2}{3}a$

따라서

$\int_0^1 f(1+2x)\,dx-\int_0^2 f(1+x)\,dx=\frac{a}{3}-\frac{2}{3}a=-\frac{a}{3}$

$=-\frac{1}{3}\times\left\{-\frac{3(e^3-e)}{4}\right\}$

$=\frac{e^3-e}{4}$

27

곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $\mathrm{B}_k\left(1+\frac{k}{n},\ \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)$ (k는 n 이하의 자연수)를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y=-\left(x-1-\frac{k}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

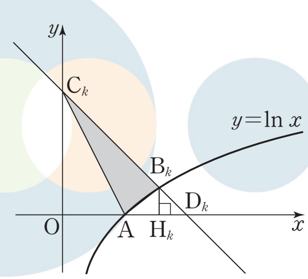
즉, $y=-x+1+\frac{k}{n}+\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$ ...... ㉠

직선 ㉠이 y축과 만나는 점 C_k의 좌표는

$\mathrm{C}_k\left(0,\ 1+\frac{k}{n}+\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)$

직선 ㉠이 x축과 만나는 점을 D_k라 하면 점 D_k의 좌표는

$\mathrm{D}_k\left(1+\frac{k}{n}+\ln\left(1+\frac{k}{n}\right),\ 0\right)$



삼각형 $\mathrm{AB}_k\mathrm{C}_k$의 넓이 S_k는 삼각형 $\mathrm{AD}_k\mathrm{C}_k$의 넓이에서 삼각형 $\mathrm{AD}_k\mathrm{B}_k$의 넓이를 빼면 된다.

점 B_k에서 x축에 내린 수선의 발을 H_k라 하자. 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(1,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AD}_k}=\left\{1+\frac{k}{n}+\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}-1=\frac{k}{n}+\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{H}_k}=\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$\overline{\mathrm{OC}_k}=1+\frac{k}{n}+\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$ (단, O는 원점)

이때 삼각형 $\mathrm{AB}_k\mathrm{C}_k$의 넓이 S_k는

$$S_k=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}_k}\times\overline{\mathrm{OC}_k}-\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}_k}\times\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{H}_k}$$

$$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}_k}\times(\overline{\mathrm{OC}_k}-\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{H}_k})$$

$$=\frac{1}{2}\times\left\{\frac{k}{n}+\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}\times\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\left\{\frac{k}{n}+\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}\times\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\left\{-1+\left(1+\frac{k}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}\times\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2(-x+x^2+x\ln x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2(-x+x^2)\,dx+\frac{1}{2}\int_1^2 x\ln x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_1^2+\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\times\ln x\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(2\ln 2-0\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2$$

$$=\frac{5}{12}+\ln 2-\frac{3}{8}$$

$$=\frac{1}{24}+\ln 2$$

따라서 $p=24$, $q=1$이므로

$p+q=24+1=25$

답 25

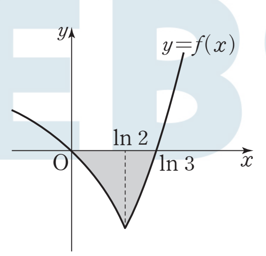
28

$|e^x-2|=0$에서 $e^x-2=0$, $e^x=2$

$x=\ln 2$이므로 함수 $f(x)$는

$$f(x)=|e^x-2|-1=\begin{cases}-e^x+1 & (x<\ln 2)\\ e^x-3 & (x\ge\ln 2)\end{cases}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=-e^x+1$은 원점을 지나고, 곡선 $y=e^x-3$은 x축과 점 $(\ln 3,\ 0)$에서 만난다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$-\int_0^{\ln 3}(|e^x-2|-1)\,dx$$

$$=-\int_0^{\ln 2}(-e^x+1)\,dx-\int_{\ln 2}^{\ln 3}(e^x-3)\,dx$$

$$=-\Big[-e^x+x\Big]_0^{\ln 2}-\Big[e^x-3x\Big]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$=-\{(-2+\ln 2)+1\}-\{(3-3\ln 3)-(2-3\ln 2)\}$$

$$=-4\ln 2+3\ln 3$$

답 ②

29

함수 $f(x)=\frac{1}{x+1}-k$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 t라 하면

$\frac{1}{t+1}-k=0$에서 $t+1=\frac{1}{k}$ …… ㉠

$a=\int_0^t f(x)\,dx$, $b=-\int_t^1 f(x)\,dx$

$b=2a$이므로

$$-\int_t^1 f(x)\,dx=2\int_0^t f(x)\,dx$$

$$-\int_t^1 f(x)\,dx-\int_0^t f(x)\,dx=\int_0^t f(x)\,dx$$

$$-\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^t f(x)\,dx$$

$$-\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-k\right)dx=\int_0^t\left(\frac{1}{x+1}-k\right)dx$$

$$-\Big[\ln|x+1|-kx\Big]_0^1=\Big[\ln|x+1|-kx\Big]_0^t$$

$$-\{(\ln 2-k)-0\}=\{\ln(t+1)-kt\}-0$$

$-\ln 2+(t+1)k=\ln(t+1)$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$$-\ln 2+\frac{1}{k}\times k=\ln\frac{1}{k}$$

$$\ln k=\ln 2-1=\ln\frac{2}{e}$$

따라서 $k=\frac{2}{e}$

답 ④

30

점 A의 좌표는 $(a,\ \sqrt{a})$이고 곡선 $y=bx^2$이 점 A를 지나므로

$\sqrt{a}=ba^2$, $b=a^{-\frac{3}{2}}$

또 직선 $y=cx$도 점 A를 지나므로

$\sqrt{a}=ca$, $c=a^{-\frac{1}{2}}$

$$S_2=\int_0^a bx^2\,dx=a^{-\frac{3}{2}}\int_0^a x^2\,dx=a^{-\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=a^{-\frac{3}{2}}\times\frac{1}{3}a^3$$

$$=\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}=2$$

즉, $a=6^{\frac{2}{3}}$

이때 $(abc)^{-3}=\left(a\times a^{-\frac{3}{2}}\times a^{-\frac{1}{2}}\right)^{-3}=a^3=\left(6^{\frac{2}{3}}\right)^3=36$

한편,

$$S_1=\int_0^a\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a=\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\left(6^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=4$$

$$S_3=\int_0^a cx\,dx=a^{-\frac{1}{2}}\int_0^a x\,dx=a^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a=a^{-\frac{1}{2}}\times\frac{a^2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\left(6^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=3$$

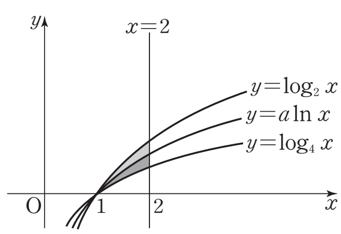
따라서 $\dfrac{10(abc)^{-3}}{S_1+S_2+S_3}=\dfrac{10\times36}{4+2+3}=40$

답 40

31

두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=a\ln x$와 직선 $x=2$로 둘러싸인 영역의 넓이를 S라 하고, 두 곡선 $y=\log_4 x$, $y=a\ln x$와 직선 $x=2$로 둘러싸인 영역의 넓이를 T라 하자.

$S=T$이려면 세 곡선 $y=\log_2 x$, $y=a\ln x$, $y=\log_4 x$는 그림과 같아야 한다.



$$\int \ln x\,dx=x\ln x-\int\left(x\times\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=x\ln x-x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이므로

$$S=\int_1^2(\log_2 x-a\ln x)\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{\ln 2}-a\right)\int_1^2 \ln x\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{\ln 2}-a\right)\Big[x\ln x-x\Big]_1^2$$

$$=\left(\frac{1}{\ln 2}-a\right)\{(2\ln 2-2)-(0-1)\}$$

$$=(2\ln 2-1)\left(\frac{1}{\ln 2}-a\right)$$

$$T=\int_1^2(a\ln x-\log_4 x)\,dx$$

$$=\left(a-\frac{1}{\ln 4}\right)\int_1^2 \ln x\,dx$$

$$=\left(a-\frac{1}{\ln 4}\right)\Big[x\ln x-x\Big]_1^2$$

$$=\left(a-\frac{1}{\ln 4}\right)\{(2\ln 2-2)-(0-1)\}$$

$$=(2\ln 2-1)\left(a-\frac{1}{\ln 4}\right)$$

에서 $(2\ln 2-1)\left(\dfrac{1}{\ln 2}-a\right)=(2\ln 2-1)\left(a-\dfrac{1}{\ln 4}\right)$

$\dfrac{1}{\ln 2}-a=a-\dfrac{1}{\ln 4}$, $2a=\dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{1}{2\ln 2}=\dfrac{3}{2\ln 2}$

따라서 $a=\dfrac{3}{4\ln 2}$

답 ②

32

두 점 A, B의 좌표는 각각 A$(0, 1)$, B$(1, 0)$이므로

두 점 C, D의 좌표는 각각 C$(3, 1)$, D$(1, 3)$이다.

두 점 C, D는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, $\overline{\text{PC}}=\overline{\text{PD}}$이므로

네 점 A, B, C, D를 지나는 원의 중심 P는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

이때 점 P의 좌표를 P(t, t)로 놓으면 $\overline{\text{PA}}=\overline{\text{PD}}$이므로

$$\sqrt{t^2+(t-1)^2}=\sqrt{(t-1)^2+(t-3)^2}$$

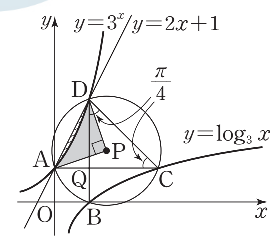
$$2t^2-2t+1=2t^2-8t+10$$

$$6t=9,\ t=\frac{3}{2}$$

즉, P$\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

또한 원의 반지름의 길이는

$$\overline{\text{PA}}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-0\right)^2+\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$



직선 AC와 직선 BD가 만나는 점을 Q라 하면 삼각형 QCD는

$\overline{\text{QC}}=\overline{\text{QD}}=2$인 직각이등변삼각형이므로

$\angle\text{BDC}=\angle\text{ACD}=\dfrac{\pi}{4}$

원주각 $\angle$ACD에 대한 중심각은 $\angle$APD이므로

$\angle\text{APD}=\dfrac{\pi}{2}$

두 점 A, D를 지나는 직선 AD의 기울기는

$\dfrac{3-1}{1-0}=2$이므로 직선 AD의 방정식은

$y=2x+1$

이때 곡선 $y=3^x$과 선분 AP 및 선분 DP로 둘러싸인 영역의 넓이를 S라 하면 S는 직각이등변삼각형 APD의 넓이에서 곡선 $y=3^x$과 직선 $y=2x+1$로 둘러싸인 영역의 넓이를 빼면 된다.

직각이등변삼각형 APD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\text{PA}}^2=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

또 곡선 $y=3^x$과 직선 $y=2x+1$로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$\int_0^1(2x+1-3^x)\,dx=\left[x^2+x-\frac{3^x}{\ln 3}\right]_0^1$$

$$=\left(2-\frac{3}{\ln 3}\right)-\left(0-\frac{1}{\ln 3}\right)$$

$$=2-\frac{2}{\ln 3}$$

이므로 $S=\dfrac{5}{4}-\left(2-\dfrac{2}{\ln 3}\right)=\dfrac{2}{\ln 3}-\dfrac{3}{4}$

따라서 $a=2$, $b=-\dfrac{3}{4}$이므로

$$60(a+b)=60\times\left\{2+\left(-\frac{3}{4}\right)\right\}=60\times\frac{5}{4}=75$$

답 75

33

x축 위의 점 $(t,\ 0)\ (0\le t\le 3\ln 2)$를 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{e^t+1}$인 정삼각형이므로 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{e^t+1}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(e^t+1)$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$\begin{aligned}V&=\int_0^{3\ln 2}S(t)\,dt\\&=\int_0^{3\ln 2}\frac{\sqrt{3}}{4}(e^t+1)\,dt\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\Big[e^t+t\Big]_0^{3\ln 2}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\{(8+3\ln 2)-(1+0)\}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}(7+3\ln 2)\end{aligned}$$

답 ③

34

x축 위의 점 $(t,\ 0)\ (a\le t\le a+1)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{t^3-3t^2+2t+1}$인 정사각형이므로 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\left(\sqrt{t^3-3t^2+2t+1}\right)^2=t^3-3t^2+2t+1$

따라서 구하는 입체도형의 부피 $V(a)$는

$V(a)=\int_a^{a+1}S(t)\,dt=\int_a^{a+1}(t^3-3t^2+2t+1)\,dt$ …… ㉠

㉠의 양변을 a에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}V'(a)&=\{(a+1)^3-3(a+1)^2+2(a+1)+1\}-(a^3-3a^2+2a+1)\\&=3a^2-3a\end{aligned}$$

$V'(a)=0$에서 $a=0$ 또는 $a=1$

$0<a<1$에서 $V'(a)<0$이고, $a>1$에서 $V'(a)>0$이므로

$V(a)$는 $a=1$에서 극소이면서 최소이다.

따라서 $V(a)$의 최솟값은

$$\begin{aligned}V(1)&=\int_1^2 S(t)\,dt\\&=\int_1^2(t^3-3t^2+2t+1)\,dt\\&=\left[\frac{1}{4}t^4-t^3+t^2+t\right]_1^2\\&=(4-8+4+2)-\left(\frac{1}{4}-1+1+1\right)\\&=2-\frac{5}{4}\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

답 ①

참고

$V(a)=\int_a^{a+1}S(t)\,dt$의 양변을 a에 대하여 미분하면

$V'(a)=S(a+1)-S(a)$

확률과 통계

05 순열과 조합

정답 본문 56~69쪽

01 ④	02 ①	03 ⑤	04 168	05 ⑤
06 ①	07 ②	08 ①	09 48	10 84
11 ②	12 ①	13 ④	14 ③	15 560
16 ④	17 17	18 ③	19 37	20 ①
21 ②	22 70	23 ④	24 420	25 ③
26 ②	27 ①	28 ③	29 540	30 ④
31 ③	32 ②	33 ③	34 ①	35 ⑤
36 ②	37 30	38 ⑤	39 ②	

01

A지점에서 D지점으로 가는 경우는 다음 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) A → B → D로 가는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times 3=6$

(ii) A → C → D로 가는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4\times 2=8$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$6+8=14$

답 ④

02

조건 (가)에서 일의 자리에 올 수 있는 수는 0, 5로 2개이고, 조건 (나)에서 백의 자리에 올 수 있는 수는 1, 3, 5, 7, 9로 5개, 십의 자리에 올 수 있는 수는 1, 2, 3, 6으로 4개이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times 5\times 4=40$

답 ①

03

평행사변형이 되려면 어느 세 점도 한 직선에 있으면 안 되므로 그림에서 위쪽의 점 2개와 아래쪽의 점 2개를 택해야 한다. 또 평행사변형은 평행한 두 변의 길이가 같으므로 위쪽 두 점을 연결한 선분의 길이와 아래쪽 두 점을 연결한 선분의 길이가 같아야 한다.

위쪽 두 점을 연결한 선분의 길이는 1, 2, 3, 4가 될 수 있고 그 길이가 되도록 하는 선분의 개수는 각각 4, 3, 2, 1이다.

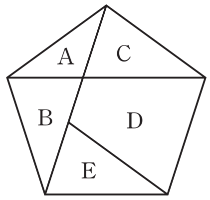
아래쪽도 마찬가지이므로 구하는 경우의 수는

$4\times 4+3\times 3+2\times 2+1\times 1=30$

답 ⑤

04

그림과 같이 5개의 영역을 A, B, C, D, E라 하자.



A, B, C, D, E 순서로 색을 칠한다고 생각하면 A에 칠할 수 있는 색은 4가지이고 B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

(i) C에 B와 같은 색을 칠하는 경우

D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 3가지

E에 칠할 수 있는 색은 B, D에 칠한 색을 제외한 2가지

따라서 C, D, E에 색칠하는 경우의 수는

$1\times3\times2=6$

(ii) C에 B와 다른 색을 칠하는 경우

C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지

D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지

E에 칠할 수 있는 색은 B, D에 칠한 색을 제외한 2가지

따라서 C, D, E에 색칠하는 경우의 수는

$2\times2\times2=8$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$4\times3\times(6+8)=168$

답 168

05

여학생 2명을 묶어서 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

${}_4P_4=4!=24$

여학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times2=48$

답 ⑤

06

천의 자리에 올 수 있는 수는 0을 제외한 5개의 수이고, 백의 자리와 십의 자리, 일의 자리에 올 수 있는 수는 천의 자리의 수를 제외한 나머지 5개의 수 중에서 3개의 수를 뽑아 일렬로 나열하면 되므로 구하는 자연수의 개수는

$5\times{}_5P_3=5\times(5\times4\times3)=300$

답 ①

07

$f(1)+f(2)=10$, $f(1)\neq f(2)$를 만족시키는 $f(1)$과 $f(2)$의 순서쌍은 $(3, 7)$, $(4, 6)$, $(6, 4)$, $(7, 3)$으로 모두 4개이다.

조건 (나)에 의하여 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우는 집합 Y의 원소에서 $f(1)$과 $f(2)$를 제외한 5개의 원소 중에서 서로 다른 3개의 원소를 택하여 나열하면 되므로

${}_5P_3=5\times4\times3=60$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$4\times60=240$

답 ②

08

서로 다른 6가지의 색을 6개의 정삼각형에 칠하는 경우의 수는 $6!$

회전하였을 때 같은 것이 6가지씩 있으므로 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{6}=5!=120$

답 ①

09

같은 학년의 학생끼리 정사각형의 같은 변 쪽에 서로 이웃하려면 네 변에 각각 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 2명, 빈 의자 2개를 배정해야 하므로 그 경우의 수는 $4!$

회전하였을 때 같은 것이 4가지씩 있으므로 경우의 수는

$\frac{4!}{4}=3!=6$

1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 2명이 각각 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

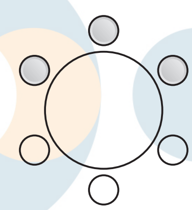
$2\times2\times2=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times8=48$

답 48

10



그림과 같이 3명의 어린이끼리 서로 이웃하도록 앉는 경우를 제외하면 각 어린이가 적어도 1명의 어른과 서로 이웃하도록 앉게 된다.

어른 3명, 어린이 3명이 원형의 탁자에 앉는 경우의 수는 $6!$이고, 회전하였을 때 같은 것이 6가지씩 있으므로 경우의 수는

$\frac{6!}{6}=5!=120$

3명의 어린이끼리 서로 이웃하도록 6명이 원형의 탁자에 앉는 경우의 수는 어린이 3명을 한 묶음으로 묶어서 한 사람으로 생각하면 $4!$이고, 어린이 3명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!$이고, 회전하였을 때 같은 것이 4가지씩 있으므로 경우의 수는

$\frac{4!\times3!}{4}=36$

따라서 구하는 경우의 수는 $120-36=84$

답 84

11

4의 배수가 되려면 십의 자리의 수와 일의 자리의 수만 읽은 두 자리 자연수가 4의 배수이어야 한다. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 만들 수 있는 4의 배수인 두 자리 자연수는 12, 24, 32, 44, 52로 5개이다.

만의 자리의 수, 천의 자리의 수, 백의 자리의 수를 정하는 방법의 수는 숫자 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자를 중복을 허락하여 3번 택해 일렬로

나열하는 중복순열의 수이므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 4의 배수의 개수는

$5\times125=625$

답 ②

12

집합 $X=\{x|x$는 2 이상 9 이하의 자연수$\}$에서 중복을 허락하여 세 원소를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_8\Pi_3=512$

순서쌍 (a, b)가 서로 다르면서 $\log_a b$의 값이 서로 같을 수 있는 경우는 다음 5가지이다.

(i) $\log_a b=\frac{1}{2}$인 경우

순서쌍 (a, b)는 $(4, 2)$, $(9, 3)$으로 2개이다.

(ii) $\log_a b=\log_3 2$인 경우

순서쌍 (a, b)는 $(3, 2)$, $(9, 4)$로 2개이다.

(iii) $\log_a b=1$인 경우

$a=b$이므로 순서쌍 (a, b)는 8개이다.

(iv) $\log_a b=\log_2 3$인 경우

순서쌍 (a, b)는 $(2, 3)$, $(4, 9)$로 2개이다.

(v) $\log_a b=2$인 경우

순서쌍 (a, b)는 $(2, 4)$, $(3, 9)$로 2개이다.

(i)~(v)의 경우 c가 될 수 있는 수가 각각 8개이므로 서로 다른 점의 개수는

$512-8\times(1+1+7+1+1)=424$

답 ①

13

(i) a가 짝수인 2, 4일 때

$f(a)$가 짝수이어야 $a+f(a)$가 짝수이다.

즉, 2, 4, 6을 중복을 허락하여 2번 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수이므로

${}_3\Pi_2=3^2=9$

(ii) a가 홀수인 1, 3, 5일 때

$f(a)$가 홀수이어야 $a+f(a)$가 짝수이다.

즉, 1, 3, 5, 7을 중복을 허락하여 3번 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수이므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$

(i), (ii)에서 곱의 법칙에 의하여 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$9\times64=576$

답 ④

14

백만의 자리의 수가 2인 자연수의 개수는 0, 0, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하면 되므로

$\frac{6!}{2!2!2!}=90$

즉, 91번째로 큰 수부터 백만의 자리의 수가 1이다.

백만의 자리의 수가 1이고, 십만의 자리의 수가 2인 자연수의 개수는 0, 0, 1, 2, 2를 일렬로 나열하면 되므로

$\frac{5!}{2!2!}=30$

따라서 121번째로 큰 수는 1122200이다.

답 ③

15

10개의 문자는 a가 1개, c가 1개, i가 2개, s가 3개, t가 3개이다.

조건 (가)에 의하여 10개의 문자 중에서 2개의 s를 양쪽 끝에 나열하고 남은 8개의 문자를 나열한다.

조건 (나)를 만족시키려면 a와 c를 i라 생각하고 일렬로 나열한 후 나열된 4개의 i 중에서 가운데 2개의 i를 a와 c로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 8개의 문자 중에서 4개의 i, 3개의 t가 있는 같은 것이 있는 순열의 수에서 a와 c의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수인 2를 곱하면 되므로

$\frac{8!}{3!4!}\times2=560$

답 560

16

조건 (가)에 의하여 만의 자리의 수는 1이고, 조건 (나)를 만족시키는 경우는 다음 두 가지이다.

(i) 같은 3개의 수가 1인 경우

나머지 두 수를 고르는 경우의 수는 ${}_9C_2$이고, 만의 자리를 제외한 네 수를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

이므로 ${}_9C_2\times12=432$

(ii) 같은 3개의 수가 1이 아닌 경우

같은 3개의 수와 나머지 한 수를 고르는 경우의 수는 ${}_9P_2$이고, 만의 자리를 제외한 네 수를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

이므로 ${}_9P_2\times4=288$

(i), (ii)에 의하여 구하는 자연수의 개수는

$432+288=720$

답 ④

17

A지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$\frac{7!}{4!3!}=35$

A지점에서 P지점을 지나 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!1!}\times\frac{4!}{2!2!}=3\times6=18$

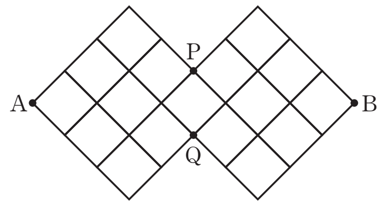
따라서 A지점에서 P지점을 지나지 않고 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$35-18=17$

답 17

18

그림과 같이 P지점과 Q지점을 잡자.



A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 가는 경우는 다음 두 가지이다.

(i) A지점에서 P지점을 지나 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!3!}\times\frac{5!}{3!2!}=10\times10=100$

(ii) A지점에서 Q지점을 지나 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!2!}\times\frac{5!}{2!3!}=10\times10=100$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$100+100=200$

답 ③

19

A지점에서 P지점을 지나 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{1!2!}\times\frac{6!}{4!2!}=3\times15=45$

A지점에서 Q지점을 지나 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!3!}\times\frac{4!}{3!1!}=10\times4=40$

A지점에서 P지점과 Q지점을 지나 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{1!2!}\times\frac{2!}{1!1!}\times\frac{4!}{3!1!}=3\times2\times4=24$

따라서 A지점에서 출발하여 P지점을 지나지만 Q지점을 지나지 않고 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$45-24=21$

A지점에서 출발하여 P지점을 지나지 않으면서 Q지점을 지나 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$40-24=16$

이므로 구하는 경우의 수는

$21+16=37$

답 37

20

8개의 과목 중에서 3과목을 택하는 경우의 수는

${}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

이 중에서 3개 모두 사회 과목을 택하는 경우의 수인 ${}_4C_3={}_4C_1=4$와 3개 모두 과학 과목을 택하는 경우의 수인 ${}_4C_3={}_4C_1=4$를 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$56-4-4=48$

답 ①

21

같은 줄에 적힌 세 수의 합이 모두 홀수가 되려면 각 줄의 세 수 중에서 홀수의 개수는 1 또는 3이어야 한다. 열도 마찬가지이므로 적힌 9개의 수 중 짝수는 없거나 $\boxed{4}$개 또는 6개이다.

(i) 적힌 9개의 수 중 짝수가 없는 경우

9개의 수가 모두 홀수이므로 경우의 수는 $2^9=512$이다.

(ii) 적힌 9개의 수 중 짝수가 $\boxed{4}$개인 경우

3개의 열 중에서 짝수를 적는 정사각형이 있는 열 2개를 고르고, 3개의 줄 중에서 짝수를 적는 정사각형이 있는 줄 2개를 고르면 짝수를 적을 정사각형이 정해지고, 남은 5개의 정사각형에는 홀수를 적으므로 경우의 수는 $\boxed{{}_3C_2\times{}_3C_2\times2^5=288}$이다.

(iii) 적힌 9개의 수 중 짝수가 6개인 경우

적힌 9개의 수 중 홀수가 3개이고, 3개의 홀수를 각 줄과 각 열에 모두 1개의 홀수가 있도록 적는 경우이다. 첫째 줄 3개의 정사각형 중에서 홀수를 적을 정사각형을 고르고, 둘째 줄에서 홀수가 적힌 열을 제외한 2개의 정사각형 중에서 홀수를 적을 정사각형을 고르면 셋째 줄에 홀수를 적을 정사각형이 정해지므로 경우의 수는 $\boxed{{}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times2^3=48}$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$512+\boxed{288}+\boxed{48}$이다.

따라서 $p=4$, $q=288$, $r=48$이므로

$p+q+r=340$

답 ②

22

${}_5H_4={}_{5+4-1}C_4={}_8C_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$

답 70

23

조건 (가)에 의하여 각 사람에게 장미를 1송이씩 나누어 준 후 남은 4송이를 세 사람에게 중복을 허락하여 나누어 주는 경우의 수는

${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

조건 (나)를 만족시키도록 국화를 세 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 국화 5송이를 세 사람에게 중복을 허락하여 나누어 주는 경우의 수에서 세 사람에게 1송이씩 나누어 준 후 남은 2송이를 세 사람에게 중복을 허락하여 나누어 주는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로

$$\begin{aligned}{}_3H_5-{}_3H_2&={}_{3+5-1}C_5-{}_{3+2-1}C_2={}_7C_5-{}_4C_2={}_7C_2-{}_4C_2\\&=\frac{7\times6}{2\times1}-\frac{4\times3}{2\times1}=21-6\\&=15\end{aligned}$$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times15=225$

답 ④

24

홀수 1, 3, 5, 7, 9 중에서 치역의 원소가 될 4개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_4=5$

선택된 4개의 수가 적어도 1번씩 포함되어야 하므로 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 $(10-4)$개를 뽑는 중복조합의 수는

$${}_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6={}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$5\times84=420$

답 420

25

방정식 $x+y+z+w=9$를 만족시키는 자연수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

$x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$, $w=w'+1$

$(x', y', z', w'$은 음이 아닌 정수$)$

라 하면 방정식 $x'+y'+z'+w'=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z', w'의 모든 순서쌍 (x', y', z', w')의 개수와 같다.

즉, 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_8C_5={}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

답 ③

26

$(a+b+c-d)^7$의 전개식에서 일반항은 $a^xb^yc^z(-d)^w$의 양의 실수배이고,

$x+y+z+w=7$ $(x, y, z, w$는 음이 아닌 정수$)$

a와 c를 포함하려면 x와 z는 1 이상이어야 하고, 계수가 양수이려면 w는 0 또는 짝수이므로

$x=x'+1$, $z=z'+1$, $w=2w'$ $(x', z', w'$은 음이 아닌 정수$)$

라 하면 $x'+y+z'+2w'=5$

즉, $(a+b+c-d)^7$의 전개식에서 a와 c를 모두 포함하고 계수가 양수인 서로 다른 항의 개수는 방정식 $x'+y+z'+2w'=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y, z', w'의 모든 순서쌍 (x', y, z', w')의 개수와 같다.

(i) $w'=0$인 경우

$x'+y+z'=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y, z'의 모든 순서쌍 (x', y, z')의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$$

(ii) $w'=1$인 경우

$x'+y+z'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y, z'의 모든 순서쌍 (x', y, z')의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

(iii) $w'=2$인 경우

$x'+y+z'=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y, z'의 모든 순서쌍 (x', y, z')의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 1개를 택하는 중복조합의 수이므로

${}_3H_1={}_{3+1-1}C_1={}_3C_1=3$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 항의 개수는

$21+10+3=34$

답 ②

27

세 자리 자연수의 각 자리의 수를 x, y, z $(x$는 9 이하의 자연수, y, z는 0 이상 9 이하의 정수$)$라 하면 3개의 홀수의 합은 홀수이므로 조건 (가)를 만족시키는 5의 배수는 5, 15, 25이다.

즉, $x+y+z=5$, $x+y+z=15$, $x+y+z=25$

조건 (나)에서 x, y, z는 모두 홀수이므로

$x=2a+1$, $y=2b+1$, $z=2c+1$ $(a, b, c$는 0 이상 4 이하의 정수$)$

라 하면

$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)=5$,

$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)=15$,

$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)=25$

(i) $a+b+c=1$ $(a, b, c$는 0 이상 4 이하의 정수$)$일 때

a, b, c 중에서 중복을 허락하여 1개를 택하는 경우에서 조건 (다)를 만족시키지 못하는 1가지 경우를 제외한다.

즉, ${}_3H_1-1={}_{3+1-1}C_1-1={}_3C_1-1=2$

(ii) $a+b+c=6$ $(a, b, c$는 0 이상 4 이하의 정수$)$일 때

a, b, c 중에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 경우에서 조건 (다)를 만족시키지 못하는 3가지 경우를 제외한다. 또, a, b, c는 4 이하의 정수이므로 5가 있는 경우 6가지와 6이 있는 경우 3가지를 제외한다.

즉, ${}_3H_6-3-9={}_{3+6-1}C_6-12={}_8C_6-12=16$

(iii) $a+b+c=11$ $(a, b, c$는 0 이상 4 이하의 정수$)$일 때

$4+4+3=11$인 경우만 존재하고, 조건 (다)를 만족시키는 경우는 $a=3$이거나 $c=3$이므로 2가지

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 자연수의 개수는

$2+16+2=20$

답 ①

28

10명의 학생을 3명 이상씩 3개의 조로 나누는 방법은 3명, 3명, 4명이다.

(i) A, B가 포함된 조의 인원이 3명인 경우

A, B를 제외한 남은 8명 중에서 A, B가 포함된 조에 1명을 뽑고, 남은 7명을 3명, 4명으로 나누는 경우의 수는

$${}_8C_1\times{}_7C_3\times{}_4C_4=8\times\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times1=280$$

(ii) A, B가 포함된 조의 인원이 4명인 경우

A, B를 제외한 남은 8명 중에서 A, B가 포함된 조에 2명을 뽑고, 남은 6명을 3명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$${}_8C_2\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=\frac{8\times7}{2\times1}\times\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times1\times\frac{1}{2!}=280$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$280+280=560$

답 ③

29

1부터 6까지의 자연수 중에서 $f(a)=1$인 집합 X의 원소 a를 2개 택하는 경우의 수는

${}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

남은 4개의 자연수를 2개, 1개, 1개로 분할하는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=\frac{4\times3}{2\times1}\times2\times1\times\frac{1}{2!}=6$

세 분할을 함숫값이 3, 5, 7이 되도록 각각 정하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$15\times6\times6=540$

답 540

30

볼펜 6개를 2개씩 나누어 담는 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}=\frac{6\times5}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{3!}=15$

볼펜이 들어 있는 세 상자는 모두 구별이 되고, 공책 5권을 1권 이상씩 3개의 상자에 나누어 넣으려면 1권, 2권, 2권 또는 1권, 1권, 3권으로 나누어야 한다.

공책 5권을 1권, 2권, 2권으로 나누어 넣는 경우의 수는 1권을 넣을 상자만 고르면 되므로

${}_3C_1=3$

공책 5권을 1권, 1권, 3권으로 나누어 넣는 경우의 수는 3권을 넣을 상자만 고르면 되므로

${}_3C_1=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times(3+3)=90$

답 ④

31

자연수 15를 3의 배수인 자연수로 분할하는 방법의 수는 자연수 5를 자연수로 분할하는 방법의 수와 같으므로

$5=4+1=3+2$

$=3+1+1$

$=2+2+1$

$=2+1+1+1$

$=1+1+1+1+1$

따라서 구하는 경우의 수는 7이다.

답 ③

32

같은 종류의 사탕 13개를 같은 종류의 주머니 3개에 각각 들어가는 사탕의 개수가 3 이상이 되도록 나누어 담는 경우의 수는 자연수 13을 3개의 3 이상의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같다.

$13=7+3+3$

$=6+4+3$

$=5+5+3$

$=5+4+4$

따라서 구하는 경우의 수는 4이다.

답 ②

33

조건을 만족시키는 방법의 수는 자연수 10을 2를 포함한 5개의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같다. 이 방법의 수는 자연수 8을 4개의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같으므로

$8=5+1+1+1$

$=4+2+1+1$

$=3+3+1+1$

$=3+2+2+1$

$=2+2+2+2$

따라서 구하는 경우의 수는 5이다.

답 ③

34

$(x^2-1)\left(x+\frac{2}{x}\right)^5$의 전개식에서 x의 계수는 (x^2-1)에서 x^2의 계수와 $\left(x+\frac{2}{x}\right)^5$의 전개식에서 $\frac{1}{x}$의 계수의 곱과 (x^2-1)에서 -1과 $\left(x+\frac{2}{x}\right)^5$의 전개식에서 x의 계수의 곱의 합과 같다.

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r x^{5-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r={}_5C_r 2^r x^{5-2r}$

$\frac{1}{x}$의 계수는 $5-2r=-1$에서 $r=3$일 때이므로

${}_5C_3 2^3={}_5C_2 2^3=\frac{5\times4}{2\times1}\times8=80$

또, x의 계수는 $5-2r=1$에서 $r=2$일 때이므로

${}_5C_2 2^2=\frac{5\times4}{2\times1}\times4=40$

따라서 구하는 x의 계수는

$80-40=40$

답 ①

35

$(x+\sqrt[3]{2})^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_r x^{7-r}(\sqrt[3]{2})^r$

계수가 유리수이려면 $(\sqrt[3]{2})^r$이 유리수이어야 하므로 r는 0 또는 3 또는 6이다.

(i) $r=0$일 때, x^7의 계수는

${}_7C_0(\sqrt[3]{2})^0=1$

(ii) $r=3$일 때, x^4의 계수는

${}_7C_3(\sqrt[3]{2})^3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times2=70$

(iii) $r=6$일 때, x의 계수는

${}_7C_6(\sqrt[3]{2})^6={}_7C_1(\sqrt[3]{2})^6=7\times4=28$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 계수가 유리수인 모든 항의 계수의 합은

$1+70+28=99$

답 ⑤

36

$\int f(x)\,dx$의 전개식에서 x^4의 계수를 구하려면 함수 $f(x)$의 x^3의 계수를 구해야 한다.

$\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r\,(x^2)^{6-r}\left(\frac{a}{x}\right)^r={}_6C_r\,a^r\,x^{12-3r}$

x^3의 계수는 $r=3$일 때이므로

${}_6C_3\,a^3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times a^3=20a^3$

이때 $\int f(x)\,dx$의 전개식에서 x^4의 계수가 135이므로 함수 $f(x)$의 x^3의 계수는 $4\times135=540$이다.

$20a^3=540$

$a^3-27=0$

$(a-3)(a^2+3a+9)=0$

따라서 a는 실수이므로 $a=3$

답 ②

37

$$1+\sum_{k=1}^{15}\left({}_{15}C_k\,8^k\right)={}_{15}C_0\,8^0+{}_{15}C_1\,8^1+{}_{15}C_2\,8^2+\cdots+{}_{15}C_{15}\,8^{15}$$
$$=(8+1)^{15}$$
$$=9^{15}$$

이므로

$\log_3\left\{1+\sum_{k=1}^{15}\left({}_{15}C_k\,8^k\right)\right\}=\log_3 9^{15}=\log_3 3^{30}=30$

답 30

38

집합 A의 원소의 개수가 n ($0\le n\le7$인 정수)일 때 조건을 만족시키는 집합 B의 원소는 집합 U의 원소 중에서 집합 A의 원소를 제외한 모든 원소이다.

즉, 집합 A의 원소를 정하는 경우의 수는 ${}_7C_n$이고, 집합 A가 정해지면 집합 B도 정해지므로 구하는 경우의 수는

${}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+\cdots+{}_7C_7=2^7=128$

답 ⑤

39

(ⅰ) n이 홀수일 때

$\{x\,|\,x$는 n 이하의 자연수$\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는

$a_n={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$

(ⅱ) n이 짝수일 때

$\{x\,|\,x$는 n 이하의 자연수$\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는

$a_n={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^{n-1}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a_n=2^{n-1}$이므로

$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}2^{n-1}=\frac{2^{10}-1}{2-1}=1023$

답 ②

06 확률

정답

본문 72~83쪽

01 ①	02 ④	03 ③	04 ④	05 ⑤
06 ⑤	07 ④	08 ⑤	09 ①	10 ①
11 ②	12 ③	13 ①	14 ⑤	15 ④
16 ③	17 ⑤	18 ⑤	19 ④	20 ②
21 ②	22 ⑤	23 ②	24 ④	25 ②
26 ②	27 ③	28 ②	29 ②	30 ①
31 ④	32 ④	33 ②	34 ①	35 ②
36 ①				

01

7개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$7!$

짝수가 적힌 공과 홀수가 적힌 공이 번갈아 나오게 나열되는 경우는 짝수가 적힌 공이 3개, 홀수가 적힌 공이 4개이므로 다음과 같다.

홀 짝 홀 짝 홀 짝 홀

따라서 짝수가 적힌 공과 홀수가 적힌 공이 번갈아 나오게 나열하는 경우의 수는

$4!\times3!$

이므로 구하는 확률은

$\frac{4!\times3!}{7!}=\frac{1}{35}$

답 ①

02

X에서 Y로의 함수 f의 개수는

$3^5=243$

집합 X의 원소 중에서 소수는 2, 3, 5이고, 집합 Y의 원소 중에서 소수는 2, 3이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$를 정하는 경우의 수는 $2^3=8$이고, $f(1)$, $f(4)$를 정하는 경우의 수가 $3^2=9$이므로 조건을 만족시키는 함수의 개수는

$8\times9=72$

따라서 구하는 확률은

$\frac{72}{243}=\frac{8}{27}$

답 ④

03

한 개의 주사위를 2번 던져서 나오는 눈의 수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $6\times6=36$

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=ax-b$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 판별식 D에 대하여

$D=(-a)^2-4b=a^2-4b>0$이어야 하므로 이를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$a=3$일 때, $b<\frac{3^2}{4}=\frac{9}{4}$에서 2가지

$a=4$일 때, $b<\frac{4^2}{4}=4$에서 3가지

$a=5$일 때, $b<\frac{5^2}{4}=\frac{25}{4}$에서 6가지

$a=6$일 때, $b<\frac{6^2}{4}=9$에서 6가지

따라서 구하는 확률은

$\frac{2+3+6+6}{36}=\frac{17}{36}$

답 ③

04

6명의 학생이 원형 탁자에 앉는 경우의 수는 $6!$이고, 회전하였을 때 같은 것이 6가지씩 있으므로 경우의 수는

$\frac{6!}{6}=5!=120$

A, B가 이웃하여 앉는 경우의 수는 A, B를 한 묶음으로 생각하여 일렬로 세운 다음 A, B가 서로 자리를 바꾸면 되므로 $5!\times2!$이고, 회전하였을 때 같은 것이 5가지씩 있으므로 경우의 수는

$\frac{5!\times2!}{5}=48$

따라서 구하는 확률은

$\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$

답 ④

05

3명의 학생을 8개의 학급 중에서 임의로 택한 서로 다른 3개의 학급에 1명씩 배정하는 경우의 수는

${}_8P_3=8\times7\times6=336$

어떤 2명의 학생도 이웃한 교실의 학급에 배정되지 않는 경우는 학생이 배정되지 않는 학급 5개(○ 표시된 곳)을 나열하고, 5개(○ 표시된 곳)의 양 끝과 사이인 6개의 공간(∨ 표시된 곳) 중에서 서로 다른 3개를 택하여 학생 3명을 배정하면 된다.

∨ ○ ∨ ○ ∨ ○ ∨ ○ ∨ ○ ∨

그 경우의 수는

${}_6P_3=6\times5\times4=120$

따라서 구하는 확률은

$\frac{120}{336}=\frac{5}{14}$

답 ⑤

참고

그림과 같이 3개의 공간(∨ 표시된 곳)이 선택된 경우는 새로 전학 온 학생이 2반, 5반, 7반에 1명씩 배정된다.

○	∨	○	○	∨	○	∨	○
⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓
1반	2반	3반	4반	5반	6반	7반	8반

06

서로 다른 종류의 사탕 3개와 서로 다른 종류의 초콜릿 5개를 4개씩 묶어 2개의 묶음을 만드는 경우는 두 묶음의 사탕의 개수가 각각 3, 0 또는 2, 1인 경우이다.

두 묶음의 사탕의 개수가 각각 3, 0이면 두 묶음의 초콜릿의 개수는 각각 1, 4이므로 경우의 수는

${}_3C_3\times{}_5C_1=1\times5=5$

두 묶음의 사탕의 개수가 각각 2, 1이면 두 묶음의 초콜릿의 개수는 각각 2, 3이므로 경우의 수는

${}_3C_2\times{}_5C_2=3\times\frac{5\times4}{2\times1}=30$

이므로 2개의 묶음을 만드는 경우의 수는

$5+30=35$

각 묶음에 적어도 1개의 사탕이 포함되는 경우는 두 묶음의 사탕의 개수가 각각 2, 1인 경우이므로 구하는 확률은

$\frac{30}{35}=\frac{6}{7}$

답 ⑤

07

8개의 자연수 $3^0, 3^1, 3^2, \cdots, 3^7$ 중에서 임의로 서로 다른 두 수를 택하는 경우의 수는

${}_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

$3^0, 3^1, 3^2, \cdots, 3^7$에서 $3^0, 3^2, 3^4, 3^6$은 4로 나눈 나머지가 1이므로 $4k+1$ (k는 정수)꼴이고 $3^1, 3^3, 3^5, 3^7$은 4로 나눈 나머지가 3이므로 $4k+3$ (k는 정수)꼴이다.

택한 두 수의 곱을 4로 나눈 나머지가 3이려면 두 수가 각각 $4k+1$ (k는 정수)꼴과 $4k+3$ (k는 정수)꼴이어야 하므로 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_4C_1=16$

따라서 구하는 확률은

$\frac{16}{28}=\frac{4}{7}$

답 ④

08

9명의 학생을 임의로 3명씩 3개의 조로 나누는 경우의 수는

$${}_9C_3\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{3!}=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}\times\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times1\times\frac{1}{3!}$$
$$=280$$

가위를 가진 4명의 학생이 각 조에 적어도 1명씩 포함되도록 조를 나누는 경우는 3개의 조에 가위를 가진 학생이 각각 2명, 1명, 1명 포함되는 경우이다.

따라서 가위를 가진 학생을 2명, 1명, 1명으로 나눈 후 남은 5명을 세 조에 각각 1명, 2명, 2명 배정하면 되므로 경우의 수는

$$\left({}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}\right)\times{}_5C_1\times{}_4C_2\times{}_2C_2$$
$$=\frac{4\times3}{2\times1}\times2\times1\times\frac{1}{2!}\times5\times\frac{4\times3}{2\times1}\times1$$
$$=180$$

따라서 구하는 확률은

$\frac{180}{280}=\frac{9}{14}$

답 ⑤

09

X에서 X로의 함수의 개수는

$4^4=256$

$f(1)\le f(2)<f(3)\le f(4)$를 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(i) $f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$인 경우

집합 X의 네 원소를 작은 수부터 차례로 대응시키면 되므로 1가지이다.

(ii) $f(1)=f(2)<f(3)<f(4)$인 경우

집합 X의 네 원소 중에서 세 원소를 택한 후 작은 수부터 차례로 대응시키면 되므로 ${}_4C_3=4$(가지)이다.

(iii) $f(1)<f(2)<f(3)=f(4)$인 경우

집합 X의 네 원소 중에서 세 원소를 택한 후 작은 수부터 차례로 대응시키면 되므로 ${}_4C_3=4$(가지)이다.

(iv) $f(1)=f(2)<f(3)=f(4)$인 경우

집합 X의 네 원소 중에서 두 원소를 택한 후 작은 수부터 차례로 대응시키면 되므로 ${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$(가지)이다.

(i)~(iv)에 의하여 조건을 만족시키는 경우의 수는 $1+4+4+6=15$이므로 구하는 확률은

$\frac{15}{256}$

답 ①

10

n개의 공이 들어 있는 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_nC_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

최댓값과 최솟값의 합이 n인 경우는 다음과 같다.

(i) n이 짝수인 경우

최댓값과 최솟값의 순서쌍이

$(n-1, 1), (n-2, 2), \cdots, \left(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1\right)$

이고 각각에 대한 경우의 수가

$n-3, n-5, \cdots, 1$

이므로 n이 짝수일 때, 최댓값과 최솟값의 합이 n인 경우의 수는

$1+3+5+\cdots+(n-3)=\frac{(n-2)^2}{4}$

이때 확률이 $\frac{1}{5}$이므로

$$\frac{\frac{(n-2)^2}{4}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}=\frac{3(n-2)}{2n(n-1)}=\frac{1}{5}$$

$15(n-2)=2n(n-1)$

$2n^2-17n+30=0,\ (2n-5)(n-6)=0$

n은 짝수이므로 $n=6$

(ii) n이 홀수인 경우

최댓값과 최솟값의 순서쌍이

$(n-1,\ 1),\ (n-2,\ 2),\ \cdots,\ \left(\frac{n+3}{2},\ \frac{n-3}{2}\right)$

이고 각각에 대한 경우의 수가

$n-3,\ n-5,\ \cdots,\ 2$

이므로 n이 홀수일 때, 최댓값과 최솟값의 합이 n인 경우의 수는

$2+4+6+\cdots+(n-3)=\frac{(n-1)(n-3)}{4}$

이때 확률이 $\frac{1}{5}$이므로

$$\frac{\frac{(n-1)(n-3)}{4}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}=\frac{3(n-3)}{2n(n-2)}=\frac{1}{5}$$

$15(n-3)=2n(n-2)$

$2n^2-19n+45=0$

$(2n-9)(n-5)=0$

n은 홀수이므로 $n=5$

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$6+5=11$

답 ①

11

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(B)\\&=\frac{3}{2}\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{3}{2}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

따라서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

답 ②

12

$1000a+100b+10c+d$의 개수는

${}_6\mathrm{P}_4=6\times5\times4\times3=360$

$1000a+100b+10c+d$가 4의 배수인 사건을 A라 하면 $c,\ d$의 순서쌍이 $(0,\ 4),\ (1,\ 2),\ (2,\ 0),\ (2,\ 4),\ (3,\ 2),\ (4,\ 0),\ (5,\ 2)$이고, $a,\ b$로 가능한 수가 각각 4개, 3개이므로 경우의 수는

$7\times4\times3=84$

즉, $\mathrm{P}(A)=\frac{84}{360}=\frac{7}{30}$

$1000a+100b+10c+d$가 5의 배수인 사건을 B라 하면 d가 0 또는 5이고, $a,\ b,\ c$로 가능한 수가 각각 5개, 4개, 3개이므로 경우의 수는

$2\times5\times4\times3=120$

즉, $\mathrm{P}(B)=\frac{120}{360}=\frac{1}{3}$

사건 $A\cap B$는 $c,\ d$의 순서쌍이 $(2,\ 0),\ (4,\ 0)$이고, $a,\ b$로 가능한 수가 각각 4개, 3개이므로 경우의 수는

$2\times4\times3=24$

즉, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{24}{360}=\frac{1}{15}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{7}{30}+\frac{1}{3}-\frac{1}{15}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ③

13

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$의 부분집합의 개수는 $2^3=8$이므로 서로 다른 두 집합을 택하는 경우의 수는

${}_8\mathrm{C}_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

두 집합의 교집합이 집합 $\{1\}$을 포함하는 사건을 X, 두 집합의 교집합이 집합 $\{2\}$를 포함하는 사건을 Y라 하자.

두 집합의 교집합이 집합 $\{1\}$을 포함하는 경우는

(i) 교집합이 $\{1\}$인 경우

두 집합의 원소의 개수가 각각 1, 2인 경우는 $\{1\},\ \{1,\ 2\}$ 또는 $\{1\},\ \{1,\ 3\}$이므로 2가지,

두 집합의 원소의 개수가 각각 1, 3인 경우는 $\{1\},\ \{1,\ 2,\ 3\}$이므로 1가지,

두 집합의 원소의 개수가 각각 2, 2인 경우는 $\{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\}$이므로 1가지이다.

따라서 교집합이 $\{1\}$인 경우의 수는

$2+1+1=4$

(ii) 교집합이 $\{1,\ 2\}$인 경우

두 집합이 $\{1,\ 2\},\ \{1,\ 2,\ 3\}$인 경우뿐이므로 경우의 수는 1이다.

(iii) 교집합이 $\{1,\ 3\}$인 경우

두 집합이 $\{1,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 3\}$인 경우뿐이므로 경우의 수는 1이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 두 집합의 교집합이 집합 $\{1\}$을 포함하는 경우의 수는 6이므로

$\mathrm{P}(X)=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$

두 집합의 교집합이 집합 $\{2\}$를 포함하는 경우를 두 집합의 교집합이 집합 $\{1\}$을 포함하는 경우와 마찬가지 방법으로 구하면

$\mathrm{P}(Y)=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$

이때 사건 $X\cap Y$는 (ii)의 경우이므로

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{1}{28}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\cup Y)&=\mathrm{P}(X)+\mathrm{P}(Y)-\mathrm{P}(X\cap Y)\\&=\frac{3}{14}+\frac{3}{14}-\frac{1}{28}\\&=\frac{11}{28}\end{aligned}$$

답 ①

14

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{3}$

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$

답 ⑤

15

$100a+10b+c$의 개수는

$6^3=216$

$100a+10b+c$가 2의 배수가 되는 사건 A는 c가 2 또는 4 또는 6인 경우이므로

$n(A)=6\times6\times3=108$

즉, $\mathrm{P}(A)=\frac{108}{216}=\frac{1}{2}$

$100a+10b+c$가 5의 배수가 되는 사건 B는 c가 5인 경우이므로

$n(B)=6\times6\times1=36$

즉, $\mathrm{P}(B)=\frac{36}{216}=\frac{1}{6}$

A와 B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

답 ④

16

k $(k=1, 2, 3, 4)$가 적힌 공의 개수를 a_k라 하면

$\mathrm{P}_k=\frac{a_k}{15}$이므로 $\mathrm{P}_{k+1}=2\mathrm{P}_k$ $(k=1, 2, 3)$에서

$a_{k+1}=2a_k$ $(k=1, 2, 3)$

즉, $a_2=2a_1$, $a_3=4a_1$, $a_4=8a_1$이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4=a_1(1+2+4+8)=15a_1$

이때 주머니에 15개의 공이 들어 있으므로

$15a_1=15$

따라서 $a_1=1$이므로 주머니에는 1이 적힌 공이 1개, 2가 적힌 공이 2개, 3이 적힌 공이 4개, 4가 적힌 공이 8개 들어 있다.

이 주머니에서 임의로 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_{15}\mathrm{C}_2=\frac{15\times14}{2\times1}=105$

꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 합이 5인 경우는 두 공에 적힌 수가 각각 1, 4 또는 2, 3인 경우이다.

두 공에 적힌 수가 각각 1, 4인 사건을 A, 두 공에 적힌 수가 각각 2, 3인 사건을 B라 하면

$n(A)={}_1\mathrm{C}_1\times{}_8\mathrm{C}_1=8$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{8}{105}$

또 $n(B)={}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=8$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{8}{105}$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{8}{105}+\frac{8}{105}=\frac{16}{105}$

답 ③

17

숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하여 만든 세 자리 자연수의 개수는

$4^3=64$

세 자리 자연수가 113보다 작지 않은 사건을 A라 하면 세 자리 자연수가 113보다 작은 사건은 A^C이다.

세 자리 자연수가 113보다 작으려면 백의 자리의 수와 십의 자리의 수가 모두 1이어야 하고, 일의 자리의 수가 2 이하이므로 그 경우의 수는 $1\times1\times2=2$이다.

따라서 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{64}=\frac{1}{32}$이므로

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$

답 ⑤

18

집합 X에서 집합 Y로의 일대일함수의 개수는 Y의 원소 5개 중에서 X의 원소에 대응시킬 3개의 원소를 택해 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_5\mathrm{P}_3=5\times4\times3=60$

$f(1)\times f(2)\times f(3)$이 짝수인 사건을 A라 하면

A^C은 $f(1)\times f(2)\times f(3)$이 홀수인 사건이다.

$f(1)\times f(2)\times f(3)$이 홀수이려면 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 모두 홀수인 1, 3, 5 중 하나이어야 하므로 그 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{6}{60}=\frac{9}{10}$

답 ⑤

19

a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는

$6^2=36$

ab가 짝수인 사건을 X, 2^a4^b이 64의 배수인 사건을 Y라 하면 ab가 홀수인 사건은 X^C이다.

또 $2^a4^b=2^a2^{2b}=2^{a+2b}$이 64의 배수가 되려면 $a+2b\geq6$이어야 한다.

즉, $a+2b<6$인 사건이 Y^C이다.

사건 $X^C\cap Y^C$이 일어나는 경우의 수는 $a+2b<6$인 홀수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수와 같고, $a+2b<6$인 홀수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, 1)$, $(3, 1)$이므로

$\mathrm{P}(X^C\cap Y^C)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\cup Y)=1-\mathrm{P}(X^C\cap Y^C)=1-\frac{1}{18}=\frac{17}{18}$

답 ④

20

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A^C|B)$에서

$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A^C\cap B)$

따라서 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=2\mathrm{P}(A\cap B)$이고

$\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$

답 ②

21

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{8}$에서 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{4}$

사건 A와 사건 B는 서로 배반사건이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)\\&=\mathrm{P}(A\cap B^C)\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 ②

22

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{11}{14}$이다.

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{7}$, $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{11}{14}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{11}{14}=\frac{2}{7}+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A^C)}{\mathrm{P}(A^C)}$에서

$\mathrm{P}(B\cap A^C)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}$이므로

$$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A^C)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{7}}=\frac{7}{10}$$

답 ⑤

23

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 두 눈의 수의 합이 6 이하인 사건을 A, 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 두 눈의 수가 모두 홀수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 두 눈의 수의 합이 6 이하인 경우는

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5),
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4),
(3, 1), (3, 2), (3, 3),
(4, 1), (4, 2),
(5, 1)

의 15가지이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{15}{36}$이고, 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 두 눈의 수의 합이 6 이하이고 모두 홀수인 경우는

(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (5, 1)

의 6가지이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{6}{36}$이다.

따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{6}{36}}{\frac{15}{36}}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

답 ②

24

중국어 수업을 받는 남학생이 120명이므로 일본어 수업을 받는 남학생은 60명이다.

이 학교 학생 중 임의로 선택한 한 학생이 일본어 수업을 받는 학생일 때, 이 학생이 여학생일 확률은 $\frac{4}{7}$이므로 남학생일 확률은 $\frac{3}{7}$이다.

일본어 수업을 받는 여학생의 수를 a라 하면 일본어 수업을 받는 남학생이 60명이므로

$\frac{60}{a+60}=\frac{3}{7}$, $3a=240$, $a=80$

일본어 수업을 받는 여학생이 80명이므로 중국어 수업을 받는 여학생은 140명이다.

답 ④

25

학생부종합전형에 지원한 학생의 수를 $7a$, 지원하지 않은 학생의 수를 $3a$, 논술전형에 지원한 학생의 수를 $4b$, 지원하지 않은 학생의 수를 b라 하면 $10a=5b$이므로 $2a=b$이다.

학생부종합전형과 논술전형 모두 응시한 학생의 수를 x라 하면 이 고등학교 학생 중에서 임의로 선택한 한 학생이 논술전형에 지원한 학생일 때, 이 학생이 학생부종합전형에 지원한 학생일 확률은 $\frac{3}{4}$이므로

$\frac{x}{4b}=\frac{3}{4}$에서 $x=3b$이다.

따라서 주어진 조건을 표로 정리하면 다음과 같다.

	논술전형지원	논술전형미지원	합계
학생부종합전형 지원	$x=3b$ $=6a$	a	$7a$
학생부종합전형 미지원	$b=2a$	a	$3a$
합계	$4b$	b	$10a=5b$

따라서 이 학교 학생 중에서 임의로 뽑은 한 명이 학생부종합전형과 논술전형에 모두 지원하지 않은 학생일 확률은

$\frac{a}{10a}=\frac{1}{10}$

답 ②

26

이 지점을 지나는 차량이 과속인 사건을 A, 과속 단속 카메라가 과속이라고 판단하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A)P(B|A)\\&=0.05\times0.98\\&=0.049\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(A^C\cap B)&=P(A^C)P(B|A^C)\\&=0.95\times0.02\\&=0.019\end{aligned}$$

이므로

$P(B)=0.049+0.019=0.068=\dfrac{68}{1000}=\dfrac{17}{250}$

답 ②

27

휴대전화 판매점에서 임의로 택한 하나의 휴대전화가 A회사의 제품, B회사의 제품인 사건을 각각 A, B라 하고 스마트폰인 사건을 X라 하자.

A회사의 스마트폰을 선택할 확률은

$P(A\cap X)=P(A)P(X|A)=0.6\times0.8=0.48$

B회사의 스마트폰을 선택할 확률은

$P(B\cap X)=P(B)P(X|B)=0.4\times0.9=0.36$

이므로 $P(X)=P(A\cap X)+P(B\cap X)=0.84$

따라서 이 판매점에서 임의로 택한 휴대전화가 스마트폰일 때, 그 스마트폰이 A회사의 제품일 확률은

$P(A|X)=\dfrac{P(A\cap X)}{P(X)}=\dfrac{0.48}{0.84}=\dfrac{4}{7}$

답 ③

28

$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$이므로

$P(A)=\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{8}=\dfrac{1}{2}$

두 사건 A와 B는 서로 독립이므로 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$에서

$\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{2}\times P(B)$

따라서 $P(B)=\dfrac{1}{4}$

답 ②

29

두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$P(A|B)=P(A)=\dfrac{3}{10}$

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\\&=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

에서 $P(B)=x$라 하면

$\dfrac{3}{10}+x-\dfrac{3}{10}x=\dfrac{4}{5}$

$\dfrac{7}{10}x=\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{5}{7}$

따라서 $P(B^C)=1-P(B)=1-\dfrac{5}{7}=\dfrac{2}{7}$

답 ②

30

정사면체 모양의 상자 2개를 동시에 던졌을 때, 바닥에 놓인 면에 적힌 수가 같은 사건을 A, 주머니에서 2개의 제비를 동시에 뽑았을 때 당첨되는 사건을 B, 주머니에서 1개의 제비를 뽑았을 때 당첨되는 사건을 C라 하면 구하는 확률은 $P(A\cap B)+P(A^C\cap C)$이다.

$P(A)=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$이고, $P(B)=\dfrac{{}_4C_1\times{}_1C_1}{{}_5C_2}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$, $P(C)=\dfrac{1}{5}$

사건 A와 B는 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{20}=\dfrac{1}{10}$

사건 A^C과 C도 서로 독립이므로

$P(A^C\cap C)=P(A^C)P(C)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{20}$에서

$P(A\cap B)+P(A^C\cap C)=\dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{20}=\dfrac{5}{20}=\dfrac{1}{4}$

답 ①

31

사건 A는 2, 3, 5, 7이 나오는 경우이므로 $P(A)=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$이다.

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$P(A)=P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{1}{3}$이다.

(i) $n(A\cap B)=1$인 경우 $n(B)=3$이어야 한다.

어떤 자연수 k의 약수의 개수가 3이려면 k의 약수가 2, 3, 5, 7 중 하나를 포함해야 하므로 주어진 조건을 만족시키는 k는 4, 9이다.

(ii) $n(A\cap B)=2$인 경우 $n(B)=6$이어야 한다.

$n(B)=6$을 만족시키는 k는 12뿐이므로 $k=12$일 때, $A\cap B=\{2, 3\}$이 되어 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $k=4$, 9, 12이므로 모든 k의 값의 합은 25이다.

답 ④

32

이 학급의 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 여학생인 사건을 A, 인터넷 강의를 신청한 학생인 사건을 B라 하면 두 사건 A와 B는 서로 독립이므로 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$에서

$P(A\cap B)=\dfrac{16}{40}\times\dfrac{30}{40}=\dfrac{12}{40}$

또한 $P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)$이므로

$P(A^C\cap B)=\dfrac{30}{40}-\dfrac{12}{40}=\dfrac{18}{40}$

따라서 이 학급의 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 남학생일 때, 이 학생이 인터넷 강의를 신청한 학생일 확률은

$P(B|A^C)=\dfrac{P(A^C\cap B)}{P(A^C)}=\dfrac{\frac{18}{40}}{1-\frac{16}{40}}=\dfrac{18}{24}=\dfrac{3}{4}$

답 ④

33

상자의 바닥에 놓인 면에 적힌 수가 짝수인 사건을 A, 상자의 바닥에 놓인 면에 적힌 수와 앞면이 나오는 동전의 개수가 같은 사건을 B라 하

면 구하는 확률은 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$이다.

상자의 바닥에 놓인 면에 적힌 수가 짝수이고, 상자의 바닥에 놓인 면에 적힌 수와 앞면이 나오는 동전의 개수가 같은 경우는

(i) 상자의 바닥에 놓인 면에 적힌 수가 2이고, 앞면이 나오는 동전의 개수가 2인 경우

$\dfrac{1}{4}\times{}_4C_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{6}{64}=\dfrac{3}{32}$

(ii) 상자의 바닥에 놓인 면에 적힌 수가 4이고, 앞면이 나오는 동전의 개수가 4인 경우

$\dfrac{1}{4}\times{}_4C_4\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{64}$

(i), (ii)에서 $P(A\cap B)=\dfrac{3}{32}+\dfrac{1}{64}=\dfrac{7}{64}$이고 $P(A)=\dfrac{1}{2}$이므로

$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{7}{64}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{7}{32}$

답 ②

34

한 개의 주사위를 4번 던졌을 때, 점 P의 위치는

(4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4)

중 하나이다. 점 P가 곡선 $y=(x-2)^2$ 위에 있으므로 점 P의 좌표는

(3, 1) 또는 (0, 4)이다.

(i) P(3, 1)인 경우는 6의 약수의 눈이 3번, 6의 약수가 아닌 눈이 1번 나오는 경우이므로 이때의 확률은

${}_4C_3\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{32}{81}$

(ii) P(0, 4)인 경우는 6의 약수가 아닌 눈이 4번 나오는 경우이므로 이때의 확률은

${}_4C_4\left(\dfrac{1}{3}\right)^4=\dfrac{1}{81}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\dfrac{32}{81}+\dfrac{1}{81}=\dfrac{33}{81}=\dfrac{11}{27}$

답 ①

35

A팀이 우승하는 경우는 연속으로 2승을 하거나 1승 1패 후 이기는 경우, 1승 2패 후 이기는 경우이다.

(i) 연속으로 2승하는 경우

${}_2C_2\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$

(ii) 1승 1패 후 이기는 경우

${}_2C_1\left(\dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{2}{5}\right)\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{36}{125}$

(iii) 1승 2패 후 이기는 경우

${}_3C_1\left(\dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{108}{625}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\dfrac{9}{25}+\dfrac{36}{125}+\dfrac{108}{625}=\dfrac{513}{625}$

답 ②

36

주사위 1개를 3회 던져서 나온 눈의 수의 곱이 3의 배수인 사건을 A라 하면 사건 A는 주사위 1개를 3회 던져서 나온 눈의 수 중 3의 배수가 1번 이상 나오면 된다.

따라서 사건 A^C은 주사위 1개를 3회 던져서 나온 눈의 수 중 3의 배수가 한 번도 나오지 않는 사건이므로

$P(A)=1-P(A^C)=1-{}_3C_0\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$

$=1-\dfrac{8}{27}=\dfrac{19}{27}$

답 ①

다른 풀이

주사위 1개를 3회 던져서 나온 눈의 수 중에서 3의 배수가 1번 이상일 확률은

${}_3C_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+{}_3C_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^1+{}_3C_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^0=\dfrac{4}{9}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{27}$

$=\dfrac{19}{27}$

07 통계

정답

본문 86~99쪽

01 ③	02 ①	03 ④	04 ③	05 ③
06 ①	07 ②	08 ⑤	09 ②	10 ④
11 ⑤	12 ①	13 ⑤	14 ④	15 ②
16 ⑤	17 ④	18 ④	19 ①	20 ③
21 ④	22 ⑤	23 ④	24 ③	25 ②
26 25	27 ②	28 ②	29 ⑤	30 ②
31 ①	32 ④	33 ④	34 ②	35 ①

01

$\mathrm{P}(X=1)=p$라 하면 $\mathrm{P}(X=2)=\frac{p}{2}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{p}{4}$이다.

$\sum_{k=1}^{3}\mathrm{P}(X=k)=1$이므로

$p+\frac{p}{2}+\frac{p}{4}=\frac{7}{4}p=1$에서 $p=\frac{4}{7}$

따라서 $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{2}{7}+3\times\frac{1}{7}=\frac{11}{7}$

답 ③

02

확률의 총합은 1이므로 $a+\frac{1}{4}+b=1$에서

$a+b=\frac{3}{4}$, $b=\frac{3}{4}-a$

$\mathrm{E}(X)=-1\times a+0\times\frac{1}{4}+1\times b=-a+b=-2a+\frac{3}{4}$

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times a+0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times b=a+b=\frac{3}{4}$

따라서

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{3}{4}-\left(-2a+\frac{3}{4}\right)^2$

이고 $-2a+\frac{3}{4}=0$, 즉 $a=\frac{3}{8}$일 때 $\mathrm{V}(X)$는 최댓값을 갖는다.

답 ①

03

$\mathrm{P}(X\geq x)=\frac{a}{x(x+1)}$에서

$\mathrm{P}(X\geq 1)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\cdots+\mathrm{P}(X=10)=\frac{a}{2}=1$

이므로 $a=2$이다.

$\sum_{k=1}^{10}\mathrm{P}(X\geq k)$

$=\mathrm{P}(X\geq 1)+\mathrm{P}(X\geq 2)+\mathrm{P}(X\geq 3)+\cdots+\mathrm{P}(X\geq 10)$

$=\mathrm{P}(X=1)+2\mathrm{P}(X=2)+3\mathrm{P}(X=3)+\cdots+10\mathrm{P}(X=10)$

$=\sum_{k=1}^{10}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}$

이므로 $\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{10}\mathrm{P}(X\geq k)=\sum_{k=1}^{10}\frac{2}{k(k+1)}$

$=\sum_{k=1}^{10}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$=2\left(1-\frac{1}{11}\right)$

$=\frac{20}{11}$

따라서 $a+\mathrm{E}(X)=2+\frac{20}{11}=\frac{42}{11}$

답 ④

다른 풀이

$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(X\geq k)-\mathrm{P}(X\geq k+1)$

$=\frac{a}{k(k+1)}-\frac{a}{(k+1)(k+2)}$

$a=2$이므로 $\mathrm{P}(X=k)=\frac{4}{k(k+1)(k+2)}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9)$

$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{10}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}$

$=\sum_{k=1}^{9}\frac{4}{(k+1)(k+2)}+10\times\mathrm{P}(X=10)$

$=4\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+10\times\frac{2}{10\times 11}$

$=4\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}+\frac{2}{11}$

$=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{11}\right)+\frac{2}{11}$

$=\frac{18}{11}+\frac{2}{11}=\frac{20}{11}$

따라서 $a+\mathrm{E}(X)=2+\frac{20}{11}=\frac{42}{11}$

04

이산확률변수 X의 확률질량함수가

$\mathrm{P}(X=x)=kx$ $(x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$이므로

$k+2k+3k+4k+5k=1$에서 $15k=1$, $k=\frac{1}{15}$

따라서 $\mathrm{P}(X=x)=\frac{1}{15}x$이고

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{15}+2\times\frac{2}{15}+3\times\frac{3}{15}+4\times\frac{4}{15}+5\times\frac{5}{15}$

$=\frac{1}{15}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)=\frac{11}{3}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{15}+2^2\times\frac{2}{15}+3^2\times\frac{3}{15}+4^2\times\frac{4}{15}+5^2\times\frac{5}{15}$

$=\frac{1}{15}(1^3+2^3+3^3+4^3+5^3)=15$

에서

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=15-\left(\frac{11}{3}\right)^2$

$=15-\frac{121}{9}$

$=\frac{135-121}{9}=\frac{14}{9}$

따라서 $\mathrm{V}(3X-2)=9\mathrm{V}(X)=14$

답 ③

05

주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 흰 공의 개수가 확률변수 X이므로 X가 가지는 값은 0, 1, 2이다.

$\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_5\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{10}$

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\dfrac{2\times3}{10}=\dfrac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}=\dfrac{3}{10}$

$\mathrm{E}(X)=0\times\dfrac{1}{10}+1\times\dfrac{3}{5}+2\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{0+6+6}{10}=\dfrac{12}{10}=\dfrac{6}{5}$

이므로

$\mathrm{E}(5X+1)=5\mathrm{E}(X)+1=6+1=7$

답 ③

06

이산확률변수 X의 확률질량함수가

$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\left(\dfrac{1}{2}\right)^n={}_n\mathrm{C}_x\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\mathrm{V}(X)=n\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{n}{4}=\dfrac{5}{2}$

이므로 $n=10$

$\mathrm{E}(X)=n\times\dfrac{1}{2}=10\times\dfrac{1}{2}=5$

이므로

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=\dfrac{5}{2}+25=\dfrac{55}{2}$

답 ①

07

$q=1-p$일 때

$\mathrm{P}(X=2)={}_n\mathrm{C}_2p^2q^{n-2}$

$=\dfrac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2}$

$=\dfrac{n-1}{2}p\times npq^{n-2}$

$\mathrm{P}(X=1)={}_n\mathrm{C}_1pq^{n-1}$

$=npq^{n-1}$

$=q\times npq^{n-2}$

이므로 $\dfrac{n-1}{2}p=6q$이다.

$(n-1)p=12q$에서 $\mathrm{E}(X)=np=\dfrac{25}{3}$이므로

$np-p=\dfrac{25}{3}-p=12(1-p)$

$11p=12-\dfrac{25}{3}=\dfrac{11}{3}$

따라서 $p=\dfrac{1}{3}$, $n=25$이므로

$\mathrm{V}(X)=npq=25\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{50}{9}$

답 ②

08

직선 $y=2ax$가 곡선 $y=x^2+2x+3$과 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2+2x+3=2ax$, 즉 $x^2+2(1-a)x+3=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x^2+2(1-a)x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a-1)^2-3>0$이고 $(a-1)^2>3$에서 주사위의 눈의 수 a는 3, 4, 5, 6이어야 한다.

즉, 직선 $y=2ax$가 곡선 $y=x^2+2x+3$과 서로 다른 두 점에서 만날 확률을 p라 하면 $p=\dfrac{2}{3}$이다.

주사위를 300번 던질 때, 직선 $y=2ax$가 곡선 $y=x^2+2x+3$과 서로 다른 두 점에서 만나도록 그려지는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(300,\ \dfrac{2}{3}\right)$를 따르므로

$\mathrm{V}(X)=300\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{200}{3}$

따라서 $\mathrm{V}(3X-2)=9\mathrm{V}(X)=9\times\dfrac{200}{3}=600$

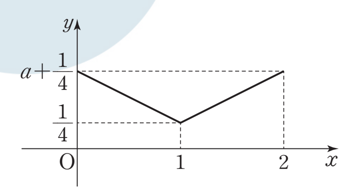
답 ⑤

09

$f(x)=a|x-1|+\dfrac{1}{4}$

$=\begin{cases}-a(x-1)+\dfrac{1}{4} & (0\le x<1)\\ a(x-1)+\dfrac{1}{4} & (1\le x\le 2)\end{cases}$

이므로 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$f(x)$는 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이다.

$f(0)=a+\dfrac{1}{4}$, $f(1)=\dfrac{1}{4}$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$\dfrac{1}{2}\times1\times\left\{\left(a+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{4}\right\}=\dfrac{1}{2}$에서

$a+\dfrac{1}{2}=1$, $a=\dfrac{1}{2}$

따라서 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$, $f(1)=\dfrac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}\le X\le 1\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3}{16}$

답 ②

10

연속확률변수 X가 가지는 값의 범위가 $0\le X\le 1$이므로 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉, $\dfrac{1}{2}\times1\times a=\dfrac{1}{2}a=1$이므로 $a=2$

ㄱ. 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프에서 $f\left(\frac{1}{4}\right)=2$이지만 연속확률변수 X가 하나의 값을 가질 확률은 0이므로 $\mathrm{P}\left(X=\frac{1}{4}\right)=0$이다. (거짓)

ㄴ. $a=2$이므로 $\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{4}$이고

$\mathrm{P}(0\le X\le 1)=1$에서 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{4}\le X\le 1\right)=\frac{3}{4}$

따라서 $3\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{1}{4}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{1}{4}\le X\le 1\right)$ (참)

ㄷ. 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 두 점 $\left(\frac{1}{4}, 2\right)$, $(1, 0)$을 지나므로

$\frac{1}{4}\le x\le 1$에서 $f(x)=-\frac{8}{3}x+\frac{8}{3}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{a}{4}\right)&=\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)\\&=\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{1}{4}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{1}{4}\le X\le\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\left(2+\frac{4}{3}\right)\\&=\frac{1}{4}+\frac{5}{12}=\frac{2}{3}\ (\text{참})\end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

11

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(X\le 8)=\mathrm{P}(X\ge 14)$에서

$m=\frac{8+14}{2}=11$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 8)&=\mathrm{P}(8\le X\le 11)+\mathrm{P}(X\ge 11)\\&=\mathrm{P}(11\le X\le 14)+\mathrm{P}(X\ge 11)\\&=0.34+0.5=0.84\end{aligned}$$

답 ⑤

12

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 연속확률변수의 정규분포곡선은 m이 일정할 때, σ의 값이 커지면 평균으로부터의 차이가 커진다는 것을 의미하므로 곡선의 중앙 부분은 낮아지면서 양쪽으로 퍼진다. 반대로 σ의 값이 작아지면 평균으로부터의 차이가 작아진다는 것을 의미하므로 곡선의 중앙 부분이 높아지면서 좁아진다.

ㄱ. 그래프를 살펴보면 확률변수 X_1의 정규분포곡선이 확률변수 X_2의 정규분포곡선보다 좁고 높기 때문에 X_1의 표준편차가 X_2의 표준편차보다 작다. 즉, $a<b$ (참)

ㄴ. 확률변수 X_2의 정규분포곡선과 확률변수 X_3의 정규분포곡선의 대칭축이 일치하므로 X_3의 평균 c는 X_2의 평균 6과 같다.

즉, $c=6$ (거짓)

ㄷ. 확률변수 X_2의 정규분포곡선이 확률변수 X_3의 정규분포곡선보다 좁고 높기 때문에 X_2의 표준편차가 X_3의 표준편차보다 작다.

즉, $b<d$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

13

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(6, \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-6}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(16, 4\sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{Y-16}{2\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge 8)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{8-6}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{2}{\sigma}\right)=0.1587$

확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$0.1587=0.5-0.3413=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=\mathrm{P}(Z\ge 1)$에서

$\frac{2}{\sigma}=1$, $\sigma=2$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\ge 8)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{8-16}{2\times 2}\right)=\mathrm{P}(Z\ge -2)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=0.4772+0.5=0.9772\end{aligned}$$

답 ⑤

14

ㄱ. 확률변수 X는 평균이 15인 정규분포를 따르므로

$H(t)=\mathrm{P}(t\le X\le t+2)$에서 평균 15를 기준으로 좌우에 같은 거리에 t와 $t+2$가 존재할 때 최댓값을 갖는다.

즉, $t=14$, $t+2=16$일 때 $H(t)$는 최댓값을 갖는다. (거짓)

ㄴ. $H(13)=\mathrm{P}(13\le X\le 15)$에서 $Z=\frac{X-15}{2}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}H(13)&=\mathrm{P}(13\le X\le 15)=\mathrm{P}\left(\frac{13-15}{2}\le Z\le\frac{15-15}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\ (\text{참})\end{aligned}$$

ㄷ. ㄱ에서 $H(t)$는 $t=14$일 때 최댓값을 가지며 확률변수 X가 정규분포를 따르므로 $H(t)$의 그래프는 직선 $t=14$에 대하여 대칭이다.

즉, 임의의 실수 t에 대하여 $H(14-t)=H(14+t)$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

15

$H(a)+H(b)=1$에서 $\mathrm{P}(X\ge a)+\mathrm{P}(X\ge b)=1$

$\mathrm{P}(X\le b)+\mathrm{P}(X\ge b)=1$이므로 $\mathrm{P}(X\ge a)=\mathrm{P}(X\le b)$에서

$a=80-k$, $b=80+k$

따라서 $a+b=160$

$H(a)-H(b)=0.383$에서 $\mathrm{P}(a\le X<b)=\mathrm{P}(a\le X\le b)=0.383$ 이므로

$\mathrm{P}(80\le X\le b)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(a\le X\le b)=0.1915$

$Z=\frac{X-80}{4}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르

고 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.1915$이므로

$\frac{b-80}{4}=0.5$

즉, $b=82$, $a=78$

이때 $2b-a=164-78=86$이므로

$$\begin{aligned}H(2b-a)&=H(86)=\mathrm{P}(X\ge 86)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{86-80}{4}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

답 ②

16

이 고등학교 학생 전체의 1인당 1일 동안 스마트폰 사용 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따르고 $Z=\frac{X-50}{5}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(40\le X\le 55)&=\mathrm{P}\left(\frac{40-50}{5}\le Z\le\frac{55-50}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.4772+0.3413\\&=0.8185\end{aligned}$$

답 ⑤

17

이 공장에서 생산되는 음료수 한 병의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(997,\ \sigma^2)$을 따르고 $Z=\frac{X-997}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

주어진 조건에서

$\mathrm{P}(X\le 991)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{991-997}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{6}{\sigma}\right)=0.0228$

표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\mathrm{P}(Z\ge 2)=\mathrm{P}(Z\le -2)=0.0228$에서

$-\frac{6}{\sigma}=-2$, $\sigma=3$

따라서 이 공장에서 생산된 음료수 중 임의로 선택한 한 병의 무게가 1 kg 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 1000)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{1000-997}{3}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 1)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.3413=0.1587\end{aligned}$$

답 ④

18

이 고등학교 학생의 수학 점수를 확률변수 X라 하고 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다고 하자. $Z=\frac{X-m}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge 80)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{80-m}{\sigma}\right)=\frac{159}{1000}=0.159$

이고 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.00)=0.341$이므로

$\frac{80-m}{\sigma}=1$ ...... ㉠

$\mathrm{P}(X\ge 90)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{90-m}{\sigma}\right)=\frac{67}{1000}=0.067$

이고 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.50)=0.433$이므로

$\frac{90-m}{\sigma}=1.5$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $80-m=\sigma$, $90-m=1.5\sigma$이므로

$m=60$, $\sigma=20$

a점 이상인 학생이 40명이므로 $\mathrm{P}(X\ge a)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-60}{20}\right)=0.04$

이고 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.75)=0.460$이므로

$\frac{a-60}{20}=1.75$

따라서 $a=95$

답 ④

19

수학 가형을 선택한 학생의 수학 점수와 수학 나형을 선택한 학생의 수학 점수를 각각 확률변수 X, Y라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(65,\ 15^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-65}{15}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고, Y는 정규분포 $\mathrm{N}(51,\ 12^2)$을 따르므로 $Z=\frac{Y-51}{12}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 수학 나형을 선택한 학생 중에서 임의로 한 명을 선택하였을 때 수학 점수가 66점 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\ge 66)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{66-51}{12}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.25)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.25)\\&=0.5-0.394=0.106\end{aligned}$$

수학 가형을 선택한 학생 중에서 임의로 한 명을 선택하였을 때 수학 점수가 a점 이상일 확률은 $2\times\mathrm{P}(Y\ge 66)=2\times 0.106=0.212$이고

$\mathrm{P}(0\le Z\le 0.80)=0.288$에서

$\mathrm{P}(Z\ge 0.80)=0.212$이므로

$\mathrm{P}(X\ge a)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-65}{15}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 0.80)$

따라서 $\frac{a-65}{15}=0.80$에서 $a=77$

답 ①

20

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=400\times\frac{1}{5}=80$, $\mathrm{V}(X)=400\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=64$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 8^2)$을 따르고 $Z=\frac{X-80}{8}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$P(72\le X\le a)=0.8185$에서 $0.8185>0.5$이므로
$P(72\le X\le a)=P(72\le X\le 80)+P(80\le X\le a)$에서

$$P(72\le X\le 80)=P\left(\frac{72-80}{8}\le Z\le\frac{80-80}{8}\right)$$
$$=P(-1\le Z\le 0)=0.3413$$

이므로

$$P(80\le X\le a)=0.8185-P(72\le X\le 80)$$
$$=0.8185-0.3413=0.4772$$

이때 $P(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로 $\frac{a-80}{8}=2$

따라서 $a=96$

답 ③

21

이산확률변수 X의 확률질량함수가

$$P(X=x)={}_{n}C_{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-x}\left(\frac{3}{4}\right)^{x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n,\ \frac{3}{4}\right)$을 따른다.

확률변수 X의 분산 $V(X)=n\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=36$이므로 $n=192$이고

$E(X)=192\times\frac{3}{4}=144$

ㄱ. 확률변수 X는 이항분포 $B\left(192,\ \frac{3}{4}\right)$을 따른다. (거짓)

ㄴ. $E(X)=144$, $V(X)=36$이고 192는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(144,\ 6^2)$을 따른다. (참)

ㄷ. $Z=\frac{X-144}{6}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$P(138\le X\le 150)=P\left(\frac{138-144}{6}\le Z\le\frac{150-144}{6}\right)$$
$$=P(-1\le Z\le 1)=2P(0\le Z\le 1)$$
$$=2\times 0.3413=0.6826\ \text{(참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

22

5개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_{5}C_{2}=10$이고, 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 합이 소수일 때 두 수의 합은 3, 5, 7이다.

$3=1+2$, $5=1+4=2+3$, $7=2+5=3+4$이므로 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 합이 소수일 확률은 $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$이다.

이때 꺼낸 공에 적혀 있는 두 수의 합이 소수가 되는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$E(X)=100\times\frac{1}{2}=50$, $V(X)=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=25$이고, 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(50,\ 5^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-50}{5}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$P(45\le X\le 60)=P\left(\frac{45-50}{5}\le Z\le\frac{60-50}{5}\right)=P(-1\le Z\le 2)$$
$$=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)$$
$$=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 2)$$
$$=0.3413+0.4772$$
$$=0.8185$$

답 ⑤

23

한 번의 온라인게임에서 갑이 이길 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 온라인게임을 100번 반복하였을 때 갑이 이기는 횟수를 확률변수 X라 하면

확률변수 X는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

이때 $E(X)=100\times\frac{1}{2}=50$, $V(X)=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=25$이고,

100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(50,\ 5^2)$을 따르며, $Z=\frac{X-50}{5}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이때 얻은 점수는 $X\times 3+(100-X)\times 1=2X+100$이고 220점 이상의 점수를 얻으려면 $2X+100\ge 220$에서 $X\ge 60$이어야 한다.

따라서

$$P(X\ge 60)=P\left(Z\ge\frac{60-50}{5}\right)=P(Z\ge 2)$$
$$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)$$
$$=0.5-0.4772$$
$$=0.0228$$

답 ④

24

모평균이 10, 모표준편차가 4이고 표본의 크기가 n이므로

$E(\overline{X})=E(X)=10$, $\sigma(\overline{X})=\frac{4}{\sqrt{n}}$

$E(2\overline{X}+1)=2E(\overline{X})+1=2\times 10+1=21$

$\sigma(2\overline{X}+1)=2\sigma(\overline{X})=2\times\frac{4}{\sqrt{n}}=\frac{8}{\sqrt{n}}$

$E(2\overline{X}+1)+\sigma(2\overline{X}+1)=21+\frac{8}{\sqrt{n}}=25$이므로

$\frac{8}{\sqrt{n}}=4$

따라서 $n=4$

답 ③

25

확률의 총합이 1이므로

$a+b=\frac{3}{8}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$E(\overline{X})=E(X)=3\times a+5\times b+7\times\frac{5}{8}=6$에서

$3a+5b=\frac{13}{8}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{8}$, $b=\frac{1}{4}$

$V(X)=\left(3^2\times\frac{1}{8}+5^2\times\frac{1}{4}+7^2\times\frac{5}{8}\right)-6^2=38-36=2$

이므로 $V(\overline{X})=\frac{V(X)}{3}=\frac{2}{3}$

답 ②

26

확률변수 X의 확률질량함수가

$P(X=r)={}_nC_r\left(\frac{2}{5}\right)^r\left(\frac{3}{5}\right)^{n-r}$ $(r=0, 1, 2, \cdots, n)$

이므로 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{2}{5}\right)$를 따르며

$E(X)=n\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}n$, $V(X)=n\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}n$

이때 $E(\overline{X})=E(X)=\frac{2}{5}n$

$V(\overline{X})=\frac{V(X)}{6}=\frac{n}{25}$

이므로

$E(\overline{X})+V(\overline{X})=\frac{2}{5}n+\frac{n}{25}=\frac{11}{25}n=11$

따라서 $n=25$

답 25

27

정규분포 $N(10, 3^2)$을 따르는 모집단의 확률변수를 X라 하면

$E(\overline{X})=E(X)=10$, $V(\overline{X})=\frac{V(X)}{9}=\frac{3^2}{9}=1$

즉, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(10, 1)$을 따르므로

$Z=\frac{\overline{X}-10}{1}=\overline{X}-10$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

정규분포 $N(15, \sigma^2)$을 따르는 모집단의 확률변수를 Y라 하면

$E(\overline{Y})=E(Y)=15$, $V(\overline{Y})=\frac{V(Y)}{9}=\frac{\sigma^2}{9}$

즉, 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $N\left(15, \frac{\sigma^2}{9}\right)$을 따르므로 $Z=\frac{\overline{Y}-15}{\frac{\sigma}{3}}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(\overline{X}\le 8)+P(\overline{Y}\ge 11)=1$에서

$P(\overline{X}\le 8)=P\left(Z\le\frac{8-10}{1}\right)=P(Z\le -2)$이고

$P(\overline{Y}\ge 11)=P\left(Z\ge\frac{11-15}{\frac{\sigma}{3}}\right)=P(Z\ge -2)$이므로 $\sigma=6$

따라서

$$\begin{aligned}P(\overline{Y}\ge 18)&=P\left(Z\ge\frac{18-15}{2}\right)=P(Z\ge 1.5)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

답 ②

28

이 고등학교 학생 전체의 1인당 1일 수면 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(330, 18^2)$을 따른다. 이 고등학교 학생 중 임의추출한 36명의 1인당 1일 수면 시간의 평균을 $\overline{X}$라 하면

$E(\overline{X})=E(X)=330$, $\sigma(\overline{X})=\frac{18}{\sqrt{36}}=\frac{18}{6}=3$

이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $N(330, 3^2)$을 따른다.

이때 $Z=\frac{\overline{X}-330}{3}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 임의추출한 36명의 1인당 1일 수면 시간의 평균이 336분 이상일 확률은

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\ge 336)&=P\left(Z\ge\frac{336-330}{3}\right)\\&=P(Z\ge 2)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

답 ②

29

이 제과점에서 생산하는 사탕 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(10, 1)$을 따르고 한 상자에 담긴 사탕 9개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(10, \frac{1}{9}\right)$을 따른다.

한 상자에 들어 있는 사탕 9개의 무게의 합이 87 g이면 이들의 평균은 $\frac{87}{9}$ g이다.

이때 $Z=\frac{\overline{X}-10}{\frac{1}{3}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 선택한 한 상자가 합격품일 확률은

$$\begin{aligned}P\left(\overline{X}\ge\frac{87}{9}\right)&=P\left(Z\ge\frac{\frac{87}{9}-10}{\frac{1}{3}}\right)\\&=P(Z\ge -1)\\&=P(-1\le Z\le 0)+P(Z\ge 0)\\&=P(0\le Z\le 1)+0.5\\&=0.8413\end{aligned}$$

답 ⑤

30

이동전화 가입자의 월 데이터 사용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따른다.

이동전화 가입자 중에서 100명을 임의추출하여 구한 월 데이터 사용량의 표본평균이 $\overline{x}$이고, 이 결과를 이용하여 신뢰도 95 %로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}$

주어진 신뢰구간이 $\overline{x}-9.8\le m\le\overline{x}+9.8$이므로

$1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} = 9.8$

따라서 $\sigma = 50$

답 ②

31

ㄱ. 표본의 크기에 관계없이 표본평균의 평균은 모평균과 같다. (거짓)

ㄴ. 모평균이 m일 때, $\overline{X_1}$은 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n_1}\right)$을 따르므로 $\overline{X_1}$의 분포를 이용하여 추정한 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 $\overline{X_1} = \overline{x_1}$일 때,

$\overline{x_1} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}} \le m \le \overline{x_1} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$, 즉 $a \le m \le b$이므로

$b - a = 2 \times 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$ (참)

ㄷ. ㄴ에 의하여 $b - a = 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$이고 $d - c = 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$이다. 이때 $n_1 > n_2$이면 $\sqrt{n_1} > \sqrt{n_2}$이므로 $b - a < d - c$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ①

32

$p = 0.8$이므로 이 고등학교 학생 중에서 임의추출한 100명 중 생활복 착용에 찬성하는 학생의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\mathrm{E}(\hat{p}) = 0.8$,

$\mathrm{V}(\hat{p}) = \frac{0.8 \times 0.2}{100} = 0.04^2$이므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(0.8, 0.04^2)$을 따르고, $Z = \frac{\hat{p} - 0.8}{0.04}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

임의추출한 100명 중 생활복 착용에 찬성하는 학생이 76명 이상 86명 이하일 확률은

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\frac{76}{100} \le \hat{p} \le \frac{86}{100}\right) &= \mathrm{P}\left(\frac{\frac{76}{100} - 0.8}{0.04} \le Z \le \frac{\frac{86}{100} - 0.8}{0.04}\right) \\ &= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 1.5) \\ &= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 0) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5) \\ &= \mathrm{P}(0 \le Z \le 1) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5) \\ &= 0.3413 + 0.4332 \\ &= 0.7745 \end{aligned}$$

답 ④

33

이 학교 학생들의 하루 동안 자습 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(120, 25^2)$을 따르고, $Z = \frac{X - 120}{25}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다. 이 고등학교 학생 중 임의로 선택한 한 명의 하루 동안 자습 시간이 111분 이상일 확률은

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \ge 111) &= \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{111 - 120}{25}\right) \\ &= \mathrm{P}(Z \ge -0.36) \\ &= \mathrm{P}(-0.36 \le Z \le 0) + \mathrm{P}(Z \ge 0) \\ &= 0.14 + 0.5 = 0.64 \end{aligned}$$

이 학교 학생들 중에서 임의추출한 400명 중 하루 동안 자습 시간이 111분 이상인 학생의 비율을 확률변수 $\hat{p}$이라 하면

$\mathrm{E}(\hat{p}) = 0.64$, $\mathrm{V}(\hat{p}) = \frac{0.64 \times 0.36}{400} = 0.024^2$이므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(0.64, 0.024^2)$을 따르고, $Z = \frac{\hat{p} - 0.64}{0.024}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}\left(\hat{p} \ge \frac{n}{400}\right) = \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{\frac{n}{400} - 0.64}{0.024}\right) = 0.11$이므로

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{\frac{n}{400} - 0.64}{0.024}\right) = 0.39$

$\frac{\frac{n}{400} - 0.64}{0.024} = 1.25$, $\frac{n}{400} = 0.67$, $n = 268$

답 ④

34

이 고등학교 학생 중 100명을 임의추출하여 조사한 결과 80명의 학생이 방과후학교 참여를 희망하였으므로 $\hat{p} = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$이고, 이때 100은 충분히 크므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\frac{4}{5} - 1.96 \times \sqrt{\frac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{5}}{100}} \le p \le \frac{4}{5} + 1.96 \times \sqrt{\frac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{5}}{100}}$

$0.8 - 0.0784 \le p \le 0.8 + 0.0784$

따라서 $b - a = 2 \times 0.0784 = 0.1568$

답 ②

35

표본비율이 $\hat{p}$이고 표본의 크기가 n이므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\hat{p} - 1.96 \times \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le p \le \hat{p} + 1.96 \times \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ (단, $\hat{q} = 1 - \hat{p}$)

주어진 신뢰구간이 $0.7216 \le p \le 0.8784$이므로

$\hat{p} - 1.96 \times \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0.7216$

$\hat{p} + 1.96 \times \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0.8784$

두 등식의 각 변을 더하여 정리하면

$2\hat{p} = 1.6$, $\hat{p} = 0.8$

따라서 $0.8 - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{n}} = 0.7216$에서

$1.96 \times \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{n}} = 0.0784$

$\frac{0.4}{\sqrt{n}} = 0.04$

$\sqrt{n} = 10$, $n = 100$이므로

$n \times \hat{p} = 100 \times 0.8 = 80$

답 ①

기하와 벡터

08 평면 곡선

정답 본문 102~111쪽

01 ③	02 ②	03 ③	04 65	05 ④
06 ①	07 ⑤	08 ⑤	09 16	10 ①
11 ⑤	12 ⑤	13 68	14 ①	15 ③
16 21	17 ②	18 ⑤	19 ②	20 ④
21 ②	22 ③	23 ③	24 ⑤	25 ③
26 12	27 ①	28 ①	29 ④	30 ①
31 ③				

01

주어진 포물선의 식을 변형하면

$(x-3)^2=-4y-a+9=-4\left(y+\frac{a}{4}-\frac{9}{4}\right)$이고 이 포물선은 포물선 $x^2=-4y$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 $-\frac{a}{4}+\frac{9}{4}$만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $x^2=-4y$의 초점의 좌표는 $(0,\ -1)$이므로

포물선 $(x-3)^2=-4\left(y+\frac{a}{4}-\frac{9}{4}\right)$의 초점의 좌표는

$\left(3,\ -1-\frac{a}{4}+\frac{9}{4}\right)$, 즉 $\left(3,\ \frac{5-a}{4}\right)$이다.

이 점이 직선 $y=x-5$ 위에 있으므로

$\frac{5-a}{4}=3-5$

따라서 $a=13$

답 ③

02

초점이 원점이고 꼭짓점의 좌표가 $(-p,\ 0)$인 포물선은 초점이 $(p,\ 0)$이고 꼭짓점의 좌표가 원점인 포물선을 x축의 방향으로 $-p$만큼 평행이동한 것이므로

$y^2=4p(x+p)$ …… ㉠

초점이 $(2,\ 0)$이고 준선이 $x=6$인 포물선은 초점이 $(-2,\ 0)$이고 준선이 $x=2$인 포물선을 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로

$y^2=-8(x-4)$ …… ㉡

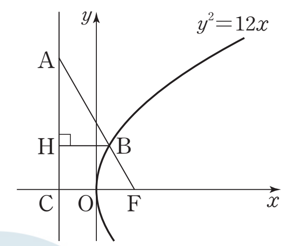
㉠이 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ 2p)$ 또는 $(0,\ -2p)$이고 두 포물선이 y축 위에서 만나므로 $x=0$, $y=2p$ 또는 $x=0$, $y=-2p$를 ㉡에 대입하면

$4p^2=32$, $p^2=8$

따라서 양수 p의 값은 $2\sqrt{2}$이다.

답 ②

03



준선이 x축과 만나는 점을 C라 하면 삼각형 ACF는 $\overline{CF}=6$, $\overline{AF}=12$인 직각삼각형이다.

그림과 같이 점 B에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{HB}=\overline{BF}$이고, $\overline{AB}:\overline{HB}=\overline{AF}:\overline{CF}$에서 $\overline{AB}=2\overline{HB}$이므로

$\overline{AF}=\overline{AB}+\overline{BF}=2\overline{HB}+\overline{HB}=3\overline{HB}$

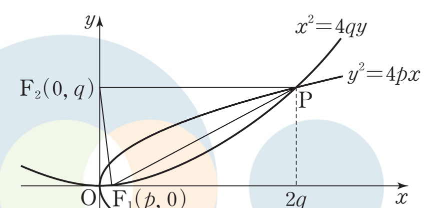
즉, $\overline{HB}=\frac{1}{3}\overline{AF}=4$

점 B의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $a=-3+4=1$, $b^2=12a=12$

따라서 $\overline{OB}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+12}=\sqrt{13}$

답 ③

04



직선 PF_2가 x축과 평행하므로 두 점 P와 F_2의 y좌표가 같다.

이때 점 P는 그림과 같이 제1사분면의 점이므로 $P(2q,\ q)$이고 $\overline{PF_2}=2q$이다.

점 P가 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로

$q^2=8pq$, 즉 $q=8p$이다.

포물선 $y^2=4px$의 준선의 방정식은 $x=-p$이므로

$\overline{PF_1}=2q+p$

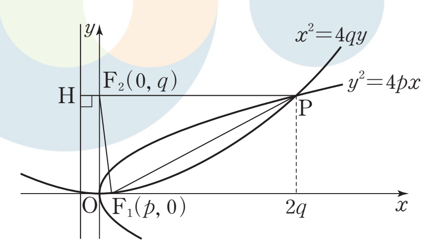
조건 (나)에서 $\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=1$이므로 $(2q+p)-2q=1$

따라서 $p=1$, $q=8p=8$이므로

$\overline{F_1F_2}^2=p^2+q^2=1^2+8^2=65$

답 65

다른 풀이



포물선의 방정식으로부터 두 점 F_1, F_2의 좌표는 각각 $(p,\ 0)$, $(0,\ q)$이다. (단, p, q는 양수)

점 P에서 포물선 $y^2=4px$의 준선인 직선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 H라 하자. 조건 (가)에 의하여 점 F_2는 선분 PH 위에 있고 $\overline{PF_1}=\overline{PH}$이므로 조건 (나)에서 $\overline{PH}-\overline{PF_2}=\overline{HF_2}=1$이다.

점 H의 x좌표는 $-p$이므로 $|-p|=1$에서 $p=1$

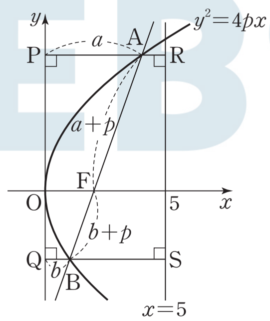
한편, 점 P는 포물선 $x^2=4qy$ 위의 점이고 y좌표는 q이므로 $x^2=4q^2$에서 $x=2q$

또 점 $\mathrm{P}(2q,\ q)$는 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로

$q^2=8q$에서 $q=8$

따라서 $\overline{\mathrm{F_1F_2}}^2=p^2+q^2=1^2+8^2=65$

05



직선 AB는 점 $\mathrm{F}(p,\ 0)$을 지나고 기울기가 $2\sqrt{2}$인 직선이므로 직선 AB의 방정식은

$y=2\sqrt{2}(x-p)$

$\overline{\mathrm{AP}}=a$, $\overline{\mathrm{QB}}=b=\overline{\mathrm{AR}}$이므로

$a+b=5$ …… ㉠

포물선 $y^2=4px$의 준선의 방정식이 $x=-p$이므로

$\overline{\mathrm{AF}}=a+p$, $\overline{\mathrm{BF}}=b+p$

즉, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}$

$=(a+b)+2p$

$=5+2p$ …… ㉡

한편, a, b는 연립방정식 $\begin{cases} y^2=4px \\ y=2\sqrt{2}(x-p) \end{cases}$의 실근이므로

$4px=\{2\sqrt{2}(x-p)\}^2=8(x^2-2px+p^2)$

$2x^2-5px+2p^2=0$

$(2x-p)(x-2p)=0$

$x=\dfrac{p}{2}$ 또는 $x=2p$이므로 $a=2p$, $b=\dfrac{p}{2}$이다.

이것을 ㉠에 대입하면

$2p+\dfrac{p}{2}=5$, 즉 $p=2$이므로 $a=4$, $b=1$이다.

따라서 포물선의 방정식은 $y^2=8x$이고 두 점 A, B의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(4,\ 4\sqrt{2})$, $\mathrm{B}(1,\ -2\sqrt{2})$이다.

$\overline{\mathrm{PO}}=4\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OQ}}=2\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PO}}+\overline{\mathrm{OQ}}=6\sqrt{2}$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 사각형 APQB의 둘레의 길이는

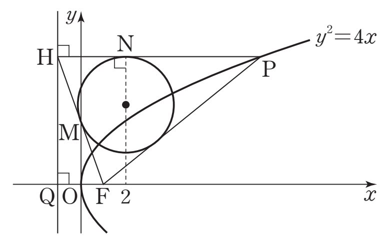
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}+\overline{\mathrm{AB}}=4+6\sqrt{2}+1+9$

$=14+6\sqrt{2}$

답 ④

06

점 P는 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로 $b^2=4a$ …… ㉠



그림과 같이 선분 HF와 원이 접하는 점을 M, 선분 PH와 원이 접하는 점을 N이라 하자.

포물선의 준선의 방정식이 $x=-1$이므로

$\overline{\mathrm{HM}}=\overline{\mathrm{HN}}=2-(-1)=3$

포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}$이므로 삼각형 PHF는 이등변삼각형이고 직선 PM은 선분 HF의 수직이등분선이다.

따라서 M은 변 HF의 중점이고

$\overline{\mathrm{HM}}=\overline{\mathrm{MF}}=3$이므로 $\overline{\mathrm{HF}}=6$

준선과 x축의 교점을 Q라 하면 $\overline{\mathrm{FQ}}=2$, $\overline{\mathrm{HQ}}=b$이고

삼각형 HQF는 직각삼각형이므로

$4+b^2=36$, $b^2=32$, $b=4\sqrt{2}$

㉠에서 $a=8$

따라서 $ab=8\times4\sqrt{2}=32\sqrt{2}$

답 ①

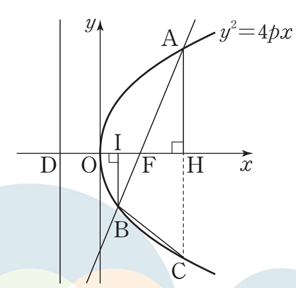
07

ㄱ. 두 점 B, C가 일치하는 경우 점 A의 x좌표는 초점 F의 x좌표인 p와 같으므로 점 A의 좌표는 $(p,\ 2p)$ 또는 $(p,\ -2p)$

점 D의 좌표는 $(-p,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{\{p-(-p)\}^2+(\pm2p)^2}=2\sqrt{2}p$ (참)

ㄴ. 점 A가 제4사분면에 있는 경우는 제1사분면에 있는 경우와 대칭이므로 점 A가 제1사분면에 있는 경우만 생각하자. 이때 두 점 A, C의 좌표는 $\mathrm{A}(2p,\ 2\sqrt{2}p)$, $\mathrm{C}(2p,\ -2\sqrt{2}p)$이다.



그림과 같이 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하고, $\overline{\mathrm{BF}}=a$라 하면 삼각형 BFI와 AFH에서 $\dfrac{\overline{\mathrm{IF}}}{\overline{\mathrm{BF}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{HF}}}{\overline{\mathrm{AF}}}$이고

$\overline{\mathrm{IF}}=\overline{\mathrm{DF}}-\overline{\mathrm{DI}}=\overline{\mathrm{DF}}-\overline{\mathrm{BF}}=2p-a$, $\overline{\mathrm{AF}}=2p-(-p)=3p$

이므로 $\dfrac{2p-a}{a}=\dfrac{p}{3p}$, $a=\dfrac{3}{2}p$이다.

점 B는 제4사분면의 점이므로 점 B의 x좌표는

$a-p=\dfrac{3}{2}p-p=\dfrac{p}{2}$이고 $y^2=4p\times\dfrac{p}{2}=2p^2$에서

점 B의 y좌표는 $-\sqrt{2}p$이다.

따라서 점 B의 좌표는 $\left(\dfrac{p}{2},\ -\sqrt{2}p\right)$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\left(2p-\dfrac{p}{2}\right)^2+(-2\sqrt{2}p+\sqrt{2}p)^2}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}p$ (참)

ㄷ. 두 점 A, B는 모두 포물선 위의 점이므로 ㄴ의 그림에서

$\overline{\mathrm{DI}}=\overline{\mathrm{BF}}$, $\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{CF}}$

삼각형 DBI에서 $\tan(\angle\mathrm{BDI})=\dfrac{\overline{\mathrm{IB}}}{\overline{\mathrm{DI}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{IB}}}{\overline{\mathrm{BF}}}$,

삼각형 DCH에서 $\tan(\angle\mathrm{CDH})=\dfrac{\overline{\mathrm{HC}}}{\overline{\mathrm{DH}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{HC}}}{\overline{\mathrm{CF}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AF}}}$이다.

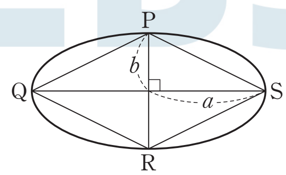
이때 삼각형 BFI와 삼각형 AFH는 서로 닮은 직각삼각형이므로

$\dfrac{\overline{\mathrm{BI}}}{\overline{\mathrm{FB}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AF}}}$이다. 즉, $\angle\mathrm{BDI}=\angle\mathrm{CDH}$이므로 세 점 B, C, D는 한 직선 위에 있다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

08



타원의 장축의 길이를 $2a$, 단축의 길이를 $2b$라 하면 그림과 같이 사각형 PQRS는 두 대각선의 길이가 각각 $2a$, $2b$인 마름모이다.

마름모의 한 변의 길이가 $2\sqrt{5}$이므로

$a^2+b^2=(2\sqrt{5})^2$ …… ㉠

마름모의 넓이가 16이므로

$\dfrac{1}{2}\times 2a\times 2b=16$ …… ㉡

$a>b$이므로 ㉠, ㉡에서 $a=4$, $b=2$

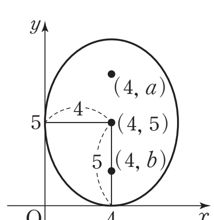
타원의 두 초점 사이의 거리를 d라 하면

$a^2-b^2=\left(\dfrac{d}{2}\right)^2$에서 $d^2=4(a^2-b^2)=48$

따라서 $d=4\sqrt{3}$

답 ⑤

09



그림과 같이 두 점 $(4,\ 0)$, $(0,\ 5)$가 이 타원의 네 꼭짓점 중 두 개이고 초점이 직선 $x=4$ 위의 두 점이므로 타원의 중심은 $(4,\ 5)$이다. 또 타원의 장축의 길이는 10, 단축의 길이는 8이므로 타원의 방정식은

$\dfrac{(x-4)^2}{16}+\dfrac{(y-5)^2}{25}=1$이고 이는 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 타원이다.

타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$의 초점을 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=25-16=3^2$에서 $\mathrm{F}(0,\ 3)$, $\mathrm{F}'(0,\ -3)$이므로 타원

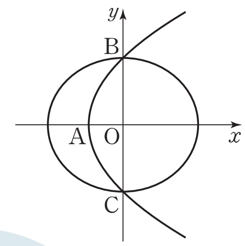
$\dfrac{(x-4)^2}{16}+\dfrac{(y-5)^2}{25}=1$의 초점의 좌표는

$(0+4,\ 3+5)$, $(0+4,\ -3+5)$, 즉 $(4,\ 8)$, $(4,\ 2)$이다.

따라서 $ab=16$

답 16

10



초점이 원점이고 꼭짓점이 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$인 포물선은 초점이 $(1,\ 0)$이고 꼭짓점이 원점인 포물선을 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 포물선의 방정식은 $y^2=4(x+1)$이고, 두 점 B, C의 좌표는 각각 $(0,\ 2)$, $(0,\ -2)$이다.

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 한 초점이 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$이므로

$a^2-b^2=(-1)^2$ …… ㉠

두 점 B, C가 타원의 꼭짓점이므로 $\dfrac{4}{b^2}=1$에서 $b=2$

㉠에서 $a^2=5$이므로 $a=\sqrt{5}$

따라서 $ab=2\sqrt{5}$

답 ①

11

초점 F의 x좌표를 c $(c>0)$이라 하면 원 C가 점 F에서 x축에 접하고, 점 $\mathrm{P}(0,\ b)$에서 y축에 접하므로 $b=c$이다.

$a^2-b^2=c^2$에서 $a^2=2b^2$

직선 FF′은 원의 접선이므로 $\overline{\mathrm{F'R}}\times\overline{\mathrm{F'Q}}=\overline{\mathrm{F'F}}^2$이다.

즉, $8=(2c)^2=(2b)^2=4b^2$에서

$b=c=\sqrt{2}$, $a=2$

따라서 삼각형 QF′F의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{F'F}}=(\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{QF}})+\overline{\mathrm{F'F}}$

$=2a+2c$

$=4+2\sqrt{2}$

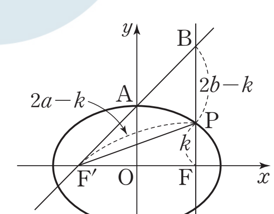
답 ⑤

12

타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이라 하면 초점의 좌표가

$\mathrm{F}(2\sqrt{6},\ 0)$, $\mathrm{F}'(-2\sqrt{6},\ 0)$이므로

$a^2-b^2=24$ …… ㉠



그림과 같이 $\overline{\mathrm{PF}}=k$라 하면 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=2a-k$

한편, 삼각형 $\text{AF}'\text{O}$와 삼각형 $\text{BF}'\text{F}$는 닮음비가 $\overline{\text{F}'\text{O}} : \overline{\text{F}'\text{F}}=1:2$인 닮은 삼각형이므로 $\overline{\text{BF}}=2b$이고

$\overline{\text{BP}}=\overline{\text{BF}}-\overline{\text{PF}}=2b-k$

$\overline{\text{PF}'}-\overline{\text{BP}}=(2a-k)-(2b-k)=2(a-b)$이므로

$2(a-b)=4,\ a-b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=7,\ b=5$

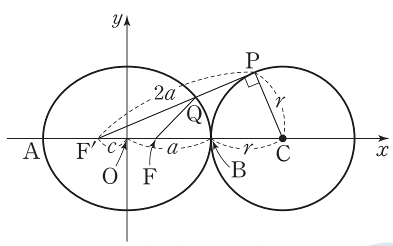
즉, 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{25}=1$이고, 점 $\text{P}(2\sqrt{6},\ k)$는 타원 위의 점이므로

$\dfrac{(2\sqrt{6})^2}{49}+\dfrac{k^2}{25}=1$

따라서 $k=\dfrac{25}{7}$

답 ⑤

13



$\overline{\text{OA}}=\overline{\text{OB}}=a$이므로 $\overline{\text{AF}}=8$에서

$a+c=8$ …… ㉠

원의 반지름의 길이를 r라 하면 $\overline{\text{FC}}=9$에서

$(a-c)+r=9$ …… ㉡

$\overline{\text{QF}}=\overline{\text{QP}}$이고 Q는 타원 위의 점이므로

$\overline{\text{F}'\text{P}}=\overline{\text{F}'\text{Q}}+\overline{\text{QP}}=\overline{\text{F}'\text{Q}}+\overline{\text{QF}}=2a$

㉠, ㉡에서 $2a=17-r$ …… ㉢

즉, $\overline{\text{F}'\text{P}}=17-r$, $\overline{\text{F}'\text{C}}=c+a+r=8+r$이고,

삼각형 $\text{PF}'\text{C}$에서 $\overline{\text{F}'\text{C}}^2=\overline{\text{F}'\text{P}}^2+\overline{\text{PC}}^2$이므로

$(8+r)^2=(17-r)^2+r^2$

$r^2+16r+64=r^2-34r+289+r^2$

$r^2-50r+225=0,\ (r-5)(r-45)=0$

㉢에서 $17-r>0$에서 $r<17$이므로 $r=5$

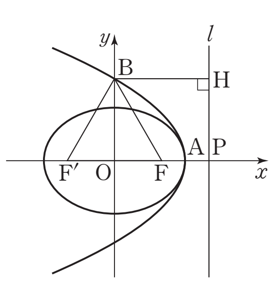
㉠, ㉢에서 $a=6,\ c=2$

따라서 $a^2=36,\ b^2=a^2-c^2=32$이므로

$a^2+b^2=68$

답 68

14



그림과 같이 포물선의 준선을 l이라 하고, 점 B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H, 직선 l과 x축의 교점을 P라 하자.

삼각형 $\text{BF}'\text{F}$는 정삼각형이고 $\overline{\text{BF}}=\overline{\text{BH}}$이므로

$\overline{\text{BH}}=\overline{\text{BF}}=\overline{\text{FF}'}=2c$

또한 $\overline{\text{OF}}=c$, $\overline{\text{AF}}=\overline{\text{AP}}=a-c$이므로

$\overline{\text{OP}}=\overline{\text{OF}}+\overline{\text{FP}}=\overline{\text{OF}}+2\overline{\text{AF}}=c+2(a-c)=2a-c$

$\overline{\text{BH}}=\overline{\text{OP}}$이므로 $2c=2a-c$

$c=\dfrac{2}{3}a$ …… ㉠

타원의 방정식에서

$a^2-c^2=20$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2=36$

따라서 $a=6$

답 ①

다른 풀이

$a>c$이므로 점 $\text{F}(c,\ 0)$을 초점으로 하고 점 $\text{A}(a,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 포물선은 점 $(c-a,\ 0)$을 초점으로 하고 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로

$y^2=4(c-a)(x-a)$

점 B는 x좌표가 0이고 y좌표가 양수인 포물선 위의 점이므로

$\text{B}(0,\ 2\sqrt{a^2-ac})$

삼각형 $\text{BF}'\text{F}$가 정삼각형이므로

$\overline{\text{FF}'} : \overline{\text{OB}}=2:\sqrt{3}$이고

$\overline{\text{F}'\text{F}}=2c$에서

$\overline{\text{OB}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{\text{F}'\text{F}}=\sqrt{3}c$

$2\sqrt{a^2-ac}=\sqrt{3}c$에서 $4(a^2-ac)=3c^2$

$4a^2-4ac-3c^2=0,\ (2a+c)(2a-3c)=0$

$a>c>0$이므로

$2a=3c,\ c=\dfrac{2}{3}a$ …… ㉢

타원의 방정식에서

$a^2-c^2=20$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $a^2=36$

따라서 $a=6$

15

점 A의 좌표는 $(0,\ k)$이고, 직선 l의 방정식은 $kx-2y=0$이므로

점 A와 직선 l 사이의 거리는

$\dfrac{|-2k|}{\sqrt{k^2+(-2)^2}}=\dfrac{2k}{\sqrt{k^2+4}}$

즉, $\dfrac{2k}{\sqrt{k^2+4}}=\dfrac{k}{2}$에서

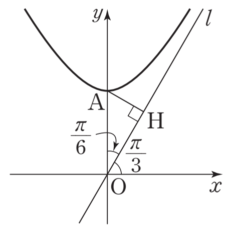
$\sqrt{k^2+4}=4,\ k^2=12$

따라서 $k=2\sqrt{3}$

답 ③

다른 풀이

꼭짓점 A의 y좌표가 양수이므로 쌍곡선의 방정식으로부터 점 A의 좌표는 $\text{A}(0,\ k)$이다.



그림과 같이 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AH}}=\frac{k}{2}$이므로 직각삼각형 AOH에서

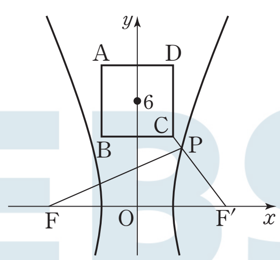
$\sin(\angle\mathrm{AOH})=\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AO}}}=\frac{\frac{k}{2}}{k}=\frac{1}{2}$

즉, $\angle\mathrm{AOH}=\frac{\pi}{6}$이고 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이다.

따라서 직선 l의 기울기는 $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이므로

$\frac{k}{2}=\sqrt{3}$에서 $k=2\sqrt{3}$

16



쌍곡선의 초점 중 x좌표가 양수인 것을 F′이라 하면 점 P가 쌍곡선 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{FP}}-\overline{\mathrm{F'P}}=4$

$\overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{PQ}}=(\overline{\mathrm{F'P}}+4)+\overline{\mathrm{PQ}}$에서 $\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}$는 그림과 같이 점 Q가 C(2, 4)에 있고 동시에 C(2, 4)와 쌍곡선 위의 점 P, 점 F′이 일직선 위에 있을 때 최솟값 $\overline{\mathrm{F'C}}$를 갖는다.

$\overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{PQ}}\ge 4+\overline{\mathrm{F'C}}=9$에서 $\overline{\mathrm{F'C}}=5$

점 F′의 x좌표를 c $(c>0)$이라 하면

$\sqrt{(c-2)^2+4^2}=5$

$c>0$이므로 $c=5$

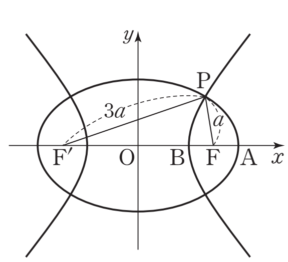
따라서 쌍곡선의 방정식에서

$4+k^2=5^2$

$k^2=21$

답 21

17



쌍곡선의 주축의 길이를 $2a$라 하면 타원의 장축의 길이는 $4a$이고, 그림과 같이 타원의 꼭짓점 중에서 x좌표가 양수인 점을 A, 쌍곡선의 꼭짓점 중에서 x좌표가 양수인 점을 B라 하면 $\mathrm{A}(2a, 0)$, $\mathrm{B}(a, 0)$이다.

점 P는 쌍곡선 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2a$, 점 P는 타원 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=4a$이다. 즉, $\overline{\mathrm{PF'}}=3a$, $\overline{\mathrm{PF}}=a$이다.

이때 삼각형 PF′F는 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{F'F}}=\overline{\mathrm{PF'}}=3a$이다.

즉, $c=\frac{3}{2}a$이다.

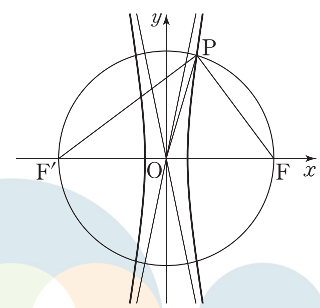
쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하면

$a^2+b^2=c^2$에서 $b^2=c^2-a^2=\frac{5}{4}a^2$이므로

$m^2=\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{4}$

답 ②

18



쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이라 하면

$a^2+b^2=5^2$ …… ㉠

$\left|\frac{b}{a}\right|=k$에서 $b=ak$ …… ㉡

조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{OP}}=5$이고 $\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OF'}}=5$이므로 삼각형 PF′F는 변 FF′을 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

$\overline{\mathrm{PF}}=m$, $\overline{\mathrm{PF'}}=n$이라 하면 $\overline{\mathrm{FF'}}=10$이므로

$m^2+n^2=10^2$ …… ㉢

조건 (나)에서 삼각형 PF′F의 둘레의 길이가 24이므로

$m+n=14$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $m=8$, $n=6$ 또는 $m=6$, $n=8$

점 P는 쌍곡선 위의 점이므로

$|m-n|=2a$에서 $a=1$

㉠, ㉡으로부터 $b=2\sqrt{6}$

따라서 $k=2\sqrt{6}$

답 ⑤

19

점 Q가 y축 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{F'Q}}=5$

두 삼각형 PF′F와 QF′F의 둘레의 길이의 차가 6이므로

$(\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{FF'}}+5)-(5+5+\overline{\mathrm{FF'}})=6$

즉, $\overline{\mathrm{PF'}}=11$

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=11-5=6=2a$에서 $a=3$이다.

한편, 삼각형 QOF는 직각삼각형이므로

$\overline{FQ}^2=\overline{QO}^2+\overline{OF}^2$

$5^2=a^2+c^2$

이때 $c^2=a^2+b^2$이므로

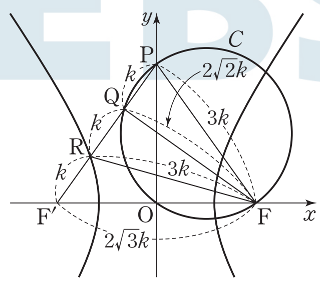
$5^2=a^2+(a^2+b^2)=2a^2+b^2$

$a^2=9$이므로 $b^2=25-18=7$

따라서 $a^2-b^2=9-7=2$

답 ②

20



$\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RF'}=k$라 하면 $\overline{PF}=\overline{PF'}=3k$

$\angle POF=\frac{\pi}{2}$이므로 선분 PF는 원 C의 지름이고, 삼각형 PQF에서

$\angle PQF=\frac{\pi}{2}$이다.

$\overline{FQ}=\sqrt{(3k)^2-k^2}=2\sqrt{2}k$

또한 삼각형 QF′F에서 $\angle F'QF=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{F'F}=\sqrt{(2k)^2+(2\sqrt{2}k)^2}=2\sqrt{3}k$

즉, $c=\sqrt{3}k$, $c^2=3k^2$

한편, 삼각형 PQF와 삼각형 RQF는 합동이므로

$\overline{RF}=\overline{PF}=3k$

점 R는 쌍곡선 위의 점이고 주축의 길이가 $2a$이므로

$2a=\overline{RF}-\overline{RF'}=3k-k=2k$

즉, $a=k$, $a^2=k^2$

쌍곡선의 방정식에서 $a^2+16=c^2$이므로 $k^2+16=3k^2$

$k=2\sqrt{2}$

따라서 원 C의 넓이는

$\pi\times\left(\frac{3}{2}k\right)^2=\pi\times(3\sqrt{2})^2=18\pi$

답 ④

21

$\pi x=y+x\sin y$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\pi=\frac{dy}{dx}+\sin y+x\cos y\times\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\pi-\sin y}{x\cos y+1}$ (단, $x\cos y+1\neq0$)

따라서 점 $(2,\ 2\pi)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{\pi-\sin 2\pi}{2\cos 2\pi+1}=\frac{\pi}{3}$

답 ②

22

$e^xy+x^2-xy^2=n$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^xy+e^x\times\frac{dy}{dx}+2x-y^2-2xy\times\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-2x-e^xy}{e^x-2xy}$ (단, $e^x-2xy\neq0$)

곡선 $e^xy+x^2-xy^2=n$이 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ n)$이고,

점 $(0,\ n)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{n^2-2\times0-e^0\times n}{e^0-2\times0\times n}=n^2-n$이므로 $f(n)=n^2-n$이다.

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10}f(n)&=\sum_{n=1}^{10}(n^2-n)\\&=\sum_{n=1}^{10}n^2-\sum_{n=1}^{10}n\\&=\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}\\&=385-55\\&=330\end{aligned}$$

답 ③

23

$\mathrm{P}(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$이라 하면 점 P가 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점이므로

$\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}=1$ ······ ㉠

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{x}{8}+\frac{y}{2}\frac{dy}{dx}=0$에서

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y}$ (단, $y\neq0$)

이므로 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{a}{4b}$

$-\frac{a}{4b}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$에서 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}b$, $a^2=\frac{4}{3}b^2$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{b^2}{12}+\frac{b^2}{4}=1$이므로

$b^2=3$, $a^2=4$

따라서 $\overline{OP}^2=a^2+b^2=4+3=7$

답 ③

24

$2x=y\sqrt{1-y}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2=\left(\sqrt{1-y}-\frac{y}{2\sqrt{1-y}}\right)\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{\sqrt{1-y}-\frac{y}{2\sqrt{1-y}}}$ $\left(단,\ \sqrt{1-y}-\frac{y}{2\sqrt{1-y}}\neq0,\ 2\sqrt{1-y}\neq0\right)$

점 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -1\right)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{2}{\sqrt{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}=\frac{4\sqrt{2}}{5}$

즉, 접선의 방정식은

$$y=\frac{4\sqrt{2}}{5}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-1=\frac{4\sqrt{2}}{5}x-\frac{1}{5}$$

따라서 y축과 만나는 점의 y좌표는 $-\frac{1}{5}$이다.

답 ⑤

25

직선 l과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형이 넓이가 8인 직각이등변삼각형이므로 직선 l은 기울기가 1 또는 -1이고, 직각이등변삼각형의 빗변이 아닌 한 변의 길이를 p라 하면 $\frac{1}{2}\times p^2=8$에서 $p=4$이다.

이때 직선 l은 곡선 $2x^3+y^2+7x+ay+b=0$과 y축의 교점 P에서의 접선이므로 점 P의 좌표는 $(0, 4)$이다.

점 P는 곡선 위의 점이므로

$0+16+0+4a+b=0$

$b=-4a-16$ …… ㉠

한편, $2x^3+y^2+7x+ay+b=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x^2+2y\frac{dy}{dx}+7+a\frac{dy}{dx}=0$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{6x^2+7}{2y+a}$ (단, $2y+a\neq0$)

이므로 점 P에서의 접선의 기울기는 $-\frac{7}{8+a}$이다.

(i) 직선 l의 기울기가 1인 경우

$-\frac{7}{8+a}=1$에서 $a=-15$

㉠에 대입하면 $b=44$

(ii) 직선 l의 기울기가 -1인 경우

$-\frac{7}{8+a}=-1$에서 $a=-1$

㉠에 대입하면 $b=-12$

$b>0$이므로 (i), (ii)에서

$a=-15$, $b=44$

따라서 $a+b=-15+44=29$

답 ③

26

$x=6\sin t-t$, $y=3\tan 2t$에서

$\frac{dx}{dt}=6\cos t-1$, $\frac{dy}{dt}=6\sec^2 2t$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6\sec^2 2t}{6\cos t-1} \text{ (단, } 6\cos t-1\neq0)$$

따라서 $t=\frac{\pi}{3}$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{6\sec^2\frac{2}{3}\pi}{6\cos\frac{\pi}{3}-1}=\frac{6\times\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}}{6\times\frac{1}{2}-1}=12$$

답 12

27

$x=\ln(1+2t)$, $y=\ln(1+t^2)$에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+2t}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{2t}{1+t^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2}{1+2t}}=\frac{t(1+2t)}{1+t^2}$$

$t=a$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기가 2이므로

$\frac{a(1+2a)}{1+a^2}=2$, $a+2a^2=2+2a^2$

따라서 $a=2$

답 ①

28

두 점 P, Q의 x좌표는 각각 $3a^2-2a$, $75a^2-10a$이므로

$3a^2-2a<0$, $75a^2-10a<0$에서 $0<a<\frac{2}{15}$ …… ㉠

$x=3t^2-2t$, $y=2t^2+1$에서

$\frac{dx}{dt}=6t-2$, $\frac{dy}{dt}=4t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4t}{6t-2}=\frac{2t}{3t-1} \text{ (단, } 3t-1\neq0)$$

두 점 P, Q에서의 접선의 기울기는 각각 $\frac{2a}{3a-1}$, $\frac{10a}{15a-1}$이므로

조건 (나)에서

$\frac{2a}{3a-1}\times\frac{10a}{15a-1}=-1$

$20a^2=-(3a-1)(15a-1)$

$65a^2-18a+1=0$

$(5a-1)(13a-1)=0$

$a=\frac{1}{5}$ 또는 $a=\frac{1}{13}$

따라서 ㉠에 의하여 $a=\frac{1}{13}$

답 ①

29

$x=t^3+t$, $y=at^2+bt$에서

$\frac{dx}{dt}=3t^2+1$, $\frac{dy}{dt}=2at+b$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2at+b}{3t^2+1}$$

$t=1$일 때 접선의 기울기는 $\frac{2a+b}{4}$이고, 접점의 좌표는 $(2, a+b)$이므로 접선의 방정식은

$y=\frac{2a+b}{4}(x-2)+(a+b)$

이 접선이 직선 $y=2x-2$와 y축 위의 점에서 수직으로 만나므로

$\frac{2a+b}{4}=-\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\frac{2a+b}{4}\times(-2)+(a+b)=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=1$, $b=-4$

따라서 $ab=-4$

답 ④

30

$x=\frac{4}{1-t^2}$, $y=\frac{4t}{1-t^2}$에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{8t}{(1-t^2)^2}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{4(1+t^2)}{(1-t^2)^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{4(1+t^2)}{(1-t^2)^2}}{\frac{8t}{(1-t^2)^2}}=\frac{1+t^2}{2t}$$

$t=\frac{1}{2}$일 때 접선의 기울기는 $\frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2\times\frac{1}{2}}=\frac{5}{4}$이고, 접점의 좌표는

$\left(\frac{16}{3}, \frac{8}{3}\right)$이므로 접선의 방정식은

$y=\frac{5}{4}\left(x-\frac{16}{3}\right)+\frac{8}{3}=\frac{5}{4}x-4$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $\mathrm{A}\left(\frac{16}{5}, 0\right)$, $\mathrm{B}(0, -4)$이므로

삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{16}{5}\times4=\frac{32}{5}$

답 ①

31

$x=3(1-2\sin^2 t)$, $y=8\cos^3 t$에서

$\frac{dx}{dt}=-12\sin t\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-24\cos^2 t\sin t$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-24\cos^2 t\sin t}{-12\sin t\cos t}=2\cos t \text{ (단, } \cos t\neq0)$$

두 직선 l_1, l_2 중에서 기울기가 큰 직선을 l_1이라 하면 두 직선 l_1, l_2 및 직선 $y=a$로 둘러싸인 부분이 정삼각형을 이루므로 직선 l_1, l_2의 기울기는 각각 $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$이다.

먼저 $2\cos t=\sqrt{3}$에서 $t=\frac{\pi}{6}$이므로 점 P의 좌표는

$3\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$, $8\cos^3\frac{\pi}{6}=3\sqrt{3}$에서 $\mathrm{P}\left(\frac{3}{2}, 3\sqrt{3}\right)$이고

직선 l_1의 방정식은

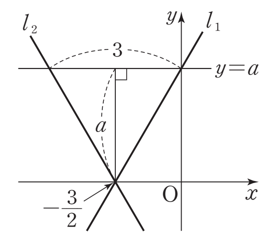
$y=\sqrt{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)+3\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(x+\frac{3}{2}\right)$

또한 $2\cos t=-\sqrt{3}$에서 $t=\frac{5}{6}\pi$이므로 점 Q의 좌표는

$3\left(1-2\sin^2\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{3}{2}$, $8\cos^3\frac{5}{6}\pi=-3\sqrt{3}$에서 $\mathrm{Q}\left(\frac{3}{2}, -3\sqrt{3}\right)$이고

직선 l_2의 방정식은

$y=-\sqrt{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)-3\sqrt{3}=-\sqrt{3}\left(x+\frac{3}{2}\right)$



그림과 같이 직선 l_1, l_2는 x축 위의 점 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$에서 만나므로 양수 a의 값은 한 변의 길이가 3인 정삼각형의 높이와 같다.

따라서 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}\times3=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

답 ③

09 평면벡터

정답 본문 115~125쪽

01 ③	02 9	03 ④	04 15	05 ②
06 ②	07 ④	08 ①	09 ④	10 ②
11 16	12 ②	13 55	14 ⑤	15 ⑤
16 ④	17 ④	18 ④	19 ②	20 ①
21 ④	22 ③	23 ①	24 ④	25 ③
26 ④	27 ①	28 ④	29 ②	30 ③

01

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(3\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}+2\vec{b})=2\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=(k\vec{a}+4\vec{b})-(\vec{a}+2\vec{b})=(k-1)\vec{a}+2\vec{b}$

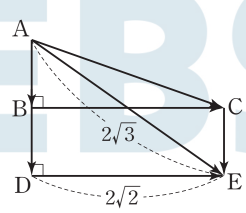
세 점 P, Q, R가 한 직선 위에 있으므로 0이 아닌 실수 t에 대하여 $\overrightarrow{PR}=t\overrightarrow{PQ}$이다.

즉, $2t=k-1$, $-t=2$에서

$t=-2$, $k=-3$

답 ③

02



그림과 같이 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CE}$인 점 D, E를 그리면

$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}$에서 $|\overrightarrow{DE}|=|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{2}$이다.

또한 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}$이고

$\angle ADE=\angle ABC=\frac{\pi}{2}$이므로

$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{|\overrightarrow{AE}|^2-|\overrightarrow{DE}|^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2})^2}=2$

즉, $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BD}|=1$이다.

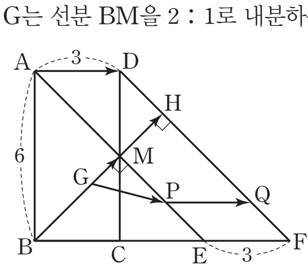
따라서 $|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=1^2+(2\sqrt{2})^2=9$

답 9

03

삼각형 AMD와 삼각형 EMC는 합동이므로 $\overline{CE}=\overline{AD}=3$

삼각형 ABE는 변 AE가 빗변인 직각이등변삼각형이므로 삼각형 ABE의 무게중심 G는 선분 BM을 2 : 1로 내분하는 점이다.



그림과 같이 반직선 BE의 연장선 위에 $\overline{EF}=3$인 점 F를 정하면 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{PQ}$인 점 Q는 선분 DF 위에 위치하게 된다. 이때 $|\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{GQ}|$이므로 그림과 같이 점 G에서 직선 DF에 내린 수선의 발 H에 점 Q가 있을 때, $|\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{AD}|$의 값은 최소이다.

$\overline{GM}=\frac{1}{3}\overline{BM}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\times\overline{AB}\right)=\sqrt{2}$, $\overline{MH}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{DM}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

이므로

$\overline{GH}=\overline{GM}+\overline{MH}=\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

따라서 $|\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{AD}|$의 최솟값은 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$이다.

답 ④

04

삼각형 BCD의 무게중심을 G라 하면

$\overrightarrow{PG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD})$이므로

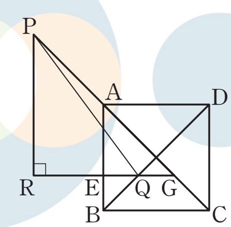
$6\overrightarrow{PA}=3\overrightarrow{PG}$, $\overrightarrow{PG}=2\overrightarrow{PA}$

즉, 점 P는 선분 AG를 1 : 2로 외분하는 점이다.

또한 선분 BD를 1 : 2로 내분하는 점을 Q라 하면

$\overrightarrow{PQ}=\frac{2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}}{3}$이므로

$|2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}|=|3\overrightarrow{PQ}|=3|\overrightarrow{PQ}|$



$\angle ADQ=\angle DAG=\frac{\pi}{4}$이고, $\overline{AG}=\overline{DQ}=2\sqrt{2}$이므로 직선 QG는 직선 BC와 평행하고, 그림과 같이 점 P에서 직선 QG에 내린 수선의 발을 R, 직선 QG가 선분 AB와 만나는 점을 E라 하면

$\overline{AE}=2$에서 $\overline{PR}=4$

$\overline{EQ}=1$에서 $\overline{QR}=3$

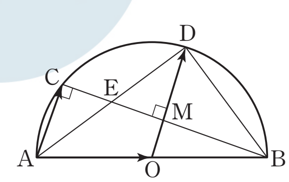
삼각형 PRQ는 직각삼각형이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

따라서 $|2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}|=3|\overrightarrow{PQ}|=15$

답 15

05



반원의 중심을 O라 하면 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}$이고

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{25}{14}\overrightarrow{AC}$이므로

$\overrightarrow{OD}=\frac{25}{14}\overrightarrow{AC}$

$|\overrightarrow{OD}|=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right|=\frac{5}{2}$이므로 $|\overrightarrow{AC}|=\frac{5}{2}\times\frac{14}{25}=\frac{7}{5}$

$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{BC}=\sqrt{5^2-\left(\frac{7}{5}\right)^2}=\frac{24}{5}$

또한 두 선분 BC와 OD의 교점을 M이라 하면

$\overrightarrow{AC}\,/\!/\,\overrightarrow{OD}$이므로 $\angle CMD=\frac{\pi}{2}$

이때 $\overline{OB}=\overline{OC}$이므로 삼각형 OBC는 이등변삼각형이고 직선 OM은 선분 BC의 수직이등분선이다.

즉, $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{12}{5}$

또한 삼각형 ABC와 삼각형 OBM은 닮음비가 2 : 1인 닮은 삼각형이므로 $\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{7}{10}$

$\overline{MD}=\overline{OD}-\overline{OM}=\frac{5}{2}-\frac{7}{10}=\frac{9}{5}$

삼각형 BDM은 직각삼각형이므로

$\overline{BD}^2=\overline{MD}^2+\overline{BM}^2=\left(\frac{9}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2=9$

따라서 $|\overrightarrow{BD}|=3$

답 ②

06

점 C의 좌표를 $C(a,\ b)$라 하면 $\overrightarrow{AC}=(a,\ b-1)$이고

$\overrightarrow{BA}=(1,\ -2)$이므로 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BA}$에서

$a=2,\ b=-3$

따라서 $\overrightarrow{BC}=(a+1,\ b-3)=(3,\ -6)$이므로 벡터 $\overrightarrow{BC}$의 모든 성분의 합은

$3+(-6)=-3$

답 ②

다른 풀이

$\overrightarrow{BA}=(1,\ -2)$이고

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$

$\quad=\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BA}$

$\quad=3\overrightarrow{BA}$

이므로 $\overrightarrow{BC}=(3,\ -6)$이다.

따라서 벡터 $\overrightarrow{BC}$의 모든 성분의 합은

$3+(-6)=-3$

07

사각형 OABC가 변 OA와 변 OC를 이웃한 두 변으로 하는 마름모이므로 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$이다.

즉, $a+5=18,\ 0+c=b$에서

$a=13,\ b=c$

$|\overrightarrow{OA}|=|a|=13$이므로

$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{5^2+c^2}=13$

$c>0$이므로 $c=12$

$b=c$에서 $b=12$

따라서 $a+b+c=13+12+12=37$

답 ④

08

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x-1,\ y-3)$

이므로 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{OB}$에서

$x-1=2k,\ y-3=k$

즉, $x=2k+1,\ y=k+3$

$|\overrightarrow{OP}|\le5$에서

$\sqrt{(2k+1)^2+(k+3)^2}\le5$

$5k^2+10k+10\le25$

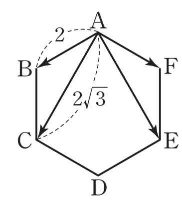
$k^2+2k-3\le0,\ (k+3)(k-1)\le0$

$-3\le k\le1$이므로 $M=1,\ m=-3$

따라서 $M+m=1+(-3)=-2$

답 ①

09



$\angle BAE=\angle CAF=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=0$

$\angle BAF=\frac{2}{3}\pi$이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=2\times2\times\cos\frac{2}{3}\pi=-2$

$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AE}|=2\sqrt{3}$이고 $\angle CAE=\frac{\pi}{3}$이므로

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\cos\frac{\pi}{3}=6$

따라서

$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})$

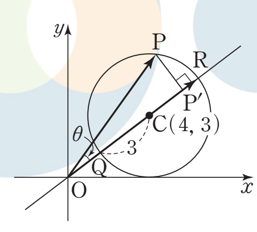
$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}$

$=0+(-2)+6+0$

$=4$

답 ④

10



$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$

원의 반지름의 길이가 3이고 Q, R는 원의 지름의 양 끝점이므로

$|\overrightarrow{OQ}|<|\overrightarrow{OR}|$라 하면

$|\overrightarrow{OQ}|=5-3=2,\ |\overrightarrow{OR}|=5+3=8$

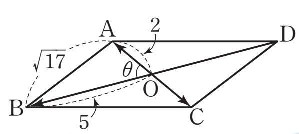
원 위의 점 P에서 직선 OC에 내린 수선의 발을 P′, 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OP'}$이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OP}|\times|\overrightarrow{OQ}|\times\cos\theta$
$=|\overrightarrow{OQ}|\times|\overrightarrow{OP}|\times\cos\theta$
$=|\overrightarrow{OQ}|\times|\overrightarrow{OP'}|=2|\overrightarrow{OP'}|$
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}=|\overrightarrow{OP}|\times|\overrightarrow{OR}|\times\cos\theta$
$=|\overrightarrow{OR}|\times|\overrightarrow{OP}|\times\cos\theta$
$=|\overrightarrow{OR}|\times|\overrightarrow{OP'}|=8|\overrightarrow{OP'}|$

한편, 점 P′은 선분 QR 위에 있으므로
$|\overrightarrow{OQ}|\le|\overrightarrow{OP'}|\le|\overrightarrow{OR}|$, 즉 $2\le|\overrightarrow{OP'}|\le 8$
따라서 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 값과 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}$의 값이 모두 정수가 되도록 하는 $|\overrightarrow{OP'}|$의 값은
$2,\ \frac{5}{2},\ 3,\ \frac{7}{2},\ 4,\ \cdots,\ \frac{15}{2},\ 8$
이고 그 개수는 13이다. 이때 $|\overrightarrow{OP'}|$의 값이 2 또는 8인 점 P는 각각 1개씩이고, 그 이외의 경우는 점 P가 각각 2개씩이므로 조건을 만족시키는 점 P의 개수는
$1\times2+2\times(13-2)=24$

답 ②

11



$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$이므로
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=-|\overrightarrow{OA}|^2=-4$에서 $|\overrightarrow{OA}|=2$
$|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2=17$이므로
$|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$
$=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2$
$=|\overrightarrow{OB}|^2-2\times6+2^2$
$=|\overrightarrow{OB}|^2-8$
에서 $|\overrightarrow{OB}|=5$
한편, 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$에서
$6=2\times5\times\cos\theta$
$\cos\theta=\frac{3}{5}$
평행사변형 ABCD에서 네 삼각형 OAB, OBC, OCD, ODA의 넓이가 모두 같으므로 평행사변형 ABCD의 넓이는
$4\times\left(\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{OA}|\times|\overrightarrow{OB}|\times\sin\theta\right)=4\times\left\{\frac{1}{2}\times2\times5\times\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\right\}$
$=16$

답 16

12

$\overrightarrow{AB}=(1-k,\ -3)$, $\overrightarrow{AC}=(-2-k,\ -1)$이므로
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(1-k)(-2-k)+(-3)\times(-1)$
$=k^2+k-2+3$
$=k^2+k+1$
$k^2+k+1=7$에서
$k^2+k-6=0$
$(k+3)(k-2)=0$
k는 양수이므로 $k=2$

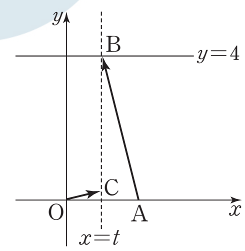
답 ②

13

점 A_k의 좌표는 $(k,\ 11-k)$이므로
$\overrightarrow{OA_k}\cdot\overrightarrow{OB}=k\times2+(11-k)\times(-1)=3k-11$
따라서
$\sum_{k=1}^{10}(\overrightarrow{OA_k}\cdot\overrightarrow{OB})=\sum_{k=1}^{10}(3k-11)=3\times\frac{10\times11}{2}-11\times10=55$

답 55

14

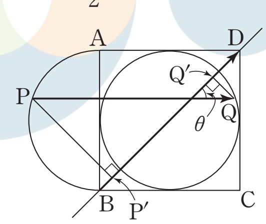


점 C의 y좌표를 s라 하면 C$(t,\ s)$
$\overrightarrow{AB}=(t,\ 4)-(2,\ 0)=(t-2,\ 4)$, $\overrightarrow{OC}=(t,\ s)$이므로
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=(t-2,\ 4)\cdot(t,\ s)=t(t-2)+4s=0$
즉, $s=-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t$
$|\overrightarrow{BC}|=|4-s|$
$=\left|4+\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}t\right|$
$=\frac{1}{4}(t-1)^2+\frac{15}{4}$
이므로 $|\overrightarrow{BC}|$는 $t=1$일 때 최솟값 $\frac{15}{4}$를 갖는다.
따라서 $\alpha+m=1+\frac{15}{4}=\frac{19}{4}$

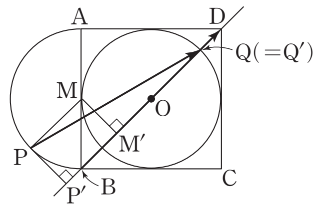
답 ⑤

15

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{PQ}$의 최댓값을 구하고 있으므로 두 벡터 $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{PQ}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$인 경우만 생각하자.



그림과 같이 두 점 P, Q에서 직선 BD에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 하면
$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{PQ}=|\overrightarrow{BD}|\times|\overrightarrow{PQ}|\times\cos\theta$
$=|\overrightarrow{BD}|\times|\overrightarrow{P'Q'}|$
$=\overline{BD}\times\overline{P'Q'}$



$|\overrightarrow{BD}|=2\sqrt{2}$이므로 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{PQ}$는 그림과 같이 직선 PP′이 반원에 접하고, 점 Q가 선분 BD와 정사각형 ABCD의 내접원의 교점 중 점 D에 가까운 점일 때 최댓값을 가지고, 이때 점 Q와 점 Q′은 일치한다.
변 AB의 중점을 M, 점 M에서 직선 BD에 내린 수선의 발을 M′, 정사각형 ABCD의 내접원의 중심을 O라 하면

$\overline{P'M'}=\overline{PM}=1$, $\overline{M'O}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{MO}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{PQ}$의 최댓값은

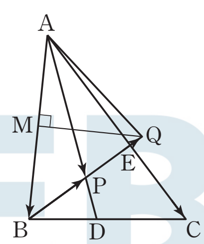
$\overline{BD}\times\overline{P'Q'}=\overline{BD}\times(\overline{P'M'}+\overline{M'O}+\overline{OQ'})$

$=2\sqrt{2}\times\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)=4\sqrt{2}+2$

따라서 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{PQ}$의 최댓값은 $4\sqrt{2}+2$이다.

답 ⑤

16



$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$라 하면 $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{7}\vec{b}+\frac{3}{7}\vec{c}$이고 세 점 A, P, D는 한 직선 위에 있으므로 0이 아닌 실수 t에 대하여

$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AD}=\frac{4}{7}t\vec{b}+\frac{3}{7}t\vec{c}$ …… ㉠

또한 $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{5}\vec{c}$이고 점 P는 직선 BE 위에 있으므로 0이 아닌 실수 s에 대하여

$\overrightarrow{BP}=s\overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=s(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AE}=(1-s)\vec{b}+\frac{3}{5}s\vec{c}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{4}{7}t=1-s$, $\frac{3}{7}t=\frac{3}{5}s$이므로

$t=\frac{7}{9}$, $s=\frac{5}{9}$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}-\vec{b}=-\frac{5}{9}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

한편, 변 AB의 중점을 M이라 하면 $|\overrightarrow{AQ}|=|\overrightarrow{BQ}|$에서 직선 AB와 직선 QM은 서로 수직이므로 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{QM}=0$이다.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BQ})$

$=\vec{b}\cdot\left\{-\frac{1}{2}\vec{b}-2\left(-\frac{5}{9}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)\right\}$

$=\vec{b}\cdot\left(\frac{11}{18}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}\right)$

$=\frac{11}{18}|\vec{b}|^2-\frac{2}{3}|\vec{b}||\vec{c}|\cos(\angle BAC)$

$|\vec{b}|=4$, $|\vec{c}|=5$이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{QM}=\frac{88}{9}-\frac{40}{3}\cos(\angle BAC)=0$

따라서 $\cos(\angle BAC)=\frac{11}{15}$

답 ④

17

점 $(1, -2)$는 직선 $\frac{x+2}{a}=\frac{y+b}{2}$ 위의 점이므로

$\frac{3}{a}=\frac{-2+b}{2}$ …… ㉠

직선 $\frac{x+2}{a}=\frac{y+b}{2}$의 방향벡터를 $\vec{u}=(a, 2)$, 직선 $x+1=\frac{4-y}{3}$의 방향벡터를 $\vec{v}=(1, -3)$이라 하면 두 직선이 서로 수직이므로

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$이다.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=a-6=0$에서 $a=6$

㉠에서 $b=3$

따라서 $a+b=6+3=9$

답 ④

18

직선 $\frac{x-2}{5}=\frac{y-1}{a}$의 방향벡터를 $\vec{u}=(5, a)$라 하고, y축의 방향벡터를 $\vec{v}=(0, 1)$이라 하자.

$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

$=\frac{|5\times0+a\times1|}{\sqrt{5^2+a^2}\sqrt{0^2+1^2}}$

$=\frac{|a|}{\sqrt{25+a^2}}$

$\frac{|a|}{\sqrt{25+a^2}}=\frac{2}{3}$에서

$9a^2=4(25+a^2)$

$5a^2=100$, $a^2=20$

$a=2\sqrt{5}$ 또는 $a=-2\sqrt{5}$

이때 직선 $\frac{x-2}{5}=\frac{y-1}{a}$이 y축과 만나는 점의 좌표는

$\left(0, -\frac{2}{5}a+1\right)$이고 y절편이 양수이므로 $-\frac{2}{5}a+1>0$, $a<\frac{5}{2}$

따라서 $a=-2\sqrt{5}$

답 ④

19

점 P가 직선 l 위의 점이므로 $\frac{a-1}{2}=2-b$

$a=5-2b$ …… ㉠

직선 OP의 방향벡터를 $\vec{u}=(a, b)$, 직선 l의 방향벡터를 $\vec{v}=(2, -1)$이라 하면

$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

$=\frac{|a\times2+b\times(-1)|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{2^2+(-1)^2}}$

$=\frac{|2a-b|}{\sqrt{5}\sqrt{a^2+b^2}}$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$이므로 $|2a-b|=\sqrt{a^2+b^2}$

$(2a-b)^2=a^2+b^2$

$3a^2-4ab=0$에서 $a\neq0$이므로 $a=\frac{4}{3}b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=\frac{3}{2}$

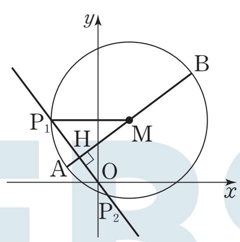
따라서 $a+b=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$

답 ②

20

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$에서 점 P는 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 원 위의 점이다. 선분 AB의 중점을 M이라 하면 M의 좌표는 $(2, 4)$이고 $\overline{AB}=\sqrt{8^2+6^2}=10$이므로 점 P는 원 $(x-2)^2+(y-4)^2=25$ 위의 점이다.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}=0$에서 점 P는 직선 AB에 수직이고 원점을 지나는 직선 위의 점이다. 직선 AB의 기울기가 $\frac{7-1}{6-(-2)}=\frac{3}{4}$이므로 점 P는 직선 $y=-\frac{4}{3}x$ 위의 점이다.



즉, P_1, P_2는 그림과 같이 원 $(x-2)^2+(y-4)^2=25$와 직선 $y=-\frac{4}{3}x$의 서로 다른 두 교점이고, 직선 AB와 직선 P_1P_2의 교점을 H라 하면

$\overline{MH}=\frac{|4\times2+3\times4|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{20}{5}=4$

따라서 $|\overrightarrow{P_1P_2}|=2\overline{P_1H}=2\times\sqrt{5^2-4^2}=2\times3=6$

답 ①

21

점 P의 좌표를 $P(x, y)$라 하면

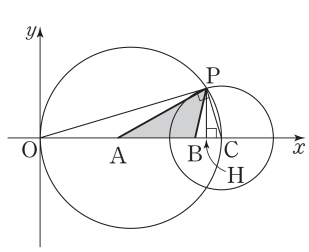
$|\overrightarrow{PA}|=2|\overrightarrow{PB}|$에서 $|\overrightarrow{PA}|^2=4|\overrightarrow{PB}|^2$이므로

$(x-3)^2+y^2=4\{(x-6)^2+y^2\}$

$(x-7)^2+y^2=4$

점 P는 점 C$(7, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점이다.

또한 $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PC}=0$에서 점 P는 원점과 점 C를 지름의 양 끝으로 하는 원 위의 점이다.



그림과 같이 점 P는 위에서 구한 두 원의 교점이며 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PC}=2$, $\overline{OC}=7$이고 삼각형 POC와 삼각형 HPC는 닮은 삼각형이므로

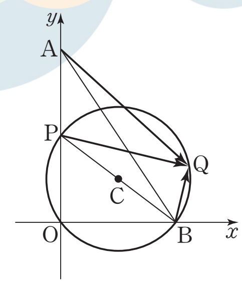
$\overline{HC}=\overline{PC}\times\frac{\overline{PC}}{\overline{OC}}=2\times\frac{2}{7}=\frac{4}{7}$

이때 $\overline{PH}=\sqrt{2^2-\left(\frac{4}{7}\right)^2}=\frac{6\sqrt{5}}{7}$이므로 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PH}=\frac{1}{2}\times3\times\frac{6\sqrt{5}}{7}=\frac{9\sqrt{5}}{7}$

답 ④

22



점 P의 좌표를 $(0, p)$라 하면

$\overrightarrow{PA}=(0, 6-p)$, $\overrightarrow{PB}=(4, -p)$이므로

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(0, 6-p)\cdot(4, -p)=p^2-6p$

$p^2-6p=-9$이므로 $p=3$이고 점 P의 좌표는 $(0, 3)$이다.

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$인 점 Q는 두 점 P, B를 지름의 양 끝으로 하는 원 위의 점이므로 점 Q는 중심이 $C\left(2, \frac{3}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{5}{2}$인 원 위의 점이다.

$|\overrightarrow{AC}|-\frac{5}{2}\leq|\overrightarrow{AQ}|\leq|\overrightarrow{AC}|+\frac{5}{2}$이므로

$$Mm=\left(|\overrightarrow{AC}|+\frac{5}{2}\right)\left(|\overrightarrow{AC}|-\frac{5}{2}\right)$$
$$=|\overrightarrow{AC}|^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2$$
$$=\left\{2^2+\left(-\frac{9}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{5}{2}\right)^2$$
$$=18$$

답 ③

23

$x=2t+\sin t$, $y=\cos t$에서

$\frac{dx}{dt}=2+\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-\sin t$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\sin t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\cos t$

점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(2+\cos t)^2+(-\sin t)^2}$$
$$=\sqrt{5+4\cos t}$$

시각 $t=t_0\,(0<t_0<\pi)$에서의 점 P의 속력을 $\sqrt{3}$이라 하면

$\sqrt{5+4\cos t_0}=\sqrt{3}$에서 $\cos t_0=-\frac{1}{2}$

$0<t_0<\pi$이므로 $t_0=\frac{2}{3}\pi$

점 P의 가속도는 $(-\sin t,\ -\cos t)$이므로

시각 $t_0=\frac{2}{3}\pi$에서의 점 P의 가속도는 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

따라서 $ab=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$

답 ①

24

$x=t^3+at,\ y=3t^2+bt$에서

$\frac{dx}{dt}=3t^2+a,\ \frac{dy}{dt}=6t+b$

$\frac{d^2x}{dt^2}=6t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=6$

점 P의 시각 $t=1$에서의 속력이 $5\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(3+a)^2+(6+b)^2}=5\sqrt{2}$ …… ㉠

점 P의 시각 $t=1$에서의 속도는 $(3+a,\ 6+b)$이고 가속도는 $(6,\ 6)$이다. 두 벡터가 서로 평행하므로

$3+a=6+b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a=-8,\ b=-11$ 또는 $a=2,\ b=-1$

$ab<0$이므로 $a=2,\ b=-1$

따라서 $a+b=2+(-1)=1$

답 ④

25

$x=2\sqrt{t},\ y=t^2+\frac{1}{8t}$에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{t}},\ \frac{dy}{dt}=2t-\frac{1}{8t^2}$

점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2+\left(2t-\frac{1}{8t^2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{t}+4t^2-\frac{1}{2t}+\frac{1}{64t^4}}$$
$$=\sqrt{4t^2+\frac{1}{2t}+\frac{1}{64t^4}}$$
$$=\left|2t+\frac{1}{8t^2}\right|$$
$$=2t+\frac{1}{8t^2}$$

$t>0$에서 $f(t)=2t+\frac{1}{8t^2}$이라 하면

$f'(t)=2-\frac{1}{4t^3}$이므로 $f'(t)=0$에서 $t=\frac{1}{2}$

$f(t)$는 $t=\frac{1}{2}$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$을 갖는다.

따라서 $a=\frac{1}{2},\ m=\frac{3}{2}$이므로 $am=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$

답 ③

26

$x=\sqrt{6}t,\ y=\sqrt{t}(t-2)$에서

$\frac{dx}{dt}=\sqrt{6},\ \frac{dy}{dt}=\frac{3}{2}\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}}{\sqrt{6}}$$

$t=a$일 때 점 P에서의 접선의 기울기가 0이므로

$$\frac{\frac{3}{2}\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}}{\sqrt{6}}=0$$

$a=\frac{2}{3},\ 3a=2$

따라서 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^2\sqrt{(\sqrt{6})^2+\left(\frac{3}{2}\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_1^2\sqrt{6+\frac{9}{4}t-3+\frac{1}{t}}\,dt$$
$$=\int_1^2\sqrt{\frac{9}{4}t+3+\frac{1}{t}}\,dt$$
$$=\int_1^2\sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_1^2\left|\frac{3}{2}\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right|dt$$
$$=\int_1^2\left(\frac{3}{2}\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt$$
$$=\Big[t\sqrt{t}+2\sqrt{t}\Big]_1^2$$
$$=(2\sqrt{2}+2\sqrt{2})-(1+2)$$
$$=4\sqrt{2}-3$$

답 ④

27

$t=a$에서 점 P가 x축 위에 위치하므로 $y=2\cos^2 a=0$이고 $\cos a=0$에서 $0<a\le\pi$이므로 $a=\frac{\pi}{2}$

$x=1-\cos^3 t,\ y=2\cos^2 t$에서

$\frac{dx}{dt}=3\cos^2 t\sin t,\ \frac{dy}{dt}=-4\cos t\sin t$

시각 $t=0$에서 $t=\frac{\pi}{2}$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(3\cos^2 t\sin t)^2+(-4\cos t\sin t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t\sin t|\sqrt{9\cos^2 t+16}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t\sin t|\sqrt{25-9\sin^2 t}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\sqrt{25-9\sin^2 t}\,dt$$

이때 $\sin^2 t=u$라 하면 $\frac{du}{dt}=2\cos t\sin t$이고

$t=0$일 때 $u=0,\ t=\frac{\pi}{2}$일 때 $u=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\sqrt{25-9\sin^2 t}\,dt$$
$$=\int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{25-9u}\,du$$
$$=\left[-\frac{1}{27}(25-9u)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{27}\times 16^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{27}\times 25^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{-64+125}{27}$$
$$=\frac{61}{27}$$

답 ①

28

$f(x)=\ln(x+1)+\ln(x-1)$이라 하면

$f'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=\frac{2x}{x^2-1}$

따라서 $x=2$에서 $x=4$까지의 곡선의 길이는

$$\int_2^4 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$
$$=\int_2^4 \sqrt{1+\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_2^4 \sqrt{1+\frac{4x^2}{(x^2-1)^2}}\,dx$$
$$=\int_2^4 \sqrt{\frac{x^4-2x^2+1+4x^2}{(x^2-1)^2}}\,dx$$
$$=\int_2^4 \sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{(x^2-1)^2}}\,dx$$
$$=\int_2^4 \sqrt{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_2^4 \left|\frac{x^2+1}{x^2-1}\right|dx$$
$$=\int_2^4 \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$$
$$=\int_2^4 \left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)dx$$
$$=\int_2^4 \left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\Big[x+\ln|x-1|-\ln|x+1|\Big]_2^4$$
$$=(4+\ln 3-\ln 5)-(2+\ln 1-\ln 3)$$
$$=2+\ln\frac{9}{5}$$

답 ④

29

$f(x)=ax^2-\frac{1}{8a}\ln x$라 하면

$f'(x)=2ax-\frac{1}{8ax}$

따라서 $x=1$에서 $x=\sqrt{e}$까지의 곡선의 길이는

$$\int_1^{\sqrt{e}} \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$
$$=\int_1^{\sqrt{e}} \sqrt{1+\left(2ax-\frac{1}{8ax}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^{\sqrt{e}} \sqrt{1+4a^2x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{64a^2x^2}}\,dx$$
$$=\int_1^{\sqrt{e}} \sqrt{4a^2x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{64a^2x^2}}\,dx$$
$$=\int_1^{\sqrt{e}} \sqrt{\left(2ax+\frac{1}{8ax}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^{\sqrt{e}} \left|2ax+\frac{1}{8ax}\right|dx$$
$$=\int_1^{\sqrt{e}} \left(2ax+\frac{1}{8ax}\right)dx$$
$$=\left[ax^2+\frac{1}{8a}\ln|x|\right]_1^{\sqrt{e}}$$
$$=ae+\frac{1}{16a}-a$$

이 값이 be이고 a, b는 양의 유리수이므로

$a=b$, $\frac{1}{16a}-a=0$

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{4}$이므로 $a+b=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

답 ②

30

함수 $f(x)$가 $x=b$에서 미분가능하면 연속이므로

$\lim_{x\to b-} f(x)=\lim_{x\to b+} f(x)=f(b)$

$\frac{4}{3}b+a=\frac{2}{9}(b^2+3)^{\frac{3}{2}}$ …… ㉠

함수 $f(x)$는 $x=b$에서 미분가능하고, 두 함수 $g(x)=\frac{4}{3}x+a$,

$h(x)=\frac{2}{9}(x^2+3)^{\frac{3}{2}}$은 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to b-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b-}\frac{g(x)-g(b)}{x-b}=g'(b)=\frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to b+}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b+}\frac{h(x)-h(b)}{x-b}=h'(b)=\frac{2}{3}b(b^2+3)^{\frac{1}{2}}$$

에서 $\frac{4}{3}=\frac{2}{3}b(b^2+3)^{\frac{1}{2}}$

$2=b(b^2+3)^{\frac{1}{2}}$, $4=b^2(b^2+3)$

$(b^2+4)(b^2-1)=0$, $b^2=1$

$0<b<3$이므로 $b=1$

㉠에서

$\frac{4}{3}+a=\frac{2}{9}(1+3)^{\frac{3}{2}}$

$a=\frac{4}{9}$

따라서 $x=0$에서 $x=3$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이는

$$\int_0^3 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

$$=\int_0^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx+\int_b^3 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

$$=\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}\,dx+\int_1^3 \sqrt{1+\left\{\frac{2}{3}x(x^2+3)^{\frac{1}{2}}\right\}^2}\,dx$$

$$=\int_0^1 \frac{5}{3}\,dx+\int_1^3 \sqrt{1+\frac{4}{9}x^2(x^2+3)}\,dx$$

$$=\int_0^1 \frac{5}{3}\,dx+\int_1^3 \sqrt{\left(\frac{2}{3}x^2+1\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^1 \frac{5}{3}\,dx+\int_1^3 \left(\frac{2}{3}x^2+1\right)dx$$

$$=\left[\frac{5}{3}x\right]_0^1+\left[\frac{2}{9}x^3+x\right]_1^3$$

$$=\frac{5}{3}+(6+3)-\left(\frac{2}{9}+1\right)$$

$$=\frac{85}{9}$$

답 ③

10 공간도형

정답 본문 128~139쪽

01 ③	02 ⑤	03 ①	04 ①	05 ⑤
06 ④	07 ②	08 ①	09 ③	10 ③
11 ⑤	12 ④	13 21	14 ④	15 ③
16 ④	17 45	18 ⑤	19 ②	20 ⑤
21 ⑤	22 ④	23 ①	24 ④	25 ②
26 ③	27 669	28 ④	29 ③	30 30
31 ③	32 ③	33 ①	34 ④	35 ②
36 ⑤				

01

서로 다른 평면의 개수는 꼭짓점 6개 중 3개를 선택하는 경우에서 사각형 ADEB, BEFC, ADFC의 네 꼭짓점에서 3개를 선택하는 경우를 제외하고 사각형의 개수 3을 더한 것과 같으므로

$$a={}_6\mathrm{C}_3-3\times{}_4\mathrm{C}_3+3$$

$$=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}-3\times4+3$$

$$=20-12+3$$

$$=11$$

모서리 AD와 꼬인 위치에 있는 모서리는 모서리 BC, 모서리 EF의 2개이므로 $b=2$

따라서 $a+b=11+2=13$

답 ③

02

ㄱ. 직선 AB와 평행한 면은 면 EFGH, 면 DHGC이므로 2개이다. (참)

ㄴ. 두 직선 AN과 EG는 모두 평면 AEGC 위에 있고, 두 직선은 평행하지 않으므로 한 점에서 만난다. (참)

ㄷ. 직선 AC와 직선 MN은 평행하고, 직선 AC는 평면 DMFN에 포함되지 않으므로 직선 MN을 포함하는 평면 DMFN도 직선 AC와 평행하다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

참고

두 직선 l, m이 평행할 때, 직선 l을 포함하고 직선 m을 포함하지 않는 평면 α는 직선 m과 평행하다.

03

사각형 ACFE는 정사각형이므로 $\overline{\mathrm{EF}}/\!/\overline{\mathrm{AC}}$이고 두 직선 AB, EF가 이루는 예각의 크기는 두 직선 AB, AC가 이루는 예각의 크기와 같다.

이때 삼각형 ABC는 정삼각형이므로 $\theta_1=\frac{\pi}{3}$이다.

$$\cos^2\theta_1=\cos^2\frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

한편, 두 정사각형 ACFE, BCDE에서 $\overline{CE}\perp\overline{AF}$, $\overline{CE}\perp\overline{BD}$이므로 직선 CE는 평면 ABFD에 수직이다.

직선 AB는 평면 ABFD에 포함되므로 $\overline{AB}\perp\overline{CE}$, 즉 $\theta_2=\frac{\pi}{2}$이다.

$\cos^2\theta_2=\cos^2\frac{\pi}{2}=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$

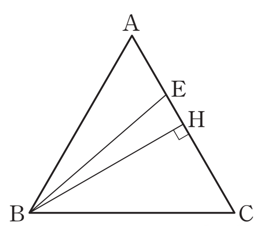
답 ①

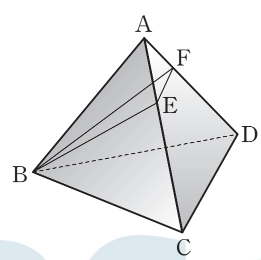
04

삼각형 ABC는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이고, 점 E는 모서리 AC를 1 : 2로 내분하므로 점 B에서 모서리 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{EH}=1$, $\overline{BH}=3\sqrt{3}$에서

$\overline{BE}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+1^2}=2\sqrt{7}$





점 E에서 모서리 CD와 평행하도록 직선을 그어 모서리 AD와 만나는 점을 F라 하면 직선 BE와 직선 CD가 이루는 예각의 크기는 직선 BE와 직선 EF가 이루는 예각의 크기와 같다.

즉, $\theta=\angle BEF$이다.

삼각형 ACD와 삼각형 AEF는 서로 닮은 도형이므로

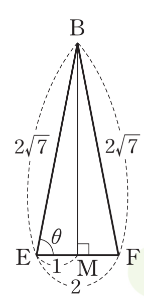
$\overline{EF}=\frac{1}{3}\overline{CD}=\frac{1}{3}\times6=2$

삼각형 BEF가 이등변삼각형이므로 선분 EF의 중점을 M이라 하면

$\overline{EM}=\frac{1}{2}\overline{EF}=\frac{1}{2}\times2=1$

$\angle BME=\frac{\pi}{2}$

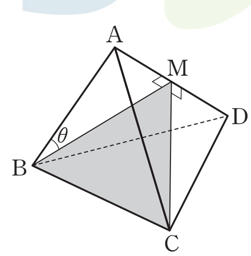
따라서 $\cos\theta=\frac{\overline{EM}}{\overline{BE}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{14}$



답 ①

05

두 삼각형 ABD, ACD는 정삼각형이므로 두 직선 BM, CM은 모서리 AD의 수직이등분선이다. 모서리 AD는 평면 BCM과 수직이므로 점 A에서 평면 BCM에 내린 수선의 발은 점 M이다.



즉, $\theta=\angle ABM=\frac{1}{2}\angle ABD=\frac{\pi}{6}$

따라서 $\cos\theta=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 ⑤

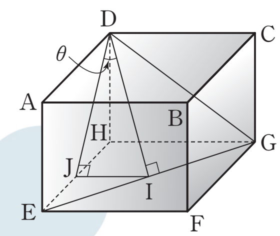
06

평면 BFGC와 평면 AEHD는 평행하므로 직선 DI와 평면 BFGC가 이루는 예각의 크기는 직선 DI와 평면 AEHD가 이루는 예각의 크기와 같다.

점 I에서 평면 AEHD에 내린 수선의 발을 J라 하면 점 J는 모서리 EH 위의 점이고 $\theta=\angle IDJ$이다.

삼각형 DEG는 이등변삼각형이므로

$\overline{DI}\perp\overline{EG}$이다.



밑면 EFGH는 정사각형이므로

$\overline{GI}=\frac{1}{2}\overline{GE}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

$\overline{DG}=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{HG}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

직각삼각형 DIG에서

$\overline{DI}=\sqrt{\overline{DG}^2-\overline{GI}^2}=\sqrt{5^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{17}$

한편, $\overline{IJ}=\frac{1}{2}\overline{GH}=2$이므로 직각삼각형 DJI에서

$\sin\theta=\frac{\overline{IJ}}{\overline{DI}}=\frac{2}{\sqrt{17}}$

따라서 $\sin^2\theta=\frac{4}{17}$

답 ④

07

점 A에서 밑면 BCD에 내린 수선의 발을 G라 하면 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}$이므로 점 G는 삼각형 BCD의 무게중심이다. 모서리 BC의 중점을 M이라 하면 삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로 $\overline{AM}\perp\overline{BC}$이다. 또 삼각형 BCD는 정삼각형이므로 $\overline{DM}\perp\overline{BC}$이고 점 G는 선분 DM 위의 점이므로 $\overline{GM}\perp\overline{BC}$이다.

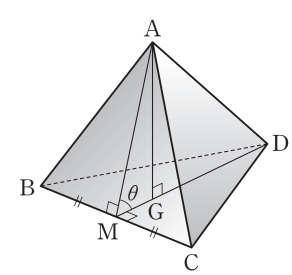
따라서 $\theta=\angle AMG$

삼각형 ABC에서 $\overline{BM}=3$, $\overline{AB}=5$이므로 $\overline{AM}=4$

점 G는 정삼각형 BCD의 무게중심이므로

$\overline{GM}=\frac{1}{3}\overline{DM}=\frac{1}{3}\times3\sqrt{3}=\sqrt{3}$

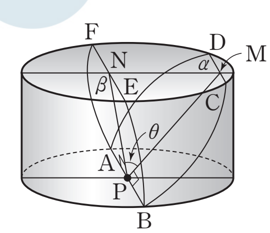
따라서 $\cos\theta=\frac{\overline{GM}}{\overline{AM}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$



답 ②

08

원기둥의 두 밑면은 평행하므로 평면 α와 두 밑면이 만나서 생기는 교선 AB와 CD는 평행하다. 마찬가지로 평면 β와 두 밑면이 만나서 생기는 교선 AB와 EF는 평행하다. 따라서 두 직선 CD와 EF는 평행하다.



아래쪽 밑면의 중심 P와 두 선분 CD와 EF의 중점 M, N에 대하여

$\overline{AB}\perp\overline{MP}$, $\overline{AB}\perp\overline{NP}$

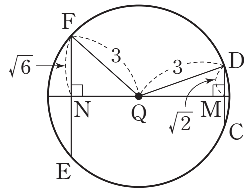
이므로 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기 $\theta=\angle MPN$

위쪽 밑면의 중심을 Q라 하면

$\overline{PQ}=3$

$\overline{QM}=\sqrt{\overline{QD}^2-\overline{DM}^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{7}$

$\overline{QN}=\sqrt{\overline{QF}^2-\overline{FN}^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{3}$

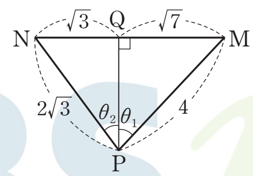


이므로

$\overline{PM}=\sqrt{\overline{PQ}^2+\overline{QM}^2}=\sqrt{3^2+(\sqrt{7})^2}=4$

$\overline{PN}=\sqrt{\overline{PQ}^2+\overline{QN}^2}=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

$\theta_1=\angle MPQ$, $\theta_2=\angle NPQ$라 하면



$\theta=\theta_1+\theta_2$이고

$\sin\theta_1=\dfrac{\overline{QM}}{\overline{PM}}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\cos\theta_1=\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PM}}=\dfrac{3}{4}$

$\sin\theta_2=\dfrac{\overline{QN}}{\overline{PN}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$

$\cos\theta_2=\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PN}}=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서

$\cos\theta=\cos(\theta_1+\theta_2)$

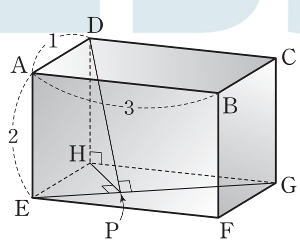
$\quad=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$

$\quad=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{7}}{4}\times\dfrac{1}{2}$

$\quad=\dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{8}$

답 ①

09



$\overline{DH}\perp$(평면 EFGH)이고 $\overline{DP}\perp\overline{EG}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HP}\perp\overline{EG}$

$\overline{EG}=\sqrt{\overline{HE}^2+\overline{HG}^2}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

삼각형 HEG의 넓이에서

$\dfrac{1}{2}\times1\times3=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\overline{HP}$이므로

$\overline{HP}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\overline{DH}\perp\overline{HP}$이므로 직각삼각형 DHP에서

$\overline{DP}=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{HP}^2}=\sqrt{2^2+\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)^2}$

$\quad=\sqrt{\dfrac{49}{10}}=\dfrac{7}{\sqrt{10}}=\dfrac{7\sqrt{10}}{10}$

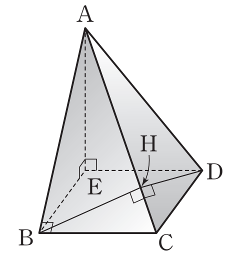
답 ③

10

$\overline{AE}\perp\overline{BE}$, $\overline{AE}\perp\overline{DE}$에서 $\overline{AE}\perp$(평면 BCDE)

$\overline{BC}\perp\overline{BE}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$

직각삼각형 ABE에서



$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{BE}^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2+2^2}=\sqrt{14}$

또한 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{(\sqrt{14})^2+2^2}=\sqrt{18}$

$\quad=3\sqrt{2}$

두 삼각형 ABC, ADC는 서로 합동이므로

두 꼭짓점 B, D에서 선분 AC에 내린 수선의 발은 일치한다.

이때 수선의 발을 H라 하면

$\theta=\angle BHD$ 또는 $\theta=\pi-\angle BHD$

삼각형 ABC의 넓이에서

$\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{14}=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\overline{BH}$이므로

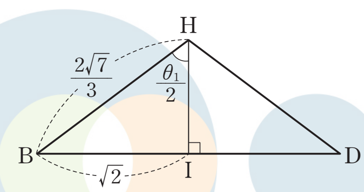
$\overline{BH}=\dfrac{2\sqrt{14}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$

사각형 BCDE는 한 변의 길이가 2인 정사각형이므로

$\overline{BD}=2\sqrt{2}$

삼각형 BDH는 이등변삼각형이고 점 H에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 I, $\angle BHD=\theta_1$이라 하면

$\sin\dfrac{\theta_1}{2}=\dfrac{\overline{BI}}{\overline{BH}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\dfrac{2\sqrt{7}}{3}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{7}}$



따라서

$\cos\theta_1=\cos\left(\dfrac{\theta_1}{2}+\dfrac{\theta_1}{2}\right)=\cos^2\dfrac{\theta_1}{2}-\sin^2\dfrac{\theta_1}{2}=1-2\sin^2\dfrac{\theta_1}{2}$

$\quad=1-2\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{7}}\right)^2=-\dfrac{2}{7}$

$\cos\theta_1<0$이므로 $\dfrac{\pi}{2}<\theta_1<\pi$

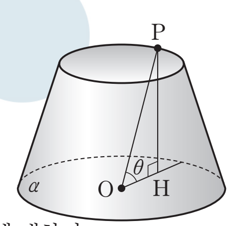
따라서 $\theta=\pi-\theta_1$이므로

$\cos\theta=\cos(\pi-\theta_1)=-\cos\theta_1=\dfrac{2}{7}$

답 ③

11

그림과 같이 점 P에서 밑면에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 OP의 밑면 α 위로의 정사영은 선분 OH이다. 직각삼각형 OHP에서



$\overline{OH}=3$, $\overline{PH}=6$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$

선분 OP와 선분 OH가 이루는 예각의 크기 θ에 대하여

$\cos\theta=\dfrac{\overline{OH}}{\overline{OP}}=\dfrac{3}{3\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

답 ⑤

12

삼각형 BEG의 평면 ACD 위로의 정사영은 삼각형 BAC이고, 삼각

형 BEG는 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$인 정삼각형이다. 삼각형 BAC는 직각을 낀 두 변의 길이가 모두 2인 직각이등변삼각형이므로 두 평면 BEG와 ABCD가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

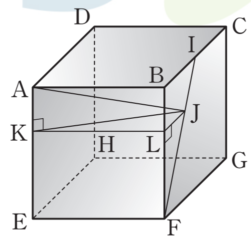
$$\cos\theta=\frac{\triangle\mathrm{BAC}}{\triangle\mathrm{BEG}}=\frac{\frac{1}{2}\times2\times2}{\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{2})^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 삼각형 ACD의 평면 BEG 위로의 정사영의 넓이는

$$\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)\times\cos\theta=2\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 ④

13



점 J에서 선분 AE에 내린 수선의 발을 K, 선분 BF에 내린 수선의 발을 L이라 하면

$\overline{\mathrm{KJ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{KL}}^2+\overline{\mathrm{LJ}}^2}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$

$\overline{\mathrm{AJ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AK}}^2+\overline{\mathrm{KJ}}^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{10})^2}$

$=2\sqrt{11}$

$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{KJ}}}{\overline{\mathrm{AJ}}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{11}}$

따라서 $\cos^2\theta=\dfrac{10}{11}$이므로 $p+q=11+10=21$

답 21

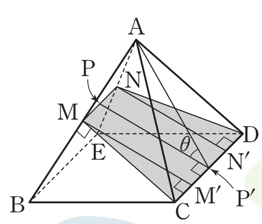
14

삼각형 ABC는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{CM}}=\overline{\mathrm{CB}}\sin\dfrac{\pi}{3}=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

또 삼각형 AMN은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{MN}}=2$



두 점 M, N에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 각각 M′, N′이라 하면 사각형 MM′N′N은 직사각형이므로

$\overline{\mathrm{M'N'}}=\overline{\mathrm{MN}}=2$이고,

$\overline{\mathrm{CM'}}=\dfrac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{CD}}-\overline{\mathrm{M'N'}})$

$=\dfrac{1}{2}\times(4-2)=1$

삼각형 MCM′은 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{MM'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CM}}^2-\overline{\mathrm{CM'}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{11}$

선분 MN의 중점을 P라 하고 점 P에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 P′이라 하면

$\mathrm{CD}\perp\mathrm{AP'}$, $\mathrm{CD}\perp\mathrm{PP'}$

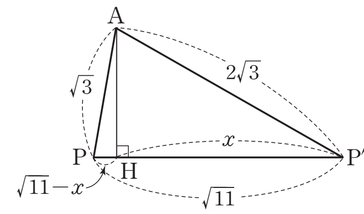
이므로 두 평면 ACD와 MCDN이 이루는 각의 크기는 $\angle\mathrm{AP'P}$의 크기와 같다.

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AM}}\sin\dfrac{\pi}{3}=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{PP'}}=\overline{\mathrm{MM'}}=\sqrt{11}$

삼각형 ACD는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AP'}}=\overline{\mathrm{CM}}=2\sqrt{3}$



점 A에서 직선 PP′에 내린 수선의 발을 H, $\overline{\mathrm{HP'}}=x$라 하면

$\overline{\mathrm{HP}}=\sqrt{11}-x$이므로 두 직각삼각형 APH, AP′H에서

$(\sqrt{3})^2-(\sqrt{11}-x)^2=(2\sqrt{3})^2-x^2$

$3-x^2+2\sqrt{11}x-11=12-x^2$

$x=\dfrac{10}{\sqrt{11}}$

$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{P'H}}}{\overline{\mathrm{AP'}}}=\dfrac{\frac{10}{\sqrt{11}}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{5}{\sqrt{33}}=\dfrac{5\sqrt{33}}{33}$ …… ㉠

삼각형 ACD의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=4\sqrt{3}$ …… ㉡

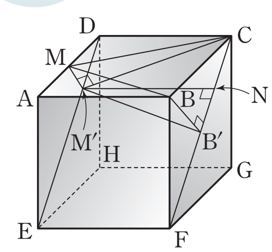
삼각형 ACD의 평면 MCDN 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하면 ㉠, ㉡에서

$S'=S\cos\theta=4\sqrt{3}\times\dfrac{5\sqrt{33}}{33}=\dfrac{20\sqrt{11}}{11}$

답 ④

15

두 점 B, M에서 평면 EFCD에 내린 수선의 발을 각각 B′, M′, 점 M′에서 직선 CF에 내린 수선의 발을 N이라 하자.



평면 ABCD와 평면 EFCD가 이루는 각의 크기는 선분 CB와 선분 CF가 이루는 각의 크기와 같고, 사각형 BFGC는 정사각형이므로 $\angle\mathrm{BCF}=\dfrac{\pi}{4}$이다.

선분 CB의 평면 EFCD 위로의 정사영은 선분 CB′이고

$\overline{\mathrm{CB'}}=\overline{\mathrm{CB}}\cos(\angle\mathrm{BCF})=2\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}=2$ …… ㉠

점 M의 평면 EFCD 위로의 정사영은 점 M′이고

$\overline{\mathrm{DM'}}=\overline{\mathrm{DM}}\cos(\angle\mathrm{BCF})=\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}=1$

선분 CM의 평면 EFCD 위로의 정사영은 선분 CM′이고 삼각형 DM′C에서

$\overline{\mathrm{CM'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{DC}}^2+\overline{\mathrm{DM'}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$ …… ㉡

선분 MB의 평면 EFCD 위로의 정사영은 선분 M′B′이고

$\overline{\mathrm{M'B'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{M'N}}^2+\overline{\mathrm{NB'}}^2}$

$=\sqrt{\overline{\mathrm{M'N}}^2+(\overline{\mathrm{CB'}}-\overline{\mathrm{CN}})^2}$

$=\sqrt{\overline{\mathrm{M'N}}^2+(\overline{\mathrm{CB'}}-\overline{\mathrm{DM'}})^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2-1)^2}$

$=3$ …… ㉢

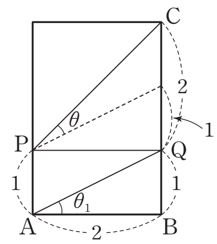
따라서 ㉠, ㉡, ㉢에 의하여 구하는 삼각형의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{CM'}}+\overline{\mathrm{M'B'}}+\overline{\mathrm{CB'}}=3+3+2=8$

답 ③

16

지름 AB를 지나고 밑면에 수직으로 자른 원기둥의 단면은 그림과 같다.



평면 α가 아래쪽 밑면과 이루는 예각의 크기를 θ_1이라 하고 평면 α와 평면 β가 이루는 각의 크기를 θ라 하자.

$\cos\theta_1=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin\theta_1=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\theta+\theta_1=\frac{\pi}{4}$에서 $\theta=\frac{\pi}{4}-\theta_1$

$$\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta_1\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta_1+\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta_1$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta_1+\sin\theta_1)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$
$$=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

평면 β로 원기둥을 자른 단면인 타원의 넓이를 S라 하면

$S\cos\frac{\pi}{4}=\pi$, $S=\sqrt{2}\pi$

따라서 평면 β 위의 타원의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하면

$$S'=S\cos\theta=\sqrt{2}\pi\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{3\sqrt{5}}{5}\pi$$

답 ④

17

꼭짓점 G의 좌표가 $(3,\ 5,\ -1)$이고 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=3$, $\overline{AE}=1$이므로 점 A의 좌표는 $(3+3,\ 5-2,\ -1+1)$에서 $(6,\ 3,\ 0)$

따라서 $\overline{OA}^2=6^2+3^2+0^2=45$

답 45

18

점 $P(1,\ 2,\ 3)$을 xy평면에 대하여 대칭이동한 점은 $A(1,\ 2,\ -3)$

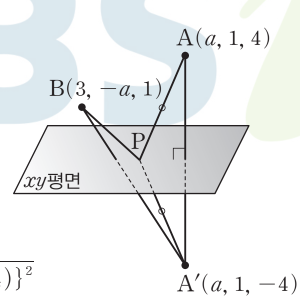
점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $B(1,\ -2,\ 3)$

따라서 $a+b+c=1+(-2)+3=2$

답 ⑤

19

점 A를 xy평면에 대하여 대칭이동하면



$A'(a,\ 1,\ -4)$

$\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}$

$=\overline{A'P}+\overline{BP}\geq\overline{A'B}$

$=\sqrt{(3-a)^2+(-a-1)^2+\{1-(-4)\}^2}$

$=\sqrt{a^2-6a+9+a^2+2a+1+25}$

$=\sqrt{2a^2-4a+35}=\sqrt{35}$

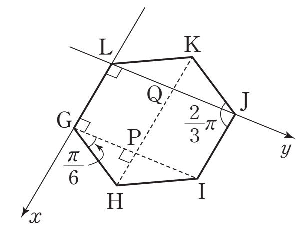
$2a^2-4a=0$에서 $2a(a-2)=0$

따라서 양수 a의 값은 2이다.

답 ②

20

점 L이 원점, 점 G는 x축 위의 점, 점 J는 y축 위의 점이고, 정육각형의 한 내각의 크기는 $\frac{2}{3}\pi$이므로 정육각형 GHIJKL은 그림과 같다.



이때 점 G의 좌표는 $(2,\ 0,\ 0)$이고,

두 선분 GI, HK의 교점을 P라 하면

$\overline{GI}\perp\overline{HK}$이므로 직각삼각형 GHP에서

$\overline{GP}=\overline{GH}\times\cos\frac{\pi}{6}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\overline{GI}=2\overline{GP}=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

한편, 사각형 LGIJ는 직사각형이고, $\overline{LG}=2$, $\overline{LJ}=\overline{GI}=2\sqrt{3}$이므로

점 I의 좌표는 $(2,\ 2\sqrt{3},\ 0)$이다.

점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발이 I이고, $\overline{CI}=2$이므로

점 C의 좌표는 $(2,\ 2\sqrt{3},\ 2)$이다.

두 선분 LJ, HK의 교점을 Q라 하면

$\overline{KQ}=\overline{LK}\times\sin\frac{\pi}{6}=2\times\frac{1}{2}=1$

$\overline{LQ}=\overline{GP}=\sqrt{3}$

점 K의 좌표는 $(-1,\ \sqrt{3},\ 0)$이다.

그러므로 선분 CK의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+(-1)}{2},\ \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2},\ \frac{2+0}{2}\right)$에서 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $c=1$이므로

$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{4}+\frac{27}{4}+1=8$

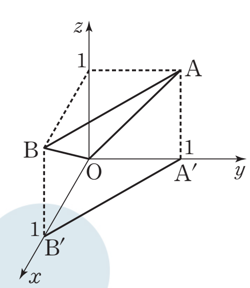
답 ⑤

21

두 점 A, B에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하면

$A'(0,\ 1,\ 0)$, $B'(1,\ 0,\ 0)$

삼각형 OAB의 xy평면 위로의 정사영은 삼각형 OA′B′이다.



$\overline{OA}=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\overline{OB}=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\overline{AB}=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}$이므로 삼각형 OAB는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정삼각형이고, 삼각형 OA′B′은 직각을 낀 두 변의 길이가 모두 1인 직각이등변삼각형이다. 그러므로

$\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2\times\cos\theta$에서

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$이고 θ는 예각이므로 $\sin\theta>0$

따라서 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

답 ⑤

22

세 점 $A(-1,\ 1,\ a)$, $B(1,\ 1,\ a)$, $C(1,\ 4,\ b)$의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′, C′이라 하면

$A'(-1,\ 1,\ 0)$, $B'(1,\ 1,\ 0)$, $C'(1,\ 4,\ 0)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이를 S, 삼각형 $A'B'C'$의 넓이를 S'이라 하면

삼각형 ABC와 $A'B'C'$은 각각 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$, $\angle A'B'C'=\frac{\pi}{2}$인 직각

삼각형이므로

$S=\frac{1}{2}\times\{1-(-1)\}\times\sqrt{(1-1)^2+(4-1)^2+(b-a)^2}$

$=\sqrt{9+(b-a)^2}$

$S'=\frac{1}{2}\times\{1-(-1)\}\times(4-1)=3$

$S'=S\cos\theta$에서

$3=\sqrt{9+(b-a)^2}\times\frac{3}{4}$

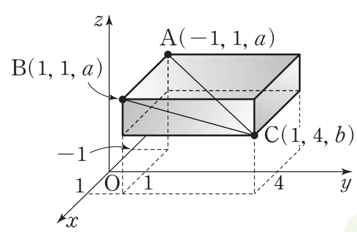
$(b-a)^2=7$

$a>b$이므로 $a-b=\sqrt{7}$

답 ④

참고

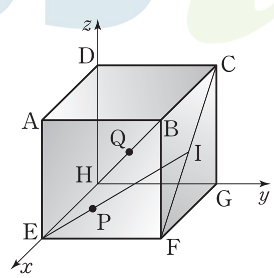
그림과 같이 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하고, 모든 모서리가 좌표축과 평행한 직육면체에서 직선 AB는 평면 $x=1$과 수직이므로 평면 $x=1$ 위의 직선 BC와도 수직이다.



즉, $\overline{AB}\perp\overline{BC}$이므로 삼각형 ABC는 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

23

점 H를 좌표공간의 원점으로 하고, 모서리 HE를 포함하는 직선을 x축, 모서리 HG를 포함하는 직선을 y축, 모서리 HD를 포함하는 직선을 z축으로 할 때, 네 점 E, I, H, B의 좌표는 다음과 같다.



$E(10,\ 0,\ 0)$, $I(5,\ 10,\ 5)$,

$H(0,\ 0,\ 0)$, $B(10,\ 10,\ 10)$

따라서 출발 후 t초 후의 두 점 P, Q의 좌표는 각각

$P(10-t,\ 2t,\ t)$, $Q(2t,\ 2t,\ 2t)$ (단, $0\le t\le 5$)

$\overline{PQ}=\sqrt{(2t-10+t)^2+(2t-2t)^2+(2t-t)^2}$

$=\sqrt{(3t-10)^2+t^2}$

$=\sqrt{10t^2-60t+100}$

$=\sqrt{10(t-3)^2+10}$

따라서 $0\le t\le 5$에서 $t=3$일 때 두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값은 $\sqrt{10}$이다.

답 ①

24

두 점 $A(4,\ 1,\ 3)$, $B(-3,\ -1,\ -2)$를 잇는 선분 AB를 $1:k$로 내분하는 점의 x좌표가 0이므로

$\frac{-3+4k}{1+k}=0$에서 $k=\frac{3}{4}$

답 ④

25

$\overline{AP}=\frac{3}{8}\overline{AB}$이고, 점 P는 선분 AB 위의 점이므로 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:5$이다.

즉, 점 P는 선분 AB를 $3:5$로 내분하는 점이다.

따라서 점 $P(a,\ b,\ c)$에서

$a=\frac{3\times7+5\times1}{3+5}=\frac{13}{4}$

$b=\frac{3\times1+5\times(-5)}{3+5}=-\frac{11}{4}$

$c=\frac{3\times(-4)+5\times2}{3+5}=-\frac{1}{4}$

이므로 $a+b+c=\frac{13}{4}+\left(-\frac{11}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$

답 ②

26

선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점 P가 y축 위에 있으므로 점 P의 좌표를 $(0,\ c,\ 0)$이라 하면

$\frac{2\times5-1\times a}{2-1}=0$, 즉 $10-a=0$에서 $a=10$

$\frac{2\times6-1\times7}{2-1}=c$에서 $c=5$

$\frac{2\times b-1\times(-4)}{2-1}=0$, 즉 $2b+4=0$에서 $b=-2$

따라서 $a+b+c=10+(-2)+5=13$

답 ③

27

$P(0,\ a,\ b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서

$\sqrt{(-1)^2+a^2+b^2}=\sqrt{(-4)^2+a^2+(b-1)^2}$ …… ㉠

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서

$\sqrt{(-1)^2+a^2+b^2}=\sqrt{(-2)^2+(a-2)^2+(b-1)^2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=8$

즉, $P(0,\ -2,\ 8)$

삼각형 APB는 이등변삼각형이므로 변 AB의 중점을 M이라 하면

$\overline{PM}\perp\overline{AB}$

중점 M의 좌표는 $\left(\frac{1+4}{2},\ 0,\ \frac{0+1}{2}\right)$에서 $\left(\frac{5}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$이므로

$\overline{PM}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-0\right)^2+\{0-(-2)\}^2+\left(\frac{1}{2}-8\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{25}{4}+4+\frac{225}{4}}=\frac{\sqrt{266}}{2}$

한편, $\overline{AB}=\sqrt{(4-1)^2+(0-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{10}$

그러므로 삼각형 APB의 넓이 S는

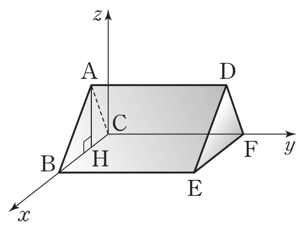
$S=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\frac{\sqrt{266}}{2}=\frac{\sqrt{665}}{2}$

$S^2=\frac{665}{4}$

따라서 $p+q=4+665=669$

답 669

28



꼭짓점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABC는 정삼각형이므로 점 H는 선분 BC의 중점이다. 즉, H의 좌표는 $(1,\ 0,\ 0)$이다.
또한 $\overline{AB}=2$, $\overline{BH}=1$이므로 $\overline{AH}=\sqrt{3}$
그러므로 두 점 A, B의 좌표는 $A(1,\ 0,\ \sqrt{3})$, $B(2,\ 0,\ 0)$이고 두 점 D, F의 좌표는 $D(1,\ 3,\ \sqrt{3})$, $F(0,\ 3,\ 0)$이다.
선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2\times2-1\times1}{2-1},\ \frac{2\times0-1\times0}{2-1},\ \frac{2\times0-1\times\sqrt{3}}{2-1}\right)$$

에서 $(3,\ 0,\ -\sqrt{3})$
선분 DF를 $1:2$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{1\times0-2\times1}{1-2},\ \frac{1\times3-2\times3}{1-2},\ \frac{1\times0-2\times\sqrt{3}}{1-2}\right)$$

에서 $(2,\ 3,\ 2\sqrt{3})$
그러므로 삼각형 CPQ의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0+3+2}{3},\ \frac{0+0+3}{3},\ \frac{0-\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{3}\right)$$

에서 $\left(\frac{5}{3},\ 1,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

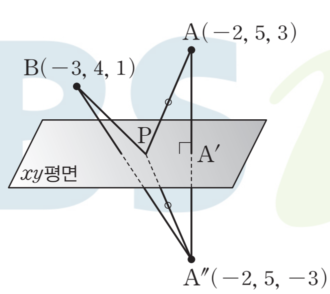
따라서 $a=\frac{5}{3}$, $b=1$, $c=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$a+b+c=\frac{8+\sqrt{3}}{3}$

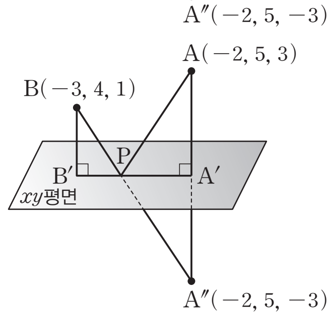
답 ④

29

두 점 A, B에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하고, 점 A를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 A″이라 하면
$A'(-2,\ 5,\ 0)$, $B'(-3,\ 4,\ 0)$, $A''(-2,\ 5,\ -3)$
$\overline{AP}=\overline{A''P}$이므로
$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A''P}+\overline{BP}\geq\overline{A''B}$
즉, 점 P가 선분 A″B 위에 있을 때 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값은 최소가 된다.
두 삼각형 A″A′P와 BB′P는 서로 닮은 도형이므로



$\overline{A''P}:\overline{BP}=\overline{A''A'}:\overline{BB'}$
$=3:1$
즉, 점 P는 선분 A″B를 $3:1$로 내분하는 점이므로

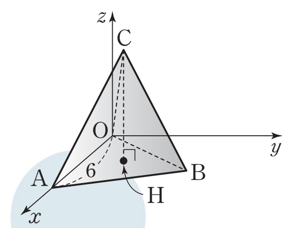


$a=\frac{3\times(-3)+1\times(-2)}{3+1}$
$=-\frac{11}{4}$
$b=\frac{3\times4+1\times5}{3+1}=\frac{17}{4}$
$c=0$
따라서 $a+b+c=-\frac{11}{4}+\frac{17}{4}+0=\frac{3}{2}$

답 ③

30

삼각형 OAB는 정삼각형이고, $\overline{OA}=6$이므로



$A(6,\ 0,\ 0)$
점 B의 좌표를 $(p,\ q,\ 0)$이라 하면
$\overline{OB}=6$이므로
$p=6\cos\frac{\pi}{3}=3$, $q=6\sin\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$
즉, $B(3,\ 3\sqrt{3},\ 0)$
또 꼭짓점 C에서 삼각형 OAB에 내린 수선의 발을 H라 하면 H는 삼각형 OAB의 무게중심이므로
$H\left(\frac{0+6+3}{3},\ \frac{0+0+3\sqrt{3}}{3},\ \frac{0+0+0}{3}\right)$에서 $H(3,\ \sqrt{3},\ 0)$
점 C의 좌표가 $(3,\ \sqrt{3},\ c)$이므로 $\overline{OC}=6$에서
$\sqrt{9+3+c^2}=6$이고 $c>0$이므로
$c=2\sqrt{6}$, $C(3,\ \sqrt{3},\ 2\sqrt{6})$
따라서 $a=3$, $b=\sqrt{3}$, $c=2\sqrt{6}$이므로
$a^2-b^2+c^2=9-3+24=30$

답 30

31

zx평면 위의 모든 점의 y좌표는 0이므로 구의 방정식
$x^2+y^2+z^2-4x+8y-10z+k=0$ 에 $y=0$을 대입하면
$x^2+z^2-4x-10z+k=0$
$(x-2)^2+(z-5)^2=29-k$
zx평면으로 자른 단면의 넓이가 16π이므로
$29-k=16$
따라서 $k=13$

답 ③

32

$x^2+y^2+z^2+2ax+2by-6z+34=0$에서
$(x+a)^2+(y+b)^2+(z-3)^2=a^2+b^2-25$
xy평면과 yz평면에 동시에 접하므로 구의 중심의 z좌표의 절댓값과 x좌표의 절댓값이 같고, 이 값이 반지름의 길이가 된다. 구의 중심의 좌표가 $(-a,\ -b,\ 3)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{a^2+b^2-25}$이므로
$|-a|=3$에서 $a>0$이므로 $a=3$
$a^2+b^2-25=3^2$
$b^2=25$에서 $b>0$이므로 $b=5$
따라서 $a+b=3+5=8$

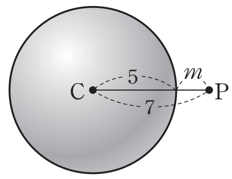
답 ③

33

구 $(x-a)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=25$가 z축에 접하므로
$\sqrt{a^2+3^2}=5$, $a^2=16$

$a>0$이므로 $a=4$

그러므로 구의 중심은 $C(4,\ 3,\ 2)$이고 반지름의 길이는 5이다.



점 $P(10,\ 1,\ -1)$에서

$\overline{CP}=\sqrt{(10-4)^2+(1-3)^2+(-1-2)^2}$

$=\sqrt{36+4+9}$

$=\sqrt{49}=7$

이므로 구 $(x-4)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=25$ 위의 점과 점 $P(10,\ 1,\ -1)$ 사이의 거리의 최솟값은 $\overline{CP}-5$이다.

즉, $m=7-5=2$

따라서 $a+m=4+2=6$

답 ①

34

$x^2+y^2+z^2-4x+8y-6z+k=0$에서

$(x-2)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=29-k$ …… ㉠

㉠이 구가 되기 위해서는

$\sqrt{29-k}>0$, 즉 $k<29$ …… ㉡

한편, 구의 중심의 좌표가 $(2,\ -4,\ 3)$이고, 구 ㉠이 xy평면과 만나기 위해서는 구의 반지름의 길이가 구의 중심과 xy평면 사이의 거리보다 크거나 같아야 하므로

$\sqrt{29-k}\ge 3$

즉, $29-k\ge 9$에서 $k\le 20$ …… ㉢

또한 구 ㉠이 zx평면과 만나지 않으려면 구의 반지름의 길이가 구의 중심과 zx평면 사이의 거리보다 작아야 하므로

$\sqrt{29-k}<4$

즉, $29-k<16$에서 $k>13$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣에서 $13<k\le 20$

따라서 자연수 k의 최솟값은 14, 최댓값은 20이므로 그 합은 34이다.

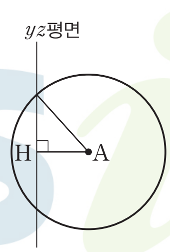
답 ④

35

$x^2+y^2+z^2-2kx+6y-4z+8=0$에서

$(x-k)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=k^2+5$

이므로 구 S의 중심 A의 좌표는 $A(k,\ -3,\ 2)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{k^2+5}$이다.



점 A에서 yz평면에 내린 수선의 발을 H라 하면

점 H의 좌표는 $H(0,\ -3,\ 2)$이므로 $\overline{AH}=k$이고

점 H는 원 C의 중심이다.

원 C의 반지름의 길이를 r라 하면

$r=\sqrt{(k^2+5)-k^2}=\sqrt{5}$

이므로 원 C를 밑면으로 하고 점 A를 꼭짓점으로 하는 원뿔의 부피는

$\frac{1}{3}\times 5\pi\times k=\frac{5}{3}k\pi$

이때 원뿔의 부피가 $\frac{10\pi}{3}$이므로 $\frac{5}{3}k\pi=\frac{10\pi}{3}$

따라서 $k=2$

답 ②

36

두 구 S_1, S_2의 중심을 각각 C_1, C_2라 하면

$C_1(1,\ 2,\ 0)$, $C_2(2,\ 4,\ 2)$

두 구의 중심 사이의 거리는

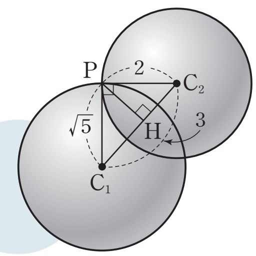
$\overline{C_1C_2}=\sqrt{(2-1)^2+(4-2)^2+(2-0)^2}=3$

한편, 두 구 S_1, S_2의 반지름의 길이는 각각 $\sqrt{5}$, 2이므로

두 구의 교선 위의 한 점을 P라 하면

삼각형 PC_1C_2에서

$\overline{PC_1}^2+\overline{PC_2}^2=\overline{C_1C_2}^2$이 성립하므로 삼각형 PC_1C_2는 직각삼각형이다.

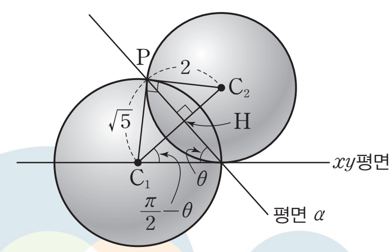


점 P에서 선분 C_1C_2에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PC_1}\times\overline{PC_2}=\overline{PH}\times\overline{C_1C_2}$

에서 $\overline{PH}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$이므로 두 구의 교선인 원의 넓이 S는

$S=\pi\times\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2=\frac{20}{9}\pi$



한편, 두 구의 교선을 포함하는 평면을 α라 하고, 평면 α와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 직선 C_1C_2와 xy평면이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$이다.

점 C_1은 xy평면 위의 점이고, 점 C_2에서 xy평면에 내린 수선의 발을 D라 하면

$D(2,\ 4,\ 0)$

$\overline{C_1D}=\sqrt{(2-1)^2+(4-2)^2+(0-0)^2}=\sqrt{5}$이므로

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\overline{C_1D}}{\overline{C_1C_2}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

즉, $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 이므로 $\cos\theta=\frac{2}{3}$

따라서 두 구가 만나서 생기는 원의 xy평면 위로의 정사영의 넓이 S'은

$S'=S\cos\theta=\frac{20}{9}\pi\times\frac{2}{3}=\frac{40}{27}\pi$

답 ⑤

참고

두 구

$S_1 : x^2+y^2+z^2-2x-4y=0$ …… ㉠

$S_2 : x^2+y^2+z^2-4x-8y-4z+20=0$ …… ㉡

이 만나서 생기는 원을 포함하는 평면 α의 방정식은 ㉠－㉡에서

$x+2y+2z=10$

따라서 평면 α의 법선벡터는 $(1,\ 2,\ 2)$이고 xy평면의 법선벡터는 $(0,\ 0,\ 1)$이므로 평면 α와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\frac{|1\times 0+2\times 0+2\times 1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{2}{3}$

11 공간벡터

정답

본문 142~151쪽

01 ⑤	02 ③	03 ④	04 ③	05 ③
06 ③	07 ⑤	08 ②	09 11	10 ①
11 ④	12 ⑤	13 733	14 ⑤	15 ③
16 ④	17 ④	18 ②	19 ③	20 ④
21 ①	22 ②	23 ③	24 106	25 ③
26 ①	27 ②	28 882	29 ①	30 ②
31 ①				

01

정육면체 ABCD$-$EFGH에서 $\overrightarrow{\mathrm{EB}}=\overrightarrow{\mathrm{HC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{GF}}=\overrightarrow{\mathrm{DA}}$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{EB}}-\overrightarrow{\mathrm{GF}}&=\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{HC}}-\overrightarrow{\mathrm{GF}}\\&=(\overrightarrow{\mathrm{HC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}})-\overrightarrow{\mathrm{GF}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{HA}}-\overrightarrow{\mathrm{GF}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{HA}}-\overrightarrow{\mathrm{DA}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{HA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{HD}}\end{aligned}$$

답 ⑤

02

정사각형 ABFD에서 $\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{BF}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})+(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}})\end{aligned}$$

정사각형 BCDE의 두 대각선의 교점을 M이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{DB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}=2\overrightarrow{\mathrm{AM}}$이고

$\overrightarrow{\mathrm{DB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AM}}=2(\overrightarrow{\mathrm{DM}}+\overrightarrow{\mathrm{AM}})=2(\overrightarrow{\mathrm{DM}}+\overrightarrow{\mathrm{MF}})=2\overrightarrow{\mathrm{DF}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{BF}}=2\overrightarrow{\mathrm{DF}}$

따라서 $|2\overrightarrow{\mathrm{DF}}|=2$

답 ③

03

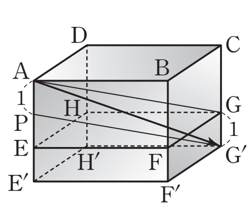
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$이므로 점 P는 모서리 AE의 중점이다.

$\overline{\mathrm{AE}}=2$에서 $\overline{\mathrm{AP}}=1$

또 $\overrightarrow{\mathrm{EH}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{EH}}+\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

이때 그림과 같이 직육면체의 높이를 1만큼 늘여 직육면체 ABCD$-$E′F′G′H′을 만들면 $|\overrightarrow{\mathrm{AE'}}|=3$, $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=3$, $|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|=4$이다.



$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{GG'}}$이므로

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{EH}}+\overrightarrow{\mathrm{DG}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AG'}}|&=\sqrt{3^2+4^2+3^2}\\&=\sqrt{34}\end{aligned}$$

답 ④

04

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,\ b,\ 0)-(a,\ 0,\ 0)=(-a,\ b,\ 0)$

$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(0,\ 0,\ c)-(2,\ 3,\ 4)=(-2,\ -3,\ c-4)$에서

$-a=-2,\ b=-3,\ 0=c-4$

따라서 $a=2,\ b=-3,\ c=4$이므로

$a+b+c=2+(-3)+4=3$

답 ③

05

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PC}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+2(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})-(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\\&=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=(2,\ 0,\ 1)+2(1,\ 3,\ -1)-(1,\ 2,\ 0)\\&=(3,\ 4,\ -1)\end{aligned}$$

에서 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}(3,\ 4,\ -1)$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$

답 ③

06

점 P가 xy평면 위의 점이므로 $c=0$

삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면

$\mathrm{G}\left(\frac{0+6+3}{3},\ \frac{2+0+10}{3},\ \frac{1+1-5}{3}\right)$, 즉 $\mathrm{G}(3,\ 4,\ -1)$

이때 $\overrightarrow{\mathrm{PG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{3}$이므로

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|&=|3\overrightarrow{\mathrm{PG}}|\\&=3|\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\\&=3|(3,\ 4,\ -1)-(a,\ b,\ 0)|\\&=3|(3-a,\ 4-b,\ -1)|\\&=3\sqrt{(3-a)^2+(4-b)^2+(-1)^2}\ge 3\end{aligned}$$

그러므로 $a=3,\ b=4$일 때 최솟값 $m=3$을 갖는다.

따라서 $m+a+b+c=3+3+4+0=10$

답 ③

07

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{1\times1+(-1)\times2+2\times(-3)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}\\&=\frac{-7}{\sqrt{6}\sqrt{14}}=-\frac{\sqrt{21}}{6}\end{aligned}$$

답 ⑤

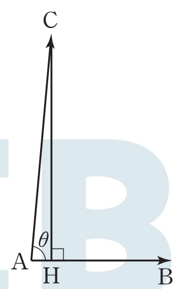
08

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,\ 3,\ 7)-(1,\ 0,\ 5)=(1,\ 3,\ 2)$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-1,\ 4,\ 1)-(1,\ 0,\ 5)=(-2,\ 4,\ -4)$에서

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+3^2+2^2}=\sqrt{14}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(1,\ 3,\ 2)\cdot(-2,\ 4,\ -4)=-2+12-8=2$



두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta=\overline{AB}\times\overline{AH}$

따라서 $\overline{AH}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{2}{\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{14}}{7}$

답 ②

09

점 H를 좌표공간의 원점 O로, 세 직선 HE, HG, HD를 각각 x축, y축, z축으로 잡으면 세 점 D, P, Q의 좌표는 각각

D$(0,\ 0,\ 2)$, P$(2,\ 0,\ 1)$, Q$(a,\ 2,\ 0)$ $(0\le a\le 2)$

으로 놓을 수 있다.

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(a,\ 2,\ 0)-(2,\ 0,\ 1)=(a-2,\ 2,\ -1)$

$\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OD}=(a,\ 2,\ 0)-(0,\ 0,\ 2)=(a,\ 2,\ -2)$이므로

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{DQ}=(a-2)a+4+2=a^2-2a+6=(a-1)^2+5$

$0\le a\le 2$에서 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{DQ}$는 $a=1$일 때 최솟값 $m=5$, $a=0$ 또는 $a=2$일 때 최댓값 $M=6$을 갖는다.

따라서 $M+m=6+5=11$

답 11

10

$|\overrightarrow{BC}|=5$에서 $|\overrightarrow{BC}|^2=25$

$|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|^2=25$

$|\overrightarrow{OC}|^2-2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=25$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(3^2+3^2-25)=-\frac{7}{2}$

$\overrightarrow{AG}$는 삼각형 OBC를 포함하는 평면에 수직이므로

$\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{OB}=0$에서

$(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$\left(\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$\frac{1}{3}|\overrightarrow{OB}|^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

따라서

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}|\overrightarrow{OB}|^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=\frac{1}{3}\times3^2+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{7}{2}\right)$

$=3-\frac{7}{6}$

$=\frac{11}{6}$

답 ①

11

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP})$

$=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC}$의 값은 상수이므로 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BP}$가 최대가 되려면 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$가 최대가 되어야 한다.

즉, 두 벡터 $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CP}$의 방향이 같을 때이고, $|\overrightarrow{CP}|=2$이므로

$\overrightarrow{CP}=\dfrac{2\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}$

구 $x^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$의 중심 C의 좌표는 $(0,\ -1,\ 1)$이므로

$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=(3,\ -1,\ 2)-(0,\ -1,\ 1)=(3,\ 0,\ 1)$

$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{3^2+0^2+1^2}=\sqrt{10}$에서

$\overrightarrow{CP}=\left(\frac{6}{\sqrt{10}},\ 0,\ \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=(0,\ -1,\ 1)+\left(\frac{6}{\sqrt{10}},\ 0,\ \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$

$=\left(\frac{6}{\sqrt{10}},\ -1,\ 1+\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$

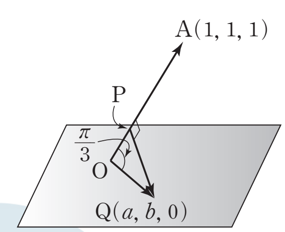
따라서

$a+b+c=\frac{6}{\sqrt{10}}+(-1)+1+\frac{2}{\sqrt{10}}$

$=\frac{8}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$

답 ④

12



조건 (가), (나)에서

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos\frac{\pi}{3}=|\overrightarrow{OP}|^2$

조건 (다)에서 $|\overrightarrow{OP}|^2=|\overrightarrow{OP}|$이고 $|\overrightarrow{OP}|\neq0$이므로 $|\overrightarrow{OP}|=1$

$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$이므로

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ 1)$

점 Q는 xy평면 위의 점이므로 $c=0$에서 점 Q의 좌표는 $(a,\ b,\ 0)$이다.

$\overrightarrow{PQ}=(a,\ b,\ 0)-\frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ 1)=\left(a-\frac{1}{\sqrt{3}},\ b-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

조건 (가)에서 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OA}=0$이므로

$\left(a-\frac{1}{\sqrt{3}},\ b-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot(1,\ 1,\ 1)=(a+b)-\sqrt{3}=0$

$a+b=\sqrt{3}$ …… ㉠

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OQ}|\cos\frac{\pi}{3}$에서

$a+b=\sqrt{3}\times\sqrt{a^2+b^2}\times\frac{1}{2}$

$4(a+b)^2=3(a^2+b^2)$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $a^2+b^2=4$

$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=3-4=-1$

$ab=-\frac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉢에서 a, b는 이차방정식 $x^2-\sqrt{3}x-\frac{1}{2}=0$의 근이다.

$2x^2-2\sqrt{3}x-1=0$에서

$x=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3+2}}{2}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{5}}{2}$

$a>b$이므로

$\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

따라서 $a-b+c=\sqrt{5}$

답 ⑤

13

조건 (가)에서 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OA}$가 이루는 각의 크기를 α라 하면

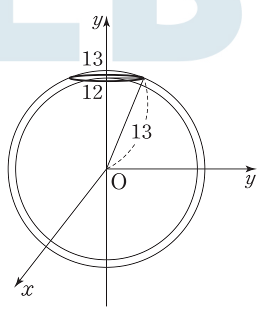
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OA}|\cos\alpha=2|\overrightarrow{OP}|\cos\alpha=24$

$|\overrightarrow{OP}|\cos\alpha=12$이고 $0<\cos\alpha\le1$이므로

$|\overrightarrow{OP}|=\frac{12}{\cos\alpha}\ge12$ (단, 등호는 $\alpha=0$일 때 성립)

$12\le|\overrightarrow{OP}|\le13$이므로 $\sqrt{13^2-12^2}=5$에서

점 P는 $\mathrm{P}(r\cos\theta_1, r\sin\theta_1, 12)$ $(0\le r\le5, 0\le\theta_1<2\pi)$로 나타낼 수 있다.

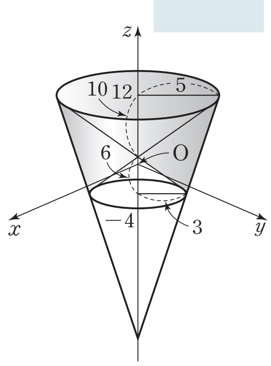


조건 (나)에서 벡터 $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OA}$가 이루는 각의 크기를 β라 하면

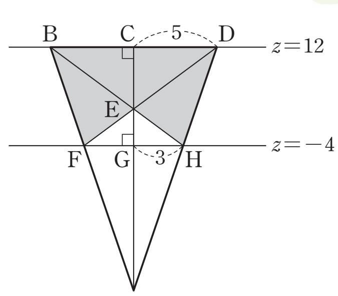
$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OQ}||\overrightarrow{OA}|\cos\beta=-8$

$|\overrightarrow{OQ}|\cos\beta=-4$이고 $|\overrightarrow{OQ}|=5$이므로 $\sqrt{5^2-(-4)^2}=3$에서 점 Q는 $\mathrm{Q}(3\cos\theta_2, 3\sin\theta_2, -4)$ $(0\le\theta_2<2\pi)$로 나타낼 수 있다.

두 점 P, Q가 나타내는 두 원을 밑면으로 하는 원뿔대의 옆면을 연장하여 원뿔을 그리면 [그림 1]과 같다.



[그림 1]



[그림 2]

원뿔을 밑면의 지름을 지나고 xy평면에 수직인 평면으로 자른 단면인 [그림 2]에서

$\overline{CG}=|12-(-4)|=16$

두 삼각형 BED, HEF는 서로 닮은 도형이고, 닮음비가 5 : 3이므로

$\overline{CE}:\overline{EG}=5:3$

$\overline{CG}=\overline{CE}+\overline{EG}=5k+3k=16$

에서 $k=2$이고 $\overline{CE}=10$, $\overline{EG}=6$

두 삼각형 CID, GIH는 서로 닮은 도형이고, 닮음비가 5 : 3이므로

$\overline{CI}:\overline{GI}=5:3$

$\overline{CG}=\overline{CI}-\overline{GI}=5m-3m=16$

에서 $m=8$이고 $\overline{CI}=40$, $\overline{GI}=24$

선분 PQ가 그리는 도형은 그림의 색칠한 부분과 같으므로 그 부피 V는

$V=\frac{\pi}{3}\times5^2\times40-\frac{\pi}{3}\times3^2\times24-\frac{\pi}{3}\times3^2\times6$

$=\frac{\pi}{3}\times5^2\times40-\frac{\pi}{3}\times3^2\times30$

$=\frac{730}{3}\pi$

따라서 $p=3$, $q=730$이므로 $p+q=3+730=733$

답 733

참고

점 P는 평면 $z=12$의 중심이 C(0, 0, 12)이고 반지름의 길이가 5인 원과 그 내부의 점이다.

점 Q는 평면 $z=-4$의 중심이 G(0, 0, −4)이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 점이다.

14

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{BC}$는 점 A를 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{BC}$인 직선의 벡터방정식이다.

$\overrightarrow{BC}=(2, 2, 2)-(3, -2, 1)=(-1, 4, 1)$

이므로 직선 l의 방정식은

$\frac{x-5}{-1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{1}$

zx평면은 $y=0$이므로 $b=0$이고

$\frac{a-5}{-1}=\frac{0-2}{4}=\frac{c}{1}$

에서 $a=\frac{11}{2}$, $c=-\frac{1}{2}$

따라서 $a+b+c=\frac{11}{2}+0+\left(-\frac{1}{2}\right)=5$

답 ⑤

15

$x-1=y+3=2-z=t$라 하면

$\mathrm{P}(t+1, t-3, 2-t)$

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$

$=(t+1, t-3, 2-t)-(1, -1, 1)$

$=(t, t-2, 1-t)$

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}$

$=(t+1, t-3, 2-t)-(0, 2, 3)$

$=(t+1, t-5, -1-t)$

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = (t, t-2, 1-t) \cdot (t+1, t-5, -1-t)$
$= t(t+1) + (t-2)(t-5) + (1-t)(-1-t)$
$= 3t^2 - 6t + 9$
$= 3(t-1)^2 + 6$

따라서 $t=1$일 때 최솟값 6을 갖는다.

답 ③

16

점 P와 직선 m 사이의 거리가 최소일 때 정삼각형 PQR의 넓이가 최소이다.

$P(0, -t, t)$에서 직선 m에 내린 수선의 발을 $H(2s, s, 2)$라 하면

$\overrightarrow{PH} = (2s, s, 2) - (0, -t, t) = (2s, s+t, 2-t)$

$\overrightarrow{PH} \perp m$이므로

$(2s, s+t, 2-t) \cdot (2, 1, 0) = 0$

$4s + s + t = 0$

$t = -5s$이므로 $\overrightarrow{PH} = (2s, -4s, 5s+2)$

$|\overrightarrow{PH}| = \sqrt{(2s)^2 + (-4s)^2 + (5s+2)^2}$
$= \sqrt{45s^2 + 20s + 4}$
$= \sqrt{45\left(s + \frac{2}{9}\right)^2 + \frac{16}{9}}$

이므로 $|\overrightarrow{PH}|$는 $s = -\frac{2}{9}$일 때 최솟값 $\frac{4}{3}$를 갖는다.

즉, 정삼각형 PQR의 높이의 최솟값이 $\frac{4}{3}$이고, 이때 정삼각형 PQR의 한 변의 길이는 $\frac{8}{3\sqrt{3}}$이므로 정삼각형 PQR의 넓이의 최솟값은

$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{16\sqrt{3}}{27}$

답 ④

17

직선 $\frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z+3}{2}$의 방향벡터를 $(2, 1, 2)$라 하고, x축과 평행한 직선 l의 방향벡터를 $(1, 0, 0)$이라 하면

$\cos\theta = \frac{|(1, 0, 0) \cdot (2, 1, 2)|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{2}{3}$

답 ④

18

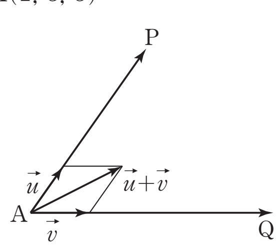
$l : x-1 = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2} = t$라 하면 $A(t+1, 3t, 2t+1)$,

$m : \frac{x-2}{2} = 3-y = \frac{z-3}{3} = s$라 하면

$A(2s+2, 3-s, 3s+3)$으로 나타낼 수 있다.

$t+1 = 2s+2$, $3t = 3-s$, $2t+1 = 3s+3$에서

$t=1$, $s=0$이므로 $A(2, 3, 3)$



두 직선의 방향벡터를 각각 $(1, 3, 2)$, $(2, -1, 3)$이라 하면

$(1, 3, 2) \cdot (2, -1, 3) = 2 - 3 + 6 = 5 > 0$

이므로 두 벡터 $(1, 3, 2)$, $(2\ -1, 3)$이 이루는 각은 예각이다.

이때 $|(1, 3, 2)| = \sqrt{1^2+3^2+2^2} = \sqrt{14}$,

$|(2, -1, 3)| = \sqrt{2^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{14}$이므로

$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 3, 2)$, $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2, -1, 3)$이라 하면 두 벡터 $\vec{u}$, $\vec{v}$는 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$와 같은 방향의 단위벡터이고 $\angle PAQ$를 이등분하는 직선의 방향벡터는 $\vec{u}+\vec{v}$이다.

$\vec{u}+\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 2, 5)$이므로 점 $A(2, 3, 3)$을 지나고 방향벡터가 $\sqrt{14}(\vec{u}+\vec{v})$인 직선의 방정식은

$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{5}$

이 직선과 xy평면이 만나는 점 R의 z좌표는 0이므로 $c=0$이고

$\frac{a-2}{3} = \frac{b-3}{2} = \frac{0-3}{5}$에서

$a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{9}{5}$

따라서 $a+b+c = \frac{1}{5} + \frac{9}{5} + 0 = 2$

답 ②

19

세 직선 l, m, n의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$라 하면

$\vec{u_1} = (1, -1, 0)$, $\vec{u_2} = (0, 1, -1)$, $\vec{u_3} = (-1, 0, 1)$

세 점 $P_2(0, 1-a_2, a_2)$, $P_3(a_3, 0, 1-a_3)$, $P_4(1-a_4, a_4, 0)$에 대하여

$\overrightarrow{P_1P_2} \perp m$, $\overrightarrow{P_2P_3} \perp n$, $\overrightarrow{P_3P_4} \perp l$

$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$
$= (0, 1-a_2, a_2) - (1, 0, 0)$
$= (-1, 1-a_2, a_2)$

$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{u_2} = 0$에서

$(-1, 1-a_2, a_2) \cdot (0, 1, -1) = 1 - a_2 - a_2 = 0$

$a_2 = \frac{1}{2}$이므로 $P_2\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_2} = (a_3, 0, 1-a_3) - \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$= \left(a_3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - a_3\right)$

$\overrightarrow{P_2P_3} \cdot \vec{u_3} = 0$에서

$\left(a_3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - a_3\right) \cdot (-1, 0, 1) = -a_3 + \frac{1}{2} - a_3 = 0$

$a_3 = \frac{1}{4}$이므로 $P_3\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right)$

$\overrightarrow{P_3P_4} = \overrightarrow{OP_4} - \overrightarrow{OP_3} = (1-a_4, a_4, 0) - \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right)$
$= \left(\frac{3}{4} - a_4, a_4, -\frac{3}{4}\right)$

$\overrightarrow{P_3P_4} \cdot \vec{u_1} = 0$에서

$\left(\frac{3}{4} - a_4, a_4, -\frac{3}{4}\right) \cdot (1, -1, 0) = \frac{3}{4} - a_4 - a_4 = 0$

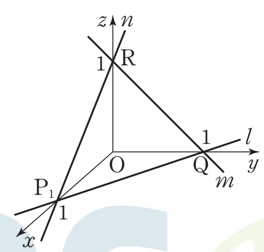
$a_4 = \frac{3}{8}$이므로 $P_4\left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, 0\right)$

따라서 $\overline{P_1P_4}=\sqrt{\left(\frac{5}{8}-1\right)^2+\left(\frac{3}{8}\right)^2+0^2}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$

답 ③

다른 풀이

[그림 1]과 같이 세 직선 l, m, n으로 둘러싸인 삼각형은 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정삼각형이다. 두 직선 l, m의 교점을 Q, 두 직선 m, n의 교점을 R라 하면 P_2, P_3, P_4를 [그림 2]와 같이 나타낼 수 있다.



[그림 1]

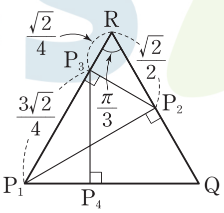
이때

$\overline{P_2R}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{P_3R}=\overline{P_2R}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\overline{P_1P_3}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$이므로

$\overline{P_1P_4}=\overline{P_1P_3}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$



[그림 2]

20

직선 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=1-z$의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=(2,\ 3,\ -1)$

평면과 직선이 수직이므로 직선의 방향벡터 $\vec{u}$는 평면의 법선벡터이다.

따라서 점 $(3,\ -4,\ 2)$를 지나고 법선벡터가 $(2,\ 3,\ -1)$인 평면의 방정식은

$2(x-3)+3(y+4)-(z-2)=0$

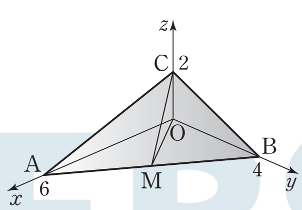
$2x+3y-z+8=0$

x축과 만나는 점의 x좌표는 $y=0$, $z=0$을 대입하면

$2x+8=0$에서 $x=-4$

답 ④

21



평면 β가 원점을 지나므로 $r=0$

평면 β가 z축을 포함하므로 평면 β의 법선벡터를 $\vec{n}=(1,\ p,\ q)$라 하면 $\vec{n}$은 z축의 방향벡터 $(0,\ 0,\ 1)$과 수직이다.

즉, $(1,\ p,\ q)\cdot(0,\ 0,\ 1)=0$에서 $q=0$

한편, z축을 포함하는 평면 β에 의해 사면체 OABC의 부피가 이등분되므로 평면 β는 선분 AB의 중점 M을 지나야 한다.

A $(6,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ 4,\ 0)$에서 점 M의 좌표는 $(3,\ 2,\ 0)$이므로

$3+2p+0+0=0$, $p=-\frac{3}{2}$

따라서 $p+q+r=-\frac{3}{2}+0+0=-\frac{3}{2}$

답 ①

22

직선 AB가 평면 α에 수직이므로 점 P의 좌표를 $(p,\ q,\ r)$라 하면 평면 α의 법선벡터 $\vec{n}=(1,\ -3,\ -2)$에 대하여

$\overrightarrow{AP}=k\vec{n}$ (단, k는 0이 아닌 실수)

$(p-2,\ q-1,\ r)=(k,\ -3k,\ -2k)$

$p=k+2$, $q=-3k+1$, $r=-2k$

점 P$(k+2,\ -3k+1,\ -2k)$는 평면 α 위의 점이므로

$(k+2)-3(-3k+1)-2(-2k)=6$

$14k=7$, $k=\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\vec{n}=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ -1\right)$

한편, $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$에서 점 P는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이거나 $2:1$로 외분하는 점이다.

(i) 점 P가 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점일 때

$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ -1\right)=\frac{2}{3}\{(a,\ b,\ c)-(2,\ 1,\ 0)\}$

$\left(\frac{3}{4},\ -\frac{9}{4},\ -\frac{3}{2}\right)=(a-2,\ b-1,\ c)$에서

$a=\frac{11}{4}$, $b=-\frac{5}{4}$, $c=-\frac{3}{2}$

$a-b+c=\frac{5}{2}$

(ii) 점 P가 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점일 때

$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}=2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ -1\right)=2\{(a,\ b,\ c)-(2,\ 1,\ 0)\}$

$\left(\frac{1}{4},\ -\frac{3}{4},\ -\frac{1}{2}\right)=(a-2,\ b-1,\ c)$에서

$a=\frac{9}{4}$, $b=\frac{1}{4}$, $c=-\frac{1}{2}$

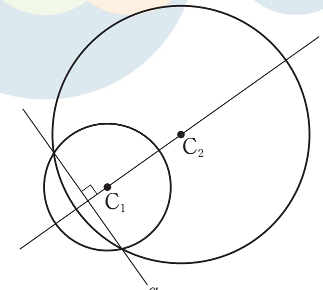
$a-b+c=\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 $a-b+c$의 최솟값은 $\frac{3}{2}$이다.

답 ②

23

두 구 $(x+1)^2+y^2+z^2=1$, $x^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$의 중심은 각각 $C_1(-1,\ 0,\ 0)$, $C_2(0,\ 2,\ 1)$이고, 직선 C_1C_2는 평면 α와 수직이므로 평면 α의 법선벡터를 $\vec{n_1}=\overrightarrow{C_1C_2}$라 할 수 있다.



$\vec{n_1}=\overrightarrow{C_1C_2}=(0,\ 2,\ 1)-(-1,\ 0,\ 0)=(1,\ 2,\ 1)$

한편, yz평면의 법선벡터는 $\vec{n_2}=(1,\ 0,\ 0)$이므로

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{|1\times1+2\times0+1\times0|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

답 ③

24

직선 AB와 평면 $4x-y+2z=1$이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자.
직선 AB의 방향벡터는
$\overrightarrow{AB}=(4,\ -1,\ 3)-(3,\ 3,\ 1)=(1,\ -4,\ 2)$, 평면 $4x-y+2z=1$의 법선벡터는 $\vec{n}=(4,\ -1,\ 2)$이므로

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$
$$=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{AB}||\vec{n}|}$$
$$=\frac{|1\times4+(-4)\times(-1)+2\times2|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+2^2}\sqrt{4^2+(-1)^2+2^2}}$$
$$=\frac{12}{21}$$
$$=\frac{4}{7}$$

θ가 예각이므로

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{33}}{7}$이고

$\overline{AB}=|\overrightarrow{AB}|=|(1,\ -4,\ 2)|=\sqrt{21}$

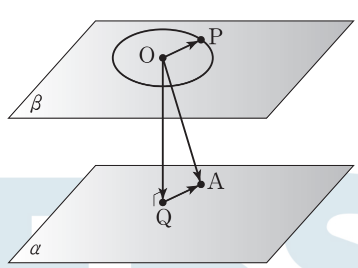
$\overline{CD}=\overline{AB}\cos\theta=\sqrt{21}\times\frac{\sqrt{33}}{7}=\frac{3\sqrt{77}}{7}$이므로

$|\overrightarrow{CD}|^2=\overline{CD}^2=\frac{99}{7}$

따라서 $p=7$, $q=99$이므로 $p+q=7+99=106$

답 106

25



점 A $(1,\ 2,\ -2)$는 평면 α : $x+y-z-5=0$ 위의 점이고 점 O에서 평면 α에 내린 수선의 발을 Q라 하면
$\overrightarrow{OQ}\perp\alpha$
두 평면 α와 β가 서로 평행하므로 $\overrightarrow{OQ}\perp\beta$
이때 직선 OP는 β 위에 있으므로 $\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{OP}$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QA})$$
$$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{QA}$$
$$=0+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{QA}$$
$$\le|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{QA}|=|\overrightarrow{QA}|$$

이므로 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$는 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{QA}$가 이루는 각의 크기가 0일 때 최댓값 $|\overrightarrow{QA}|$를 갖는다. 평면 α의 법선벡터가 $(1,\ 1,\ -1)$이므로

$\overrightarrow{OQ}=t(1,\ 1,\ -1)=(t,\ t,\ -t)$ (단, t는 0이 아닌 실수)
점 Q는 평면 α 위의 점이므로
$t+t-(-t)-5=0$
$t=\frac{5}{3}$에서 $\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{5}{3},\ \frac{5}{3},\ -\frac{5}{3}\right)$

$$\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OQ}$$
$$=(1,\ 2,\ -2)-\left(\frac{5}{3},\ \frac{5}{3},\ -\frac{5}{3}\right)$$
$$=\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$$

$|\overrightarrow{QA}|=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

따라서 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$의 최댓값은 $\frac{\sqrt{6}}{3}$이다.

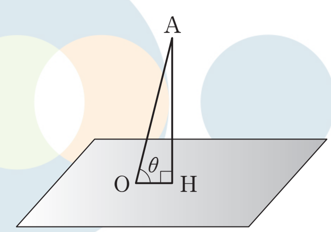
답 ③

26

원점 O는 평면 $x-2y+2z=0$ 위의 점이므로 두 벡터 $\overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{AH}$는 서로 수직이다. 점 A $(2,\ -2,\ 3)$과 평면 $x-2y+2z=0$ 사이의 거리 $\overline{AH}$는

$$\overline{AH}=\frac{|1\times2-2\times(-2)+2\times3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{12}{3}=4$$

$\overline{OA}=\sqrt{2^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{17}$이므로 직각삼각형 OHA에서



$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{17-16}=1$
$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OH}$가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OH}|\cos\theta=|\overrightarrow{OH}|^2=1$

답 ①

27

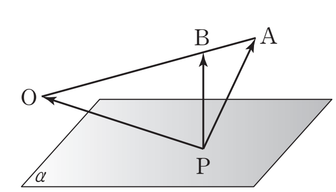
$|\overrightarrow{OP}+3\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{PO}+3\overrightarrow{PA}|=4\left|\frac{\overrightarrow{PO}+3\overrightarrow{PA}}{4}\right|$

선분 OA를 $3:1$로 내분하는 점을 B라 하면

$$\left(\frac{3\times4+1\times0}{3+1},\ \frac{3\times4+1\times0}{3+1},\ \frac{3\times8+1\times0}{3+1}\right)$$

에서 점 B의 좌표는 $(3,\ 3,\ 6)$

$\frac{\overrightarrow{PO}+3\overrightarrow{PA}}{4}=\overrightarrow{PB}$이므로 $|\overrightarrow{OP}+3\overrightarrow{AP}|=4|\overrightarrow{PB}|$



$|\overrightarrow{PB}|$가 최소일 때 $|\overrightarrow{OP}+3\overrightarrow{AP}|$도 최소이므로 $|\overrightarrow{PB}|$의 최솟값은 점 B와 평면 α 사이의 거리와 같다.

즉, $\dfrac{|2\times3-1\times3+2\times6+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{18}{3}=6$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$의 최솟값은

$4\times6=24$

답 ②

다른 풀이

$\mathrm{P}(x, y, z)$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x, y, z)+3(x-4, y-4, z-8)$

$=(4x-12, 4y-12, 4z-24)$

$=4(x-3, y-3, z-6)$

이때 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=4\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2+(z-6)^2}$ 이고,

$\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2+(z-6)^2}$은 평면 α 위의 점 P와

점 (3, 3, 6) 사이의 거리이므로

$\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2+(z-6)^2}$의 최솟값은 점 (3, 3, 6)과

평면 α : $2x-y+2z+3=0$ 사이의 거리와 같다.

즉, $\dfrac{|2\times3-1\times3+2\times6+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{18}{3}=6$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$의 최솟값은

$4\times6=24$

28

정육면체 ABCD−EFGH를 H가 원점, 모서리 HE를 x축, 모서리 HG를 y축, 모서리 HD를 z축에 오도록 좌표공간에 놓으면

A(6, 0, 6), B(6, 6, 6), C(0, 6, 6), F(6, 6, 0)

P(6, 4, 6), Q(4, 6, 6), R(6, 6, 3)

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(4, 6, 6)-(6, 4, 6)=(-2, 2, 0)$

$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(6, 6, 3)-(4, 6, 6)=(2, 0, -3)$

평면 α의 법선벡터를 $\vec{n}=(a, b, 1)$이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\vec{n}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{n}=0$

$(-2, 2, 0)\cdot(a, b, 1)=-2a+2b=0$에서 $a=b$

$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\perp\vec{n}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{QR}}\cdot\vec{n}=0$

$(2, 0, -3)\cdot(a, b, 1)=2a-3=0$에서 $a=\dfrac{3}{2}$

$b=\dfrac{3}{2}$이므로 평면 α의 방정식은

$\dfrac{3}{2}(x-6)+\dfrac{3}{2}(y-4)+(z-6)=0$

$3x+3y+2z-42=0$

점 H와 평면 α 사이의 거리는

$d=\dfrac{|-42|}{\sqrt{3^2+3^2+2^2}}=\dfrac{42}{\sqrt{22}}$, $d^2=\dfrac{42^2}{22}=\dfrac{882}{11}$

따라서 $11d^2=882$

답 882

29

구 S : $x^2+y^2+(z-1)^2=4$의 중심 (0, 0, 1)과

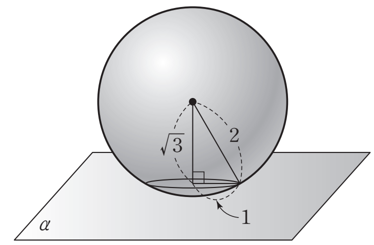
평면 α : $x-y+z-4=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|0-0+1-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

구 S의 반지름의 길이가 2이므로 평면 α가 구와 만나서 생기는 도형인 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$r^2=2^2-(\sqrt{3})^2=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는 π이다.



답 ①

30

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$라 하면 $|\vec{p}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{p}+4|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2$에서

$|\vec{p}-2\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2$, 즉 $|\vec{p}-2\vec{a}|=|\vec{b}|$

그러므로 점 P가 나타내는 도형 S는 중심의 좌표가 (2, 2, 8)이고

반지름의 길이가 $|\vec{b}|=\sqrt{3^2+1^2+2^2}=\sqrt{14}$인 구이다.

도형 S와 평면 $2x-2y+z+k=0$이 만나려면 구의 중심과 평면 사이의 거리가 반지름의 길이보다 작거나 같아야 하므로

$\dfrac{|2\times2-2\times2+1\times8+k|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}\le\sqrt{14}$

$|8+k|\le3\sqrt{14}$

$-3\sqrt{14}\le8+k\le3\sqrt{14}$

$-3\sqrt{14}-8\le k\le3\sqrt{14}-8$

이때 $\sqrt{11^2}<3\sqrt{14}<\sqrt{12^2}$이므로

$k=-19, -18, -17, \cdots, 1, 2, 3$

따라서 $M-m=3-(-19)=22$

답 ②

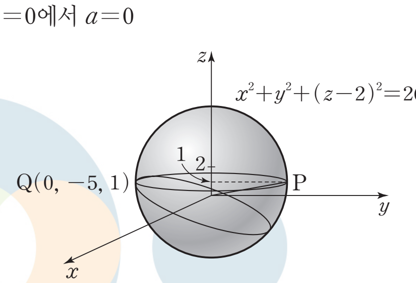
31

원 C_1은 $x^2+y^2+(1-2)^2=26$에서 $x^2+y^2=25$이므로 중심의 좌표가 (0, 0, 1), 반지름의 길이가 5인 원이다.

평면 α는 x축을 포함하므로 평면 α의 법선벡터 $\vec{n}=(a, b, 1)$은 x축의 방향벡터 (1, 0, 0)과 서로 수직이다.

즉, $(a, b, 1)\cdot(1, 0, 0)=0$에서 $a=0$

두 원 C_1, C_2가 한 점에서 만나려면 그림과 같이 점 P(0, 5, 1) 또는 점 Q(0, −5, 1)에서 만나야 하므로 원점 O에 대하여 $\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 또는 $\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$이다.



$b>0$이므로 점 Q에서 만나고, $(a, b, 1)\cdot(0, -5, 1)=0$에서

$-5b+1=0$, $b=\dfrac{1}{5}$

따라서 $a+b=\dfrac{1}{5}$

답 ①

실전 모의고사

실전 모의고사 1회

본문 154~161쪽

01 ⑤	02 ③	03 ①	04 ②	05 ④
06 ⑤	07 ⑤	08 ①	09 ②	10 ②
11 ①	12 ③	13 ③	14 ③	15 ④
16 ③	17 ③	18 ②	19 ①	20 ①
21 ④	22 120	23 20	24 7	25 9
26 23	27 25	28 27	29 20	30 11

01

$\vec{a}+2\vec{b}=(-2,\ 1)+2(1,\ 3)$

$=(-2,\ 1)+(2,\ 6)$

$=(0,\ 7)$

따라서 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$의 모든 성분의 합은

$0+7=7$

답 ⑤

02

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\tan 3x}{3x}\times\frac{2x}{\ln(1+2x)}\times\frac{3}{2}\right\}$$

$$=1\times 1\times\frac{3}{2}$$

$$=\frac{3}{2}$$

답 ③

03

$2x+1=f(x)$로 놓으면 $f'(x)=2$이므로

$$\int_0^1\frac{2}{2x+1}\,dx=\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$=\Big[\ln|f(x)|\Big]_0^1$$

$$=\Big[\ln|2x+1|\Big]_0^1$$

$$=\ln 3$$

답 ①

04

두 사건 A와 B는 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$이고

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

에서

$\mathrm{P}(A)+\frac{1}{2}-\mathrm{P}(A)\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$

두 사건 A^C과 B도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

답 ②

05

세 자리 자연수는 백의 자리의 수가 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 중 하나가 되어야 한다.

이 세 자리 자연수 중 십의 자리의 수 또는 일의 자리의 수가 0인 짝수는 다음과 같다.

(i) 일의 자리의 수가 0일 때, 십의 자리의 수는 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 중 하나가 된다. 이 경우의 수는

$1\times 10=10$

(ii) 일의 자리의 수가 2, 4, 6, 8 중 하나일 때, 십의 자리의 수는 0이어야 한다. 이 경우의 수는

$4\times 1=4$

따라서 세 자리 자연수 중 십의 자리의 수 또는 일의 자리의 수가 0인 짝수의 개수는

$9\times(10+4)=126$

답 ④

다른 풀이

세 자리 자연수 중 짝수의 개수는

$9\times 10\times 5=450$

세 자리 자연수 중 십의 자리의 수와 일의 자리의 수가 모두 0이 아닌 짝수의 개수는

$9\times 9\times 4=324$

따라서 조건을 만족시키는 자연수의 개수는

$450-324=126$

06

$f'(x)=\cos^2 x\sin x$에서 $\cos x=t$로 놓으면

$-\sin x=\frac{dt}{dx}$

$$f(x)=\int\cos^2 x\sin x\,dx$$

$$=\int(-t^2)\,dt=-\frac{1}{3}t^3+C$$

$$=-\frac{1}{3}\cos^3 x+C\ (\text{단, }C\text{는 적분상수})$$

$f(0)=-\frac{1}{3}+C=1$에서 $C=\frac{4}{3}$이므로

$f(x)=-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{4}{3}$

따라서 $f(\pi)=-\frac{1}{3}\times(-1)+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$

답 ⑤

07

7장의 카드 중에서 임의로 3장의 카드를 동시에 선택하는 모든 경우의 수는

${}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

선택된 3장의 카드에 적혀 있는 모든 수의 곱이 8로 나누어 떨어지는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 2, 4가 적혀 있는 카드 2장과 홀수가 적혀 있는 카드 1장을 선택하는 경우 또는 4, 6이 적혀 있는 카드 2장과 홀수가 적혀 있는 카드 1장을 선택하는 경우
이때의 경우의 수는
$2\times{}_4C_1=2\times4=8$

(ⅱ) 2, 4, 6이 적혀 있는 카드 3장을 선택하는 경우
이때의 경우의 수는 1

(ⅰ), (ⅱ)에서 선택된 3장의 카드에 적혀 있는 모든 수의 곱이 8로 나누어 떨어지는 경우의 수는 $8+1=9$

따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{35}$

답 ⑤

08

주어진 평면의 법선벡터를 $\vec{n_1}=(2,\ -2,\ 1)$, xy평면의 법선벡터를 $\vec{n_2}=(0,\ 0,\ 1)$이라 하고, 평면 $2x-2y+z=0$과 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{1}{3}$

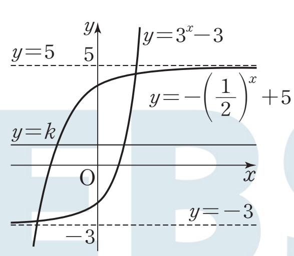
한 변의 길이가 1인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로 이 정삼각형의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{12}$

답 ①

09

곡선 $y=3^x-3$은 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하고, 점근선은 직선 $y=-3$이다. 곡선 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+5$는 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하고, 점근선은 직선 $y=5$이다.



따라서 두 곡선은 그림과 같고, 직선 $y=k$가 두 곡선과 모두 만나기 위한 k의 값의 범위는 $-3<k<5$이므로 정수 k는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$이고, 그 개수는 7이다.

답 ②

10

$x=\ln t$, $y=t^2-3$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=2t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속력은 $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+(2t)^2}=\sqrt{\frac{1}{t^2}+4t^2}$

$t>0$이므로

$\frac{1}{t^2}+4t^2\ge2\sqrt{\frac{1}{t^2}\times4t^2}=2\sqrt{4}=4$ $\left(\text{단, 등호는 }\frac{1}{t^2}=4t^2\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\sqrt{\frac{1}{t^2}+4t^2}\ge2$이고 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 등호가 성립하므로 점 P의 속력의 최솟값은 2이다.

답 ②

11

구와 평면이 만나서 생기는 원의 중심을 $\mathrm{H}(a,\ b,\ c)$, 구의 중심을 C라 하면 $\mathrm{C}(1,\ -1,\ 2)$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=(a-1,\ b+1,\ c-2)$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$는 주어진 평면에 수직이므로 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면 $\vec{n}=(2,\ -1,\ 1)$과 $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$는 평행하다.

$(a-1,\ b+1,\ c-2)=k(2,\ -1,\ 1)$ (단, k는 0이 아닌 실수)

$a=2k+1$, $b=-k-1$, $c=k+2$이므로 주어진 평면의 방정식에 대입하면

$2(2k+1)-(-k-1)+(k+2)+1=0$, $6k+6=0$

$k=-1$이므로 $a=-1$, $b=0$, $c=1$

따라서 $a^2+b^2+c^2=2$

답 ①

12

$Z=\frac{X-10}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le12\sigma)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{12\sigma-10}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le12-\frac{10}{\sigma}\right)\\&=0.9772\\&=0.5+0.4772\\&=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=\mathrm{P}(Z\le2)\end{aligned}$$

즉, $12-\frac{10}{\sigma}=2$에서 $\sigma=1$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge11)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{11-10}{1}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge1)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

답 ③

13

조건 (가)에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+g(x)=e^x+3x^2+1$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)+g(1)=e+4$ ······ ㉡

조건 (나)의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)+0=e+4-1-2$

즉, $f(1)=e+1$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $(e+1)+g(1)=e+4$, $g(1)=3$

또 조건 (나)의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+\int_1^0 g(x)\,dx=1+0-0-2$

$f(0)-\int_0^1 g(x)\,dx=-1$

$f(0)=\int_0^1 g(x)\,dx-1$

따라서

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx+f(0)+g(1)&=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 g(x)\,dx-1+g(1)\\&=\int_0^1 \{f(x)+g(x)\}\,dx-1+3\\&=(e+1+1-1)+2=e+3\end{aligned}$$

답 ③

14

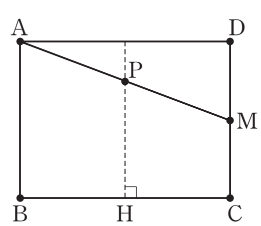
$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PB}$이므로 $2\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{BD}$에서

$2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\vec{0}$

$\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=-2\overrightarrow{PA}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PD}=-\overrightarrow{PA}$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PD}$는 점 P를 시점으로 하고 선분 CD의 중점을 종점으로 하는 벡터이므로 선분 CD의 중점을 M이라 하면

$\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PD}=-\overrightarrow{PA}$에서 점 P는 선분 AM의 중점이며 그림으로 나타내면 다음과 같다.



점 P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{AB}=h$라 하면

$\overline{PH}=\frac{3}{4}h$이므로 직사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면 삼각형 PBC의 넓이는 $\frac{3}{8}S$이다.

따라서 삼각형 PBC의 넓이는 $24\times\frac{3}{8}=9$이다.

답 ③

다른 풀이

$2\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{BD}$에서

$-2\overrightarrow{AP}-(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})+2(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})$

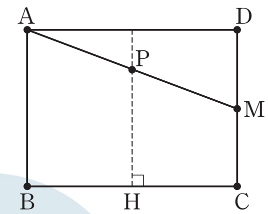
$=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$

$4\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$

선분 CD의 중점을 M이라 하면

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\times 2\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$이므로 점 P는 선분 AM의 중점이며 그림으로 나타내면 다음과 같다.



점 P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{AB}=h$라 하면

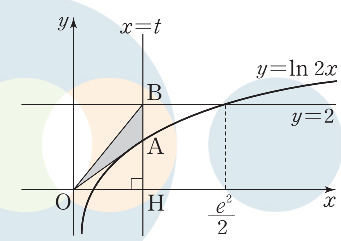
$\overline{PH}=\frac{3}{4}h$이므로 직사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면 삼각형 PBC의 넓이는 $\frac{3}{8}S$이다.

따라서 삼각형 PBC의 넓이는 $24\times\frac{3}{8}=9$이다.

15

점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(t,\ \ln 2t)$라 하면

$\ln 2x=2$에서 $x=\frac{e^2}{2}$이므로 $0<t<\frac{e^2}{2}$



직선 $x=t$가 x축과 만나는 점을 H라 하면 $\overline{OH}=t$, $\overline{AB}=2-\ln 2t$

이때 삼각형 OAB의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{OH}\times\overline{AB}=\frac{1}{2}t(2-\ln 2t)$

$S'(t)=\frac{1}{2}\left(2-\ln 2t-t\times\frac{2}{2t}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\ln 2t}{2}$

$S'(t)=0$에서 $1-\ln 2t=0$, $t=\frac{e}{2}$

$t=\frac{e}{2}$의 좌우에서 $S'(t)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로

$S(t)$는 $t=\frac{e}{2}$에서 극대이면서 최대이다.

따라서 $S(t)$의 최댓값은

$S\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{e}{2}\left\{2-\ln\left(2\times\frac{e}{2}\right)\right\}=\frac{e}{4}$

답 ④

16

원은 두 선분 OA와 OB에 모두 접하므로 원의 중심을 P라 하면 점 P와 선분 OA, 선분 OB 사이의 거리는 서로 같다.

따라서 $\angle\mathrm{POA}=\frac{\theta}{2}$이므로

$\overline{OP}=\dfrac{f(\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}}$

$\overline{OP}+f(\theta)=2$이므로 $\dfrac{f(\theta)}{\sin\dfrac{\theta}{2}}+f(\theta)=2$

$$f(\theta)=\frac{2\sin\dfrac{\theta}{2}}{1+\sin\dfrac{\theta}{2}}$$

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{2\sin\dfrac{\theta}{2}}{2\times\dfrac{\theta}{2}}\times\frac{1}{1+\sin\dfrac{\theta}{2}}\right)=1$

답 ③

17

5개의 공이 들어 있는 주머니에서 동시에 3개의 공을 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_5C_3=10$이고, X는 5, 6, 7, 8의 값을 가질 수 있다.

(ⅰ) $X=5$인 경우는 숫자 1이 적힌 공 1개와 숫자 2가 적힌 공 2개를 꺼내는 경우이므로

$P(X=5)=\dfrac{1\times1}{10}=\dfrac{1}{10}$

(ⅱ) $X=6$인 경우는 숫자 1, 2, 3이 적힌 공을 1개씩 꺼내는 경우이므로

$P(X=6)=\dfrac{1\times2\times2}{10}=\dfrac{4}{10}=\boxed{\dfrac{2}{5}}$

(ⅲ) $X=7$인 경우는 숫자 1이 적힌 공 1개와 숫자 3이 적힌 공 2개를 꺼내거나 숫자 2가 적힌 공 2개와 숫자 3이 적힌 공 1개를 꺼내는 경우이므로

$P(X=7)=\dfrac{1\times1+1\times2}{10}=\boxed{\dfrac{3}{10}}$

(ⅳ) $X=8$인 경우는 숫자 2가 적힌 공 1개와 숫자 3이 적힌 공 2개를 꺼내는 경우이므로

$P(X=8)=\dfrac{2\times1}{10}=\dfrac{1}{5}$

(ⅰ)~(ⅳ)에서

$E(X)=5\times\dfrac{1}{10}+6\times\dfrac{2}{5}+7\times\dfrac{3}{10}+8\times\dfrac{1}{5}=\boxed{\dfrac{33}{5}}$

이다.

따라서 $a=\dfrac{2}{5}$, $b=\dfrac{3}{10}$, $c=\dfrac{33}{5}$이므로

$$\frac{c}{ab}=\frac{\dfrac{33}{5}}{\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{10}}=55$$

답 ③

18

n명을 임의추출하여 얻은 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}=0.4$

모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.4-1.96\times\sqrt{\dfrac{0.4\times0.6}{n}}\le p\le 0.4+1.96\times\sqrt{\dfrac{0.4\times0.6}{n}}$이므로

$b-a=2\times1.96\times\sqrt{\dfrac{0.4\times0.6}{n}}=0.1568$

$\sqrt{\dfrac{0.4\times0.6}{n}}=0.04$, $\dfrac{0.4\times0.6}{n}=(0.04)^2$

따라서 $n=150$

답 ②

19

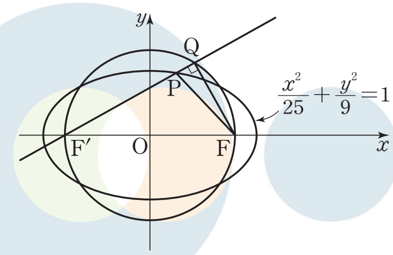
초점 F의 x좌표를 c $(c>0)$이라 하면

$c^2=25-9=16$에서 $c=4$

두 초점의 좌표는 $F(4,\ 0)$, $F'(-4,\ 0)$이고, $\overline{FF'}=8$이다.

점 Q는 선분 FF'이 지름인 원 위의 점이므로

$\angle FQF'=\dfrac{\pi}{2}$



$\overline{PQ}=1$이므로 $\overline{QF'}=\overline{PQ}+\overline{PF'}=1+\overline{PF'}$

직각삼각형 FQF'에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{QF}^2+\overline{QF'}^2=\overline{FF'}^2$

$\overline{QF}^2+\overline{QF'}^2=8^2$

$\overline{QF}^2+(1+\overline{PF'})^2=8^2$ ...... ㉠

또한 직각삼각형 FQP에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{PF}^2=\overline{PQ}^2+\overline{QF}^2$

$\overline{QF}^2=\overline{PF}^2-1$ ...... ㉡

한편, 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=10$

$\overline{PF}=10-\overline{PF'}$ ...... ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$\overline{QF}^2=(10-\overline{PF'})^2-1$ ...... ㉣

㉣을 ㉠에 대입하면

$(10-\overline{PF'})^2-1+(1+\overline{PF'})^2=8^2$

$2\overline{PF'}^2-18\overline{PF'}+36=0$, $\overline{PF'}^2-9\overline{PF'}+18=0$

$(\overline{PF'}-3)(\overline{PF'}-6)=0$에서 $\overline{PF'}=3$ 또는 $\overline{PF'}=6$

점 P는 제1사분면의 점이므로 $\overline{PF'}=6$

$\overline{QF}^2=(10-\overline{PF'})^2-1=(10-6)^2-1=15$에서 $\overline{QF}=\sqrt{15}$

따라서 삼각형 FQF'의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times\overline{QF}\times\overline{QF'}&=\frac{1}{2}\times\overline{QF}\times(\overline{PF'}+\overline{PQ})\\&=\frac{1}{2}\times\sqrt{15}\times(6+1)\\&=\frac{7\sqrt{15}}{2}\end{aligned}$$

답 ①

20

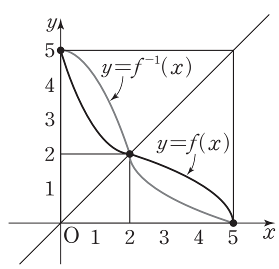
구간 $[0,\ 2]$에서 $f(x)$가 증가하는 함수라 가정하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(0,\ 0)$, $(2,\ 2)$를 지나고

$\displaystyle\int_0^2\{f(x)+f^{-1}(x)\}\,dx=2\times2=4$이다.

그런데 $\displaystyle\int_0^2\{f(x)+f^{-1}(x)\}\,dx=14$이므로 $f(x)$가 증가하는 함수라는 가정에 모순이다.

따라서 $f(x)$는 구간 $[0,\ 2]$에서 감소하는 함수이고 실수 전체의 집합

에서 역함수를 가지므로 실수 전체의 집합에서 감소하는 함수이다.
$y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $x=0$에서 만나므로
$f(0)=f^{-1}(0)=a$라 하면 $f(0)=a$에서 $f^{-1}(a)=0$, $f^{-1}(0)=a$에서 $f(a)=0$이므로 $f(a)=f^{-1}(a)=0$이다.
즉, 두 그래프가 $x=0$에서 만나면 $x=a$에서도 만난다.
$a=2$라 하면 $f(0)=f^{-1}(0)=2$에서 $f(0)=2$, $f(2)=0$이고 $f(x)$는 연속인 감소하는 함수이므로 $0<x<2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 교점을 갖는다. 이는 $x=0$, $x=2$, $x=5$인 점에서만 만난다는 가정에 모순이다. 따라서 $a=5$이며
$f(0)=f^{-1}(0)=5$에서 $f(0)=5$, $f(5)=0$임을 알 수 있다. 또한 연속인 감소하는 함수이므로 $f(2)=2$이다. 즉, 두 그래프는
$(0, 5)$, $(2, 2)$, $(5, 0)$에서 만난다는 것을 알 수 있다.
$\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{11}{2}$, $\int_0^2 f^{-1}(x)\,dx=\frac{17}{2}$이므로 $y=f(x)$와
$y=f^{-1}(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$\int_2^5 f(x)\,dx=A$, $\int_2^5 f^{-1}(x)\,dx=B$라 하면

$\int_0^2 f(x)\,dx=4+B=\frac{11}{2}$에서 $B=\frac{3}{2}$

$\int_0^2 f^{-1}(x)\,dx=4+A=\frac{17}{2}$에서 $A=\frac{9}{2}$

따라서 $\int_2^5 \{f(x)+f^{-1}(x)\}\,dx=A+B=\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=6$

답 ①

21

$f(x)=\frac{(x-a)x}{x^2+1}=\frac{x^2-ax}{x^2+1}$에서

$$f'(x)=\frac{(2x-a)(x^2+1)-(x^2-ax)\times 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{ax^2+2x-a}{(x^2+1)^2}$$

ㄱ. $a=0$이면 $f'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$이므로

$f'(-x)=\frac{2\times(-x)}{\{(-x)^2+1\}^2}=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}=-f'(x)$ (참)

ㄴ. $a=\sqrt{3}$이면

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{3}x^2+2x-\sqrt{3}=0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})}}{\sqrt{3}}=\frac{-1\pm 2}{\sqrt{3}}$

$x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$-\sqrt{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 열린 구간 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$에서 증가하지 않는다. (거짓)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점 O를 지나고, $f'(x)=0$에서

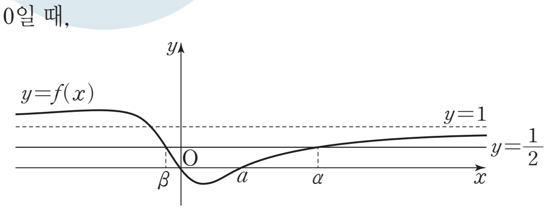
$ax^2+2x-a=0$ …… ㉠

$a=0$일 때, ㉠에서 $x=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가지고, 그 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

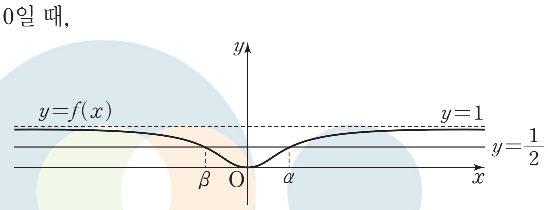
$a\neq 0$일 때, 방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=1+a^2>0$이므로 방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

또한 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$에서 점근선이 직선 $y=1$이므로 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=\frac{1}{2}$과 서로 다른 두 점에서 만나고, 그 두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha>\beta)$라 하면 구간 $(-\infty, \beta)$와 구간 (α, ∞)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=\frac{1}{2}$의 위쪽에 있다.

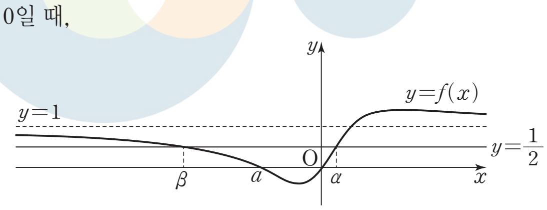
$a>0$일 때,



$a=0$일 때,



$a<0$일 때,



닫힌 구간 $[t-3, t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $g(t)$이므로
모든 실수 t에 대하여 $g(t)\geq\frac{1}{2}$이 되기 위해서는

$\alpha-\beta\leq 3$ …… ㉡

이어야 한다. α, β는 방정식 $f(x)=\frac{1}{2}$의 서로 다른 두 실근이므로

$\frac{(x-a)x}{x^2+1}=\frac{1}{2}$에서 $x^2-2ax-1=0$
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=-1$
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(2a)^2-4\times(-1)=4a^2+4$
즉, $\alpha-\beta=\sqrt{4a^2+4}$
이것을 ㉡에 대입하면 $\sqrt{4a^2+4}\leq 3$
$4a^2+4\leq 9$에서 $4a^2\leq 5$이므로 $-\frac{\sqrt{5}}{2}\leq a\leq\frac{\sqrt{5}}{2}$
즉, $-\frac{\sqrt{5}}{2}\leq a\leq\frac{\sqrt{5}}{2}$이면 모든 실수 t에 대하여 $g(t)\geq\frac{1}{2}$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

22

${}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

답 120

23

$f'(x)=2e^{3x^2+1}+(2x+1)e^{3x^2+1}\times6x$이므로

$f'(1)=2e^4+3e^4\times6=20e^4$

따라서 $e^{-4}\times f'(1)=e^{-4}\times20e^4=20$

답 20

24

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{2}{3}\pi=5\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{2}$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=5^2-2\times\left(-\frac{15}{2}\right)+3^2$

$=49$

따라서 $|\vec{a}-\vec{b}|=7$

답 7

25

$2\sin x\cos x-1=\sin x-2\cos x$에서

$2\sin x\cos x-\sin x+2\cos x-1=0$

$(\sin x+1)(2\cos x-1)=0$

$\sin x=-1$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

(i) $0\le x<2\pi$일 때, $\sin x=-1$에서 $x=\frac{3}{2}\pi$

(ii) $0\le x<2\pi$일 때, $\cos x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 해의 합은

$\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{5}{3}\pi=\frac{7}{2}\pi$

따라서 $p=2$, $q=7$이므로 $p+q=2+7=9$

답 9

26

전체 학생의 집합을 S, 문화체험을 희망한 학생의 집합을 A, 진로체험을 희망한 학생의 집합을 B라 하면

$n(S)=400$, $n(A)=300$, $n(B)=160$이고,

$n(A\cup B)=n(S)=400$이므로 $n(A\cap B)=60$이다.

이 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 문화체험과 진로체험을 모두 희망한 학생일 때, 이 학생이 여학생일 확률은 $\frac{2}{3}$이므로 문화체험과 진로체험을 모두 희망한 학생 중 여학생은 40명, 남학생은 20명이다.

또한 진로체험만 희망한 학생의 수는 $n(B)-n(A\cap B)=100$이고 남학생의 수와 여학생의 수가 같으므로 각각 50명씩이다.

주어진 상황을 표로 정리하면 다음과 같다.

(단위: 명)

	문화체험만 희망	모두 희망	진로체험만 희망
남학생	240	20	50
여학생		40	50

따라서 이 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 진로체험을 선택한 학생일 때, 이 학생이 남학생일 확률은 $\frac{70}{160}=\frac{7}{16}$이다.

따라서 $p=16$, $q=7$이므로 $p+q=16+7=23$

답 23

27

방정식 $a+b+c=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 서로 다른 3개에서 9개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_9={}_{3+9-1}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_2=\frac{11\times10}{2\times1}=55$

$a>b$일 때, 방정식 $a+b+c=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $a<b$일 때, 방정식 $a+b+c=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같다.

$a=b$일 때, 방정식 $a+b+c=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)는

$(0, 0, 9)$, $(1, 1, 7)$, $(2, 2, 5)$, $(3, 3, 3)$, $(4, 4, 1)$

이므로 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$\frac{55-5}{2}=25$

답 25

다른 풀이

조건 (나)에서 $a>b$이므로 이 부등식의 양변에 $b+c$를 더하면

$a+b+c>b+b+c=2b+c$

이때 조건 (가)에서 $a+b+c=9$이므로

$9>2b+c$, 즉 $2b+c\le8$

(i) $b=0$일 때 $0\le c\le8$이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $8-0+1=9$

(ii) $b=1$일 때 $0\le c\le6$이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $6-0+1=7$

(iii) $b=2$일 때 $0\le c\le4$이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $4-0+1=5$

(iv) $b=3$일 때 $0\le c\le2$이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $2-0+1=3$

(v) $b=4$일 때 $c=0$이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 1

(i)~(v)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$9+7+5+3+1=25$

28

초점의 좌표가 $(2, 0)$, $(-2, 0)$이므로 $a^2+b^2=4$이다.

선분 F′F를 3 : 1로 내분한 점을 M이라 하면 $\mathrm{M}(1, 0)$이고, 조건에서 $p=a^2$이다.

또한 $\dfrac{p^2}{a^2}-\dfrac{q^2}{b^2}=1$에서 $q^2=b^2(a^2-1)$, $q=\sqrt{b^2(a^2-1)}$

$\overline{\text{PO}}^2=p^2+q^2$

$\overline{\text{PF}}^2=(p-2)^2+q^2$

$$\begin{aligned}\overline{\text{PO}}^2+\overline{\text{PF}}^2&=2p^2-4p+4+2q^2\\&=2a^4-4a^2+4+2(4-a^2)(a^2-1)\\&=6a^2-4\end{aligned}$$

$\overline{\text{PO}}^2+\overline{\text{PF}}^2=14$이므로

$6a^2-4=14$에서 $a^2=3$, $b^2=1$

p, q는 양수이므로 $p=3$, $q=\sqrt{2}$에서 점 P의 좌표는 $(3, \sqrt{2})$이다.

따라서 $\overline{\text{PF}'}=\sqrt{\{3-(-2)\}^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{27}$이므로 $k^2=27$

답 27

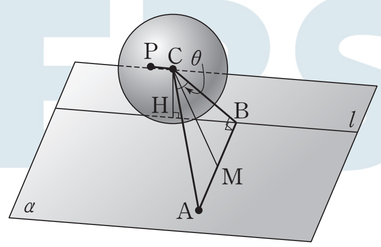
29

구의 중심을 C라 하면 $|\overrightarrow{\text{PC}}|=2$

$\overline{\text{CH}}\perp\alpha$, $\overline{\text{AB}}\perp\overline{\text{HB}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\angle\text{CBA}=\dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{PA}}\cdot\overrightarrow{\text{PB}}&=(\overrightarrow{\text{PC}}+\overrightarrow{\text{CA}})\cdot(\overrightarrow{\text{PC}}+\overrightarrow{\text{CB}})\\&=|\overrightarrow{\text{PC}}|^2+\overrightarrow{\text{PC}}\cdot(\overrightarrow{\text{CA}}+\overrightarrow{\text{CB}})+\overrightarrow{\text{CA}}\cdot\overrightarrow{\text{CB}}\\&=4+\overrightarrow{\text{PC}}\cdot(\overrightarrow{\text{CA}}+\overrightarrow{\text{CB}})+\overrightarrow{\text{CA}}\cdot\overrightarrow{\text{CB}}\end{aligned}$$



선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\overrightarrow{\text{CA}}+\overrightarrow{\text{CB}}=2\times\dfrac{\overrightarrow{\text{CA}}+\overrightarrow{\text{CB}}}{2}=2\overrightarrow{\text{CM}}$

$\angle\text{ACB}=\theta$라 하면 삼각형 ABC는 직각삼각형이므로

$\overrightarrow{\text{CA}}\cdot\overrightarrow{\text{CB}}=|\overrightarrow{\text{CA}}||\overrightarrow{\text{CB}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\text{CB}}|^2$

$\overline{\text{CH}}=2$, $\overline{\text{BH}}=4$이므로 직각삼각형 CHB에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\text{CB}}^2=\overline{\text{CH}}^2+\overline{\text{BH}}^2=2^2+4^2=20$

즉, $|\overrightarrow{\text{CB}}|^2=\overline{\text{CB}}^2=20$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{PA}}\cdot\overrightarrow{\text{PB}}&=4+\overrightarrow{\text{PC}}\cdot(\overrightarrow{\text{CA}}+\overrightarrow{\text{CB}})+\overrightarrow{\text{CA}}\cdot\overrightarrow{\text{CB}}\\&=4+2\overrightarrow{\text{PC}}\cdot\overrightarrow{\text{CM}}+|\overrightarrow{\text{CB}}|^2\\&=4+2\overrightarrow{\text{PC}}\cdot\overrightarrow{\text{CM}}+20\\&=24+2\overrightarrow{\text{PC}}\cdot\overrightarrow{\text{CM}}\end{aligned}$$

이때 $\overrightarrow{\text{PA}}\cdot\overrightarrow{\text{PB}}$의 값은 $\overrightarrow{\text{PC}}\cdot\overrightarrow{\text{CM}}$의 값이 최소일 때 최솟값을 갖는다.

두 벡터 $\overrightarrow{\text{PC}}$, $\overrightarrow{\text{CM}}$이 이루는 각의 크기를 θ' $(0\le\theta'\le\pi)$라 하면

$\overrightarrow{\text{PC}}\cdot\overrightarrow{\text{CM}}$의 값은 $\overrightarrow{\text{PC}}\cdot\overrightarrow{\text{CM}}=|\overrightarrow{\text{PC}}||\overrightarrow{\text{CM}}|\cos\theta'$에서 $\cos\theta'=-1$일 때 최소이다.

직각삼각형 CBM에서 $\overline{\text{CB}}^2=20$이고,

$\overline{\text{BM}}=\dfrac{1}{2}\overline{\text{AB}}=\dfrac{1}{2}\times6=3$이므로 직각삼각형 CBM에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\text{CM}}=\sqrt{\overline{\text{CB}}^2+\overline{\text{BM}}^2}=\sqrt{20+3^2}=\sqrt{29}$

즉, $|\overrightarrow{\text{CM}}|=\overline{\text{CM}}=\sqrt{29}$

따라서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{PA}}\cdot\overrightarrow{\text{PB}}&=24+2\overrightarrow{\text{PC}}\cdot\overrightarrow{\text{CM}}\\&\ge24-2|\overrightarrow{\text{PC}}||\overrightarrow{\text{CM}}|\\&=24-2\times2\times\sqrt{29}\\&=24-4\sqrt{29}\end{aligned}$$

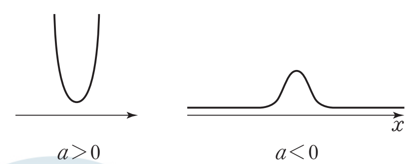
즉, $a=24$, $b=-4$이므로

$a+b=24+(-4)=20$

답 20

30

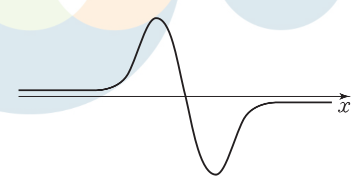
$f(x)=e^{ax^2+bx+c}$에서 함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 직선 $x=-\dfrac{b}{2a}$에 대하여 대칭이고, 이계도함수를 이용하면 $a>0$일 때 $f(x)$는 아래로 볼록, $a<0$일 때 $f(x)$는 위로 볼록하고 a의 부호에 따른 함수 $f(x)=e^{ax^2+bx+c}$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하며

$f'(4)\le f'(x)\le f'(3)$이므로 함수 $f'(x)$는 $x=3$일 때 최댓값, $x=4$일 때 최솟값을 가지며 이 조건은 $a<0$일 때 만족시킨다.

$a<0$인 경우 함수 $f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



그래프의 개형에서 함수 $f'(x)$는 $x=4$일 때 최소이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 $x=4$의 좌우에서 접선의 기울기가 감소하다가 증가하므로 $f''(4)=0$이다.

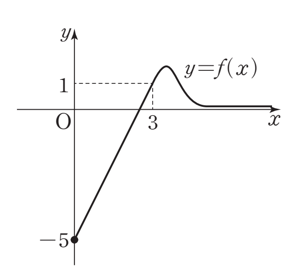
또한 $f'(3)=-f'(4)$이므로 함수 $f'(x)$는 $x=3$일 때 최대이며 같은 방법으로 $f''(3)=0$임을 알 수 있다.

$f''(x)=\{2a+(2ax+b)^2\}e^{ax^2+bx+c}=0$의 두 근이 3 또는 4이므로

$4a^2x^2+4abx+b^2+2a=4a^2(x-3)(x-4)=0$에서 $4ab=-28a^2$, $b^2+2a=48a^2$이고 두 식을 연립하면 $a=-2$, $b=14$이다.

또한 $f(4)=1$이므로 $f(4)=e^{-32+56+c}=e^0=1$에서 $c=-24$이므로 $x\ge3$일 때 $f(x)=e^{-2x^2+14x-24}$이다.

$f(3)=e^{-18+42-24}=e^0=1$이고, $f(0)=-5$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$x\geq3$일 때 $f(x)=e^{-2x^2+14x-24}$에서
$f'(x)=(-4x+14)e^{-2x^2+14x-24}$
$f'(4)=-2$이고 $f'(3)=-f'(4)=2$이므로
조건 (나)에서 $-2=f'(4)\leq f'(x)\leq f'(3)=2$
함수 $y=f(x)$의 그래프는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 점 A$(0, -5)$와 점 B$(3, 1)$을 지나므로 $f(0)=-5$, $f(3)=1$이며 $f'(x)\leq2$이므로

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt+f(0)\leq\int_0^x 2\,dt-5=2x-5$$

만일 $0<x_1<3$인 x_1이 존재하여 $f(x_1)<2x_1-5$라 하면
평균값 정리에 의하여 $x_1<c<3$인 c가 존재하여

$$f'(c)=\frac{f(3)-f(x_1)}{3-x_1}>\frac{1-(2x_1-5)}{3-x_1}=2$$

이므로 $f'(x)\leq2$인 것에 모순이다.
따라서 구간 $(0, 3)$에서 $f(x)=2x-5$이고 $f(0)=-5$, $f(3)=1$이므로 결국 구간 $[0, 3]$에서 $f(x)=2x-5$이다.

즉, $f(x)=\begin{cases}2x-5 & (0\leq x<3)\\ e^{-2x^2+14x-24} & (x\geq3)\end{cases}$

$$\int_2^{\frac{7}{2}}(2x-7)f(x)dx$$
$$=\int_2^3(2x-7)(2x-5)dx+\int_3^{\frac{7}{2}}(2x-7)e^{-2x^2+14x-24}\,dx$$

$$\begin{aligned}\int_2^3(2x-7)(2x-5)dx&=\int_2^3(4x^2-24x+35)\,dx\\&=\left[\frac{4}{3}x^3-12x^2+35x\right]_2^3\\&=(36-108+105)-\left(\frac{32}{3}-48+70\right)\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$\int_3^{\frac{7}{2}}(2x-7)e^{-2x^2+14x-24}\,dx$에서 $-2x^2+14x-24=t$라 하면

$-4x+14=\frac{dt}{dx}$이고 $x=3$일 때 $t=0$, $x=\frac{7}{2}$일 때 $t=\frac{1}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\int_3^{\frac{7}{2}}\left\{-\frac{1}{2}(-4x+14)\right\}e^{-2x^2+14x-24}\,dx&=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}e^t\right)dt\\&=-\left[\frac{1}{2}e^t\right]_0^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{e}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_2^{\frac{7}{2}}(2x-7)f(x)dx&=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{e}}{2}\right)\\&=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{e}\end{aligned}$$

이므로 $\int_2^{\frac{7}{2}}(2x-7)f(x)dx+\frac{1}{2}\sqrt{e}=\frac{5}{6}$
따라서 $p=6$, $q=5$이므로
$p+q=11$

답 11

실전 모의고사 2회

본문 162~169쪽

01 ②	02 ②	03 ④	04 ①	05 ③
06 ③	07 ②	08 ⑤	09 ④	10 ③
11 ④	12 ②	13 ②	14 ⑤	15 ②
16 ①	17 ③	18 ⑤	19 ①	20 ⑤
21 ③	22 8	23 21	24 3	25 62
26 300	27 12	28 469	29 135	30 50

01

$|-2\vec{a}|=2|\vec{a}|=2\times\sqrt{3^2+4^2}=10$

답 ②

02

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{\sin 2x}&=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+4x)}{4x}\times\frac{2x}{\sin 2x}\times\frac{4x}{2x}\right\}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}\times\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sin 2x}\times2\\&=1\times1\times2\\&=2\end{aligned}$$

답 ②

03

$f(x)=e^{2x}$에서 $f'(x)=2e^{2x}$이므로
$f'(1)=2e^2$

답 ④

04

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{12}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 ①

05

$x^2+1=t$라 하면 $2x\times\frac{dx}{dt}=1$이고 $x=0$일 때 $t=1$, $x=\sqrt{e-1}$일 때 $t=e$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{e-1}}2x\ln(x^2+1)\,dx&=\int_1^e\ln t\,dt\\&=\Big[t\ln t-t\Big]_1^e\\&=(e-e)-(0-1)\\&=1\end{aligned}$$

답 ③

06

$\left(4x^2-\frac{1}{2x}\right)^9$의 전개식의 일반항은

$${}_9C_r(4x^2)^{9-r}\left(-\frac{1}{2x}\right)^r={}_9C_r\times4^{9-r}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^r\times x^{18-2r}\times x^{-r}$$
$$={}_9C_r\times4^{9-r}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^r\times x^{18-3r}$$

이고 상수항은 $18-3r=0$, 즉 $r=6$일 때이다.

따라서 구하는 상수항은

$${}_9C_6\times4^3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^6={}_9C_6\times2^6\times2^{-6}={}_9C_3$$
$$=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

답 ③

07

6개의 공 중에서 3개의 공을 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

서로 다른 세 수의 합이 6인 경우의 수는

$3+2+1$

의 1이고 서로 다른 세 수의 합이 9인 경우의 수는

$6+2+1=5+3+1=4+3+2$

의 3이므로 공에 적혀 있는 세 수의 합이 6 또는 9인 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$1+3=4$

따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

답 ②

08

$4x^2+y^2=4$에서 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$

$4-1=3$이므로 타원 $4x^2+y^2=4$의 두 초점의 좌표는

$F(0, \sqrt{3})$, $F'(0, -\sqrt{3})$이다.

타원 $4x^2+y^2=4$와 두 초점을 공유하고, 장축의 길이가 8인 타원을

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$이라 하면 $2b=8$에서 $b=4$이므로

$a^2=16-3=13$, 즉 $a=\sqrt{13}$

따라서 단축의 길이는 $2a=2\sqrt{13}$이다.

답 ⑤

09

점 H는 삼각형 BCD의 무게중심이므로

$$(\text{삼각형 CDH의 넓이})=\frac{1}{3}\times(\text{삼각형 BCD의 넓이})$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

선분 BC의 중점을 M이라 하면 $\overline{AM}\perp\overline{BC}$, $\overline{HM}\perp\overline{BC}$이므로 두 평면 ABC와 BCD가 이루는 각의 크기는 선분 AM과 선분 HM이 이루는 각의 크기와 같다.

$\angle AMH=\theta$라 하면

$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=2\sqrt{3}$, $\overline{HM}=\frac{1}{3}\overline{DM}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=\frac{2\sqrt{3}}{3}$이므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{HM}}{\overline{AM}}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$

답 ④

10

이 농장에서 재배한 사과 중 임의추출한 9개의 사과 무게의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(276, \frac{12^2}{9}\right)$, 즉 정규분포 $N(276, 4^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-276}{4}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$P(\overline{X}\geq270)=P\left(Z\geq\frac{270-276}{4}\right)$$
$$=P(Z\geq-1.5)$$
$$=0.5+P(0\leq Z\leq1.5)$$
$$=0.5+0.4332=0.9332$$

답 ③

11

x축 위의 점 $(t, 0)$ $(0\leq t\leq2\pi)$를 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{\sin t+3}$인 정사각형이므로 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=(\sqrt{\sin t+3})^2=\sin t+3$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^{2\pi}S(t)\,dt=\int_0^{2\pi}(\sin t+3)\,dt$$
$$=\Big[-\cos t+3t\Big]_0^{2\pi}$$
$$=(-\cos2\pi+6\pi)-(-\cos0+0)$$
$$=-1+6\pi-(-1)=6\pi$$

답 ④

12

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 하면

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{b}+3\vec{a}}{4}$

세 점 O, Q, P는 한 직선 위의 점이므로

$$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}k\vec{a}+\frac{1}{4}k\vec{b}=\frac{3}{2}k\times\left(\frac{1}{2}\vec{a}\right)+\frac{3}{4}k\times\left(\frac{1}{3}\vec{b}\right)$$
$$=\frac{3}{2}k\overrightarrow{OM}+\frac{3}{4}k\overrightarrow{ON}\ (\text{단, } k>0)$$

점 Q는 선분 MN을 내분하는 점이므로

$\frac{3}{2}k+\frac{3}{4}k=1$

$\frac{9}{4}k=1$, $k=\frac{4}{9}$

따라서 $\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}=\frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OP}|}=k=\frac{4}{9}$

답 ②

13

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}$의 극한값이 존재하고 $x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)-2\}=0$이고 함수 $f(x)$는 연속함수이므로 $f(1)=2$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로 $f'(1)=4$

$f(x)$가 $g(x)$의 역함수이므로 $g(2)=1$, $g'(2)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{4}$

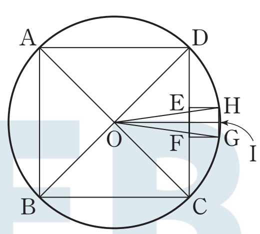
따라서 $h(x)=\dfrac{g(2x)}{f(x)}$에서

$h'(x)=\dfrac{2g'(2x)f(x)-g(2x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$이므로

$h'(1)=\dfrac{2g'(2)f(1)-g(2)f'(1)}{\{f(1)\}^2}=\dfrac{2\times\frac{1}{4}\times2-1\times4}{2^2}=-\dfrac{3}{4}$

답 ②

14



점 O에서 변 HG에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\angle\mathrm{HOI}=\dfrac{\alpha}{2}$

$\overline{\mathrm{EH}}=2\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{HI}}=2\sin\dfrac{\alpha}{2}$

$\overline{\mathrm{EH}}=2\overline{\mathrm{HI}}$이므로

$2\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sqrt{2}=2\times2\sin\dfrac{\alpha}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$4\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-4\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}+2=16\left(1-\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$

$20\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-4\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}-14=0$

$10\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-2\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}-7=0$

$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{72}}{10}=\dfrac{\sqrt{2}\pm6\sqrt{2}}{10}$

$0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{4}$에서 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos\dfrac{\alpha}{2}<1$이므로

$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

따라서

$\cos\alpha=\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\alpha}{2}\right)=\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

$\quad=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1=2\left(\dfrac{7\sqrt{2}}{10}\right)^2-1=\dfrac{24}{25}$

답 ⑤

15

$y^2=4\times1\times x$이므로 초점 F의 좌표는 $(1, 0)$

점 P는 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로 $b^2=4a$ $(b>0)$

$\overline{\mathrm{PH}}=a+1$이고 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=a+1$

$\overline{\mathrm{GF}}=2$이고 $\overline{\mathrm{HG}}=b=2\sqrt{a}$이므로

사각형 PHGF의 둘레의 길이는 $2(a+1)+2+2\sqrt{a}$

즉, $2a+4+2\sqrt{a}=16$에서

$a+\sqrt{a}-6=0$, $(\sqrt{a}+3)(\sqrt{a}-2)=0$

$\sqrt{a}>0$이므로 $\sqrt{a}=2$

즉, $a=4$이므로 점 P의 좌표는 $(4, 4)$이다.

$y^2=4x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\times\dfrac{dy}{dx}=4$

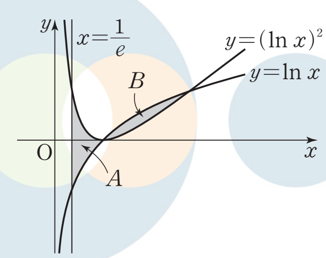
$y\neq0$이면 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{y}$

따라서 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(4, 4)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

답 ②

16



$\ln x=(\ln x)^2$에서 $\ln x(1-\ln x)=0$

$\ln x=0$ 또는 $\ln x=1$이므로 $x=1$ 또는 $x=e$

$S_1=\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1}\{(\ln x)^2-\ln x\}\,dx$

$\quad=\Big[x(\ln x)^2\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}-\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(x\times2\ln x\times\frac{1}{x}\right)dx-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\,dx$

$\quad=\Big[x(\ln x)^2\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}-3\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\,dx$

$\quad=\Big[x(\ln x)^2\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}-3\Big[x\ln x-x\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}$

$\quad=-\dfrac{1}{e}+\left(3-\dfrac{6}{e}\right)=3-\dfrac{7}{e}$

$S_2=\displaystyle\int_{1}^{e}\{\ln x-(\ln x)^2\}\,dx$

$\quad=\displaystyle\int_{1}^{e}\ln x\,dx-\Big[x(\ln x)^2\Big]_{1}^{e}+\int_{1}^{e}\left(x\times2\ln x\times\frac{1}{x}\right)dx$

$\quad=3\displaystyle\int_{1}^{e}\ln x\,dx-\Big[x(\ln x)^2\Big]_{1}^{e}$

$\quad=3\Big[x\ln x-x\Big]_{1}^{e}-\Big[x(\ln x)^2\Big]_{1}^{e}$

$\quad=3-e$

따라서 $S_1-S_2=\left(3-\dfrac{7}{e}\right)-(3-e)=e-\dfrac{7}{e}$

답 ①

17

(i) $X=0$인 경우는 주머니 A와 주머니 B에서 같은 수가 적힌 공을 꺼내는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{2}{6}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{4}=\boxed{\frac{1}{4}}$

(ii) $X=2$인 경우는 주머니 A에서 1이 적힌 공을 꺼내고 주머니 B에서 2가 적힌 공을 꺼낸 후 서로 바꾸어 넣는 경우, 주머니 A에서 2가 적힌 공을 꺼내고 주머니 B에서 3이 적힌 공을 꺼낸 후 서로 바꾸어 넣는 경우, 주머니 A에서 3이 적힌 공을 꺼내고 주머니 B에서 2가 적힌 공을 꺼낸 후 서로 바꾸어 넣는 경우의 3가지이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{6}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{4}=\boxed{\frac{1}{2}}$

(iii) $X=4$인 경우는 주머니 A에서 1이 적힌 공을 꺼내고 주머니 B에서 3이 적힌 공을 꺼낸 후 서로 바꾸어 넣는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$

(i), (ii), (iii)에서

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{4}=\boxed{2}$

따라서 $p=\frac{1}{4}$, $q=\frac{1}{2}$, $r=2$이므로

$p+q+r=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+2=\frac{11}{4}$

답 ③

18

정사각형의 한 변의 길이를 1이라 하고 좌표평면에서 $0\le x\le 10$, $0\le y\le 2$인 영역에 놓으면 정사각형의 각 꼭짓점은 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점이 된다.

세 점을 선택할 때 세 점이 한 직선 위에 있을 경우는

(i) x좌표가 같은 경우

즉, $(x, 0)$, $(x, 1)$, $(x, 2)$를 선택하는 경우

$0\le x\le 10$이므로 구하는 경우의 수는

$11\times{}_3\mathrm{C}_3=11$

(ii) y좌표가 같은 경우

즉, (x_1, y), (x_2, y), (x_3, y) $(x_1<x_2<x_3)$을 선택하는 경우

$0\le x\le 10$, $0\le y\le 2$이므로

구하는 경우의 수는

$3\times{}_{11}\mathrm{C}_3=3\times\frac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=495$

(iii) 3개의 가로 줄에서 각각 한 점을 선택하는 경우

즉, $(x_1, 0)$, $(x_2, 1)$, $(x_3, 2)$ $(x_1<x_2<x_3)$을 선택하는 경우

한 직선 위에 있으려면 기울기가 같아야 하므로

$\frac{1-0}{x_2-x_1}=\frac{2-1}{x_3-x_2}$에서 $x_2=\frac{x_1+x_3}{2}$이 되어야 하고 x_2는 정수이므로 x_1+x_3은 짝수가 되어야 한다.

구하는 경우의 수는 집합 $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$에서 2개의 원소를 선택하거나 집합 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$에서 2개의 원소를 선택하는 경우의 수와 같다.

또한 $x_1>x_2>x_3$인 경우에도 마찬가지이므로 구하는 경우의 수는

$2({}_6\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2)=2(15+10)=50$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$11+495+50=556$

답 ⑤

19

$2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$에서 $2\overrightarrow{\mathrm{PA}}=-(\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}})$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=-\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{2}$

선분 BC의 중점을 M이라 하면

$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{2}=\overrightarrow{\mathrm{PM}}$

그러므로 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}=-\overrightarrow{\mathrm{PM}}$

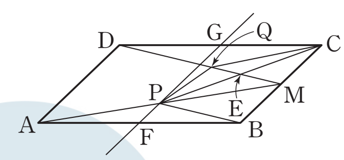
따라서 점 P는 선분 AM의 중점이다.

마찬가지로 $k\overrightarrow{\mathrm{QD}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}}+\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\vec{0}$에서

$k\overrightarrow{\mathrm{QD}}=-(\overrightarrow{\mathrm{QB}}+\overrightarrow{\mathrm{QC}})$

$\overrightarrow{\mathrm{QD}}=-\frac{2}{k}\times\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{QB}}+\overrightarrow{\mathrm{QC}}}{2}\right)=-\frac{2}{k}\overrightarrow{\mathrm{QM}}$

즉, 점 Q는 선분 DM을 $2:k$로 내분하는 점이다.



(삼각형 ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times$(평행사변형 ABCD의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times120=60$

이므로

(삼각형 PBC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times$(삼각형 ABC의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times60=30$

(삼각형 PMC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times$(삼각형 PBC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times30=15$

또한 사각형 BCQP의 넓이가 40이므로

(삼각형 QPC의 넓이)

$=$(사각형 BCQP의 넓이)$-$(삼각형 PBC의 넓이)

$=40-30=10$

직선 PC가 선분 QM과 만나는 점을 E라 하고 점 P를 지나고 직선 BC와 평행한 직선이 두 변 AB, DC와 만나는 점을 각각 F, G라 하자.

$\overline{\mathrm{PF}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{MB}}$이므로 $\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{PG}}=1:3$

(삼각형 DFC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times$(평행사변형 ABCD의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times120=60$

이므로

(삼각형 PCD의 넓이)$=\frac{3}{4}\times$(삼각형 DFC의 넓이)

$=\frac{3}{4}\times60=45$

(도형 DPQC의 넓이)

$=$(삼각형 PCD의 넓이)$-$(삼각형 QPC의 넓이)

$=45-10=35$

(도형 DPQC의 넓이) : (삼각형 QPC의 넓이)

$=35 : 10=\overline{\mathrm{DQ}} : \overline{\mathrm{QE}}$

이고

(삼각형 QPC의 넓이) : (삼각형 PMC의 넓이)

$=10 : 15=\overline{\mathrm{QE}} : \overline{\mathrm{EM}}$

$\overline{\mathrm{DQ}}=35t$라 하면 $\overline{\mathrm{QE}}=10t$, $\overline{\mathrm{EM}}=15t$이므로

$\overline{\mathrm{QM}}=25t$

$\overline{\mathrm{DQ}} : \overline{\mathrm{QM}}=7 : 5$

즉, 점 Q는 선분 DM을 $7 : 5$로 내분하는 점이므로

$7 : 5=2 : k$에서 $10=7k$

따라서 $k=\dfrac{10}{7}$

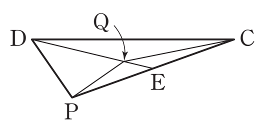
답 ①

참고

$\overline{\mathrm{DQ}} : \overline{\mathrm{QE}}=$(삼각형 DQC의 넓이) : (삼각형 QEC의 넓이)

$=$(삼각형 DPQ의 넓이) : (삼각형 QPE의 넓이)

이므로 $\overline{\mathrm{DQ}} : \overline{\mathrm{QE}}=$(도형 DPQC의 넓이) : (삼각형 QPC의 넓이)



20

두 점 $\mathrm{A}(1,\ -1,\ a)$, $\mathrm{B}(5,\ 1,\ b)$의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A', B'이라 하면

ㄱ. $\mathrm{A}'(1,\ -1,\ 0)$, $\mathrm{B}'(5,\ 1,\ 0)$이고, $\overline{\mathrm{A'B'}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos\dfrac{\pi}{3}$에서

$\sqrt{(5-1)^2+\{1-(-1)\}^2}$

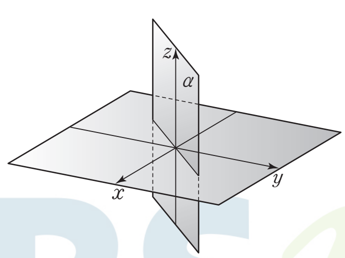
$=\sqrt{(5-1)^2+\{1-(-1)\}^2+(b-a)^2}\times\dfrac{1}{2}$

$\sqrt{20}=\sqrt{20+(b-a)^2}\times\dfrac{1}{2}$

$2\sqrt{20}=\sqrt{20+(b-a)^2}$

$(b-a)^2=(a-b)^2=60$ (참)

ㄴ. 평면 α는 두 점 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ -1)$, $\mathrm{Q}(0,\ 0,\ 3)$을 지나므로 z축을 포함하고, 점 $\mathrm{R}(1,\ 1,\ 0)$을 지나므로 그림과 같이 xy평면에 수직인 평면 $x-y=0$이다.



점 A와 평면 α에 대하여 대칭인 점의 z좌표는 a이다.

점 A'을 평면 α에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(-1,\ 1,\ 0)$이므로 구하는 점의 좌표는 $(-1,\ 1,\ a)$이다. (참)

ㄷ. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ -1,\ a)$, $\mathrm{B}(5,\ 1,\ b)$의 평면 α 위로의 정사영을 각각 A'', B''이라 하고, 점 A를 평면 α에 대하여 대칭이동한 점을 C라 하면 점 A''은 선분 AC의 중점이므로 $\mathrm{A}''(0,\ 0,\ a)$

같은 방법으로 점 B를 평면 α에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(1,\ 5,\ b)$이므로 $\mathrm{B}''(3,\ 3,\ b)$이다. 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영은 선분 $\mathrm{A''B''}$이므로

$\overline{\mathrm{A''B''}}=\sqrt{3^2+3^2+(b-a)^2}=\sqrt{78}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

21

조건 (가)에 의하여 $y=M(t)$의 그래프와 x축이 만나는 점은 원점뿐이고 조건 (다)에 의하여 $4\le t\le 7$에서 함수 $M(t)$는 상수함수임을 알 수 있다.

$f(x)=(x+a)e^{bx}$에서 $f'(x)=e^{bx}+b(x+a)e^{bx}=(bx+ab+1)e^{bx}$

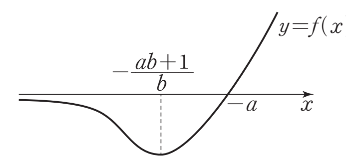
$f(x)=0$에서 $e^{bx}>0$이므로 $x=-a$

$f'(x)=0$에서 $e^{bx}>0$이므로 $x=-\dfrac{ab+1}{b}$

(ⅰ) $b>0$인 경우 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{ab+1}{b}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

또한 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

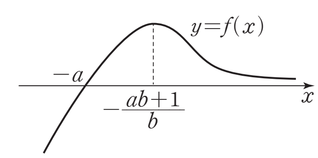


이때 $\lim\limits_{t\to\infty}M(t)=\infty$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $b<0$인 경우 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{ab+1}{b}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘

또한 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이때 $\lim\limits_{t\to-\infty}M(t)=-\infty$이므로 최솟값이 없고 $M(t)$의 최댓값은 $f\left(-\dfrac{ab+1}{b}\right)$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

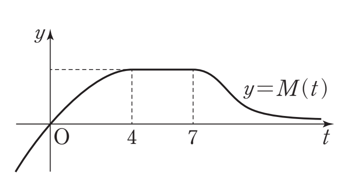
(ⅰ), (ⅱ)에서 $b<0$이다.

$t+1\le-\dfrac{ab+1}{b}$일 때, $M(t)=f(t+1)$이고

$t+1\ge-\dfrac{ab+1}{b}$이고 $t-2\le-\dfrac{ab+1}{b}$일 때, 즉

$-\dfrac{ab+1}{b}-1\le t\le-\dfrac{ab+1}{b}+2$일 때, $M(t)=f\left(-\dfrac{ab+1}{b}\right)$

$t-2\ge-\dfrac{ab+1}{b}$일 때, $M(t)=f(t-2)$이므로 함수 $y=M(t)$의 그래프는 그림과 같다.



즉, $M(0)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(1)=(1+a)e^{b}=0$에서 $a=-1$

$-\frac{ab+1}{b}-1=4$이고 $-\frac{ab+1}{b}+2=7$이므로

$-\frac{ab+1}{b}=-\frac{-b+1}{b}=5$

즉, $4b=-1$이므로 $b=-\frac{1}{4}$

따라서 $f'(x)=\left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}+1\right)e^{-\frac{x}{4}}$이므로 $f'(0)=\frac{5}{4}$

답 ③

22

${}_{n}\mathrm{C}_{2}=28$에서 $\frac{n(n-1)}{2\times1}=28$

$n(n-1)=2\times28=56$, $n^2-n-56=0$, $(n-8)(n+7)=0$

$n\geq2$이므로 $n=8$

답 8

23

진수의 조건에 의하여 $(x-8)(-x-1)>0$

즉, $(x-8)(x+1)<0$에서

$-1<x<8$ …… ㉠

$\log_2\{(x-8)(-x-1)\}>3$에서 $(x-8)(-x-1)>2^3$

$(x-8)(x+1)<-8$

$x^2-7x-8<-8$이므로 $x(x-7)<0$

$0<x<7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x는 1, 2, 3, 4, 5, 6이다.

따라서 구하는 모든 정수 x의 값의 합은 21이다.

답 21

24

$x^2-2xy+2y^3=10$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}(x^2)-\frac{d}{dx}(2xy)+\frac{d}{dx}(2y^3)=0$

$2x-2y-2x\times\frac{dy}{dx}+6y^2\times\frac{dy}{dx}=0$

$(2x-6y^2)\frac{dy}{dx}=2x-2y$

$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x-3y^2}$ (단, $x\neq3y^2$)

이때 곡선 $x^2-2xy+2y^3=10$ 위의 점 (4, 1)에서의 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}$에 $x=4$, $y=1$을 대입한 값과 같으므로 $\frac{4-1}{4-3}=3$

답 3

25

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 양변을 제곱하면

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{4}$

$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{8}$

따라서

$$\begin{aligned}\tan^2\theta+\cot^2\theta&=(\tan\theta+\cot\theta)^2-2\\&=\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2-2\\&=\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)^2-2\\&=\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)^2-2\\&=8^2-2=62\end{aligned}$$

답 62

26

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(15,\ 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-15}{3}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

또한 확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{Y-20}{4}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\leq a)=\mathrm{P}(Y\geq b)$에서

$\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{a-15}{3}\right)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{b-20}{4}\right)$이므로

$\frac{a-15}{3}=-\frac{b-20}{4}$

$4a-60=-3b+60$

$4a+3b=120$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{4a+3b}{2}\geq\sqrt{4a\times3b}$ (단, 등호는 $4a=3b$일 때 성립)

$\frac{120}{2}\geq\sqrt{12ab}$, $60^2\geq12ab$, $\frac{60^2}{12}\geq ab$, $300\geq ab$

따라서 ab는 $a=15$, $b=20$일 때 최댓값 300을 갖는다.

답 300

27

$0<x<2\pi$에서 $f(x)=4\sin x+2\geq-2$이고 $g(x)=-2x-2\leq-2$이므로

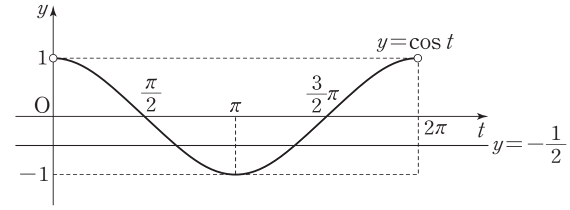
$f(x)\geq g(x)$

즉, $h(t)=4\sin t+2-(-2t-2)=4\sin t+2t+4$에서

$h'(t)=4\cos t+2$

$h'(t)=0$에서 $\cos t=-\frac{1}{2}$

함수 $y=\cos t\ (0<t<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$은 그림과 같다.



즉, $\cos t=-\frac{1}{2}$의 해는 $t=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $t=\frac{4}{3}\pi$

$0<t<2\pi$에서 함수 $h(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	(2π)
$h'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(t)$		↗	극대	↘	극소	↗	

함수 $h(t)$는 $t=\frac{2}{3}\pi$에서 극댓값을 가지므로

$$M=h\left(\frac{2}{3}\pi\right)=4\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)+\frac{4}{3}\pi+4=2\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi+4$$

이고, $t=\frac{4}{3}\pi$에서 극솟값을 가지므로

$$m=h\left(\frac{4}{3}\pi\right)=4\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)+\frac{8}{3}\pi+4=-2\sqrt{3}+\frac{8}{3}\pi+4$$

이다.

$M+m=4\pi+8$이므로 $a=4$, $b=8$

따라서 $a+b=4+8=12$

답 12

28

주사위의 눈이 1 또는 2가 나온 경우 점수는 1점

주사위의 눈이 3 또는 6이 나온 경우 점수는 3점

주사위의 눈이 4가 나온 경우 점수는 2점

주사위의 눈이 5가 나온 경우 점수는 5점

이므로 한 번의 시행에서 받을 수 있는 점수는 1점, 2점, 3점, 5점이고 각각의 점수를 받을 확률은 $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$이다.

첫 번째 시행에서 5 또는 6의 눈이 나올 사건을 A, 총 4번의 시행에서 나온 점수의 합이 9가 될 사건을 B라 하자.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

(i) 첫 번째 시행에서 5의 눈이 나오고 사건 B가 일어날 확률은

$5+(1+1+2)=9$이므로

$$\frac{1}{6}\times{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{12}{6^4}$$

(ii) 첫 번째 시행에서 6의 눈이 나오고 사건 B가 일어날 확률은

$3+(1+2+3)=9$, $3+(2+2+2)=9$이므로

$$\frac{1}{6}\times\left\{3!\times\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)^3\right\}=\frac{24+1}{6^4}=\frac{25}{6^4}$$

(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{12+25}{6^4}=\frac{37}{6^4}$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{37}{6^4}}{\frac{1}{3}}=\frac{37}{432}$$

따라서 $p=432$, $q=37$이므로 $p+q=432+37=469$

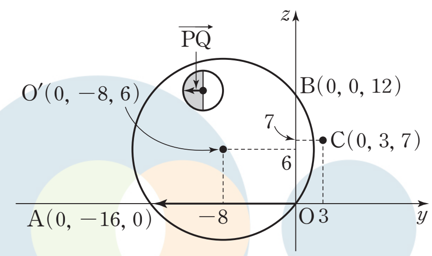
답 469

29

점 P가 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$을 만족시키므로 점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 구 S 위의 점이다. 한편, 구 S의 중심을 O′이라 할 때, O′의 좌표는 $(0,\ -8,\ 6)$이고 반지름의 길이가 10이다.

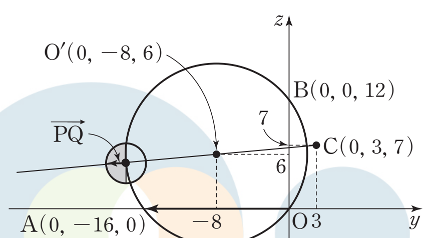
점 Q는 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\le 2$이므로 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구 위의 점 또는 내부의 점이고 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ge 0$에서 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$가 이루는 각의 크기 θ에 대하여 $\cos\theta\ge 0$을 만족시켜야 한다.

즉, $x=0$일 때의 yz평면을 정면으로 본 그림에서 점 Q는 색칠된 부분과 같이 중심 P를 지나고 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$를 법선벡터로 하는 평면으로 구를 잘라 만든 반구 위의 점 또는 내부의 점이다.

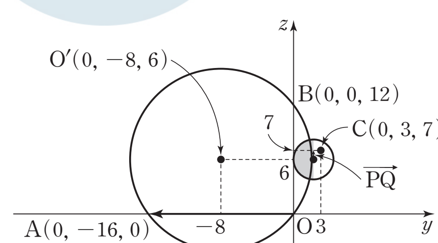


그림과 같이 직선 CO′이 구 S와 만나는 점 중 점 C로부터 더 먼 점이 P이고 이때 직선 CO′이 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구와 만나는 점 중 점 C로부터 더 먼 점을 Q라 할 때 $|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}|$는 최댓값을 가지므로

$$M=\sqrt{0^2+\{3-(-8)\}^2+(7-6)^2}+10+2$$
$$=\sqrt{122}+12$$



점 P가 점 $(0,\ 2,\ 6)$이고 점 Q가 $(0,\ 2,\ 7)$일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}|$는 최솟값을 가지므로 $m=1$



$M+m=(\sqrt{122}+12)+1=13+\sqrt{122}$이므로

$a=13$, $b=122$

따라서 $a+b=13+122=135$

답 135

30

$\int_0^a g(t)\,dt=A$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt=B$라 하면

$f(x)=2\sin 2x+A\cos x$

$$B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin 2t+A\cos t)dt$$
$$=\Big[-\cos 2t+A\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=(1+A)+1$$
$$=2+A$$

$g(x)=2e^{-2x}(-4x+B)$에서

$$A=\int_0^a 2e^{-2t}(-4t+B)\,dt$$

$$=\Big[-(-4t+B)e^{-2t}\Big]_0^a-\int_0^a 4e^{-2t}\,dt$$

$$=(4a-B)e^{-2a}+B-\Big[-2e^{-2t}\Big]_0^a$$

$$=(4a-B)e^{-2a}+B+2e^{-2a}-2$$

$$=(4a-B+2)e^{-2a}+(B-2)$$

$B-2=(4a-B+2)e^{-2a}+(B-2)$에서

$B=4a+2$이므로 $A=4a$

$$f(x)=2\sin 2x+4a\cos x$$
$$=2\sin(x+x)+4a\cos x$$
$$=4\sin x\cos x+4a\cos x$$
$$=4\cos x(\sin x+a)$$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos x>0$이므로

$f(x)=0$에서 $\sin x=-a$

$\sin\alpha=-a\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$h(a)$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|f(x)|\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|2\sin 2x+4a\cos x|\,dx$$

$$=-\int_0^{\alpha}(2\sin 2x+4a\cos x)\,dx+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(2\sin 2x+4a\cos x)\,dx$$

$$=-\Big[-\cos 2x+4a\sin x\Big]_0^{\alpha}+\Big[-\cos 2x+4a\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-2(-\cos 2\alpha+4a\sin\alpha)+(-1)+(1+4a)$$

$$=2\cos 2\alpha-8a\sin\alpha+4a$$

$$=2(1-2\sin^2\alpha)-8a\sin\alpha+4a$$

$$=-4\sin^2\alpha-8a\sin\alpha+4a+2$$

$$=-4\times(-a)^2-8a\times(-a)+4a+2$$

$$=4a^2+4a+2$$

$$=4\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+1$$

$-1\le a\le 0$에서 $a=-\frac{1}{2}$일 때, $h(a)$는 최솟값 1을 가지므로

$100(k+m)=100\left(-\frac{1}{2}+1\right)=50$

답 50

실전 모의고사 3회

본문 170~177쪽

01 ④	02 ②	03 ②	04 ④	05 ③
06 ⑤	07 ①	08 ⑤	09 ②	10 ③
11 ④	12 ①	13 ②	14 ④	15 ①
16 ①	17 ⑤	18 ④	19 ④	20 ③
21 ②	22 56	23 10	24 25	25 108
26 264	27 20	28 67	29 50	30 9

01

$\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(3,\ -2)$에서

$2\vec{a}=(2,\ 4)$

따라서 $2\vec{a}+\vec{b}=(2,\ 4)+(3,\ -2)=(5,\ 2)$이므로 벡터 $2\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은

$5+2=7$

답 ④

02

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+3x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}\times\frac{1}{\ln(1+3x^2)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\times\frac{1}{\ln(1+3x^2)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{1+\cos x}\times\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{x^2}{\ln(1+3x^2)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\times\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+3x^2)}{3x^2}\times 3}$$

$$=\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

답 ②

03

z축 위의 점은 x좌표와 y좌표가 모두 0이다.

즉, 선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점의 x좌표와 y좌표가 모두 0이므로

$\frac{b-4}{1-2}=0$, $\frac{-4-2a}{1-2}=0$

따라서 $a=-2$, $b=4$이므로

$a+b=2$

답 ②

04

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로 두 사건 A와 B^C도 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(B^C)=x$라 하면

$$\mathrm{P}(A\cup B^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^C)-\mathrm{P}(A\cap B^C)$$
$$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^C)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$$

에서 $\frac{7}{9}=\frac{2}{3}+x-\frac{2}{3}x$, $\frac{1}{3}x=\frac{1}{9}$

$x=\frac{1}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-x=\dfrac{2}{3}$

답 ④

다른 풀이

A는 $A\cup B^C$의 부분집합이고

$(A\cup B^C)-A=(A\cup B)^C$이므로

$\mathrm{P}((A\cup B)^C)=\dfrac{7}{9}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{9}$

즉, $\mathrm{P}(A\cup B)=1-\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{9}$

$\mathrm{P}(B)=x$라 하면

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\qquad\qquad=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

에서 $\dfrac{8}{9}=\dfrac{2}{3}+x-\dfrac{2}{3}x$, $\dfrac{1}{3}x=\dfrac{2}{9}$

따라서 $x=\dfrac{2}{3}$

05

$\sin x=t$라 하면 $\cos x=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=\dfrac{\pi}{6}$일 때 $t=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}t\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}$$
$$=\frac{3}{8}$$

답 ③

06

다항식 $(1-2x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4\mathrm{C}_r1^{4-r}(-2x)^r={}_4\mathrm{C}_r(-2)^rx^r$

x의 계수는 ${}_4\mathrm{C}_1\times(-2)=-8$,

x^2의 계수는 ${}_4\mathrm{C}_2\times(-2)^2=24$이므로

다항식 $(1-2x)^4(x+3)$의 전개식에서 x^2의 계수는

$(-8)\times1+24\times3=64$

답 ⑤

07

로그의 진수의 조건에 의하여 $x-1>0$, $10-x>0$이므로

$1<x<10$

$\log_2(x-1)+\log_2(10-x)\le3$에서

$\log_2(x-1)(10-x)\le3$

$(x-1)(10-x)\le2^3=8$

$x^2-11x+18\ge0$

$(x-2)(x-9)\ge0$

$x\le2$ 또는 $x\ge9$

이때 $1<x<10$이므로

$1<x\le2$ 또는 $9\le x<10$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 2, 9이므로 그 합은 11이다.

답 ①

08

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \dfrac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=400\times\dfrac{1}{5}=80$, $\mathrm{V}(X)=400\times\dfrac{1}{5}\times\left(1-\dfrac{1}{5}\right)=64$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 8^2)$을 따른다. $Z=\dfrac{X-80}{8}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(72\le X\le96)=\mathrm{P}\left(\frac{72-80}{8}\le Z\le\frac{96-80}{8}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le2)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)$$
$$=0.3413+0.4772$$
$$=0.8185$$

답 ⑤

09

$f(x)=(x^2+ax+b)e^x$에서

$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+b)e^x$

$\qquad=\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x$

점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기가 e이므로

$f'(1)=e$

$\{1^2+(a+2)+a+b\}e=e$

$2a+b=-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 점 $(1,\ (a+b+1)e)$가 직선 $y=e(x-1)$ 위의 점이므로

$(a+b+1)e=e(1-1)$

$a+b=-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

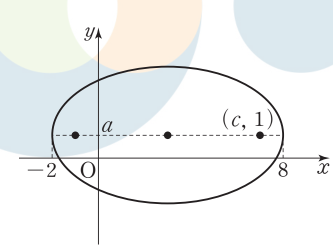
㉠, ㉡에서 $a=-1$, $b=0$이므로

$f(x)=(x^2-x)e^x$

따라서 $f(3)=(3^2-3)e^3=6e^3$

답 ②

10



두 점 $(8,\ a)$, $(-2,\ a)$ 사이의 거리는 $8-(-2)=10$이고, 타원의 장축의 길이가 10이므로 두 점 $(8,\ a)$, $(-2,\ a)$는 타원의 꼭짓점이고 타원의 초점은 직선 $y=a$ 위에 있다.

점 $(c,\ 1)$이 타원의 한 초점이므로 $a=1$

타원의 방정식에서 타원의 중심은 점 $(b,\ 1)$이고 실제로 타원의 중심

은 두 꼭짓점 $(8,\ 1)$, $(-2,\ 1)$의 중점인 점 $(3,\ 1)$이므로

$b=3$

즉, 타원 $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$은 초점의 좌표가 각각 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$인 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 타원 $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$의 초점의 좌표는 각각 $(7,\ 1)$, $(-1,\ 1)$이다.

$c>0$이므로 $c=7$

따라서 $a+b+c=1+3+7=11$

답 ③

11

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로

$3\sin(2x+a)+1=3\sin(-2x+a)+1$

$\sin 2x\cos a+\cos 2x\sin a$

$=\sin(-2x)\cos a+\cos(-2x)\sin a$

$\sin 2x\cos a+\cos 2x\sin a=-\sin 2x\cos a+\cos 2x\sin a$

$2\sin 2x\cos a=0$ …… ㉠

모든 실수 x에 대하여 ㉠을 만족시키려면 $\cos a=0$

이때 $0\le a\le\pi$이므로 $a=\frac{\pi}{2}$

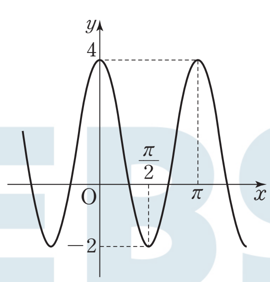
따라서 $f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+1$이므로

$$\begin{aligned}f(a)&=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\\&=3\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+1\\&=3\times(-1)+1\\&=-2\end{aligned}$$

답 ④

참고

함수 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+1$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



12

모든 실수 x에 대하여 $\tan(-x)=-\tan x$이므로

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=0$이다.

이때 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\tan x\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$

이므로 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\tan x\,dx=-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$

따라서

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x\,dx-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\tan x\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x\,dx-\left(-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx\right)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x(\tan^2 x+1)\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\sec^2 x\,dx\end{aligned}$$

이때 $\tan x=u$라 하면 $\sec^2 x=\frac{du}{dx}$이고, $x=0$일 때 $u=0$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $u=1$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\sec^2 x\,dx&=\int_0^1 u\,du=\left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^1\\&=\frac{1}{2}\times(1-0)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ①

13

10장의 카드 중에서 임의로 2장의 카드를 동시에 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_2=\frac{10\times 9}{2\times 1}=45$

카드에 적힌 두 수의 합이 5의 배수인 사건을 A, 두 수의 차가 1인 사건을 B라 하자.

카드에 적힌 두 수의 합이 5의 배수인 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 두 수의 합이 5인 경우

두 수가 $(1,\ 4)$, $(2,\ 3)$인 경우이므로 두 수의 합이 5인 경우의 수는 2이다.

(ⅱ) 두 수의 합이 10인 경우

두 수가 $(1,\ 9)$, $(2,\ 8)$, $(3,\ 7)$, $(4,\ 6)$인 경우이므로 두 수의 합이 10인 경우의 수는 4이다.

(ⅲ) 두 수의 합이 15인 경우

두 수가 $(5,\ 10)$, $(6,\ 9)$, $(7,\ 8)$인 경우이므로 두 수의 합이 15인 경우의 수는 3이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$\mathrm{P}(A)=\frac{2+4+3}{45}=\frac{1}{5}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $A\cap B$인 경우는 $(2,\ 3)$, $(7,\ 8)$로 2가지이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{45}$

따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{45}}{\frac{1}{5}}=\frac{2}{9}$

답 ②

14

$x=4e^{\frac{1}{2}t}$, $y=e^t-t$에서

$\frac{dx}{dt}=2e^{\frac{1}{2}t}$, $\frac{dy}{dt}=e^t-1$

점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(2e^{\frac{1}{2}t}\right)^2+(e^t-1)^2}$$
$$=\sqrt{4e^t+e^{2t}-2e^t+1}$$
$$=\sqrt{e^{2t}+2e^t+1}$$
$$=\sqrt{(e^t+1)^2}$$
$$=|e^t+1|$$
$$=e^t+1$$

시각 $t=a$에서 점 P의 속력이 3이므로

$e^a+1=3$, $a=\ln 2$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=\ln 2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\ln 2}(e^t+1)\,dt$$
$$=\left[e^t+t\right]_0^{\ln 2}$$
$$=(e^{\ln 2}+\ln 2)-(e^0+0)$$
$$=2+\ln 2-1$$
$$=1+\ln 2$$

답 ④

15

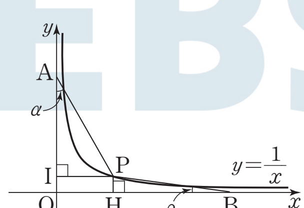
$f(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}}f(t)\,dt$에서 $x=0$일 때 $f(0)=0$이고, 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f'(x)dx$$
$$=\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx$$
$$=(0-0)-\left\{-f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=-1$$

답 ①

16



$\angle PAO=\alpha$, $\angle PBO=\beta$라 하자.

점 P의 좌표를 $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ $(1<a<6)$이라 하고, 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하자.

$\tan\alpha=\frac{\overline{IP}}{\overline{AI}}=\frac{a-0}{4-\frac{1}{a}}=\frac{4}{7}$에서

$7a=16-\frac{4}{a}$

$7a^2-16a+4=0$

$(7a-2)(a-2)=0$

$1<a<6$이므로 $a=2$

즉, 점 P의 좌표는 $\left(2, \frac{1}{2}\right)$이다.

$$\tan\beta=\frac{\overline{PH}}{\overline{HB}}=\frac{\frac{1}{2}-0}{6-2}=\frac{1}{8}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{\frac{4}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{4}{7}\times\frac{1}{8}}=\frac{\frac{39}{56}}{\frac{13}{14}}$$
$$=\frac{3}{4}$$

이때 $\angle APB=\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}$이므로

$$\tan(\angle APB)=\tan\left\{\frac{\pi}{2}+(\alpha+\beta)\right\}$$
$$=-\cot(\alpha+\beta)$$
$$=-\frac{1}{\tan(\alpha+\beta)}$$
$$=-\frac{4}{3}$$

답 ①

다른 풀이

점 P의 좌표를 $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ $(1<a<6)$이라 하면

직선 AP의 기울기는

$$\frac{\frac{1}{a}-4}{a-0}=\frac{1-4a}{a^2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, 직선 AP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$라 하면

$\theta=\frac{\pi}{2}+\angle PAO$이고, $\tan(\angle PAO)=\frac{4}{7}$이므로

$$\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\angle PAO\right)$$
$$=-\cot(\angle PAO)$$
$$=-\frac{1}{\tan(\angle PAO)}$$
$$=-\frac{7}{4} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$\frac{1-4a}{a^2}=-\frac{7}{4}$

$7a^2-16a+4=0$

$(7a-2)(a-2)=0$

$1<a<6$이므로 $a=2$

즉, P의 좌표는 $\left(2, \frac{1}{2}\right)$이다.

이때 직선 BP의 기울기는

$$\frac{0-\frac{1}{2}}{6-2}=-\frac{1}{8}$$

이므로 직선 BP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를

$\theta'\left(\frac{\pi}{2}<\theta'<\pi\right)$이라 하면

$\tan\theta'=-\frac{1}{8}$이다.

$\angle\mathrm{APB}=\theta+(\pi-\theta')$이므로

$$\begin{aligned}\tan(\angle\mathrm{APB})&=\tan(\theta+\pi-\theta')\\&=\tan(\theta-\theta')\\&=\frac{\tan\theta-\tan\theta'}{1+\tan\theta\tan\theta'}\\&=\frac{-\frac{7}{4}-\left(-\frac{1}{8}\right)}{1+\left(-\frac{7}{4}\right)\times\left(-\frac{1}{8}\right)}\\&=\frac{-\frac{13}{8}}{\frac{39}{32}}\\&=-\frac{4}{3}\end{aligned}$$

17

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 부분집합의 개수는 $\boxed{2^4=16}$이고, 확률변수 X는 0부터 3까지의 정수를 가질 수 있으므로 정수 $k\ (0\le k\le 3)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{\boxed{{}_4\mathrm{C}_k\times\frac{3^{4-k}-1}{2}}}{{}_{16}\mathrm{C}_2}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\sum_{k=0}^{3}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}\\&=\frac{1}{{}_{16}\mathrm{C}_2}\sum_{k=0}^{3}\left(k\times\boxed{{}_4\mathrm{C}_k\times\frac{3^{4-k}-1}{2}}\right)\\&=\frac{1}{{}_{16}\mathrm{C}_2}\left(0\times{}_4\mathrm{C}_0\times\frac{3^4-1}{2}+1\times{}_4\mathrm{C}_1\times\frac{3^3-1}{2}\right.\\&\qquad\left.+2\times{}_4\mathrm{C}_2\times\frac{3^2-1}{2}+3\times{}_4\mathrm{C}_3\times\frac{3^1-1}{2}\right)\\&=\frac{1}{120}(0+52+48+12)\\&=\boxed{\frac{14}{15}}\end{aligned}$$

이다.

따라서 $f(k)={}_4\mathrm{C}_k\times\frac{3^{4-k}-1}{2}$, $p=16$, $q=\frac{14}{15}$이므로

$$\begin{aligned}\frac{p}{q}\times\{f(2)+f(3)\}&=16\times\frac{15}{14}\times\left({}_4\mathrm{C}_2\times\frac{3^2-1}{2}+{}_4\mathrm{C}_3\times\frac{3^1-1}{2}\right)\\&=16\times\frac{15}{14}\times(24+4)\\&=480\end{aligned}$$

답 ⑤

참고

$f(k)$는 두 부분집합의 교집합의 원소의 개수가 k인 경우의 수이다. 집합 A의 서로 다른 두 부분집합을 각각 B, C라 하자. 집합 A의 원소 중에서 집합 $B\cap C$의 원소 k개를 택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_k$이다.

남은 $(4-k)$개의 원소는 각각 세 집합 $(B\cup C)^C$, $B-C$, $C-B$ 중 한 집합에 속해야 하므로 경우의 수는 3^{4-k}이고, 이때 두 집합이 서로 같은 1가지 경우는 제외하고 문제에서 두 집합을 서로 구별하지 않으므로 교집합의 원소가 아닌 $(4-k)$개의 원소에 대한 경우의 수는

$\frac{3^{4-k}-1}{2}$이다.

따라서 $f(k)={}_4\mathrm{C}_k\times\frac{3^{4-k}-1}{2}$

18

위부터 첫 번째 가로줄, 두 번째 가로줄, 세 번째 가로줄로 나누어 각 가로줄에 색칠된 정사각형의 개수에 따라 생각하자.

(i) 한 가로줄에 3개의 정사각형을 모두 색칠하는 경우

먼저 색칠할 가로줄을 고르는 방법은 3가지

고른 가로줄에서 어느 2개의 정사각형도 이웃하지 않도록 색칠하는 방법은 1가지

이때의 방법의 수는 $3\times1=3$

(ii) 첫 번째 가로줄에 2개의 정사각형을 색칠하는 경우

첫 번째 가로줄에서 이웃하지 않은 2개의 정사각형을 색칠하는 방법은 ${}_5\mathrm{C}_2-4=6$(가지)

① 두 번째 가로줄에서 첫 번째 가로줄에 색칠된 정사각형과 이웃하지 않은 정사각형 1개를 색칠하는 방법은 3가지

② 세 번째 가로줄에서 임의로 1개의 정사각형을 색칠하는 방법은 5가지

이때의 방법의 수는 $6\times(3+5)=48$

(iii) 두 번째 가로줄에 2개의 정사각형을 색칠하는 경우

두 번째 가로줄에서 이웃하지 않은 2개의 정사각형을 색칠하는 방법은 ${}_5\mathrm{C}_2-4=6$(가지)

① 첫 번째 가로줄에서 두 번째 가로줄에 색칠된 정사각형과 이웃하지 않은 정사각형 1개를 색칠하는 방법은 3가지

② 세 번째 가로줄에서 두 번째 가로줄에 색칠된 정사각형과 이웃하지 않은 정사각형 1개를 색칠하는 방법은 3가지

이때의 방법의 수는 $6\times(3+3)=36$

(iv) 세 번째 가로줄에 2개의 정사각형을 색칠하는 경우

(ii)와 마찬가지로 방법의 수는 48

(v) 각 가로줄마다 1개의 정사각형을 색칠하는 경우

첫 번째 가로줄에서 정사각형 1개를 색칠하는 방법은 5가지

두 번째 가로줄에서 첫 번째 가로줄에 색칠된 정사각형과 이웃하지 않은 정사각형을 색칠하는 방법은 4가지

세 번째 가로줄에서 두 번째 가로줄에 색칠된 정사각형과 이웃하지 않은 정사각형을 색칠하는 방법은 4가지

이때의 방법의 수는 $5\times4\times4=80$

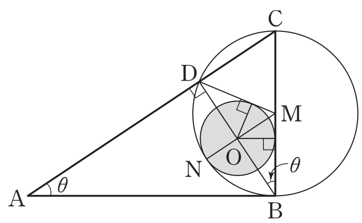
(i)~(v)에서 구하는 방법의 수는

$3+48+36+48+80=215$

답 ④

19

삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{BC}}=2\tan\theta$이므로 선분 BC를 지름으로 하는 원의 반지름의 길이는 $\tan\theta$이고, $\angle\mathrm{CDB}=\frac{\pi}{2}$이다.



$\angle DBC = \frac{\pi}{2} - \angle BCD = \angle CAB = \theta$이고, $\overline{MD} = \overline{MB}$이므로

$\angle MDB = \angle MBD = \theta$, $\angle BMD = \pi - 2\theta$

이때 점 C를 지나지 않는 호 DB를 이등분하는 점을 N이라 하고, 점 N을 지나고 두 선분 MD, MB에 동시에 접하는 원의 중심을 O, 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하면

$\angle BMN = \frac{1}{2}\angle BMD = \frac{\pi}{2} - \theta$

$\overline{MO} = \dfrac{r(\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \dfrac{r(\theta)}{\cos\theta}$, $\overline{ON} = r(\theta)$

이때 $\overline{MN} = \tan\theta$이므로

$$\frac{r(\theta)}{\cos\theta} + r(\theta) = \tan\theta$$

$$r(\theta) = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$S(\theta) = \{r(\theta)\}^2\pi = \left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)^2\pi$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)^2\pi$$
$$= \lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\left(\frac{1}{1+\cos\theta}\right)^2\pi = \frac{\pi}{4}$$

답 ④

20

ㄱ. 직선 OA와 직선 OB가 서로 수직이므로

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = (1,\ a,\ 4-a)\cdot(a,\ 4-a,\ 1)$
$= a + a(4-a) + 4 - a$
$= -a^2 + 4a + 4 = 0$ …… ㉠

한편, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} = -a^2 + 4a + 4 = 0$이므로

직선 OC는 두 직선 OA, OB와 모두 수직이다.

따라서 직선 OC는 평면 OAB와 수직이다. (참)

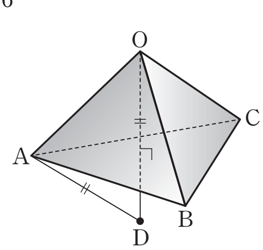
ㄴ. ㉠에서 $a^2 - 4a = 4$이므로

$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OC}^2 = 1^2 + a^2 + (4-a)^2 = 2a^2 - 8a + 17$
$= 2\times 4 + 17 = 25$ …… ㉡

따라서 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 5$이므로 사면체 OABC의 부피는

$\frac{1}{3}\times$(삼각형 OAB의 넓이)$\times\overline{OC} = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times5\times5\right)\times5$
$= \frac{125}{6}$ (참)

ㄷ. 세 점 A, B, C는 평면 $x+y+z=5$ 위에 있고, 이 평면의 법선벡터는 $(1,\ 1,\ 1)$이다. 또한 삼각형 OAB, 삼각형 OBC, 삼각형 OCA는 모두 합동이므로 사면체 OABC에 외접하는 구의 중심을 D라 하면 어떤 실수 t에 대하여 $\overrightarrow{OD} = t(1,\ 1,\ 1)$이다.



즉, 점 D의 좌표를 $(t,\ t,\ t)$라 하면 $\overline{OD}^2 = \overline{AD}^2$에서

$t^2 + t^2 + t^2 = (t-1)^2 + (t-a)^2 + (t-4+a)^2$

$3t^2 = 3t^2 - 2(1+a+4-a)t + 1^2 + a^2 + (4-a)^2$
$= 3t^2 - 10t + 25$ (㉡에 의해)

이므로 $t = \frac{5}{2}$이다.

따라서 사면체 OABC에 외접하는 구의 반지름의 길이는

$\overline{OD} = \sqrt{t^2+t^2+t^2} = \sqrt{3}t = \frac{5\sqrt{3}}{2}$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

21

조건 (나)에서

$x=0$일 때, $0 \le f(0) \le 0$이므로 $f(0) = 0$

$x=1$일 때, $3 \le f(1) \le 3$이므로 $f(1) = 3$

즉, $g(0) = 0$, $g(3) = 1$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(2x)g(x+3) - g(2x)}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{g(2x)\{g(x+3)-1\}}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\{g(2x)-g(0)\}\{g(x+3)-g(3)\}}{2x^2}\times 2$$
$$= 2g'(0)g'(3)$$

이때 $g'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$이고,

$g'(0) = g'(f(0)) = \dfrac{1}{f'(0)}$, $g'(3) = g'(f(1)) = \dfrac{1}{f'(1)}$

이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(2x)g(x+3)-g(2x)}{x^2} = \frac{2}{f'(0)f'(1)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

(i) $x<0$일 때,

조건 (나)에서

$$\frac{2x^3+x}{x} \ge \frac{f(x)}{x} \ge \frac{x^4+x^2+x}{x}$$

$$x^3+x+1 \le \frac{f(x)}{x} \le 2x^2+1$$

이때 $\lim_{x\to 0-}(x^3+x+1) = 1$, $\lim_{x\to 0-}(2x^2+1) = 1$이므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x} = 1$$

(ii) $x>0$일 때,

조건 (나)에서

$$\frac{2x^3+x}{x} \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{x^4+x^2+x}{x}$$

$$2x^2+1 \le \frac{f(x)}{x} \le x^3+x+1$$

이때 $\lim_{x\to 0+}(2x^2+1) = 1$, $\lim_{x\to 0+}(x^3+x+1) = 1$이므로

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x} = 1$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)}{x}=1$, $\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}=1$이고, $f(0)=0$이므로

$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1$ …… ㉡

(ⅲ) $x<1$일 때,

조건 (나)에서

$\frac{2x^3+x-3}{x-1}\ge\frac{f(x)-3}{x-1}\ge\frac{x^4+x^2+x-3}{x-1}$

$x^3+x^2+2x+3\le\frac{f(x)-3}{x-1}\le2x^2+2x+3$

이때 $\lim_{x\to1-}(x^3+x^2+2x+3)=7$, $\lim_{x\to1-}(2x^2+2x+3)=7$이므로

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-3}{x-1}=7$

(ⅳ) $x>1$일 때,

조건 (나)에서

$\frac{2x^3+x-3}{x-1}\le\frac{f(x)-3}{x-1}\le\frac{x^4+x^2+x-3}{x-1}$

$2x^2+2x+3\le\frac{f(x)-3}{x-1}\le x^3+x^2+2x+3$

이때 $\lim_{x\to1+}(2x^2+2x+3)=7$, $\lim_{x\to1+}(x^3+x^2+2x+3)=7$이므로

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-3}{x-1}=7$

(ⅲ), (ⅳ)에 의하여

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-3}{x-1}=7$, $\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-3}{x-1}=7$이고, $f(1)=3$이므로

$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=7$ …… ㉢

따라서 ㉠, ㉡, ㉢에서

$\lim_{x\to0}\frac{g(2x)g(x+3)-g(2x)}{x^2}=\frac{2}{1\times7}=\frac{2}{7}$

답 ②

22

${}_8P_2=8\times7=56$

답 56

23

$f(x)=\ln(x^2+2x+3)$에서

$f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x+3}$이므로

$f'(1)=\frac{2\times1+2}{1^2+2\times1+3}=\frac{2}{3}$

따라서 $15f'(1)=10$

답 10

24

$2x^3-xy-y^3+17=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x^2-y-x\times\frac{dy}{dx}-3y^2\times\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{6x^2-y}{x+3y^2}$ (단, $x+3y^2\ne0$)

따라서 점 $(-2, -1)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{6\times(-2)^2-(-1)}{-2+3\times(-1)^2}=\frac{24+1}{-2+3}=25$

답 25

25

시각 t에서 점 P의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하면

$v(t)=\frac{dx}{dt}=6\cos2t$

속도가 3인 시각 t에 대하여

$6\cos2t=3$

$\cos2t=\frac{1}{2}$

이때 $0<t<\frac{\pi}{2}$이므로

$2t=\frac{\pi}{3}$

$t=\frac{\pi}{6}$

$a(t)=\frac{d}{dt}v(t)=-12\sin2t$

따라서 $a\left(\frac{\pi}{6}\right)=-12\sin\frac{\pi}{3}=-6\sqrt{3}$이므로

$a^2=108$

답 108

26

$4P(X\le a)=P(X\ge a)$에서

$4P(X\le a)=1-P(X\le a)$이므로

$5P(X\le a)=1$, $P(X\le a)=0.2$

$Z=\frac{X-20}{10}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(X\le a)=P\left(\frac{X-20}{10}\le\frac{a-20}{10}\right)=P\left(Z\le\frac{a-20}{10}\right)=0.2$

$P(0\le Z\le0.84)=0.3$에서

$P(Z\le-0.84)=0.5-0.3=0.2$이므로

$\frac{a-20}{10}=-0.84$

즉, $a=11.6$

$P(b\le X\le40-a)=P(b\le X\le28.4)$

$=P\left(\frac{b-20}{10}\le\frac{X-20}{10}\le\frac{28.4-20}{10}\right)$

$=P\left(\frac{b-20}{10}\le Z\le0.84\right)=0.5$

$P(0\le Z\le0.52)=0.2$, $P(0\le Z\le0.84)=0.3$에서

$P(-0.52\le Z\le0.84)=0.2+0.3=0.5$이므로

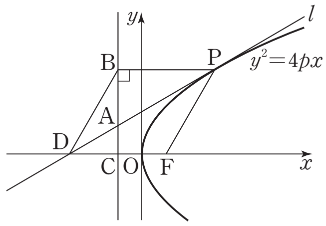
$\frac{b-20}{10}=-0.52$

즉, $b=14.8$

따라서 $10(a+b)=10(11.6+14.8)=264$

답 264

27



$y^2=4px$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $2y\dfrac{dy}{dx}=4p$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2p}{y}$ (단, $y\neq0$)

점 P의 좌표를 $(a,\ 2\sqrt{pa})$라 하면 직선 l의 방정식은

$y-2\sqrt{pa}=\dfrac{p}{\sqrt{pa}}(x-a)$

$y=\sqrt{\dfrac{p}{a}}(x+a)$

직선 l이 x축과 만나는 점을 D라 하면 점 D의 좌표는 $(-a,\ 0)$

포물선 $y^2=4px$의 초점을 F라 하면

$\overline{FP}=\overline{PB}=a+p$, $\overline{FD}=a+p$

직선 PB와 직선 DF가 평행하므로 사각형 BDFP는 마름모이다.

즉, $\angle BDA=\angle ADC$이고, $\overline{BA}=2\overline{AC}$이므로

$\overline{BA}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}=2:1$

직각삼각형 BDC에서 $\angle BDC=\dfrac{\pi}{3}$이므로

$\angle BDA=\angle ADC=\dfrac{\pi}{6}$

따라서 $m=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$60m^2=60\times\dfrac{1}{3}=20$

답 20

28

(i) 첫 번째 시행에서 앞면이 보이는 동전 2개, 뒷면이 보이는 동전 1개를 뒤집는 경우

첫 번째 시행 후 앞면이 보이는 동전은 7개, 뒷면이 보이는 동전은 2개이다. 이때 두 번째 시행에서

① 앞면이 보이는 동전 3개, 뒷면이 보이는 동전 0개를 뒤집는 경우: 두 번째 시행 후 앞면이 보이는 동전은 4개, 뒷면이 보이는 동전은 5개이다.

② 앞면이 보이는 동전 2개, 뒷면이 보이는 동전 1개를 뒤집는 경우: 두 번째 시행 후 앞면이 보이는 동전은 6개, 뒷면이 보이는 동전은 3개이다.

③ 앞면이 보이는 동전 1개, 뒷면이 보이는 동전 2개를 뒤집는 경우: 두 번째 시행 후 앞면이 보이는 동전은 8개, 뒷면이 보이는 동전은 1개이다.

따라서 두 번째 시행 후 앞면이 보이는 동전의 개수가 8의 약수가 아닌 사건은 ②뿐으로 그 확률은

$\dfrac{{}_8C_2\times{}_1C_1}{{}_9C_3}\times\dfrac{{}_7C_2\times{}_2C_1}{{}_9C_3}=\dfrac{1}{6}$

(ii) 첫 번째 시행에서 앞면이 보이는 동전 3개를 뒤집는 경우

첫 번째 시행 후 앞면이 보이는 동전은 5개, 뒷면이 보이는 동전은 4개이다. 이때 두 번째 시행에서

① 앞면이 보이는 동전 3개, 뒷면이 보이는 동전 0개를 뒤집는 경우: 두 번째 시행 후 앞면이 보이는 동전은 2개, 뒷면이 보이는 동전은 7개이다.

② 앞면이 보이는 동전 2개, 뒷면이 보이는 동전 1개를 뒤집는 경우: 두 번째 시행 후 앞면이 보이는 동전은 4개, 뒷면이 보이는 동전은 5개이다.

③ 앞면이 보이는 동전 1개, 뒷면이 보이는 동전 2개를 뒤집는 경우: 두 번째 시행 후 앞면이 보이는 동전은 6개, 뒷면이 보이는 동전은 3개이다.

④ 앞면이 보이는 동전 0개, 뒷면이 보이는 동전 3개를 뒤집는 경우: 두 번째 시행 후 앞면이 보이는 동전은 8개, 뒷면이 보이는 동전은 1개이다.

따라서 두 번째 시행 후 앞면이 보이는 동전의 개수가 8의 약수가 아닌 사건은 ③뿐으로 그 확률은

$\dfrac{{}_8C_3}{{}_9C_3}\times\dfrac{{}_5C_1\times{}_4C_2}{{}_9C_3}=\dfrac{5}{21}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$1-\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{21}\right)=\dfrac{25}{42}$

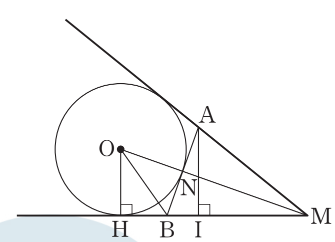
따라서 $p=42$, $q=25$이므로 $p+q=42+25=67$

답 67

29

삼각형 ACD에서 $\overline{AC}=\overline{AD}=5$, $\overline{CD}=8$이므로 $\overline{MA}=\sqrt{5^2-4^2}=3$이고, 마찬가지로 $\overline{MB}=3$이다.

두 평면 ACD, BCD와 선분 AB에 동시에 접하는 구의 중심을 O라 하고, 선분 AB의 중점을 N, 점 O에서 직선 MB에 내린 수선의 발을 H라 하면 세 점 A, B, M을 지나는 평면은 그림과 같다.



그림에서 원이 두 직선 MA, MB에 접하므로 직선 OM은 $\angle BMA$를 이등분하고 점 N을 지난다.

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BC}$

(i) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC})=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{MC}$이므로

점 A에서 직선 BM에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼각형 ABM의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{MN}=\dfrac{1}{2}\times\overline{BM}\times\overline{AI}$

$\dfrac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\times3\times\overline{AI}$

$\overline{AI}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$이므로

$\overline{MI}^2=\overline{AM}^2-\overline{AI}^2=3^2-\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2=\dfrac{49}{9}$

$\overline{MI}=\dfrac{7}{3}$이고, $\overline{HB}=\overline{BN}=1$이므로

$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BM} = -\overline{IH} \times |\overrightarrow{BM}|$

$= -(\overline{HB} + \overline{BM} - \overline{MI}) \times |\overrightarrow{BM}|$

$= -\left(1+3-\frac{7}{3}\right) \times 3$

$= -5$ …… ㉠

직선 MC와 평면 ABM이 수직이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AO}$와 $\overrightarrow{MC}$가 서로 수직이 되어 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = -5 + 0 = -5$

(ii) 삼각형 MOH와 삼각형 MBN이 닮음이므로

$\overline{OH} : \overline{OM} = \overline{BN} : \overline{BM}$

이때 $\overline{OH} = \overline{ON}$, $\overline{BN} = 1$, $\overline{MN} = 2\sqrt{2}$이므로

$\overline{OH} + 2\sqrt{2} = 3 \times \overline{OH}$

$\overline{OH} = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BC}$가 최대일 때에는 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{BC}$가 같은 방향이 되도록 점 P를 정할 때이므로

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{OP}| \times |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{OH}| \times |\overrightarrow{BC}| = 5\sqrt{2}$

(i), (ii)에 의하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC}$의 최댓값은 $-5+5\sqrt{2}$이다.

따라서 $p=-5$, $q=5$이므로 $p^2+q^2=50$

답 50

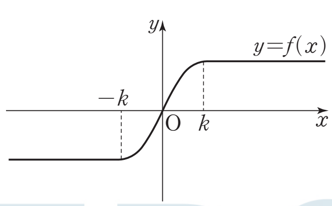
30

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, $f(0)=0$이므로 $c=0$이다.

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=k$에서 연속이고 미분가능하다. 즉, $f(k)=d$, $f'(k)=0$이다.

이때 함수 $y=e^{-x}(ax^2+bx)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 0, $-\frac{b}{a}$뿐이고 $d>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 열린 구간 $(0, k)$에서 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나지 않는 경우

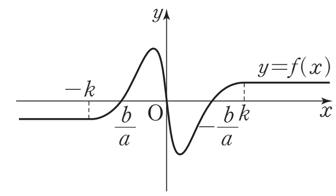


$f(0)=0$, $f(k)=d>0$이므로 $x>0$일 때 $f(x)>0$이고, $x<0$일 때 $f(x)<0$이다.

함수 $h(x)$를 $h(x)=\int_{-2}^{x} f(t)\,dt$라 하면 $h'(x)=f(x)$이므로 $h(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가지고, $h(-2)=0$이므로 $h(0)<0$이다.

이때 함수 $g(x)=|h(x)|$는 $x=0$에서 극댓값을 가지지만 $h'(-2)=f(-2)<0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 미분가능하지 않다. 즉, 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) 열린 구간 $(0, k)$에서 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 경우



$f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$이고 $0<-\frac{b}{a}<k$, $f(k)=d>0$

$0<x<k$에서 $f'(x)=e^{-x}\{-ax^2+(2a-b)x+b\}$

$f'\left(-\frac{b}{a}\right)=e^{\frac{b}{a}}\left\{-\frac{b^2}{a}+(2a-b)\times\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right\}=-be^{\frac{b}{a}}\neq 0$

이므로 $0<x<-\frac{b}{a}$일 때 $f(x)<0$이고, $x>-\frac{b}{a}$일 때 $f(x)>0$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 함수 $h(x)=\int_{-2}^{x} f(t)\,dt$는 $x=0$에서 극댓값을 가지고,

$x=\frac{b}{a}$와 $x=-\frac{b}{a}$에서 극솟값을 갖는다.

이때 $h(-2)=0$이므로 $h(2)=0$이고, 함수 $g(x)=|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $\frac{b}{a}=-2$, $-\frac{b}{a}=2$이어야 한다.

즉, $b=-2a$ …… ㉠

이제 $f'(k)=0$인 k의 값을 구하자.

$0\le x\le k$에서 ㉠에 의하여 $f(x)=e^{-x}(ax^2-2ax)$이므로

$f'(x)=e^{-x}(-ax^2+2ax+2ax-2a)$

$=e^{-x}(-ax^2+4ax-2a)$

$=-ae^{-x}(x^2-4x+2)$

따라서 $f'(x)=0$에서 $x^2-4x+2=0$이므로

$x=2+\sqrt{2}$ 또는 $x=2-\sqrt{2}$

이때 $k>2$이므로 $k=2+\sqrt{2}$이다. …… ㉡

한편, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $12e^{-2}$을 가지므로

$g(0)=\left|\int_{-2}^{0} f(x)\,dx\right|=\int_{-2}^{0} f(x)\,dx=\int_{0}^{2}\{-f(x)\}\,dx$

$=\int_{0}^{2} e^{-x}(2ax-ax^2)\,dx$

$=a\int_{0}^{2} e^{-x}(2x-x^2)\,dx$

이때

$\int_{0}^{2} e^{-x}(2x-x^2)\,dx=\left[-e^{-x}(2x-x^2)\right]_0^2+\int_{0}^{2} e^{-x}(2-2x)\,dx$

$=0+\left[-e^{-x}(2-2x)\right]_0^2+\int_{0}^{2}(-2e^{-x})\,dx$

$=2e^{-2}+2+\left[2e^{-x}\right]_0^2$

$=2e^{-2}+2+2e^{-2}-2$

$=4e^{-2}$

이므로 $g(0)=4ae^{-2}$

$4ae^{-2}=12e^{-2}$에서 $a=3$이다. …… ㉢

㉡, ㉢에서

$ak=3(2+\sqrt{2})=6+3\sqrt{2}$

따라서 $m=6$, $n=3$이므로 $m+n=6+3=9$

답 9

실전 모의고사 4회

본문 178~185쪽

01 ②	02 ①	03 ①	04 ④	05 ③
06 ④	07 ③	08 ②	09 ①	10 ②
11 ②	12 ⑤	13 ①	14 ②	15 ⑤
16 ④	17 ③	18 ①	19 ①	20 ⑤
21 ②	22 44	23 9	24 18	25 6
26 29	27 19	28 25	29 587	30 30

01

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(1,\ -1)\cdot(3,\ 4)$$
$$=3-4=-1$$

답 ②

02

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^{5x}-1}{x}}{\frac{\sin 2x}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^{5x}-1}{5x}\times5}{\frac{\sin 2x}{2x}\times2}$$
$$=\frac{5}{2}\times\frac{\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{5x}}{\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}}$$

이때 $5x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0$일 때, $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{5x}=\lim_{t\to0}\frac{e^{t}-1}{t}=1$$

또한 $2x=s$로 놓으면 $x\longrightarrow0$일 때, $s\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}=\lim_{s\to0}\frac{\sin s}{s}=1$$

따라서

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{\sin 2x}=\frac{5}{2}\times\frac{\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{5x}}{\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}}$$
$$=\frac{5}{2}\times\frac{1}{1}$$
$$=\frac{5}{2}$$

답 ①

03

$x^2=t$로 놓으면 $2x=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\sqrt{3}$일 때 $t=3$이므로

$$\int_0^{\sqrt{3}}4xe^{x^2}dx=\int_0^3 2e^t dt=\Big[2e^t\Big]_0^3=2e^3-2$$

답 ①

04

$\mathrm{P}(A|B^C)=\dfrac{1}{2}$에서 $\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\dfrac{1}{2}$

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

따라서

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\{\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\}+\mathrm{P}(B)$$
$$=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$$
$$=\frac{2}{3}$$

답 ④

다른 풀이

$A\cup B=(A\cap B^C)\cup B$이고 $(A\cap B^C)\cap B=\varnothing$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

05

$\dfrac{dx}{dt}=2\cos 2t$, $\dfrac{dy}{dt}=-2\sin 2t-1$이므로 시각 t에서 점 P의 속도를 $\vec{v}$라 하면

$$|\vec{v}|=\sqrt{(2\cos 2t)^2+(-2\sin 2t-1)^2}$$
$$=\sqrt{4\cos^2 2t+4\sin^2 2t+4\sin 2t+1}$$
$$=\sqrt{4\sin 2t+5}$$

따라서 점 P의 속력은 $\sin 2t=1$일 때 최댓값 3을 갖는다.

답 ③

06

$f(x)=x^3+3x^2+ax+3$은 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이며 역함수가 존재하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이다. …… ㉠

또한 $g(x)$는 $x=b$에서만 미분가능하지 않으므로 $f(k)=b$인 k에 대하여 $g'(b)=\dfrac{1}{f'(k)}$에서 $f'(k)=0$이어야 한다. …… ㉡

$f'(x)=3x^2+6x+a$에서 ㉠, ㉡을 모두 만족시키기 위해서는 $f'(x)=0$이 중근을 가져야 하므로 방정식 $3x^2+6x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=3^2-3a=0,\ a=3$$

$f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2$에서 $f'(-1)=0$이다.

$f(x)=x^3+3x^2+3x+3$에서 $f(-1)=2$이므로 $b=2$이다.

따라서 $2a+b=6+2=8$

답 ④

07

10개의 구슬 중에서 4개의 구슬을 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}\mathrm{C}_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$

이 중 임의로 4개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 검은 구슬은 1개이고 흰 구슬은 2개 이상 나오는 경우는 흰 구슬, 검은 구슬, 빨간 구슬의 개수를

차례로 순서쌍 (a, b, c)로 나타내면

$(2, 1, 1)$, $(3, 1, 0)$

이므로 이때의 경우의 수는

$_3C_2 \times {_2C_1} \times {_5C_1} + {_3C_3} \times {_2C_1}$

$=3\times2\times5+1\times2$

$=32$

따라서 구하는 확률은 $\frac{32}{210}=\frac{16}{105}$이다.

답 ③

08

점 $A(2, 3, -1)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점은

$B(-2, 3, 1)$

점 $A(2, 3, -1)$에서 yz평면에 내린 수선의 발은

$C(0, 3, -1)$

xy평면 위의 점 $D(a, b, 0)$에 대하여

$\overline{BC}=\sqrt{(0+2)^2+(3-3)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{DB}=\sqrt{(-2-a)^2+(3-b)^2+(1-0)^2}=\sqrt{(a+2)^2+(b-3)^2+1}$

$\overline{DC}=\sqrt{(0-a)^2+(3-b)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{a^2+(b-3)^2+1}$

삼각형 BCD가 정삼각형이므로

$\overline{BC}=\overline{DB}=\overline{DC}$, 즉 $\overline{BC}^2=\overline{DB}^2=\overline{DC}^2$

$\overline{DB}^2=\overline{DC}^2$에서

$(a+2)^2+(b-3)^2+1=a^2+(b-3)^2+1$

$4a+4=0$, $a=-1$

$\overline{DB}^2=\overline{BC}^2$에서

$(a+2)^2+(b-3)^2+1=8$

$(a+2)^2+(b-3)^2=7$ …… ㉠

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$(-1+2)^2+(b-3)^2=7$

$(b-3)^2=6$

$b=3+\sqrt{6}$ 또는 $b=3-\sqrt{6}$

$b>3$이므로 $b=3+\sqrt{6}$

따라서 $a+b=(-1)+(3+\sqrt{6})=2+\sqrt{6}$

답 ②

09

$\int_1^e nx\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=nx$라 하면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=\frac{1}{2}nx^2$이므로

$$a_n=\int_1^e nx\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}nx^2\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{1}{x}\times\frac{1}{2}nx^2\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}nx^2\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{2}nx\,dx$$

$$=\frac{1}{2}ne^2-\left[\frac{1}{4}nx^2\right]_1^e=\frac{1}{2}ne^2-\left(\frac{1}{4}ne^2-\frac{1}{4}n\right)$$

$$=\frac{n}{4}(e^2+1)$$

따라서 $\sum_{n=1}^{15}\frac{a_n}{e^2+1}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{15}n=\frac{1}{4}\times\frac{15\times16}{2}=30$

답 ①

10

$4=3+1+0=2+2+0$

$\quad=2+1+1$

이므로 각 자리의 수의 합이 4이고, 각 자리의 수가 모두 3 이하인 자연수의 개수는 다음과 같다.

(i) 3, 1, 0을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$2\times2!=4$

(ii) 2, 2, 0을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 세 자리 자연수는

220, 202이므로 그 개수는 2이다.

(iii) 2, 1, 1을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$\frac{3!}{2!}=3$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$4+2+3=9$

답 ②

11

물의 깊이가 t(cm) $(t>0)$일 때, 수면의 넓이를 $S(t)$(cm^2)라 하면

$S(t)=(\sqrt{3t^2-2t+1})^2\pi=(3t^2-2t+1)\pi$(cm^2)

물의 깊이가 a(cm) $(a>0)$일 때, 이 그릇에 담겨 있는 물의 부피를 V(cm^3)라 하면

$$V=\int_0^a S(t)\,dt=\pi\int_0^a(3t^2-2t+1)\,dt=\pi\Big[t^3-t^2+t\Big]_0^a$$

$$=\pi(a^3-a^2+a)=21\pi(\text{cm}^3)$$

즉, $a^3-a^2+a=21$에서 $a^3-a^2+a-21=0$

$(a-3)(a^2+2a+7)=0$

$a>0$인 실수이므로 $a=3$

답 ②

12

두 평면의 방정식을 연립하여 y, z를 각각 소거하면

$x=\frac{z-4}{2}$, $x=\frac{y-1}{3}$이므로 평면 α와 평면 β의 교선을 l이라 하면

$l : x=\frac{y-1}{3}=\frac{z-4}{2}$

따라서 점 $A(1, -2, 1)$에서 직선 l에 내린 수선의 발 B의 좌표를

$(t, 3t+1, 2t+4)$ (t는 실수)로 놓을 수 있다.

$\overline{AB}$는 직선 l과 수직이므로 직선 l의 방향벡터 $\vec{u}=(1, 3, 2)$에 대하여

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=(t-1, 3t+3, 2t+3)\cdot(1, 3, 2)=14t+14=0$

즉, $t=-1$이므로 $B(-1, -2, 2)$

따라서 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(1, -2, 1)\cdot(-1, -2, 2)=-1+4+2=5$

답 ⑤

13

조건 (가)에서 $P(X\geq62)=P(X\leq54)$이므로

$m=\frac{62+54}{2}=58$

$Z=\frac{X-58}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}P(X\le 56)&=P\left(Z\le \frac{56-58}{\sigma}\right)\\&=P\left(Z\le -\frac{2}{\sigma}\right)\\&=0.5-P\left(0\le Z\le \frac{2}{\sigma}\right)\\&=0.1587\end{aligned}$$

이므로 $P\left(0\le Z\le \frac{2}{\sigma}\right)=0.5-0.1587=0.3413$에서 $\frac{2}{\sigma}=1$

즉, $\sigma=2$

따라서 $m+\sigma=58+2=60$

답 ①

14

$x=\cos t-2\sin t$, $y=\sin t+2\cos t$에서

$x=\cos\frac{\pi}{2}-2\sin\frac{\pi}{2}=-2$, $y=\sin\frac{\pi}{2}+2\cos\frac{\pi}{2}=1$이므로

$t=\frac{\pi}{2}$에 대응하는 점의 좌표는 $(-2, 1)$이다.

$\frac{dx}{dt}=-\sin t-2\cos t$, $\frac{dy}{dt}=\cos t-2\sin t$에서

$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos t-2\sin t}{-\sin t-2\cos t}$ $(\sin t+2\cos t\neq 0)$이므로 $t=\frac{\pi}{2}$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 $\frac{-2}{-1}=2$

따라서 접선의 방정식은 $y-1=2\{x-(-2)\}$, 즉 $y=2x+5$이므로

$a=2$, $b=5$

따라서 $a+b=7$

답 ②

15

$\angle MQA=\beta$라 하면 $\angle APQ=\angle PQM=\alpha$이므로

$$\begin{aligned}\angle PAB&=\angle PQA+\angle APQ=(\angle PQM+\angle MQA)+\angle APQ\\&=(\alpha+\beta)+\alpha=2\alpha+\beta\end{aligned}$$

에서 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$, $\angle PAB=\frac{\pi}{3}$이므로

$2\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$, $2\alpha=\frac{\pi}{3}-\beta$

$\cos\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이므로 $1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$에서

$\tan^2\beta=\sec^2\beta-1=\left(\frac{5}{2\sqrt{5}}\right)^2-1=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$

$0<\beta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\tan\beta=\frac{1}{2}$

따라서

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)&=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\beta}{1+\tan\frac{\pi}{3}\times\tan\beta}=\frac{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}\\&=\frac{2\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}}=\frac{(2\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\\&=5\sqrt{3}-8\end{aligned}$$

답 ⑤

16

타원 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$의 두 초점 $F(0, c)$, $F'(0, -c)$에서

$c^2=2-1=1$이므로 $c=1$

점 O는 선분 FF'의 중점이므로

$\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{PF'}=2\overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{OF}=-\overrightarrow{OF'}$

$|\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{PF'}-2\overrightarrow{OF'}|=|2\overrightarrow{PO}-2\overrightarrow{OF'}|=2|\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OF}|=2|\overrightarrow{PF}|$

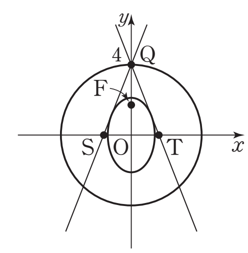
$2|\overrightarrow{PF}|$는 세 점 O, F, P가 한 직선을 이루는 두 점 중 점 F에 가까운 원 위의 점 $(0, 4)$에서 최솟값 6을 갖는다.

점 $Q(0, 4)$에서 타원 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (p, q)라 하면 접선의 기울기는 $2x+y\frac{dy}{dx}=0$, 즉 $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y}$ $(y\neq 0)$에서 $-\frac{2p}{q}$이므로 접선의 방정식은 $y-q=-\frac{2p}{q}(x-p)$

접선이 점 $(0, 4)$를 지나므로

$4-q=-\frac{2p}{q}\times(-p)$

$4q-q^2=2p^2$



한편, $p^2+\frac{q^2}{2}=1$이므로

$4q-q^2=2-q^2$, $q=\frac{1}{2}$

$p^2=\frac{7}{8}$에서 $p=\pm\frac{\sqrt{14}}{4}$이므로 두 접점의 좌표는 각각

$\left(-\frac{\sqrt{14}}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{14}}{4}, \frac{1}{2}\right)$

이고 접선의 방정식은 $y=\sqrt{14}x+4$, $y=-\sqrt{14}x+4$

그러므로 두 접선이 x축과 만나는 점의 좌표는 각각

$\left(-\frac{2\sqrt{14}}{7}, 0\right)$, $\left(\frac{2\sqrt{14}}{7}, 0\right)$

따라서 삼각형 QST의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\left\{\frac{2\sqrt{14}}{7}-\left(-\frac{2\sqrt{14}}{7}\right)\right\}\times 4=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{14}}{7}\times 4=\frac{8\sqrt{14}}{7}$$

답 ④

17

30보다 작은 두 자리 자연수 중 임의로 서로 다른 두 자연수를 동시에 선택하는 모든 경우의 수는 ${}_{20}C_2$이다.

이때 합이 30보다 작도록 선택된 두 자연수를 a, b $(a<b)$라 하자.

$a+b\le 29$이므로 $b\le 29-a$

즉, $a+1\le b\le 29-a$

이때 a가 정해지면 b를 선택하는 경우의 수는 $29-2a$이다.

$10\le a\le 14$에서 a가 가질 수 있는 최댓값은 $\boxed{14}$이므로

선택된 두 자연수의 합이 30보다 작을 확률은

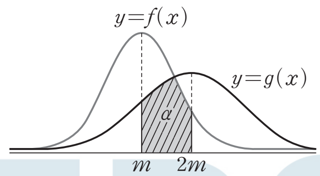
$$\frac{\sum_{a=10}^{\boxed{14}}(29-2a)}{{}_{\boxed{20}}C_2}=\frac{29\times 5-2\times(10+11+12+13+14)}{\frac{20\times 19}{2\times 1}}=\frac{145-120}{10\times 19}=\frac{25}{10\times 19}=\boxed{\frac{5}{38}}$$

따라서 $p=20$, $q=14$, $r=\frac{5}{38}$이므로

$(p+q)r=(20+14)\times\frac{5}{38}=\frac{85}{19}$

답 ③

18



확률변수 X의 정규분포곡선을 $y=f(x)$, 확률변수 Y의 정규분포곡선을 $y=g(x)$라 하고, 두 직선 $x=m$, $x=2m$과 x축 및 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 α라 하면

곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=m$, $x=2m$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\mathrm{P}(m\le X\le 2m)=S_1+\alpha$

곡선 $y=g(x)$와 두 직선 $x=m$, $x=2m$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\mathrm{P}(m\le Y\le 2m)=S_2+\alpha$

따라서 $S_1-S_2=\mathrm{P}(m\le X\le 2m)-\mathrm{P}(m\le Y\le 2m)$이고

$Z=\frac{X-m}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고, $Z=\frac{Y-2m}{2\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(m\le X\le 2m)-\mathrm{P}(m\le Y\le 2m)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{m}{\sigma}\right)-\mathrm{P}\left(\frac{-m}{2\sigma}\le Z\le 0\right)$

주어진 조건에서

$\mathrm{P}\left(\frac{m}{2}\le X\le 2m\right)=\mathrm{P}\left(-\frac{m}{2\sigma}\le Z\le \frac{m}{\sigma}\right)=0.5328$,

$\mathrm{P}(2m\le Y\le 3m)=\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{m}{2\sigma}\right)=0.1915$이므로

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{m}{\sigma}\right)=0.5328-0.1915=0.3413$

따라서

$\mathrm{P}(m\le X\le 2m)-\mathrm{P}(m\le Y\le 2m)=0.3413-0.1915=0.1498$

답 ①

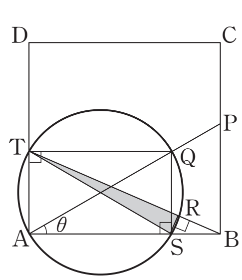
19

두 점 S, T는 선분 AQ를 지름으로 하는 원 위의 점이므로

$\angle\mathrm{QTA}=\angle\mathrm{QSA}=\frac{\pi}{2}$

사각형 ASQT는 직사각형이고, 선분 TS도 원의 지름이므로

$\angle\mathrm{TRS}=\angle\mathrm{BRS}=\frac{\pi}{2}$



$\overline{\mathrm{AB}}=2$이고, 두 삼각형 ASQ와 ABP는 서로 닮은 도형이고 닮음비가 3 : 4이므로

$\overline{\mathrm{AS}}=\frac{3}{4}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{3}{4}\times 2=\frac{3}{2}$

$\overline{\mathrm{BS}}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{AS}}=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

두 선분 AQ와 TS의 교점이 원의 중심이므로

$\angle\mathrm{TSA}=\theta$

이때 $\overline{\mathrm{AT}}=\overline{\mathrm{AS}}\tan\theta=\frac{3}{2}\tan\theta$

직각삼각형 ABT에서

$\overline{\mathrm{BT}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AT}}^2}=\sqrt{4+\frac{9}{4}\tan^2\theta}=\frac{1}{2}\sqrt{16+9\tan^2\theta}$

$\overline{\mathrm{BS}}\times\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BR}}\times\overline{\mathrm{BT}}$이므로

$$\overline{\mathrm{BR}}=\frac{\overline{\mathrm{BS}}\times\overline{\mathrm{BA}}}{\overline{\mathrm{BT}}}=\frac{\frac{1}{2}\times 2}{\frac{1}{2}\sqrt{16+9\tan^2\theta}}=\frac{2}{\sqrt{16+9\tan^2\theta}}$$

직각삼각형 BRS에서

$$\overline{\mathrm{SR}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BS}}^2-\overline{\mathrm{BR}}^2}=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{4}{16+9\tan^2\theta}}=\frac{3\tan\theta}{2\sqrt{16+9\tan^2\theta}}$$

삼각형 RTS는 직각삼각형이므로

$$\begin{aligned}S(\theta)&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{TR}}\times\overline{\mathrm{SR}}\\&=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{BT}}-\overline{\mathrm{BR}})\times\overline{\mathrm{SR}}\\&=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\sqrt{16+9\tan^2\theta}-\frac{2}{\sqrt{16+9\tan^2\theta}}\right)\times\frac{3\tan\theta}{2\sqrt{16+9\tan^2\theta}}\\&=\frac{3}{8}\tan\theta-\frac{3\tan\theta}{2(16+9\tan^2\theta)}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{3}{8}\tan\theta-\frac{3\tan\theta}{2(16+9\tan^2\theta)}}{\theta}\\&=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{3}{8}\times\frac{\tan\theta}{\theta}-\frac{3}{2}\times\frac{\tan\theta}{\theta}\times\frac{1}{16+9\tan^2\theta}\right)\\&=\frac{3}{8}\times1-\frac{3}{2}\times1\times\frac{1}{16}\\&=\frac{9}{32}\end{aligned}$$

답 ①

20

$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)=x(x-a)e^x$

ㄱ. $a<0$이면 $a<x<0$일 때 $g'(x)<0$, $x>0$일 때 $g'(x)>0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이고, 극솟값은

$g(0)=\int_0^0 f(t)\,dt=0$이다. (참)

ㄴ. $a=0$이면 $x<0$ 또는 $x>0$일 때 $g'(x)>0$이고 $x=0$일 때 $g'(x)=0$이므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.
따라서 $g(-1)<g(0)<g(1)$ (참)

ㄷ. $a>0$이면 $0<x<a$일 때 $g'(x)<0$, $x>a$일 때 $g'(x)>0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 극소이고, $g(0)=0$이므로 $g(a)<0$이다.
한편,

$$\begin{aligned}g(x)&=\int_0^x (t^2-at)e^t\,dt\\&=\Big[(t^2-at)e^t\Big]_0^x-\int_0^x (2t-a)e^t\,dt\\&=(x^2-ax)e^x-\Big[(2t-a)e^t\Big]_0^x+\int_0^x 2e^t\,dt\\&=(x^2-ax)e^x-(2x-a)e^x-a+\Big[2e^t\Big]_0^x\\&=(x^2-ax)e^x-(2x-a)e^x-a+2e^x-2\\&=\{x^2-(a+2)x+a+2\}e^x-a-2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(a+1)&=\{(a+1)^2-(a+2)(a+1)+a+2\}e^{a+1}-a-2\\&=e^{a+1}-a-2\end{aligned}$$

함수 $h(a)=e^{a+1}-a-2$라 하면
$a>0$일 때, $h'(a)=e^{a+1}-1>0$이므로 함수 $h(a)$는 구간 $(0, \infty)$에서 증가한다.
또 $h(0)=e-2>0$이므로 $a>0$에서
$g(a+1)=h(a)=e^{a+1}-a-2>0$
함수 $g(x)$는 닫힌 구간 $[a, a+1]$에서 연속이고,
$g(a)<0$, $g(a+1)>0$이므로 사이값 정리에 의하여 닫힌 구간 $[a, a+1]$에서 방정식 $g(x)=0$은 적어도 하나의 실근을 갖는다.
(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

21

조건 (가)에서 $f(0)=0$이고, $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 $g(x)=f^{-1}(x)$에서

$$\begin{aligned}\int_0^t \{f(x)\}^2\,dx&=\int_{f(0)}^{f(t)} \{g(x)\}^2\,dx\\&=\int_{f(0)}^{f(t)} \{f^{-1}(x)\}^2\,dx\end{aligned}$$

$\{f^{-1}(x)\}^2$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\int_0^t \{f(x)\}^2\,dx=F(f(t))-F(f(0))$ …… ㉠

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면
$\{f(t)\}^2=f'(t)\{f^{-1}(f(t))\}^2$
$f^{-1}(f(t))=t$이므로 $\{f(t)\}^2=t^2f'(t)$
$f'(1)=9$이므로 $\{f(1)\}^2=1\times f'(1)=9$
$f(0)=0$이고 $f(x)$는 증가하는 함수이므로 $f(1)=3$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\times f'\left(\frac{k}{n}\right)&=\int_0^1 f'(x)\,dx\\&=f(1)-f(0)=3\end{aligned}$$

답 ②

22

${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

${}_3\Pi_2=3^2=9$이므로 ${}_5H_3+{}_3\Pi_2=44$

답 44

23

진수의 조건에 의하여 $x>-3$, $x<6$이므로
$-3<x<6$ …… ㉠
$\log_2(3+x)-\log_{\frac{1}{2}}(6-x)>3$에서
$\log_2(3+x)+\log_2(6-x)>\log_2 8$
$\log_2\{(3+x)(6-x)\}>\log_2 8$
밑 2는 1보다 크므로
$(3+x)(6-x)>8$, $-x^2+3x+18>8$, $x^2-3x-10<0$
$(x+2)(x-5)<0$
$-2<x<5$ …… ㉡
따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4$이고, 그 합은
$-1+0+1+2+3+4=9$

답 9

24

구의 중심을 C라 하면 C$(1, -2, 2)$이고, $(1, -2, 2)$는 주어진 직선 위의 점이므로 직선은 구의 중심을 지난다.
즉, 선분 AB의 길이는 구의 지름의 길이와 같다.
구 위의 점 P$(2, -1, 4)$를 지나고 구에 접하는 평면은 $\overrightarrow{CP}$와 수직이므로 평면 α의 방정식은

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP}\cdot(x-2, y+1, z-4)&=(1, 1, 2)\cdot(x-2, y+1, z-4)\\&=x-2+y+1+2(z-4)=0\end{aligned}$$

즉, $x+y+2z=9$
직선의 방향벡터는 $\vec{u}=(2, -1, 1)$, 평면의 법선벡터는 $\vec{n}=(1, 1, 2)$이므로 직선과 평면이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}=\dfrac{2-1+2}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

이므로 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영의 길이

$l=2\sqrt{6}\times\cos\theta=2\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{2}$이므로 $l^2=18$

답 18

25

$\cos^2 x-\sin^2 2x=0$에서
$(\cos x+\sin 2x)(\cos x-\sin 2x)=0$

(i) $\cos x=-\sin 2x$일 때

$\sin 2x+\cos x=0$

$\sin(x+x)+\cos x=0$

$\sin x\cos x+\cos x\sin x+\cos x=0$

$2\sin x\cos x+\cos x=0$

$\cos x(2\sin x+1)=0$

$\cos x=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

$\sin x=-\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(ii) $\cos x=\sin 2x$일 때

$\sin 2x-\cos x=0$

$\sin(x+x)-\cos x=0$

$\sin x\cos x+\cos x\sin x-\cos x=0$

$2\sin x\cos x-\cos x=0$

$\cos x(2\sin x-1)=0$

$\cos x=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

$\sin x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

(i), (ii)에서 모든 해는 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$이므로 합은 6π이다.

따라서 $\frac{S}{\pi}=\frac{6\pi}{\pi}=6$

답 6

다른 풀이

$\sin 2x=\sin(x+x)=2\sin x\cos x$이므로

$$\begin{aligned}\cos^2 x-\sin^2 2x&=\cos^2 x-4\sin^2 x\cos^2 x\\&=\cos^2 x(1-4\sin^2 x)\\&=\cos^2 x(1-2\sin x)(1+2\sin x)\end{aligned}$$

에서 $\cos x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=-\frac{1}{2}$

$\cos x=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

$\sin x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

$\sin x=-\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

즉, 모든 해는 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$이므로 합은 6π이다.

따라서 $\frac{S}{\pi}=\frac{6\pi}{\pi}=6$

26

학생 16명 중 임의로 동시에 선택한 3명이 모두 같은 학년인 사건을 A, 모두 1학년인 사건을 B, 모두 2학년인 사건을 C라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(C|A)$이다.

학생 16명 중 임의로 동시에 3명의 학생을 선택하는 경우의 수는

${}_{16}\mathrm{C}_3$

1학년 학생 7명 중 임의로 동시에 3명의 학생을 선택하는 경우의 수는

${}_{7}\mathrm{C}_3$

2학년 학생 9명 중 임의로 동시에 3명의 학생을 선택하는 경우의 수는

${}_{9}\mathrm{C}_3$

이므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_{7}\mathrm{C}_3}{{}_{16}\mathrm{C}_3}=\frac{\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}}{\frac{16\times15\times14}{3\times2\times1}}=\frac{1}{16}$$

$$\mathrm{P}(C)=\frac{{}_{9}\mathrm{C}_3}{{}_{16}\mathrm{C}_3}=\frac{\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}}{\frac{16\times15\times14}{3\times2\times1}}=\frac{3}{20}$$

이때

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B\cup C)=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)=\frac{1}{16}+\frac{3}{20}=\frac{17}{80}$$

이므로

$$\mathrm{P}(C|A)=\frac{\mathrm{P}(C\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(C)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{17}{80}}=\frac{12}{17}$$

따라서 $p=17$, $q=12$이므로

$p+q=17+12=29$

답 29

27

$100a+10b+c=9(11a+b)+a+b+c$에서 $9(11a+b)$는 9의 배수이므로 $a+b+c$도 9의 배수이다.

(i) $a+b+c=9$인 경우

구하는 순서쌍의 개수는 자연수 9의 분할 중 3개의 자연수의 합으로 이루어진 분할의 수 $P(9, 3)$과 같다.

$$\begin{aligned}9&=7+1+1\\&=6+2+1\\&=5+3+1\\&=5+2+2\\&=4+4+1\\&=4+3+2\\&=3+3+3\end{aligned}$$

으로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 7이다.

(ii) $a+b+c=18$인 경우

$$\begin{aligned}18&=9+8+1\\&=9+7+2\\&=9+6+3\\&=9+5+4\\&=8+8+2\\&=8+7+3\\&=8+6+4\\&=8+5+5\\&=7+7+4\\&=7+6+5\\&=6+6+6\end{aligned}$$

으로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 11이다.

(iii) $a+b+c=27$인 경우

$27=9+9+9$

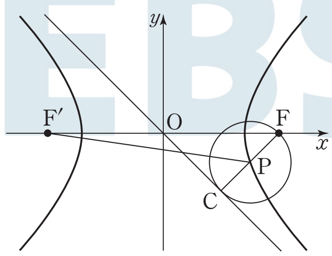
로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 1이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 19이다.

답 19

28

쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$의 기울기가 음수인 점근선은 $y=-x$이므로 쌍곡선 위의 점 P에서 점근선까지의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.



점 P의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{|a+b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|a+b|}{\sqrt{2}}=r$ …… ㉠

쌍곡선의 정의에서 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2\sqrt{2}$이고, $\overline{\mathrm{PF}}=r$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=r+2\sqrt{2}$

쌍곡선의 방정식에서 $c^2=2+2$이므로 $c=2$이다.

$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{(a-2)^2+b^2}=r$, $\overline{\mathrm{PF'}}=\sqrt{\{a-(-2)\}^2+b^2}=r+2\sqrt{2}$

두 식을 각각 제곱하여 정리하면 $2a=\sqrt{2}r+2$ …… ㉡

점 $\mathrm{P}(a, b)$는 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{a^2}{2}-\frac{b^2}{2}=1$에서 $a^2-b^2=2$ …… ㉢

㉠에서 $a+b>0$이므로 $a+b=\sqrt{2}r$ …… ㉣

㉢에서 $(a-b)(a+b)=2$이므로 $a-b=\frac{\sqrt{2}}{r}$ …… ㉤

㉣+㉤을 하면 $2a=\sqrt{2}r+\frac{\sqrt{2}}{r}$이므로 ㉡에서

$\sqrt{2}r+\frac{\sqrt{2}}{r}=\sqrt{2}r+2$, $\frac{\sqrt{2}}{r}=2$, $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $50r^2=50\times\frac{1}{2}=25$

답 25

29

$f(x)=\frac{2x^2}{x^2+3}$에서

$f'(x)=\frac{4x(x^2+3)-2x^2\times 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{12x}{(x^2+3)^2}$

점 $\mathrm{P}(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{12t}{(t^2+3)^2}$이므로

점 P를 지나고 점 P에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$y-\frac{2t^2}{t^2+3}=-\frac{(t^2+3)^2}{12t}(x-t)$

$y=0$일 때 $x=t+\frac{24t^3}{(t^2+3)^3}$

삼각형 PHQ의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QH}}\times\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\times\left|\left\{t+\frac{24t^3}{(t^2+3)^3}\right\}-t\right|\times\frac{2t^2}{t^2+3}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{24t^3}{(t^2+3)^3}\times\frac{2t^2}{t^2+3}=\frac{24t^5}{(t^2+3)^4}$

$S'(t)=24\times\frac{5t^4(t^2+3)^4-t^5\times 8t(t^2+3)^3}{(t^2+3)^8}$

$=\frac{24t^4(5t^2+15-8t^2)}{(t^2+3)^5}=\frac{72t^4(5-t^2)}{(t^2+3)^5}$

$t>0$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 조사하면 $S(t)$는 $t=\sqrt{5}$일 때

최댓값 $\frac{24\times(\sqrt{5})^5}{\{(\sqrt{5})^2+3\}^4}=\frac{75\sqrt{5}}{512}$를 갖는다.

따라서 $p=512$, $q=75$이므로

$p+q=512+75=587$

답 587

30

원점을 O라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(\overrightarrow{\mathrm{QO}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{QO}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})$

$=|\overrightarrow{\mathrm{QO}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{QO}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ …… ㉠

구 $x^2+y^2+z^2=1$과 xy평면이 만나서 생기는 원의 반지름의 길이가 1이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{QO}}|=1$

또한 평면 $x+2z-2=0$을 α라 하면 평면 α와 직선 OA는 수직이고, 점 P는 평면 α 위의 점이므로 삼각형 OAP는 직각삼각형이다.

이때 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$

원점 O와 평면 α 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{OA}}=\frac{|0+0-2|}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2=\frac{4}{5}$

㉠에서

$\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}=1+\overrightarrow{\mathrm{QO}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})+\frac{4}{5}$

$=\frac{9}{5}+\overrightarrow{\mathrm{QO}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})$ …… ㉡

선분 AP의 중점을 M이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

이므로 ㉡에서

$\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\frac{9}{5}+\overrightarrow{\mathrm{QO}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\frac{9}{5}+2\overrightarrow{\mathrm{QO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

$=\frac{9}{5}-2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ …… ㉢

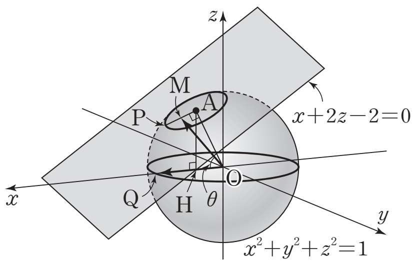
두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$이 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0\le\theta\le\pi)$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}$의 값은 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}$의 값이 가장 클 때 최소가 된다.

$4|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$

$=\frac{4}{5}+2\times\frac{4}{5}+1=\frac{17}{5}$

에서 $|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=\frac{\sqrt{85}}{10}$이고, $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}$의 값은 θ의 값이 가장 작을 때 최대가 된다. 두 점 P, Q가 모두 zx평면 위에 있고, x좌표가 모두 양수일 때 θ의 값이 가장 작고 이때 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(1, 0, 0)$이다.



평면 α는 직선 OA와 수직이므로 평면 α의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면 $\vec{n}=(1,\ 0,\ 2)$이고, $\vec{n}$은 직선 OA의 방향벡터이다.

이때 직선 OA의 방정식은

$x=\frac{z}{2},\ y=0$

이므로 점 A의 좌표를 실수 t에 대하여 $\mathrm{A}(t,\ 0,\ 2t)$로 놓을 수 있다.

점 A는 평면 α 위의 점이므로

$t+2\times 2t-2=0,\ 5t-2=0,\ t=\frac{2}{5}$

즉, 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}\left(\frac{2}{5},\ 0,\ \frac{4}{5}\right)$이다.

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $\mathrm{H}\left(\frac{2}{5},\ 0,\ 0\right)$이다.

$\angle\mathrm{HOA}=\theta',\ \angle\mathrm{AOM}=\theta''\ \left(0<\theta'<\frac{\pi}{2},\ 0<\theta''<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$$\cos\theta'=\frac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{OA}}}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\theta''=\frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\overline{\mathrm{OM}}}=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{85}}{10}}=\frac{4\sqrt{17}}{17}$$

이때

$$\sin\theta'=\sqrt{1-\cos^2\theta'}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin\theta''=\sqrt{1-\cos^2\theta''}=\sqrt{1-\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{17}$$

$$\begin{aligned}\cos(\theta'-\theta'')&=\cos\theta'\cos\theta''+\sin\theta'\sin\theta''\\&=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{4\sqrt{17}}{17}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{17}}{17}=\frac{6\sqrt{85}}{85}\end{aligned}$$

㉢에서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}&=\frac{9}{5}-2\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\&=\frac{9}{5}-2\times|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|\cos\theta\\&\geq\frac{9}{5}-2\times|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|\cos(\theta'-\theta'')\\&=\frac{9}{5}-2\times1\times\frac{\sqrt{85}}{10}\times\frac{6\sqrt{85}}{85}\\&=\frac{9}{5}-\frac{6}{5}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

따라서 $m=\frac{3}{5}$이므로 $50m=50\times\frac{3}{5}=30$

답 30

실전 모의고사 5회

본문 186~192쪽

01 ⑤	02 ③	03 ④	04 ①	05 ⑤
06 ①	07 ①	08 ②	09 ⑤	10 ④
11 ②	12 ④	13 ②	14 ③	15 ⑤
16 ③	17 ④	18 ②	19 ④	20 ⑤
21 ③	22 35	23 15	24 2	25 18
26 15	27 30	28 65	29 48	30 4

01

$\vec{a}=(1,\ 2),\ \vec{b}=(-3,\ k)$에서

$\vec{a}-\vec{b}=(1,\ 2)-(-3,\ k)=(4,\ 2-k)$

벡터 $\vec{a}-\vec{b}$의 모든 성분의 합이 1이므로

$4+(2-k)=1$

따라서 $k=5$

답 ⑤

02

$8^x=(2^3)^x=2^{3x}=2^1$에서 $3x=1$

따라서 $x=\frac{1}{3}$

답 ③

03

점 P의 z좌표는 $\frac{1\times a-2\times 2}{1-2}=4-a$

점 P가 xy평면 위에 있으므로 $4-a=0$

따라서 $a=4$

답 ④

04

$(x+a)^8$의 전개식의 일반항은 ${}_8\mathrm{C}_r x^r a^{8-r}$이다.

x^5의 계수는 $r=5$일 때이므로

${}_8\mathrm{C}_5 a^3={}_8\mathrm{C}_3 a^3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}\times a^3=56a^3$

$56a^3=56$에서 $a^3-1=0,\ (a-1)(a^2+a+1)=0$

a는 실수이므로 $a=1$

답 ①

05

진수의 조건에서 $x+5>0,\ 4-x>0$이므로

$-5<x<4$ ······ ㉠

$\log_2(x+5)+\log_2(4-x)=\log_2(x+5)(4-x)>3$에서

$(x+5)(4-x)>8,\ -x^2-x+20>8$

$x^2+x-12<0$에서 $(x+4)(x-3)<0$

$-4<x<3$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $-4<x<3$이므로 정수 x는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$이고 그 개수는 6이다.

답 ⑤

06

$y=\cos^2 x+2\sin x+a$

$=1-\sin^2 x+2\sin x+a$

$=-(\sin x-1)^2+a+2$

$0\le x\le \pi$에서 $0\le \sin x\le 1$이므로 $\sin x=1$일 때 최댓값 $a+2$를 갖는다.

$\sin k=1$에서 $k=\frac{\pi}{2}$, $a+2=3$에서 $a=1$

따라서 $ak=1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

답 ①

07

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A^C)=\mathrm{P}(A\cap B)$에서 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$이고, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{3}{4}$에서

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{3}{4}$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

답 ①

08

두 초점이 F, F′이고, 장축의 길이가 10, 단축의 길이가 6이므로

$a^2=25$, $b^2=9$

즉, 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

두 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c=\sqrt{25-9}=4$이다.

원점 O와 타원 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OF}}=4$를 만족시키므로

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$에서 $9x^2+25y^2=225$ ⋯⋯ ㉠

$x^2+y^2=16$에서 $9x^2+9y^2=144$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $y^2=\frac{81}{16}$이므로 $|y|=\frac{9}{4}$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}=|y|=\frac{9}{4}$이므로

삼각형 PFF′의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 8\times\frac{9}{4}=9$

답 ②

09

$f(x)=(x+a)\ln x$라 하면

$f'(x)=\ln x+(x+a)\times\frac{1}{x}=\ln x+1+\frac{a}{x}$

$f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=a$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$는 $x=a$에서 변곡점을 갖는다.

즉, $a=e^2$

$f(x)=(x+e^2)\ln x$이므로

$f(e^2)=(e^2+e^2)\ln e^2$

$=2e^2\times 2$

$=4e^2$

따라서 $b=4e^2$이므로

$a+b=e^2+4e^2=5e^2$

답 ⑤

10

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따른다고 하면

$\mathrm{E}(3X-1)=3\mathrm{E}(X)-1=5$에서

$\mathrm{E}(X)=np=2$ ⋯⋯ ㉠

$\mathrm{V}(3X-1)=9\mathrm{V}(X)=12$에서

$\mathrm{V}(X)=np(1-p)=\frac{4}{3}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $1-p=\frac{2}{3}$, $p=\frac{1}{3}$이므로 ㉠에서 $n=6$

따라서 $\mathrm{P}(X=2)={}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{6\times5}{2\times1}\times\frac{2^4}{3^6}=\frac{80}{243}$

답 ④

11

$f(x)=e^{x-1}\ln x+2x$라 하면

$f'(x)=e^{x-1}\ln x+\frac{e^{x-1}}{x}+2$

점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=e^0\ln 1+\frac{e^0}{1}+2=3$이므로

접선의 방정식은

$y=3(x-1)+2=3x-1$

따라서 $a=3$, $b=-1$이므로

$ab=-3$

답 ②

12

주머니 A와 B에서 임의로 한 개씩 공을 꺼내는 전체 경우의 수는

$4\times4=16$

주머니 A에서 꺼낸 공에 적힌 수가 주머니 B에서 꺼낸 공에 적힌 수의 약수인 경우를 다음과 같이 나누어 생각하자.

(i) 주머니 A에서 1 또는 2가 적힌 공을 꺼낸 경우

1과 2는 모두 2, 4, 6, 8의 약수이므로 경우의 수는 $4+4=8$

(ii) 주머니 A에서 3이 적힌 공을 꺼낸 경우

3은 6의 약수이므로 경우의 수는 1

(iii) 주머니 A에서 4가 적힌 공을 꺼낸 경우

4는 4, 8의 약수이므로 경우의 수는 2

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\frac{8+1+2}{16}=\frac{11}{16}$

답 ④

13

$xe^{x^2-1}+y^3-2=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$e^{x^2-1}+xe^{x^2-1}\times 2x+3y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{e^{x^2-1}(1+2x^2)}{3y^2}\ (\text{단, } y\neq 0)$$

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y=-\frac{1\times 3}{3}(x-1)+1$, 즉 $y=-x+2$이므로 x절편이 2, y절편이 2

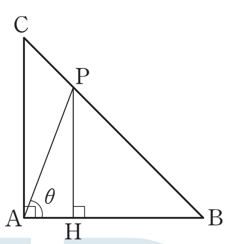
이다. 따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$$

답 ②

14

점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{PA}=x$라 하면 삼각형 AHP에서

$\overline{AH}=x\cos\theta$, $\overline{PH}=x\sin\theta$

삼각형 HBP와 삼각형 ABC는 서로 닮은 도형이므로 $\overline{HB}=\overline{HP}$

$\overline{HB}=\overline{AB}-\overline{AH}=1-x\cos\theta$이므로

$1-x\cos\theta=x\sin\theta$, $x(\sin\theta+\cos\theta)=1$

$$x=\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}=f(\theta)$$

$$f'(\theta)=\frac{-(\cos\theta-\sin\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}\text{이므로}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{2(1-\sqrt{3})}{4+2\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=5-3\sqrt{3}$$

답 ③

15

같은 종류의 공 n개를 서로 다른 세 상자에 나누어 담는 전체 경우의 수는 $\boxed{{}_3\mathrm{H}_n}$이고, 정수 $k\ (0\le k\le n)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{{}_2\mathrm{H}_{n-k}}{{}_3\mathrm{H}_n}=\frac{{}_{n-k+1}\mathrm{C}_{n-k}}{{}_{n+2}\mathrm{C}_n}$$

$$=\frac{{}_{n-k+1}\mathrm{C}_1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}=\frac{2n+\boxed{2-2k}}{(n+2)(n+1)}$$

이다. 따라서

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{n}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}=\sum_{k=0}^{n}\left\{k\times\frac{2n+\boxed{2-2k}}{(n+2)(n+1)}\right\}$$

$$=\frac{2}{(n+2)(n+1)}\sum_{k=0}^{n}(nk+k-k^2)$$

$$=\frac{2}{(n+2)(n+1)}\left\{(n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$$

$$=\boxed{\frac{n}{3}}$$

이다.

따라서 $f(n)={}_3\mathrm{H}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_n$, $g(k)=2-2k$, $h(n)=\frac{n}{3}$이므로

$$f(6)+g(3)+h(15)={}_8\mathrm{C}_6+(2-6)+\frac{15}{3}$$

$$=28-4+5=29$$

답 ⑤

16

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{n}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{n}\right)\sin\left(\frac{2k\pi}{2n}\right)\frac{2}{n}$$

$$=2\int_0^2 f(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때

$$\int_0^2 f(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

$$=\int_0^1 f(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx+\int_1^2 f(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

$$=\int_0^1 \sqrt{x}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx+\int_1^2 (2-\sqrt{2-x})\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

$t=2-x$라 하면 $\frac{dt}{dx}=-1$이고

$x=1$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=0$이므로

$$\int_1^2 (2-\sqrt{2-x})\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dt$$

$$=-\int_1^0 (2-\sqrt{t})\sin\left\{\frac{\pi}{2}(2-t)\right\}dt$$

$$=\int_0^1 (2-\sqrt{t})\sin\left(\pi-\frac{\pi}{2}t\right)dt$$

$$=\int_0^1 (2-\sqrt{t})\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt$$

$$=\int_0^1 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt-\int_0^1 \sqrt{t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{n}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=2\int_0^1 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt$$

$$=4\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt$$

$$=4\times\left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]_0^1$$

$$=\frac{8}{\pi}$$

답 ③

17

$10=10\times1\times1\times1\times1=5\times2\times1\times1\times1$이므로 조건 (가)의

$f(1)f(2)f(3)f(4)f(5)=10$을 만족시키려면

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값 중에서 10이 1개, 1이 4개이거나 5가 1개, 2가 1개, 1이 3개이어야 한다.

즉, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 결정하는 경우의 수는

$\frac{5!}{4!}+\frac{5!}{3!}=5+20=25$

조건 (나)의 $f(6)<f(7)<5\le f(8)\le f(9)\le f(10)$을 만족시키려면 $f(6)$, $f(7)$의 값은 1, 2, 3, 4 중 서로 다른 2개를 택하여 작은 값을 $f(6)$, 큰 값을 $f(7)$에 대응시키고, $f(8)$, $f(9)$, $f(10)$의 값은 5, 6, 7, 8, 9, 10 중 중복을 허락하여 3개를 택한 후 크지 않은 것부터 크기 순으로 나열하여 $f(8)$, $f(9)$, $f(10)$의 값에 대응시키면 되므로 $f(6)$, $f(7)$, $f(8)$, $f(9)$, $f(10)$의 값을 결정하는 경우의 수는

$$
\begin{aligned}
{}_4C_2\times{}_6H_3&=\frac{4\times3}{2\times1}\times{}_{6+3-1}C_3\\
&=6\times{}_8C_3\\
&=6\times\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}\\
&=336
\end{aligned}
$$

따라서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$25\times336=8400$

답 ④

18

$x=3\cos 2t+2$, $y=3\sin 2t+1$에서

$(x-2)^2+(y-1)^2=9\cos^2 2t+9\sin^2 2t=9$

이므로 점 P는 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=9\ (y\ge1)$ 위의 점이다.

직선 PQ의 방정식은

$$
\begin{aligned}
y&=-\frac{1}{2}(x-3\cos 2t-2)+3\sin 2t+1\\
&=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\cos 2t+3\sin 2t+2
\end{aligned}
$$

점 P가 원 위의 점이므로 직선 PQ가 점 (2, 1)을 지날 때 선분 PQ의 길이가 최소가 된다. 최소가 되는 시각 t의 값을 $\alpha\ (0\le2\alpha\le\pi)$라 하면

$1=-\frac{1}{2}\times2+\frac{3}{2}\cos 2\alpha+3\sin 2\alpha+2$

$\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha=0$

$\tan 2\alpha=-\frac{1}{2}$

이때 $0\le2\alpha\le\pi$이므로

$\sin 2\alpha=\frac{1}{\sqrt5}$, $\cos 2\alpha=-\frac{2}{\sqrt5}$

점 Q가 두 직선 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\cos 2t+3\sin 2t+2$와 $y=2x+5$의 교점이므로 점 Q의 좌표는

$x=\frac{3}{5}\cos 2t+\frac{6}{5}\sin 2t-\frac{6}{5}$

$y=\frac{6}{5}\cos 2t+\frac{12}{5}\sin 2t+\frac{13}{5}$

t에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dt}=-\frac{6}{5}\sin 2t+\frac{12}{5}\cos 2t$

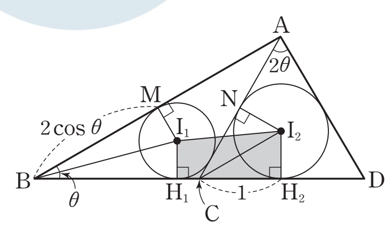
$\frac{dy}{dt}=-\frac{12}{5}\sin 2t+\frac{24}{5}\cos 2t$

따라서 선분 PQ의 길이가 최소일 때 점 Q의 속력은

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\\
&=\sqrt{\left(-\frac{6}{5}\sin 2\alpha+\frac{12}{5}\cos 2\alpha\right)^2+\left(-\frac{12}{5}\sin 2\alpha+\frac{24}{5}\cos 2\alpha\right)^2}\\
&=\sqrt{\left(-\frac{6}{\sqrt5}\right)^2+\left(-\frac{12}{\sqrt5}\right)^2}\\
&=6
\end{aligned}
$$

답 ②

19



삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 $r_1(\theta)$, 삼각형 ACD의 내접원의 반지름의 길이를 $r_2(\theta)$라 하자.

선분 AB의 중점을 M이라 하면 삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로

$\overline{BM}=2\cos\theta$이고 $\angle MBI_1=\frac{\theta}{2}$이다.

따라서 $r_1(\theta)=\overline{MI_1}=2\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}$

$\angle CAD=\angle ACD=2\theta$이고 $\overline{CA}=2$이므로 선분 CA의 중점을 N이라 하면 $\overline{CN}=1$, $\angle I_2CN=\frac{2\theta}{2}=\theta$이다.

따라서 $r_2(\theta)=\overline{NI_2}=\tan\theta$이고

$\overline{I_1H_1}=r_1(\theta)=2\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}$, $\overline{I_2H_2}=r_2(\theta)=\tan\theta$이다.

한편, $\overline{H_1C}=\overline{BC}-\overline{BH_1}=\overline{BC}-\overline{BM}=2-2\cos\theta$이고,

$\overline{CH_2}=\overline{CN}=1$이므로 $\overline{H_1H_2}=\overline{H_1C}+\overline{CH_2}=3-2\cos\theta$이다.

따라서

$$
\begin{aligned}
S(\theta)&=\frac{1}{2}\times(\overline{I_1H_1}+\overline{I_2H_2})\times\overline{H_1H_2}\\
&=\frac{1}{2}\times\left(2\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}+\tan\theta\right)\times(3-2\cos\theta)
\end{aligned}
$$

이므로

$$
\begin{aligned}
\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(2\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}+\tan\theta\right)\times(3-2\cos\theta)}{2\theta}\\
&=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}+\tan\theta}{2\theta}\times\lim_{\theta\to0+}(3-2\cos\theta)\\
&=\left(\lim_{\theta\to0+}\cos\theta\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\theta}+\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta}{2\theta}\right)\times1\\
&=\left(1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\times1\\
&=1
\end{aligned}
$$

답 ④

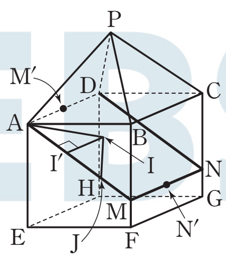
20

두 선분 AD, MN의 중점을 각각 M′, N′이라 하자.

두 점 P, B에서 평면 AMND에 내린 수선의 발을 각각 I, J라 하면 삼각형 PAB의 평면 AMND 위로의 정사영은 IAJ이고 점 I는 선분 M′N′ 위에 있다.

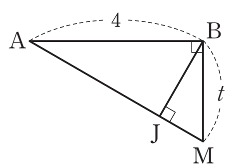
점 I에서 선분 AM에 내린 수선의 발을 I′이라 하면

$\overline{\mathrm{II'}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AD}}=2$



삼각형 ABM에서 $\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{4^2+t^2}$이고 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AJ}}\times\overline{\mathrm{AM}}$이므로

$4^2=\overline{\mathrm{AJ}}\times\sqrt{16+t^2}$



즉, $\overline{\mathrm{AJ}}=\frac{16}{\sqrt{16+t^2}}$이므로 삼각형 IAJ의 넓이 $f(t)$는

$f(t)=\frac{1}{2}\times2\times\frac{16}{\sqrt{16+t^2}}=\frac{16}{\sqrt{16+t^2}}$

삼각형 PAB의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=4\sqrt{3}$이므로

$4\sqrt{3}\cos\theta=\frac{16}{\sqrt{16+t^2}}$에서 $\cos\theta=\frac{4}{\sqrt{48+3t^2}}$

ㄱ. $f(2)=\frac{16}{\sqrt{16+2^2}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$ (참)

ㄴ. $f(t)=\frac{16}{\sqrt{16+t^2}}$의 최댓값은 t^2이 최소일 때이므로 $t=0$일 때 최댓값은 4이다. (참)

ㄷ. $t=2$일 때, $\cos\theta=\frac{4}{\sqrt{48+12}}=\frac{2}{\sqrt{15}}=\frac{2\sqrt{15}}{15}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

21

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$이므로 $f'(t)\neq0$인 경우 점 $(t,\ f(t))$를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$, 즉 $g(t)=t+f'(t)f(t)$

만약 $f'(t)=0$인 경우 점 $(t,\ f(t))$를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은 $x=t$이므로 $g(t)=t$이다.

따라서 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$g(t)=t+f'(t)f(t)$ …… ㉠

이때 $f(t)$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수가 연속이므로 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 $g'(t)$가 존재하고 연속이다.

한편, $t\neq\frac{1}{2}$일 때, 두 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$과 $(t,\ g(t))$를 지나는 직선의 기울기가 $\{f(t)\}^2+2$이므로

$\frac{g(t)-\frac{1}{2}}{t-\frac{1}{2}}=\{f(t)\}^2+2$

$g(t)=[\{f(t)\}^2+2]\left(t-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $t+f'(t)f(t)=[\{f(t)\}^2+2]\left(t-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$

$f'(t)f(t)=[\{f(t)\}^2+2]\left(t-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-t\right)$

$=[\{f(t)\}^2+1]\left(t-\frac{1}{2}\right)$

$F(t)=\{f(t)\}^2$이라 하면 $F'(t)=2f(t)f'(t)$이므로

$\frac{1}{2}F'(t)=\{F(t)+1\}\left(t-\frac{1}{2}\right)$

$F'(t)=\{F(t)+1\}(2t-1)$

$\frac{F'(t)}{F(t)+1}=2t-1$

양변을 t에 대하여 적분하면

$\ln|F(t)+1|=t^2-t+C$ (단, C는 적분상수)

$F(t)>0$이므로 $F(t)=e^{t^2-t+C}-1$

$f(0)=2$에서 $F(0)=4$이므로 $C=\ln5$

즉, $F(t)=5e^{t^2-t}-1$ $\left(\text{단, } t\neq\frac{1}{2}\right)$

이때 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $F(x)=\{f(x)\}^2$도 실수 전체의 집합에서 연속이고

$F\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{t\to\frac{1}{2}}(5e^{t^2-t}-1)=5e^{-\frac{1}{4}}-1$

또한 $F'\left(\frac{1}{2}\right)=0$에서 $f\left(\frac{1}{2}\right)>0$이므로 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$

㉠에서 $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+f'\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

따라서

$g'\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{t\to\frac{1}{2}}\frac{g(t)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{t-\frac{1}{2}}$

$=\lim_{t\to\frac{1}{2}}\frac{g(t)-\frac{1}{2}}{t-\frac{1}{2}}$

$=\lim_{t\to\frac{1}{2}}[\{f(t)\}^2+2]=F\left(\frac{1}{2}\right)+2$

$=\left(5e^{-\frac{1}{4}}-1\right)+2$

$=5e^{-\frac{1}{4}}+1$

답 ③

22

${}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

답 35

23

$f(x)=e^{\sin x}$에서 $f'(x)=e^{\sin x}\cos x$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3e}}{2}$

따라서 $\frac{20}{e}\times\left\{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}^2=\frac{20}{e}\times\left(\frac{\sqrt{3e}}{2}\right)^2=\frac{20}{e}\times\frac{3e}{4}=15$

답 15

24

두 벡터 $\vec{a}+k\vec{b}$, $2\vec{a}-k\vec{b}$가 서로 수직이므로

$(\vec{a}+k\vec{b})\cdot(2\vec{a}-k\vec{b})=2|\vec{a}|^2+k\vec{a}\cdot\vec{b}-k^2|\vec{b}|^2$

$=2\times(\sqrt{3})^2+k-k^2\times(\sqrt{2})^2$

$=6+k-2k^2=0$

$(3+2k)(2-k)=0$

따라서 양수 k의 값은 2이다.

답 2

25

$\int_{-a}^{a} f(t)\cos t\,dt=k$라 하면

$\int_{-a}^{a} f(t)\cos t\,dt=\int_{-a}^{a}(\sin t+k)\cos t\,dt$

$=\int_{-a}^{a}\sin t\cos t\,dt+\int_{-a}^{a}k\cos t\,dt$

$=0+2k\Big[\sin t\Big]_0^a$

$=2k\sin a=k$

$k=0$이면 $f(a)=\sin a$에서 $0<\sin a\le 1$이므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

즉, $k\ne 0$이므로 $\sin a=\frac{1}{2}$에서 $a=\frac{\pi}{6}$

조건 (가)에서 $f(a)=\sin a+k=\frac{3}{2}$이므로 $k=1$

따라서 $f(x)=\sin x+1$이고, $5a=\frac{5}{6}\pi$이므로

$12f(5a)=12f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=12\left(\sin\frac{5}{6}\pi+1\right)=18$

답 18

26

파프리카 A, B 1개의 무게를 각각 확률변수 X, Y라 하면

X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m+40,\ (5\sigma)^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-m}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고,

$Z=\frac{Y-(m+40)}{5\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge m+5)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{m+5-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{5}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}(Y\le m+k)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{m+k-(m+40)}{5\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{k-40}{5\sigma}\right)$

$\mathrm{P}(X\ge m+5)=\mathrm{P}(Y\le m+k)$이므로

$\frac{5}{\sigma}=\frac{40-k}{5\sigma}$, 즉, $25=40-k$

따라서 $k=15$

답 15

27

$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{2}{3}x+y\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{3y}$ (단, $y\ne 0$)

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$y=-\frac{2a}{3b}(x-a)+b$

즉, A의 좌표는 $\left(0,\ \frac{2a^2}{3b}+b\right)$

이때 점 P는 타원 위의 점이므로

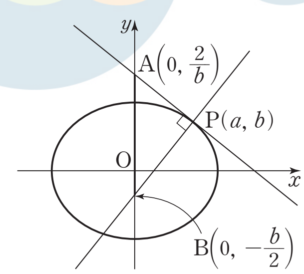
$\frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{2}=1$, $a^2=3\left(1-\frac{b^2}{2}\right)$

따라서 $\mathrm{A}\left(0,\ \frac{2}{b}\right)$ …… ㉠

점 P를 지나고 접선과 수직인 직선의 방정식은

$y=\frac{3b}{2a}(x-a)+b$

즉, B의 좌표는 $\left(0,\ -\frac{b}{2}\right)$ …… ㉡



㉠, ㉡에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\left|\frac{2}{b}+\frac{b}{2}\right|$

$0<b<\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{2}{b}+\frac{b}{2}=\frac{5}{2}$에서 $b=1$

이때 $\frac{a^2}{3}+\frac{1}{2}=1$이므로 $a^2=\frac{3}{2}$

따라서 $12(a^2+b^2)=12\left(\frac{3}{2}+1\right)=30$

답 30

28

i^a, i^b이 모두 실수이려면 a, b가 모두 짝수이어야 하고, $i^a=i^b$이려면 $a-b=4m$ (m은 정수)이어야 한다.

a, b가 모두 짝수인 사건을 X, $a-b=4m$ (m은 정수)인 사건을 Y라 하면 $\mathrm{P}(Y|X)=\frac{8}{15}$인 자연수 n의 값을 구해야 한다.

(i) 먼저 $n=4k$ (k는 자연수)인 경우를 살펴보자.

$a+b$의 값에 따라 a, b가 모두 짝수인 (a, b) 및 그 중에서 $a-b=4m$ (m은 정수)인 (a, b)를 나열하면 다음과 같다.

$a+b$의 값	a, b가 모두 짝수인 (a, b)	a, b가 모두 짝수이고 $a-b=4m$인 (a, b)
$a+b=2$	없음	없음
$a+b=4$	$(2, 2)$	$(2, 2)$
$a+b=6$	$(2, 4)$, $(4, 2)$	없음
$a+b=8$	$(2, 6)$, $(4, 4)$, $(6, 2)$	$(2, 6)$, $(4, 4)$, $(6, 2)$
$a+b=10$	$(2, 8)$, $(4, 6)$, $(6, 4)$, $(8, 2)$	없음
$a+b=12$	$(2, 10)$, $(4, 8)$, $(6, 6)$, $(8, 4)$, $(10, 2)$	$(2, 10)$, $(4, 8)$, $(6, 6)$, $(8, 4)$, $(10, 2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a+b=4k$ $(=n)$	$(2, 4k-2)$, $\cdots$, $(4k-2, 2)$	$(2, 4k-2)$, $\cdots$, $(4k-2, 2)$

즉, $n=4k$일 때

$$n(X)=1+2+3+\cdots+(2k-1)=\frac{2k\times(2k-1)}{2}=k(2k-1)$$

이고

$$n(X\cap Y)=1+3+5+\cdots+(2k-1)=\frac{k\times\{2+2(k-1)\}}{2}=k^2$$

따라서

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{n(X\cap Y)}{n(X)}=\frac{k^2}{k(2k-1)}=\frac{k}{2k-1}$$

$\frac{k}{2k-1}=\frac{8}{15}$에서 $k=8$이다.

즉, $n=4\times8=32$일 때 $\mathrm{P}(Y|X)=\frac{8}{15}$이다.

(ii) $n=4k+1$일 때는 $n=4k$인 경우와 $n(X)$, $n(X\cap Y)$의 값이 모두 같으므로 $n=4k$일 때의 확률과 같다.

따라서 $n=33$일 때도 $\mathrm{P}(Y|X)=\frac{8}{15}$이다.

(iii) $n=4k+2$일 때는 $n=4k$인 경우와 비교하였을 때, $n(X)$의 값은 $a+b=4k+2$일 때의 $2k$만큼 증가하지만 $n(X\cap Y)$의 값은 변하지 않는다.

따라서 $\mathrm{P}(Y|X)=\frac{k^2}{k(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$

$\frac{k}{2k+1}=\frac{8}{15}$을 만족시키는 자연수 k의 값은 존재하지 않으므로

$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{8}{15}$인 자연수 n은 존재하지 않는다.

(iv) $n=4k+3$일 때는 $n=4k+2$일 때와 $n(X)$, $n(X\cap Y)$의 값이 모두 같으므로 $n=4k+2$일 때의 확률과 같다.

따라서 $\mathrm{P}(Y|X)=\frac{8}{15}$인 자연수 n은 존재하지 않는다.

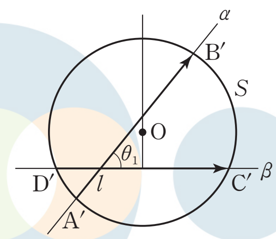
(i)~(iv)에서 $\mathrm{P}(Y|X)=\frac{8}{15}$인 자연수 n의 값의 합은

$32+33=65$

답 65

29

원 C_1 위의 두 점 A, B와 원 C_2 위의 두 점 C, D에 대하여 직선 l과 평면 ACBD가 수직으로 만나고 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}$가 최대인 경우는 직선 l과 수직인 평면 ACBD가 구 S의 중심인 원점 O를 지나고 점 A, B, C, D가 그림과 같이 놓인 경우이다. 이때 최댓값은 $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{D'C'}}$의 값과 같다.



$$\overrightarrow{\mathrm{A'X}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{D'C'}}=(\overrightarrow{\mathrm{A'O}}+\overrightarrow{\mathrm{OX}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{D'C'}}=\overrightarrow{\mathrm{A'O}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{D'C'}}+\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{D'C'}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $\overrightarrow{\mathrm{A'O}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{D'C'}}$의 값은 일정하므로 $\overrightarrow{\mathrm{A'X}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{D'C'}}$의 값이 최대이려면 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{D'C'}}$의 값이 최대이어야 한다.

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$, $\overrightarrow{\mathrm{D'C'}}$이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{D'C'}}=|\overrightarrow{\mathrm{OX}}||\overrightarrow{\mathrm{D'C'}}|\cos\theta$이고 이 값의 최댓값은 $\theta=0$일 때이다.

$\theta=0$이 되는 점 X를 X′이라 하자.

평면 β와 구 S의 중심인 원점 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|1\times0+(-1)\times0+2\times0-6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

이므로 원 C_2의 반지름의 길이

$r=\sqrt{6^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{30}$

즉, $|\overrightarrow{\mathrm{D'C'}}|=2\sqrt{30}$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{OX'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{D'C'}}=|\overrightarrow{\mathrm{OX'}}||\overrightarrow{\mathrm{D'C'}}|=6\times2\sqrt{30}=12\sqrt{30} \quad \cdots\cdots ㉡$$

두 평면 α, β의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(2, 1, 1)$, $\overrightarrow{n_2}=(1, -1, 2)$

두 평면 α, β가 이루는 예각의 크기를 θ_1이라 하면

$$\cos\theta_1=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|2\times1+1\times(-1)+1\times2|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\times\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

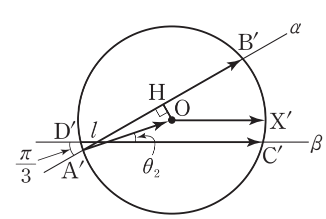
즉, $\theta_1=\frac{\pi}{3}$

한편, $|\overrightarrow{\mathrm{A'O}}|=6$, $|\overrightarrow{\mathrm{D'C'}}|=2\sqrt{30}$이고 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{A'O}}$, $\overrightarrow{\mathrm{D'C'}}$이 이루는 각의 크기를 θ_2라 하자.

원점 O에서 선분 A′B′에 내린 수선의 발을 H라 하자. 평면 α와 구 S의 중심인 원점 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{|2\times0+1\times0+1\times0-6|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\sqrt{6}\text{이므로}$$

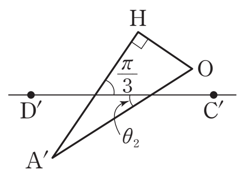
$\overline{\mathrm{A'H}}=\sqrt{6^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{30}$



삼각형 A′HO에서

$\cos(\angle \mathrm{HA'O})=\frac{\sqrt{30}}{6}$, $\sin(\angle \mathrm{HA'O})=\frac{\sqrt{6}}{6}$

다음 그림과 같이 $\theta_2=\frac{\pi}{3}-\angle \mathrm{HA'O}$이므로



$$\begin{aligned}\cos\theta_2&=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\angle \mathrm{HA'O}\right)\\&=\cos\frac{\pi}{3}\cos(\angle \mathrm{HA'O})+\sin\frac{\pi}{3}\sin(\angle \mathrm{HA'O})\\&=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{30}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{6}\\&=\frac{\sqrt{30}+3\sqrt{2}}{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{A'O}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{D'C'}}&=|\overrightarrow{\mathrm{A'O}}||\overrightarrow{\mathrm{D'C'}}|\cos\theta_2\\&=6\times2\sqrt{30}\times\frac{\sqrt{30}+3\sqrt{2}}{12}\\&=30+6\sqrt{15}\qquad\cdots\cdots ㉢\end{aligned}$$

㉠, ㉡, ㉢에서 $\overrightarrow{\mathrm{A'X}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{D'C'}}$의 최댓값은 $30+6\sqrt{15}+12\sqrt{30}$이므로

$a=30$, $b=6$, $c=12$

따라서 $a+b+c=30+6+12=48$

답 48

30

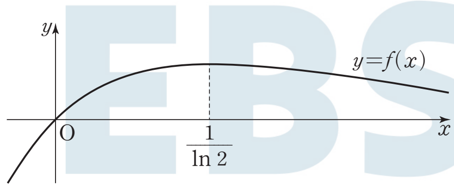
$f(x)=\frac{x}{2^x}=x\times2^{-x}$에서

$f'(x)=2^{-x}-x\times2^{-x}\ln 2=2^{-x}(1-x\ln 2)$

이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{1}{\ln 2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



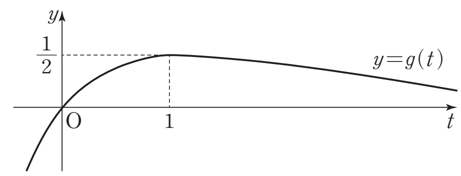
이때 닫힌 구간 $[t, t+1]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 x의 값이 $f(t)=f(t+1)$을 만족시키는 t의 값보다 작거나 같을 때 $f(t)$이고, 클 때 $f(t+1)$이다.

$t\times2^{-t}=(t+1)2^{-(t+1)}$에서 $2t=t+1$이므로 $t=1$

$$g(t)=\begin{cases}f(t) & (t\le1)\\ f(t+1) & (t>1)\end{cases}$$

이때 $g(1)=f(1)=\frac{1}{2}$이고, $f'(1)>0$, $f'(2)<0$이므로 함수 $g(t)$는 $t=1$일 때 미분가능하지 않다.

함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



그림에서

$$h(k)=\begin{cases}2 & (k\le0)\\ 3 & \left(0<k<\frac{1}{2}\right)\\ 1 & \left(k\ge\frac{1}{2}\right)\end{cases}$$

이므로 함수 $h(k)$가 불연속이 되는 실수 k의 값은 $\alpha=0$, $\beta=\frac{1}{2}$이다.

$h(\alpha)=2$, $h(\beta)=1$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-h(\beta)}^{h(\alpha)}g(t)dt&=\int_{-1}^{2}g(t)dt\\&=\int_{-1}^{1}f(t)dt+\int_{1}^{2}f(t+1)dt\\&=\int_{-1}^{1}(t\times2^{-t})dt+\int_{1}^{2}(t+1)2^{-(t+1)}dt\end{aligned}$$

이때 $\int_{1}^{2}(t+1)2^{-(t+1)}dt$에서 $t+1=x$라 하면 $\frac{dt}{dx}=1$이고,

$t=1$일 때 $x=2$, $t=2$일 때 $x=3$이므로

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}(t\times2^{-t})dt+\int_{1}^{2}(t+1)2^{-(t+1)}dt\\&=\int_{-1}^{1}(t\times2^{-t})dt+\int_{2}^{3}(x\times2^{-x})dx\\&=\left[-\frac{t\times2^{-t}}{\ln 2}\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\frac{2^{-t}}{\ln 2}dt+\left[-\frac{x\times2^{-x}}{\ln 2}\right]_{2}^{3}+\int_{2}^{3}\frac{2^{-x}}{\ln 2}dx\\&=\left(-\frac{2^{-1}}{\ln 2}-\frac{2}{\ln 2}\right)+\left[-\frac{2^{-t}}{(\ln 2)^2}\right]_{-1}^{1}\\&\qquad+\left\{-\frac{3\times2^{-3}}{\ln 2}-\left(-\frac{2^{-1}}{\ln 2}\right)\right\}+\left[-\frac{2^{-x}}{(\ln 2)^2}\right]_{2}^{3}\\&=-\frac{5}{2\ln 2}+\left[-\frac{2^{-1}}{(\ln 2)^2}-\left\{-\frac{2}{(\ln 2)^2}\right\}\right]\\&\qquad+\frac{1}{8\ln 2}+\left[-\frac{2^{-3}}{(\ln 2)^2}-\left\{-\frac{2^{-2}}{(\ln 2)^2}\right\}\right]\\&=-\frac{19}{8\ln 2}+\frac{3}{2(\ln 2)^2}+\frac{1}{8(\ln 2)^2}\\&=-\frac{19}{8\ln 2}+\frac{13}{8(\ln 2)^2}\end{aligned}$$

$(\ln 2)^2\int_{-h(\beta)}^{h(\alpha)}g(t)dt=-\frac{19}{8}\ln 2+\frac{13}{8}$이므로

$p=-\frac{19}{8}$, $q=\frac{13}{8}$

따라서 $q-p=4$

답 4